جامعة العربي التبسي–تبسة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي

مطبوعة لمادة الرياضيات

دروس وتطبيقات

لطلبة السنة الأولىLMD

السداسي الثاني

من إعداد الأستاذ:

د. حناشي فارح

2022-2021

مقدمة: تم التطرق في هذه المطبوعة إلى مجموعة من الدروس المتطابقة مع البرنامج الوزاري، ركزنا فيها على بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بمادة الرياضيات للسداسي الثاني التي يحتاجها طالب السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير في مساره التعليمي والتي لها ارتباط وثيق بمواد أخرى يدرسها. هذه الدروس مقسمة في شكل ثمانية محاور، في المحور الأول تناولنا مفاهيم خاصة بالفضاءات الشعاعية من خلال التطرق إلى تعاريف أهمها تعريف الفضاء الشعاعي و الفضاء الشعاعي الجزئي، الأساس، العائلة الحرة والمولدة لفضاء شعاعي، الجمع المباشر لفضاءات شعاعية و البعد لفضاء شعاعي وفضاء شعاعي جزئي. في المحور الثاني استعرضنا المفاهيم الأساسية للتطبيقات الخطية من خلال التذكير بجملة من التعاريف و الخواص لها، أهمها تعريف التطبيق الخطي و تركيب تطبيقات خطية و إيجاد نواة وصورة تطبيق خطي مع إعطاء أمثلة وتطبيقات مختلفة. في المحور الثالث تطرقنا إلى المصفوفات و العمليات عليها مع أمثلة وتطبيقات. في المحور الرابع تطرقنا إلى حل جمل معادلات خطية بطرق مختلفة أهمها طريقة كرامر، طريقة المقلوب، طريقة غوص في حالات مختلفة مرفقة بأمثلة وتطبيقات. المحور الخامس يتمحور حول القيم الذاتية و الأشعة الذاتية مع أمثلة و تمارين محلولة. المحور السادس يتمحور حول الدوال الأصلية وحساب التكامل مع أمثلة وتطبيقات. المحور السابع حول الدوال ذات عدة متغيرات، أبرزنا فيه التعريف لهذا النوع من الدوال وميدان التعريف والاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى والثانية لكل منها مع أمثلة وتطبيقات. في المحور الثامن تطرقنا إلى المعادلات التفاضلية العادية في حالات معينة مع أمثلة. أتبعنا كل محور بسلسلة من التطبيقات الغير محلولة حتى يتسنى للطالب حلها وترسيخ المفاهيم المدروسة.

محتوى المادة :

1– بنية الفضاء الشعاعي

2– التطبيقات الخطية

3– مفاهيم عامة حول المصفوفات

– العمليات الأساسية على المصفوفات

– رتبة المصفوفات وحساب المقلوب

4– حل جملة معادلات خطية

5– القيم الذاتية و الاشعة الذاتية

6– الدوال الأصلية وحساب التكامل

7– الدوال ذات عدة متغيرات

8– المعادلات التفاضلية العادية

المحور الأول:

بنية الفضاء الشعاعي

المحور الأول: بنية الفضاء الشعاعي

1.1 الفضاءات الشعاعي

تعريف: ليكن K حقلا تبديليا، نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين $(+)$ و $(\cdot)$

حيث: $\begin{aligned}(+): E\times E&\to E\\ (x,y)&\mapsto x+y\end{aligned}$ و $\begin{aligned}(\cdot): K\times E&\to E\\ (\lambda,x)&\mapsto \lambda\cdot x\end{aligned}$

أنها فضاء شعاعي على الحقل K (باختصار ف.ش على K) إذا تحقق مايلي:

$(E,+)$ زمرة تبديلية

العملية الخارجية $(\cdot)$ تحقق:

$$(1)\quad \forall\alpha\in K,\forall x,y\in E:\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

$$(2)\quad \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in E:\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

$$(3)\quad \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in E:\quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$(4)\quad \forall x\in E:\quad 1\cdot x=x$$

حيث: 1 هو عنصر الوحدة في K

تعريف: $(E,+)$ زمرة تبديلية إذا تحقق:

(العملية $(+)$ تجميعية) $\forall x,y,z\in E:\quad x+(y+z)=(x+y)+z$

يوجد في E عنصر حيادي نرمز له بـ o_E أو o بحيث:

$$\forall x\in E:\quad x+o_E=o_E+x=x$$

لكل عنصر $x\in E$ نظير $y\in E$ بالنسبة للعملية $+$ أي:

$$\forall x\in E,\exists z\in E:\quad x+z=z+x=o_E$$

العملية $+$ تبديلية أي: $\forall x\in E:\quad x+y=y+x$

عناصر ف.ش نسميها أشعة أما عناصر الحقل فنسميها سلميات.

مثال1:

$E=\mathbb{R}[X]$ مجموعة كثيرات الحدود ذات المتغير X والمعاملات في الحقل $\mathbb{R}$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ بالنسبة لجمع كثيرات الحدود والعملية الخارجية المعرفة بـ:

$$\lambda\in\mathbb{R},\ P\in\mathbb{R}[X]:\quad (\lambda P)(X)=\lambda P(X)$$

$E=\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ هو ف.ش على الحقل $K=\mathbb{R}$ حيث العمليتان:

من أجل $\lambda\in\mathbb{R}$ و $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E$:

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$ و $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.

إذا كان E و F ف.ش على نفس الحقل K فإن $E\times F$ ف.ش بالنسبة للعمليتين:

$x,x'\in E,\quad y,y'\in F,\quad \lambda\in K$ ،

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y');\qquad \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y).$$

2.1 الفضاء الشعاعي الجزئي

تعريف: ليكن E ف.ش على الحقل K، جزء غير خال V من E هو فضاء شعاعي جزئي من E (باختصار ف.ش.ج) إذا كان V له بنية ف.ش بمقصور عمليتي E عليه.

تعريف: لتكن F مجموعة جزئية من ف ش E.

نقول أن F ف.ش.ج من E إذا وفقط إذاكان:

$$\begin{cases} F\neq\varnothing, \\ \forall X,Y\in F: X+Y\in F, \\ \forall X\in F,\forall\alpha\in\mathbb{R}:\alpha X\in F. \end{cases}$$

ملاحظة: لإثبات أن F غير خالي نتحقق من أن $o_E\in F$.

قضية: ليكن $V\neq\phi$ جزءا من ف.ش E على الحقل K ، لدينا:

V ف.ش.ج من E إذا وفقط إذاكان:

$$\forall x,y\in V,\ \forall\lambda,\mu\in K:\ \lambda x+\mu y\in V\ .$$

مثال:

لدينا: $E = \mathbb{R}[X]$ ف.ش على الحقل $K = \mathbb{R}$.

$\mathscr{P}_n = \{P \in \mathbb{R}[X]: deg(P) \leq n\}$ مجموعة كثيرات الحدود من E التي درجتها على الأكثر n هي ف.ش.ج من E.

تمرين:

F مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ حيث:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 4y = 0\}$$

لنبين أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^2$.

الحل:

1- $F \neq \varnothing$ لأن $o_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$

لأن $3(0) - 4(0) = 0$

2- نبين أن: $\forall X, Y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha X + \beta Y \in F$

لدينا: $X = (x, y) / 3x - 4y = 0$

$$Y = (x', y') / 3x' - 4y' = 0$$

$$\alpha X + \beta Y = \alpha(x, y) + \beta(x', y')$$
$$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x', \beta y')$$
$$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

الآن نتأكد أن: $\alpha X + \beta Y \in F$

لدينا:

$$3(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y')$$
$$= \alpha(3x - 4y) + \beta(3x' - 4y')$$
$$= \alpha(0) + \beta(0) = 0$$

وبالتالي: $\alpha X + \beta Y \in F$

مما سبق نستنتج أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^2$.

<u>تمرين:</u>

F مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ حيث:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-y+z=0\}$$

لنبين أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^3$.

<u>الحل:</u>

3- $F\neq\varnothing$ لأن $o_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F$

لأن $2(0)-0+0=0$

4- <u>نبين أن:</u> $\forall X,Y\in F,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha X+\beta Y\in F$

لدينا: $X=(x,y,z)/2x-y+z=0$

$$Y=(x',y',z')/2x'-y'+z'=0$$

$$\begin{aligned}\alpha X+\beta Y&=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\\&=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')\\&=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')\end{aligned}$$

<u>الآن نتأكد أن:</u> $\alpha X+\beta Y\in F$

لدينا:

$$\begin{aligned}&2(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')\\&=\alpha(2x-y+z)+\beta(2x'-y'+z')\\&=\alpha(0)+\beta(0)=0\end{aligned}$$

وبالتالي: $\alpha X+\beta Y\in F$

مماسبق نستنتج أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^3$.

<u>ملاحظات:</u>

- تقاطع فضاءات شعاعية جزئية من E هو فضاء شعاعي جزئي.

- إتحاد فضاءات شعاعية جزئية من E ليس دائما فضاء شعاعي جزئي.

3.1 التركيب أو المزج الخطي لأشعة من فضاء شعاعي

تعريف: نقول عن شعاع v أنه تركيب خطي (مزج خطي) للأشعة $u_1,u_2,...,u_p$ **من** E إذا وجدت سلميات من $\mathbb{R}$ بحيث:

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_pu_p=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iu_i$$

مثال: في $\mathbb{R}^2$ الشعاع $v(2,4)$ هو مزج خطي للأشعة $u_1(5,-4),u_2(-2,3)$.

لأنه مثلا:

$v=2u_1+4u_2$ لأن $(2,4)=2(5,-4)+4(-2,3)$

مثال: في $\mathbb{R}[X]$، كثير الحدود X^2 هو مزج خطي لكثيرات الحدود $\left\{(X-1)^2, X-1,1\right\}$

لأن: $X^2=1+2(X-1)+(X-1)^2$ أي توجد سلميات حقيقية $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=1$

بحيث: $X^2=\alpha_1(1)+\alpha_2(X-1)+\alpha_3(X-1)^2$

تمرين: ليكن $E=\mathbb{R}^3$، والأشعة $u_1(-1,0,2),u_2(3,2,0)$.

1- أثبت أن: $v(5,6,8)$ هو تركيب خطي لـ u_1، u_2.

2- أثبت أن: $w(2,6,8)$ ليس تركيبا خطيا لـ u_1، u_2.

الحل:

1- حتى يكون $v(5,6,8)$ تركيبا خطيا لـ u_1، u_2، يجب أن توجد أعداد α_1، α_2 (مقادير سلمية) بحيث:

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

لدينا: $v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$ تعني $(5,6,8)=\alpha_1(-1,0,2)+\alpha_2(3,2,0)$

ومنه:

$$(5,6,8)=(-\alpha_1,0,2\alpha_1)+(3\alpha_2,2\alpha_2,0)$$
$$=(-\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_2,2\alpha_1)$$

وبالتالي:

$$\begin{cases}-\alpha_1+3\alpha_2=5\\ 2\alpha_2=6\\ 2\alpha_1=8\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}-\alpha_1+3\alpha_2=5\\ \alpha_2=3\\ \alpha_1=4\end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي α_1 ، α_2 الناتجتين في المعادلة الأولى نجد: $-4+3\times3=5$ **(محققة)**

إذن: الحل المشترك هو: $\alpha_1=4$ ، $\alpha_2=3$

مما سبق نستنتج أنه توجد $\alpha_1=4$ ، $\alpha_2=3$ بحيث:

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

إذن: v هو تركيب خطي لـ u_1 ، u_2 .

1- حتى يكون $w(2,6,8)$ تركيبا خطيا لـ u_1 ، u_2 ، يجب أن توجد أعداد α_1 ، α_2 (مقادير سلمية) بحيث:

$$w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

لدينا: $v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$ تعني $(2,6,8)=\alpha_1(-1,0,2)+\alpha_2(3,2,0)$

ومنه:

$$\begin{aligned}(2,6,8)&=(-\alpha_1,0,2\alpha_1)+(3\alpha_2,2\alpha_2,0)\\&=(-\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_2,2\alpha_1)\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases}-\alpha_1+3\alpha_2=2\\ 2\alpha_2=6\\ 2\alpha_1=8\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}-\alpha_1+3\alpha_2=2\\ \alpha_2=3\\ \alpha_1=4\end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي α_1 ، α_2 الناتجتين في المعادلة الأولى نجد:

$-4+3\times3=5\neq2$ **(محققة)**

إذن الجملة مستحيلة الحل وبالتالي لاتوجد α_1 ، α_2 بحيث:

$$w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

إذن: w ليس تركيبا خطيا لـ u_1 ، u_2.

4.1 العائلة الحرة (المستقلة خطيا)– المرتبطة خطيا

ليكن E ف ش على حقل K ، $S=\{u_1,u_2,...,u_p\}, p\in\mathbb{N}^*$

تعريف:

نقول أن العائلة S حرة أو أن الأشعة $u_1,u_2,...,u_p$ مستقلة خطيا إذا تحقق:

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\in K,$$
$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_pu_p=0_E\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_p=0$$

أي أن المعادلة لا تقبل حلا إلا الحل المعدوم $(0,0,...,0)$ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p)=(0,0,...,0)$

ملاحظة: إذا وجدت α_i غير معدومة بحيث $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_pu_p=0_E$ نقول أن S مرتبطة أو أن الأشعة $u_1,u_2,...,u_p$ مرتبطة خطيا.

أمثلة:

1- ليكن $E=\mathbb{R}^2$ ، $u_1(1,3),\ u_2(2,-1)$.

لدينا:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0_E\Rightarrow \alpha_1(1,3)+\alpha_2(2,-1)=0_{\mathbb{R}^2}$$
$$\Rightarrow(\alpha_1,3\alpha_1)+(2\alpha_2,-\alpha_2)=(0,0)$$
$$\Rightarrow(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1-\alpha_2)=(0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\3\alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}$$

بحل الجملة نجد $\alpha_1=\alpha_2=0$

إذن الشعاعان $u_1(1,3),u_2(2,-1)$ مستقلان خطيا ، نقول أيضا أن العائلة $S=\{u_1,u_2\}$ حرة.

2–ليكن $E=\mathbb{R}_2[x]$ فضاء كثيرات الحدود التي درجتها ≤ 2 ، وليكن

$$u_1=1,\ u_2=x,\ u_3=x^2$$

لدينا:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_E \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0_{\mathbb{R}},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

نعطي قيم إختيارية لـ x.

من أجل $x = 0$ نجد $\alpha_1 = 0$

من أجل $x = 1$ نجد $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ نجد $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

نحل الجملة: $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ نجد $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

إذن $u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2$ مستقلة خطيا، و العائلة $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ حرة.

ملاحظات:

-1 $S = \{u,\ v\}$ مقيدة $\Leftrightarrow$ مرتبطان خطيا

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* : (u = \lambda v) \vee (v = \lambda u)$

مثال: في $\mathbb{R}^2$ الشعاعان $v(2,4)$، $u(-2,-4)$ مرتبطان خطيا لأن $v = -u$

-2 $S = \{u_1, u_2, ..., u_p\},\ p \in \mathbb{N}^*$ مقيدة $\Leftrightarrow$ أحد عناصر S يكتب على شكل عبارة خطية في باقي العناصر.

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}^3$، $u(1,2,0),\ v(2,2,-1),\ w(5,6,-2)$.

لدينا: $S = \{u, v, w\}$ أي u, v, w مرتبطة خطيا لأن $w = u + 2v$.

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}_2[x]$، $u_1 = x,\ u_2 = x^2,\ u_3 = 3x^2 - 5x$.

لدينا: $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ أي u_1, u_2, u_3 مرتبطة خطيا لأن $u_3 = 3u_2 - 5u_1$

5.1 العائلة المولدة

ليكن E ف ش على حقل K، $S = \{u_1, u_2, ..., u_p\},\ p \in \mathbb{N}^*$ عائلة أشعة من E

تعريف:

نقول أن العائلة S تولد الفضاء E إذا كان كل عنصر (شعاع) من E يكتب على شكل عبارة خطية في أشعة S أي:

$$\forall v \in E : \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in K / v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p$$

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}^2$ و الشعاعان $u_1(1,2)$ ، $u_2(0,-1)$

لنبين أن: $S = \{u_1(1,2), u_2(0,-1)\}$ تولد E

الحل:

S تولد الفضاء E إذا تحقق: $\forall v \in E : \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} / v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

ليكن $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ كيفي.

لدينا: $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ تعني:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,-1) \\ &= (\alpha_1, 2\alpha_1) + (0, -\alpha_2) \\ &= (\alpha_1, 2\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

ومنه: $\begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = 2x - y \end{cases}$

إذن: $v = x(1,2) + (2x - y)(0,-1)$

وبالتالي: $S = \{u_1(1,2), u_2(0,-1)\}$ تولد E

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}_2[x]$ ، $u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2$

إن $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ تولد E لأن $\forall P \in E : \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} / P = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

لأن أي كثير حدود درجته ≤ 2 يكتب من الشكل $P = ax^2 + bx + c / a, b, c \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

كل عائلة تشمل عائلة مولدة فهي بدورها مولدة.

6.1 الأساس و البعد

تعريف:

نقول عن عائلة أشعة أنها أساس في الفضاء E إذا كانت حرة و مولدة في أن واحد.

ملاحظة: كل فضاء شعاعي غير معدوم يملك أساس.

تعريف: نسمي عدد عناصر أي أساس لفضاء شعاعي E بعد الفضاء الشعاعي E و نرمز له بـ $\dim E$.

مثال: في الأمثلة السابقة برهنا أن:

$S=\{u_1(1,2),u_2(0,-1)\}$ تولد E

بقي أن نبين أن $u_1(1,2),u_2(0,-1)$ مستقلين خطيا أي نبرهن أن:

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2=0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(1,2)+\alpha_2(0,-1)=0_{\mathbb{R}^2}\\
&\Rightarrow (\alpha_1,2\alpha_1)+(0,-\alpha_2)=(0,0)\\
&\Rightarrow (\alpha_1,2\alpha_1-\alpha_2)=(0,0)\\
&\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}
\end{aligned}$$

إذن $u_1(1,2),u_2(0,-1)$ مستقلين خطيا

مما سبق نستنتج أن: $S=\{u_1(1,2),u_2(0,-1)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

وبما أن عدد أشعة هذا الأساس هو 2 إذن: $\dim E=2$.

7.1 الجمع المباشر

ليكُن E_1, E_2 ف ش ج من ف ش E، نقول إن E هو جمع مباشر لـ E_1, E_2 إذا وفقط إذا كان:

- ✓ $E = E_1 + E_2$
- ✓ $E_1 \cap E_2 = 0_E$

ونكتب: $E = E_1 \oplus E_2$.

8.1 بعد فضاء شعاعي جزئي

إذا كان E ف ش ذو بعد منته و F ف ش ج من E فإن:

- ✓ E ذو بعد منته
- ✓ $\dim F \le \dim E$
- ✓ $\dim E = \dim F \Leftrightarrow E = F$

نظرية:

ليكُن E ف ش ذو بعد منته و F و G ف ش ج من E فإن:

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

ملاحظة: إذاكان: $E = F \oplus G$ فإن $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$

تمرين:

ليكُن E_1, E_2 فضائين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^2$ حيث:

$E_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ، $E_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$

لنبين أن: $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$.

الحل: لدينا:

$$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2 \\ E_1 \cap E_2 = o_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

– **إثبات أن:** $E_1+E_2=\mathbb{R}^2$.

من الواضح أن $E_1+E_2\subset\mathbb{R}^2$

بقي أن نبين أن: $\mathbb{R}^2\subset E_1+E_2$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا: $(x,y)=(x,0)+(0,y)$ ومنه: $\mathbb{R}^2\subset E_1+E_2$.

مما سبق نستنتج أن $\mathbb{R}^2\subset E_1+E_2$ و $\mathbb{R}^2\subset E_1+E_2$ إذن: $E_1+E_2=\mathbb{R}^2$.

– **إثبات أن:** $E_1\cap E_2=0_{\mathbb{R}^2}$.

لدينا: $E_1\cap E_2=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 / X\in E_1\wedge X\in E_2\}$

$E_1\cap E_2=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 / X=(x,0)\wedge X=(0,y)\}$

أي: $E_1\cap E_2=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=0\wedge x=0\}$

أي: $E_1\cap E_2=\{(0,0)\}=o_{\mathbb{R}^2}$ ومنه $E_1\cap E_2=o_{\mathbb{R}^2}$.

من (1) و (2) نستنتج أن: $E_1+E_2=\mathbb{R}^2$.

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

1- لتكن F مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ حيث:

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y+z=0\right\}$$

بين أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^3$.

2- لتكن G مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ حيث:

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$$

- أثبت أن G ف ش ج على $\mathbb{R}^3$.
- عين $\dim G$.

التمرين الثاني:

في كل حالة مما يلي، هل F ف ش ج على E.

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+3z=0\right\},\qquad E=\mathbb{R}^3.$$

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy=0\right\},\qquad E=\mathbb{R}^2.$$

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2[\mathbb{R}] / ad-bc=1\right\},\qquad E=M_2[\mathbb{R}].$$

التمرين الثالث:

لتكن F مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^4$ حيث:

$$F=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$$

- بين أن F ف ش ج على $\mathbb{R}^4$،
- عين أساس لـ F.

المحور الثاني:

التطبيقات الخطية

1.2 التطبيقات الخطية

ليكن E وF فضائين شعاعيين على نفس الحقل K.

تعريف: نقول عن تطبيق $f : E \to F$ إنه خطي (باختصار: ت.خ) إذا كان:

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K: f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

تعريف أخر: نقول عن تطبيق $f : E \to F$ إنه خطي إذا تحقق:

$$(1)\ \forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall x \in E, \forall \lambda \in K : f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

ملاحظة: مجموعة كل التطبيقات الخطية من E نحو F نرمز لها بـ $\mathscr{L}(E,F)$.

مثال: لنبرهن أن التطبيق f خطي:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, y - z)$$

البرهان:

لنتحقق من الشرط الأول:

$$\forall (x, y, z) \in E, \forall (x', y', z') \in E :$$
$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= (x + x', (y + y') - (z + z')) \\ &= (x + x', (y - z) + (y' - z')) \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

لنتحقق من الشرط الثاني:

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\forall\lambda\in\mathbb{R}:$$
$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)) &= f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \\ &=(\lambda x,\lambda y-\lambda z) \\ &=(\lambda x,\lambda(y-z)) \\ &=\lambda(x,(y-z)) \\ &=\lambda f(x,y,z) \end{aligned}$$

مما سبق نستنتج أن f خطي.

<u>مثال:</u> التطبيق:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x,y^2)$$

ليس خطيا.

<u>الإثبات</u>

لأنه من أجل $(x,y,z)=(1,2,3)$ لدينا $f(-(x,y,z))\neq -f(x,y,z)$ لأن $f(-(1,2,3))=(-1,4)$ و $-f(1,2,3)=(-1,-4)$

<u>نتيجة:</u>

ليكن $f:E\to F$ تطبيق خطي لدينا:

$$f(0_E)=0_F$$
$$\forall x\in E, f(-x)=-f(x)$$

ملاحظة: إذا كان $f(0_E)\neq 0_F$ فإن التطبيق $f:E\to F$ ليس خطيا.

<u>2.2 تركيب تطبيقين خطيين</u>

<u>نظرية:</u> ليكن E ، F ، G ثلاثة فضاءات شعاعية على نفس الحقل K

إذا كان $f:E\to F$ تطبيق خطي و $g:F\to G$ تطبيق خطي فإن: $g\circ f:E\to G$ تطبيق خطي.

__تعميم:__ تركيب التطبيقات الخطية هو تطبيق خطي.

__3.2 نواة وصورة تطبيق خطي__

ليكن E و F فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K و $f:E\to F$ تطبيق خطي

نسمي نواة f مجموعة العناصر x من E التي صورها معدومة ونرمز لها بالرمز $Ker(f)$ ونكتب: $Ker(f)=\{x\in E/f(x)=0_F\}$

__ملاحظة:__

$Ker(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من E

f متباين $\Leftrightarrow$ $Ker(f)=\{0_E\}$

__مثال:__ ليكن التطبيق الخطي:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=(y,-x,x)$$

عين $Ker(f)$ و ماذا تستنتج؟

__الحل:__

لدينا: $Ker(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(y,-x,x)=(0,0,0)\}$

$$(y,-x,x)=(0,0,0)\Rightarrow y=0,x=0$$

إذن: $Ker(f)=\{(0,0)\}=0_{\mathbb{R}^2}$

وبالتالي f متباين.

__مثال:__ ليكن التطبيق الخطي:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (y, z-x, y)$$

لنعين $Ker(f)$

الحل: لدينا: $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z-x, y) = (0,0,0)\}$

$$(y, z-x, y) = (0,0,0) \Rightarrow y = 0, z - x = 0$$
$$\Rightarrow y = 0, z = x$$
$$Ker(f) = \{(x,0,x) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1,0,1) \in \mathbb{R}^3\} = [(1,0,1)]$$

أي أن $Ker(f)$ هي المجموعة الجزئية المولدة من $\mathbb{R}^3$ بالشعاع $(1,0,1)$

وبالتالي f ليس متباين.

تعريف: نسمي صورة f مجموعة صور كل الأشعة x من E ونرمز لها بالرمز $\mathrm{Im}(f)$ ونكتب: $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) / x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\}$

ملاحظة:

- $\mathrm{Im}(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F
- f غامر $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = F$

مثال: ليكن التطبيق الخطي:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (2x - z, x, y - x)$$

عين $\mathrm{Im}(f)$ وهل f غامر

لدينا:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x,y,z) \in E : (x',y',z') = f(x,y)\}$$
$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x,y,z) \in E : (x',y',z') = (2x - z, x, y - x)\}$$

$$(x',y',z')=(2x-z,x,y-x)\Rightarrow\begin{cases}x'=2x-z\\y'=x\\z'=y-x\end{cases}$$

ومنه: $(x',y',z')=x(2,1,-1)+y(0,0,1)+z(-1,0,0)$

إذن: $\operatorname{Im}(f)=[(2,1,-1),(0,0,1),(-1,0,0)]$

إذن $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ وبالتالي f غامر

<u>مثال:</u> ليكن التطبيق الخطي:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^2\\(x,y,z)&\mapsto f(x,y,z)=(z,z+y)\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f)&=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2,\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x',y')=f(x,y,z)\}\\&=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2,\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x',y')=(z,z+y)\}\end{aligned}$$

لدينا:

$$(x',y')=(z,z+y)\Rightarrow\begin{cases}x'=z\\y'=z+y\end{cases}$$

ومنه: $(x',y')=y(0,1)+z(1,1)$

إذن: $\operatorname{Im}(f)=[(0,1),(1,1)]$

إذن $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ وبالتالي f غامر

4.2 رتبة تطبيق خطي

ليكن $f:E\to F$ تطبيقا خطيا

تعريف: نعرف رتبة f ونرمز لها بالرمز $rang(f)$ هي بعد صورته ونكتب:

$$rang(f)=\dim(\operatorname{Im} f)$$

<u>مثال:</u> ليكن التطبيق الخطي:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (z+y, 2z-y)$$

لنعين $rang(f)$.

لدينا:

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y') = f(x,y,z)\right\}$$
$$= \left\{(x',y') \in \mathbb{R}^2, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y') = (z+y, 2z-y)\right\}$$

لدينا:

$$(x',y') = (z, z+y) \Rightarrow \begin{cases} x' = z+y \\ y' = 2z-y \end{cases}$$

ومنه: $(x',y') = y(1,-1) + z(1,2)$

بالتالي: $\operatorname{Im}(f) = \left[(1,-1),(1,2)\right]$

إذن $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ وبالتالي f غامر

كنتيجة: $rang(f) = \dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

هل التطبيق f خطي في كل حالة ممايلي:

1) $$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 - y^2$$

2) $$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, x-2y, 0)$$

3) $$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x-y+1, x+y, 2)$$

التمرين الثاني:

ليكن f تطبيق خطي حيث:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

- عين $\ker f$ ، $\operatorname{Im} f$
- هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

التمرين الثالث:

ليكن f تطبيق خطي حيث:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (-3x-y+z, 8x+3y-2z, -4x-y+2z)$$

- عين أساسا لـ $\ker f$ ، إستنتج $\dim(\ker f)$ ، هل f متباين ؟
- عبن $rang(f)$ ، هل f غامر ؟ ، عين أساسا لـ $\operatorname{Im} f$.

المحور الثالث:

مفاهيم عامة حول المصفوفات

المحورالثالث: مفاهيم عامة حول المصفوفات

1.3 المصفوفات

تعريف: ليكن K حقل و $a_{ij} \in K$ حيث $i, j \in \mathbb{N}$ و $1 \le i \le n$ ، $1 \le j \le p$

نسمي مصفوفة ذات n سطرا و p عمودا عناصرها a_{ij} كل جدول من الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots a_{1j} \dots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots a_{nj} \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} تسمى معاملات A. نعبر عنها باختصار بـ: $n \times p$ –مصفوفة أو مصفوفة $n \times p$ أو من النوع (n, p)

ونكتب: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ أو $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ حيث a_{ij} هو العنصر من المصفوفة A الذي يقع في السطر i و العمود j

ملاحظات:

- إذا كان $K = \mathbb{R}$ نقول أن A مصفوفة أعداد حقيقية أو مصفوفة حقيقية.
- السطر الذي دليله i هو $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip})$ والعمود الذي دليله j هو المتتالية $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ كما هو مبين في المصفوفة A .
- مجموعة $n \times p$ –مصفوفات على الحقل K نرمز لها بـ $\mathscr{M}_{np}(K)$.

تعريف: نقول عن مصفوفتين من نقس النوع $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ أنهما متساويتين إذاكان: $a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p$

مثال: لتكن المصفوفات: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

لدينا: $A \neq B$ لأنهما ليستا من نفس النوع و $C \neq B$ لأنه يوجد عنصران غير متساويين (مثلا السطر الأول و العمود الأول من المصفوفتين)

تعريف: المصفوفة $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ معدومة إذا كان $a_{ij}=0$: $\forall i=1,...,n$ أي كل عناصرها معدومة. نرمز لها بـ $O_{(n,p)}$ أو $O_{n\times p}$.

مثال: لتكن المصفوفات: $O_{(3,3)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $O_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

تعريف: منقول $n\times p$ –مصفوفة $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ هي $p\times n$ –مصفوفة ونرمز لها بـ ${}^{t}A$

حيث: ${}^{t}A=\left(a_{ji}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$ (أسطر ${}^{t}A$ هي أعمدة A).

مثال:

لتكن المصفوفات: $A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\1&3&-7\\4&0&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\\-4&0\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}1&-3&2\\6&4&-7\end{pmatrix}$

لدينا: ${}^{t}A=\begin{pmatrix}2&1&4\\-5&3&0\\1&-7&1\end{pmatrix}$ و ${}^{t}C=\begin{pmatrix}1&6\\-3&4\\2&-7\end{pmatrix}$ و ${}^{t}B=\begin{pmatrix}2&1&-4\\5&3&0\end{pmatrix}$

2.3 المصفوفات المربعة

تعريف: نقول أن مصفوفة $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ أنها مربعة إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها أي $n=p$.

<u>أمثلة:</u> المصفوفتان $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 1 & 3 & -7\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2 & 11\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ مربعتان من النوع $(3,3)$ و $(2,2)$ على الترتيب.

<u>3.3 مصفوفات خاصة</u>

لتكن $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة

نقول أن A مثلثية علوية إذا كان: $a_{ij}=0,\ \forall i>j$.

<u>مثال:</u>

المصفوفة $A=\begin{pmatrix}12 & -5 & 1\\ 0 & 13 & -7\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ مثلثية علوية

المصفوفة $C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 11\end{pmatrix}$ مثلثية علوية

نقول أن A مثلثية سفلية إذا كان: $a_{ij}=0,\ \forall i<j$.

<u>مثال:</u>

المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 9 & 7 & 0\\ -5 & 4 & 1\end{pmatrix}$ مثلثية سفلية.

المصفوفة $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 8 & -3 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ مثلثية سفلية.

نقول أن A قطرية إذا كان: $a_{ij}=0,\ \forall i\neq j$ ، أي كل عناصرها معدومة ماعدا عناصر قطرها. يرمز لها بـ $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$

مثال:

المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ قطرية

نقول أن A مصفوفة واحدية إذا كانت قطرية وكل عناصر قطرها تساوي 1 ونرمز لها بـ I_n.

مثال:

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}،\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}،\ I_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 العمليات الأساسية على المصفوفات

الجمع:

من أجل $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ من $\mathscr{M}_{np}(K)$ نعرف الجمع $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$

مثال: لتكن المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}،\ B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}،\ D=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}،\ F=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}،$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

لدينا: $$A+D=\begin{pmatrix} 2-1 & -5-5 & 1+1 \\ 1+1 & 3+10 & -7+2 \\ 4-5 & 0 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -10 & 2 \\ 2 & 13 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة بسلمية

تعريف: من أجل $\lambda \in K$ و $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ لدينا $\lambda \cdot A=\left(\lambda a_{ij}\right)$

مثال: لتكن المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\1&3&-7\\4&0&1\end{pmatrix}\text{ ، } B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\\-4&0\end{pmatrix}\text{ ، } C=\begin{pmatrix}1&-3&2\\6&4&-7\end{pmatrix}$$

لدينا: $3A=\begin{pmatrix}1&-10&2\\2&13&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}$ ، $-5B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\\-4&0\end{pmatrix}$ ، $\frac{1}{2}C=\begin{pmatrix}1&-3&2\\6&4&-7\end{pmatrix}$

الضرب:

ضرب المصفوفتين $A\in\mathscr{M}_{np}(K), B\in\mathscr{M}_{pq}(K)$ حيث:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}},\ B=\left(b_{st}\right)_{\substack{1\le s\le p\\1\le t\le q}}$$

هو المصفوفة: $\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}=C\in\mathscr{M}_{nq}(K)$

حيث $\forall(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}\times\{1,2,\dots,q\}:\quad c_{ij}=\sum_{s=1}^{p}a_{is}b_{sj}$

ونرمز لهذا الضرب بـ $A\cdot B=C$ أو $AB=C$.

ملاحظة:

- المعامل c_{ij} هو الجداء السلمي للسطر **i** من A والعمود **j** من B .
- لضرب A في B يشترط أن يكون عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B .
- بصفة عامة، ضرب المصفوفات، غير تبديلي.

مثال:

لدينا: $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2v+3w \\ 4u+5v+6w \end{pmatrix}$$

<u>خاصية:</u> مهما كانت A، $A \in \mathscr{M}_n(K)$ لدينا: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

I_n هي مصفوفة الوحدة، ذات n سطراو n عمودا، كل معاملاتها معدومة ما عدا معاملات القطر الرئيسي كل منها يساوي 1.

<u>5.3 المحدد لمصفوفة</u>

<u>تعريف:</u>

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n \times n$

محدد المصفوفة هو العدد الحقيقي $\det(A)$ أو $|A|$الذي يعطى بالعبارة التاليةّ:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

حيث: $\left|A_{ij}\right|$ هو محدد المصفوفة المربعة A_{ij} الناتج عن حذف السطر i والعمود j من المصفوفة A.

<u>نظرية:</u> ليكن K حقلا.

محدد المصفوفة الحيادية I_n هو 1.

إذا كان $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ فإن $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

إذا كان $A \in \mathscr{M}_n(K)$ فإن: A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$.

<u>نتيجة:</u> إذا كانت المصفوفة A مثلثية علوية على الشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن: $\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ **(جداء عناصر القطر الرئيسي).**

6.3 محدد منقول مصفوفة

قضية: إذا كانت $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n\times n$ فإن $\det(A)=\det({}^tA)$.

7.3 قواعد الحساب لمحدد مصفوفة

حساب المحدد بطريقة التفكيك أو النشر

نظرية: لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n\times n$. مهما كانت الأدلة i و j لدينا:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\left|A_{kj}\right|$$ **(تفكيك المحدد وفق العمود j)**

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\left|A_{ik}\right|$$ **(تفكيك المحدد وفق العمود i)**

مثال:

1. نضع $\det(A)=|A|$ ونفكك $\det(A)$ وفق السطر الثاني، فمثلا إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

نفكك كلا من المحددات الثلاثة وفق السطر الأول متبعين نفس القاعدة:

$$\det(A) = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

<u>مثال:</u> لنحسب محدد المصفوفة:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

نفكك المحدد وفق السطر الأول متبعين نفس القاعدة:

لدينا:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3+1) + 1(-9-5) - 3(-3-5)$$

$$= 6$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

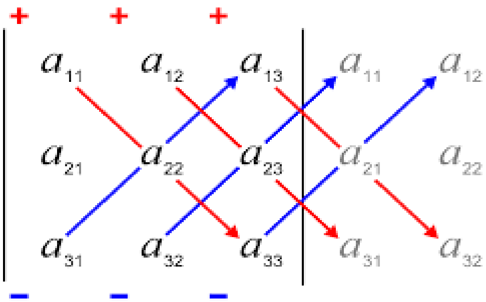
- **إنعدام أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة يؤدي إلى انعدام محددها.**

طريقة سارس لحساب محدد مصفوفة

تستخدم هذه الطريقة فقط لنشر المحددات من المرتبة الثالثة ولا تصلح لنشر أي محدد من مرتبة أخرى.

في هذه الطريقة نكتب المحدد ثم نكتب على يمينه العمودين الأول والثاني فيتشكل لدينا ستة أقطار.

المحدد= (مجموع جداءات عناصر القطر الرئيسي مع جداءات عناصر الأقطار الموازية له) **ونطرح منها** (مجموع جداءات عناصر القطر الثانوي وجداء الأقطار الموازية له)، كما يلي:



مثال تطبيقي:

لنحسب بإستعمال هذه الطريقة محدد المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

نكتب المحدد ثم نكتب على يمينه العمودين الأول والثاني للمصفوفة نجد:

$$
\begin{array}{ccc}
+ & + & + \\
\end{array}
$$

$$
\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{matrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
- & - & - \\
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\left(2\times1\times4\right)+\left(\left(-3\right)\times2\times5\right)+\left(4\times3\times\left(-3\right)\right)\right)\\
&\quad-\left(\left(5\times1\times4\right)+\left(\left(-3\right)\times2\times2\right)+\left(\left(-3\right)\times3\times4\right)\right)\\
&=\left(8-30-36\right)-\left(20-12-36\right)\\
&=\left(-58\right)-\left(-28\right)=-30
\end{aligned}
$$

8.3 المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

ليكُن E_2,E_1 فضائين شعاعيين على حقل K بعداهما m,n على الترتيب، $f:E_1\to E_2$ تطبيقا خطيا، $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ و $B'=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ أساسان لـ E_1 ، E_2 على الترتيب صورة أشعة أساس E_1 هي أشعة من E_2 فهي تكتب على شكل تركيب خطي لأشعة E_2 ، ولدينا:

$$
\begin{aligned}
&f(u_1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2+...+a_{m1}v_m\\
&f(u_2)=a_{12}v_1+a_{22}v_2+...+a_{m2}v_m\\
&\vdots\\
&f(u_n)=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+...+a_{mn}v_m
\end{aligned}
$$

حيث $a_{ij},i=1,2,...,m,j=1,2,...,n$ عناصر من K.

تعريف:

نسمي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين $\{B,B'\}$ و نرمز لها بالرمز $M(f)$، المصفوفة التي أعمدتها هي صور أساس مجموعة الإنطلاق B مكتوبة في أساس مجموعة الوصول B'. أي:

$$M(f)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

- المصفوفة $M(f)$ من النوع (m,n).
- عدد أسطر $M(f)$ يمثل بعد الفضاء الشعاعي E_2 أي: $\dim(E_2)=m$.
- عدد أعمدة $M(f)$ يمثل بعد الفضاء الشعاعي E_1 أي: $\dim(E_1)=n$.
- عناصر $M(f)$ تتغير بتغير الأساس.

مثال:

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيقا خطيا حيث: $f(x,y)=(x+y,y+2x,y-x)$.

عين المصفوفة المرافقة لـ بالنسبة للأساسين $B=\{u_1(1,0),u_2(0,1)\}$ و

$B'=\{v_1(1,0,0),v_2(0,1,0),v_3(0,0,1)\}$

لدينا:

$$f(u_1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2+a_{31}v_3$$
$$f(u_2)=a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{32}v_3$$

ومنه:

$$\begin{cases} f(1,0) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) \\ f(0,1) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1) \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} (1,2,-1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) \\ (1,1,1) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1) \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} (1,2,-1) = (a_{11},0,0) + (0,a_{21},0) + (0,0,a_{31}) \\ (1,1,1) = (a_{12},0,0) + (0,a_{22},0) + (0,0,a_{32}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1,2,-1) = (a_{11},a_{21},a_{31}) \\ (1,1,1) = (a_{12},a_{22},a_{32}) \end{cases}$$

إذن:

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ملاحظة:</u> لكل مصفوفة $M(f)$ ذات m سطر و n عمود يوجد تطبيق خطي وحيد f معرف من فضاء شعاعي بعده n نحو فضاء شعاعي بعده m.

ولدينا: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = M(f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

<u>مثال:</u>

لنعين التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

لدينا: المصفوفة ذات سطرين و 3 أعمدة أي $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

ولدينا:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$=(x_1-x_2+3x_3,4x_1+2x_2-x_3)$$

<u>مثال:</u>

لنعين التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة: $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا: المصفوفة ذات 3 سطرين و عمودين أي $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

ولدينا:

$$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$=(x_1+x_2,2x_1+3x_2,-5x_1+x_2)$$

9.3 رتبة مصفوفة

رتبة مصفوفة M من النوع (n,n) و نرمز لها $rang(M)$ هي عدد طبيعي r يحقق الشرطين:

- يوجد محدد أصغري واحد من المرتبة r غير معدوم
- كل محدد مرتبته أكبر تماما من r يساوي الصفر.

مثال: لنعين رتبة المصفوفة M حيث:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

نحسب المحددات الأصغرية للمصفوفة M حيث نبدأ بالمحددات من المرتبة 2، ثم من المرتبة 1.

لدينا: $\det(M)=-1\neq 0$

إذن: $rang(M)=2$.

مثال: لنعين رتبة المصفوفة M حيث:

$$M=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

نحسب المحددات الأصغرية للمصفوفة M حيث نبدأ بالمحددات من المرتبة 3، ثم 2، ثم 1.

لدينا: $\det(M)=0$ وبالتالي $rang(M)\neq 3$

نبحث عن محدد أصغري لـ M لايساوي الصفر

لدينا: $\det(M_{33})=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7\neq 0$

إذن: $rang(M)=2$.

مثال: لنعين رتبة المصفوفة M حيث:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

لدينا: $\det(M)=0$ و بالتالي M ليست من الرتبة 3.

نأخذ المحددات الأصغرية لـ M من المرتبة الثانية نجد:

$$\det(M_{11})=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{12})=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 9\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{13})=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0 \text{ ،}$$

$$\det(M_{21})=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{22})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{23})=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$\det(M_{31})=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{32})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0 \text{ ،} \det(M_{33})=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$$

لا يوجد أي محدد من الرتبة 2 غير معدوم وبالتالي أيضا M ليست من الرتبة 2.

الآن نأخذ المحددات الأصغرية لـ M من المرتبة الأولى

لدينا مثلا $|1|\neq 0$

إذن يوجد محدد أصغري لـ M من المرتبة الأولى لا يساوي الصفر و كل المحددات التي مرتبتها أكبر من المرتبة الأولى تساوي الصفر

وبالتالي: $rang(M)=1$.

تعريف آخر:

رتبة مصفوفة هي رتبة التطبيق الخطي المرفقة به وفق أساسين معينين.

10.3 مقلوب مصفوفة مربعة

تعريف: من أجل $A\in\mathscr{M}_n(K)$ ، نقول عن A أنها قابلة للقلب أو عكوسة إذا وُجدت مصفوفة $B\in\mathscr{M}_n(K)$ بحيث $AB=BA=I_n$

تسمى المصفوفة B مقلوب A ونكتب $B=A^{-1}$

11.3 المصفوفة المرفقة لمصفوفة

بكل $A=\left(a_{ij}\right)$ مصفوفة مربعة $n\times n$ ، ومن أجل i و j نضع $\alpha_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$
ونسميه المعامل المرفق بـ a_{ij} ، حيث $\left|A_{ij}\right|$ محدد المصفوفة المربعة $(n-1)\times(n-1)$
الناتجة عن حذف السطر i والعمود j من A.
ونضع $\tilde{A}={}^{t}\left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ ونسميها المصفوفة المرفقة بـ A.

نتيجة: لتكن $A=\left(a_{ij}\right)$ مصفوفة مربعة $n\times n$.
إذا كان $\det\left(A\right)\neq 0$ فإن: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det\left(A\right)}\tilde{A}$.

12.3 قاعدة حساب مقلوب A:

لدينا: $A^{-1}=\left(\alpha_{ij}\right)$ حيث: $1\le j\le n$, $1\le i\le n$, $\alpha_{ij}=\dfrac{1}{\det\left(A\right)}\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$

مثال18: لتكن المصفوفة $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

محدد A:

نفكك وفق السطر الأول. $\det\left(A\right)=-3$ ؛ المحدد غير معدوم إذن A قابلة للقلب.
نحسب مقلوب A عن طريق القاعدة: $A^{-1}=\left(\alpha_{ij}\right)$

$$\alpha_{11} = \tfrac{1}{-3}(-1), \quad \alpha_{12} = \tfrac{-1}{-3}(+1), \quad \alpha_{13} = \tfrac{1}{-3}(-1),$$
$$\alpha_{21} = \tfrac{-1}{-3}(+1), \quad \alpha_{22} = \tfrac{1}{-3}(-1), \quad \alpha_{23} = \tfrac{-1}{-3}(-2),$$
$$\alpha_{31} = \tfrac{1}{-3}(-2), \quad \alpha_{32} = \tfrac{-1}{-3}(-1), \quad \alpha_{33} = \tfrac{1}{-3}(+1)$$

أي أن:

$$. \; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-3&-1\\5&2\\0&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}$$

1) احسب: $-2A+3B$، $3\,{}^tA-{}^tB$ ، $E+{}^tD$ ، $Tr(A)$.

2) احسب: AD ، AB .

3) احسب: $\det(C)$ ، $\det(A)$.

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$

اثبت أن: $A^2-4A+5I_2=0$ ، حيث I_2 مصفوفة الوحدة من الرتبة 2، واستنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب ثم عين مقلوبها A^{-1} .

التمرين الثالث:

لتكن المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$ احسب المقلوب A^{-1}.

التمرين الرابع:

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من الرتبة 2 حيث: $BA=\begin{pmatrix}x&2\\8&y\end{pmatrix}$ و

$$AB=\begin{pmatrix}3&4\\13&12\end{pmatrix}$$

باستخدام خواص الأثر والمحدد، عين قيم x و y .

المحور الرابع:

حل جملة معادلات خطية

المحور الخامس: حل جملة معادلات خطية

1.4 جملة معادلات خطية

تعريف: نسمي جملة معادلات خطية ذات m معادلة خطية و n مجهول كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

حيث: a_{ij} و b_i أعداد حقيقية ثابتة.

يمكن تمييز ثلاث حالات:

1- إذا كان $m < n$ أي عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل
2- إذا كان $m = n$ أي عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل
3- إذا كان $m > n$ أي عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل

أمثلة:

الجملة المعطاة بالشكل:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ -5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 11x_3 = -5. \end{cases}$$

هي جملة معادلات خطية مكونة من 3 معادلات خطية و 3 مجاهيل x_1, x_2, x_3 .

مثال: الجملة المعطاة بالشكل:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 25x_4 = 2, \\ -2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$$

هي جملة معادلات خطية مكونة من 3 معادلات خطية و 4 مجاهيل x_1, x_2, x_3, x_4 .

مثال:

الجملة المعطاة بالشكل:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3=5, \\ -5x_1+7x_2+4x_3=2, \\ x_1-x_2+4x_3=-1, \\ 3x_1-x_2+2x_3=7. \end{cases}$$

هي جملة معادلات خطية مكونة من 4 معادلات خطية و 3 مجاهيل x_1, x_2, x_3 .

2.4 الكتابة المصفوفية لجملة معادلات خطية

هي الكتابة على الشكل $AX=b$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

مثال:

الكتابة المصفوفية لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=14, \\ -5x_1+7x_2+4x_3=3, \\ 4x_1-x_2+11x_3=-5. \end{cases}$$

هي $AX=b$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 11 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

مثال:

الكتابة المصفوفية لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 20. \end{cases}$$

هي $AX = b$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3.4 حل جملة معادلات خطية

1.3.4 طريقة كرامر

إذا كان عدد المعادلات = عدد المجاهيل في الجملة الخطية و $\det A \neq 0$ فإن الجملة تسمى جملة كرامر تقبل حلا وحيدا $(x_1, x_2, ..., x_n)$ يعطى بالشكل:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},\ j = 1, 2, ..., n$$

حيث A_j هي المصفوفة المحصل عليها انطلاقا من المصفوفة A بتعويض العمود j بالشعاع b

مثال:

حل بطريقة كرامر الجملة الخطية:

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=7,\\ 2x_1-3x_2+x_3=6,\\ 3x_1-4x_2+x_3=5.\end{cases}$$

الشكل $AX=b$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&-3&1\\3&-4&1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}.$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\det A&=-1\begin{vmatrix}-3&1\\-4&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&-3\\3&-4\end{vmatrix}\\&=-\left(-3+4\right)-\left(2-3\right)+2\left(-8+9\right)\\&=2\end{aligned}$$

بما أن $\det A\neq 0$ فإن الجملة جملة كرامر تقبل حلا وحيدا (x_1,x_2,x_3) حيث :

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&-3&1\\3&-4&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+7\begin{vmatrix}-3&1\\-4&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}6&1\\5&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}6&-3\\5&-4\end{vmatrix}}{2}\\&=\frac{7\left(-3+4\right)-(6-5)+2(-24+15)}{2}\\&=\frac{-12}{2}=-6\end{aligned}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}-1&7&2\\2&6&1\\3&5&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-1\begin{vmatrix}6&1\\5&1\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&6\\3&5\end{vmatrix}}{2}$$
$$=\frac{-(6-5)-7(2-3)+2(10-18)}{2}$$
$$=\frac{-10}{2}=-5$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}-1&1&7\\2&-3&6\\3&-4&5\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-1\begin{vmatrix}-3&6\\-4&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&6\\3&5\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}2&-3\\3&-4\end{vmatrix}}{2}$$
$$=\frac{-(-15+24)-(10-18)+7(-8+9)}{2}$$
$$=\frac{6}{2}=3$$

2.3.4 طريقة غوص

تعتمد على تحويل الشكل (A/b) إلى الشكل (T/b') حيث T هي مصفوفة مثلثيه سفلية أو مثلثيه علوية.

مثال: حل بطريقة غوص جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases}x-y-3z=2,\\2x+6y-4z=5,\\-x-5y+2z=-3.\end{cases}$$

لنحل الجملة بطريقة غوص

لدينا:
$$\left(A\vdots b\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 2\\ 2 & 6 & -4 & 5\\ -1 & -5 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

نحول $\left(A\vdots b\right)$ إلى الشكل $\left(T\vdots b'\right)$ حيث T هي مصفوفة مثلثيه علوية

$$\left(A\vdots b\right)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 2\\ 2 & 6 & -4 & 5\\ -1 & -5 & 2 & -3\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 2\\ 0 & 8 & 2 & 1\\ 0 & -6 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{c}L_1\\ L_2'\\ L_3'\end{array}$$

$$\xrightarrow{L_3'+\frac{6}{8}L_2'}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 2\\ 0 & 8 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{array}{c}L_1\\ L_2''\\ L_3''\end{array}$$

ومنه نحصل على الجملة الآتية:

$$\begin{cases}x-y-3z=2..........(1)\\ 8y+2z=1..............(2)\\ \frac{1}{2}z=-\frac{1}{4}................(3)\end{cases}$$

من (3) نجد $z=-\frac{1}{2}$ و بالتعويض في (2) نجد $y=\frac{1}{4}$ و بالتعويض بقيمتي y و z في (1) نجد $x=\frac{3}{4}$.

إذن: $(x,y,z)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$

مثال:

حل بطريقة كرامر الجملة الخطية:

$$\begin{cases} x+2y+z-3t=5, \\ 2x-y-3z+4t=10, \\ 3x+y+z-t=12, \\ 5x-y-3z+4t=7. \end{cases}$$

هذه الجملة هي جملة معادلات خطية ذات 4 معادلات خطية و 4 مجاهيل

الشكل $AX=b$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

لدينا:

$$\det A=+1\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

وحيث أن:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= +2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-3+1)+1(-9-5)-3(-3-5) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-3)+3(12+5)+4(-9-5)$$
$$= -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-1)+(12+5)+4(-3-5)$$
$$= 9$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-3+1)+(-9-5)-3(-3-5)$$
$$= 6$$

مماسبق نستنتج أن: $\det A = 18$

بما أن $\det A \neq 0$ فإن الجملة جملة كرامر تقبل حلا وحيدا (x,y,z,t) حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&2&1&-3\\10&-1&-3&4\\12&1&1&-1\\7&-1&-3&4\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+5\begin{vmatrix}-1&-3&4\\1&1&-1\\-1&-3&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}10&-3&4\\12&1&-1\\7&-3&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}10&-1&4\\12&1&-1\\7&-1&4\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}10&-1&-3\\12&1&1\\7&-1&-3\end{vmatrix}}{18}$$

$$=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&5&1&-3\\2&10&-3&4\\3&12&1&-1\\5&7&3&4\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+1\begin{vmatrix}10&-3&4\\12&1&-1\\7&3&4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&-3&4\\3&1&-1\\5&3&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&10&4\\3&12&-1\\5&7&4\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}2&10&-3\\3&12&1\\5&7&3\end{vmatrix}}{18}$$

$$=21$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&5&-3\\2&-1&10&4\\3&1&12&-1\\5&-1&7&4\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+1\begin{vmatrix}-1&10&4\\1&12&-1\\-1&7&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&10&4\\3&12&-1\\5&7&4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&1&-1\\5&-1&4\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}2&-1&10\\3&1&12\\5&-1&7\end{vmatrix}}{18}$$
$$=9$$

$$t=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1&5\\2&-1&-3&10\\3&1&1&12\\5&-1&-3&7\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+1\begin{vmatrix}2&-1&-3\\3&1&1\\5&-1&-3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&-3&10\\3&1&12\\5&-3&7\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&-1&10\\3&1&12\\5&-1&7\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&-1&-3\\3&1&1\\5&-1&-3\end{vmatrix}}{18}$$
$$=15$$

مما سبق نستنتج أن: $(x,y,z,t)=(-1,21,9,15)$.

مثال: حل بطريقة غوص جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases}x+2y+z-3t=5,\\2x-y-3z+4t=10,\\3x+y+z-t=12,\\5x-y-3z+4t=7.\end{cases}$$

حل الجملة بطريقة غوص

لدينا:
$$(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&2&1&-3&5\\2&-1&-3&4&10\\3&1&1&-1&12\\5&-1&-3&4&7\end{pmatrix}$$

نحول $(A\vdots b)$ إلى الشكل $(T\vdots b')$ حيث T هي مصفوفة مثلثيه علوية

$$(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 2 & -1 & -3 & 4 & 10\\ 3 & 1 & 1 & -1 & 12\\ 5 & -1 & -3 & 4 & 7\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{matrix}\xrightarrow[\substack{L_3-3L_1\\ L_4-5L_1}]{L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 0 & -5 & -5 & 10 & 0\\ 0 & -5 & -2 & 8 & -3\\ 0 & -11 & -8 & 19 & -18\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2'\\ L_3'\\ L_4'\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[L_4'-\frac{11}{5}L_2']{L_3'-L_2'}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 0 & -5 & -5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -18\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2'\\ L_3''\\ L_4''\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_4''-L_3''}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 0 & -5 & -5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -15\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2'\\ L_3''\\ L_4'\end{matrix}$$

ومنه نحصل على الجملة الآتية:

$$\begin{cases}x+2y+z-3t=5..........(1)\\ -5y-5z+10t=0.........(2)\\ 3z-2t=-3...................(3)\\ -t=-15........................(4)\end{cases}$$

من (4) نجد $t=15$ من (3) نجد $z=9$ و بالتعويض في (2) نجد $y=21$ و بالتعويض بقيم t ، y و z في (1) نجد $x=-1$.

إذن: $(x,y,z,t)=(-1,21,9,15)$.

<u>3.3.4 حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب مصفوفة</u>

لتكن جملة معادلات خطية كتابتها المصفوفية: $AX=b$

إذا كان: $\det A \neq 0$ فإن المصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو A^{-1} .

حل هذه الجملة الخطية يعطى بالشكل: $X = A^{-1}b$.

__مثال:__

أوجد بطريقة مقلوب مصفوفة حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

الشكل $AX = b$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \det A &= -1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -(-3+4) - (2-3) + 2(-8+9) \\ &= 2 \end{aligned}$$

بما أن $\det A \neq 0$ فإن المصفوفة قابلة للقلب و حل الجملة الخطية يعطى بالعلاقة $X = A^{-1}b$ مع هو A^{-1} مقلوب المصفوفة.

أولا: نعين A^{-1} .

نحسب مقلوب A عن طريق القاعدة: $A^{-1} = \dfrac{{}^{t}\left(Com(A)\right)}{\det A}$

حيث: $Com(A)$ هي مصفوفة المعامل المرافقة مع $Com(A)=(-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$.

لدينا:

$$Com(A)=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1\\ -1 & -7 & -1\\ +1 & +5 & +1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$^{t}\left(Com(A)\right)=\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1\\ +1 & -7 & +5\\ +1 & +5 & +1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$A^{-1}=\frac{^{t}\left(Com(A)\right)}{\det A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1\\ +1 & -7 & +5\\ +1 & +5 & +1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

إذن الحل يعطى كمايلي:

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \frac{6}{2} + \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} - \frac{42}{2} + \frac{25}{2} \\ \frac{7}{2} + \frac{30}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

أي أن: $(x_1, x_2, x_3) = (3, -5, 21)$

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

1) حل جملة المعادلات الخطية باستخدام طريقة كرامر:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

2) حل جملة المعادلات الخطية باستخدام طريقة غوص (Gauss):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

3) لتكن جمل المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 4 \\ -x_1 + 3x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = 6 \\ 3x - 4y + z = 5 \end{cases}$$

1- أكتب الشكل المصفوفي لكل جملة.

2- بين أن كلا الجملتين لكرامر.

3- حل كل جملة بإستخدام:

- طريقة كرامر
- طريقة مقلوب مصفوفة ثم طريقة غوص

4- هل جملة المعادلات الخطية التالية تقبل حلا (مع التبرير):

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = 6 \\ 3x - 4y + z = 5 \\ x - y - z = 10 \end{cases}$$

المحور الخامس:

القيم الذاتية و الأشعة الذاتية

المحور الخامس: القيم الذاتية و الأشعة الذاتية

1.5 القيم الذاتية والأشعة (المتجهات) الذاتية

تعريف: لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ ، نقول عن $\lambda\in\mathbb{R}$ أنها قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجد $X\in\mathbb{R}^n$ مع $X\neq 0$ بحيث:

$$AX=\lambda X$$

– الشعاع (أو المتجه) X يسمى شعاع ذاتي (أو متجه ذاتي) للمصفوفة A بالنسبة للقيمة الذاتية λ .

مثال1: بين أن الشعاع $X=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ شعاعا ذاتيا للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}6&0\\16&-2\end{pmatrix}$ بالنسبة للقيمة الذاتية $\lambda=6$.

الحل: لدينا: $AX=\begin{pmatrix}6&0\\16&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\lambda X$

نقول في هذه الحالة أن القيمة الذاتية $\lambda=6$ يقابلها الشعاع الذاتي $X=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

مثال2: بين أن الشعاعين $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ و $X'=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ شعاعان ذاتيان للمصفوفة $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&1&3\\1&-2&1\end{pmatrix}$ بالنسبة للقيمتين الذاتيتين $\lambda=2$ و $\lambda=-1$ على الترتيب.

الحل: لدينا :

$$BX=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&1&3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda X$$

نستنتج في هذه الحالة أن القيمة الذاتية $\lambda=2$ يقابلها الشعاع الذاتي $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

أيضا لدينا:

$$BX'=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&1&3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\lambda X'$$

نستنتج في هذه الحالة أن القيمة الذاتية $\lambda=-1$ يقابلها الشعاع الذاتي $X'=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

<u>مبرهنة:</u>

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ ، تكون λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كان:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

<u>أمثلة:</u>

<u>مثال1:</u> أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A حيث:

$$A=\begin{pmatrix}10&-5\\2&3\end{pmatrix}$$

<u>الحل:</u>

لدينا:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}10-\lambda & -5\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}10-\lambda & -5\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow(10-\lambda)(3-\lambda)-(-5)(2)=0$$
$$\Leftrightarrow(10-\lambda)(3-\lambda)-(-5)(2)=0$$
$$\Leftrightarrow\lambda^2-13\lambda+40=0$$

نحسب المحدد لهذه المعادلة:

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-13)^2-4(1)(40)=9>0$$

وبالتالي القيم الذاتية للمصفوفة هما حلا المعادلة أي:

$$\lambda_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-3}{2}=5,$$
$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+3}{2}=8.$$

مثال2: أوجد القيم الذاتية للمصفوفة B حيث:

$$B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 6\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

الحل:

لدينا:

$$B-\lambda I=\begin{pmatrix}5&1&2\\-2&3&6\\7&1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5-\lambda&1&2\\-2&3-\lambda&6\\7&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}5-\lambda&1&2\\-2&3-\lambda&6\\7&1&-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3-8\lambda^2-3\lambda+34=0$$

وبما أن:

$$\lambda^3-8\lambda^2-3\lambda+34=(\lambda+2)(\lambda^2-10\lambda+17)$$

ومنه:

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(\lambda+2)(\lambda^2-10\lambda+17)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\ \text{أو}\\ \lambda^2-10\lambda+17=0.........(*)\end{cases}$$

<u>نحل المعادلة (*)</u>

لدينا:

$$\Delta=(-10)^2-4(1)(17)=32>0$$

وبالتالي للمعادلة حلان :

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-\sqrt{32}}{2} = 5-2\sqrt{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+\sqrt{32}}{2} = 5+2\sqrt{2}.$$

مما سبق نستنتج أن للمصفوفة B ثلاث قيم ذاتية مختلفة وهي:

$$\lambda_{1,2} = 5 \mp 2\sqrt{2},\ \lambda_3 = -2.$$

2.5 الكثير الحدود المميز لمصفوفة

تعريف: الكثير الحدود المميز لمصفوفة A مربعة $n \times n$ ونرمز له بـ $p(\lambda)$ يعطى بالشكل التالي: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ حيث I هي مصفوفة الوحدة $n \times n$.

أمثلة:

1- الكثير الحدود المميز للمصفوفة A حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

هو:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 40$$

2- الكثير الحدود المميز للمصفوفة B حيث:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3-

هو:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \lambda^3 - 8\lambda^2 - 3\lambda + 34 \end{aligned}$$

3.5 تعيين الأشعة الذاتية

نظرية:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$، القضايا الآتية متكافئة:

1- λ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

2- الجملة المتجانسة $(A-\lambda I)X=0$ تملك حلا غير صفري بالنسبة لـ X.

3- يوجد شعاع ذاتي X مع $X\neq 0$ بحيث: $AX=\lambda X$.

4- λ هو حل للمعادلة المميزة $\det(A-\lambda I)=0$.

مثال:

1- لنعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A حيث:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعين القيم الذاتية للمصفوفة A.

لدينا:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 2 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow (8-\lambda)(7-\lambda)-(6)(2)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-15\lambda+44=0$$

نحسب المحدد لهذه المعادلة:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(-15)^2-4(1)(44)=49>0\end{aligned}$$

وبالتالي القيم الذاتية للمصفوفة هما حلا المعادلة أي:

$$\lambda_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15-7}{2}=4,$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15+7}{2}=11.$$

الخطوة الثانية: نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A .

<u>تعيين الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية</u> $\lambda=4$

نحل الجملة المتجانسة $(A-\lambda I)X=0$

بما أن المصفوفة من المرتبة 2×2 فإن الشعاع الذاتي يكون من الشكل:

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

لدينا:

$$(A-\lambda I)X=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8-\lambda & 6\\ 2 & 7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

من أجل $\lambda=4$ نجد:

$$\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ومنه: $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

ومنه: $2x_1 + 3x_2 = 0$ ومنه: $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$

وبالتالي: $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ **شعاع ذاتي يقابل القيمة الذاتية** $\lambda = 4$.

ملاحظة: يمكن ملاحظة أن: $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$ **وبالتالي** $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ **هو أيضا شعاع ذاتي يقابل القيمة الذاتية** $\lambda = 4$.

<u>تعيين الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية</u> $\lambda = 11$

من أجل $\lambda = 11$ نجد:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه: $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

ومنه: $x_1 - 2x_2 = 0$ ومنه: $x_1 = 2x_2$

وبالتالي: $X = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **شعاع ذاتي يقابل القيمة الذاتية** $\lambda = 11$.

ملاحظة: يمكن ملاحظة أن: $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ **وبالتالي** $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **هو أيضا شعاع ذاتي يقابل القيمة الذاتية** $\lambda = 11$.

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

عين كثير الحدود المميز لكل مصفوفة ممايلي:

$$A=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 2 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ -2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

التمرين الثاني:

عين المعادلة المميز و القيم الذاتية للمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

التمرين الثالث:

أوجد القيم الذاتية و الأشعة الذاتية الموافقة لها للمصفوفات التالية:

$$D=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

المحور السادس:

الدوال الأصلية و حساب التكامل

المحور السادس: الدوال الأصلية و حساب التكامل

1.6. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث يكون من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$:

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=x^3-3x^2+2$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

بِ $f(x)=3x^2-6x$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=3x^2-6x=f(x)$.

*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=x^2-\sqrt{5}x-2$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f

لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-\sqrt{5}=f(x)$.

2.6. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

خواص:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال:

$x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3.6. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=2x+\cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2+\sin x+k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x)=x^2+\sin x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi)=-1$.

$F(\pi)=-1$ يعني $\pi^2-0+k=-1$ و منه $k=-1-\pi^2$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+\sin x-1-\pi^2$.

4.6. حساب الدوال الأصلية

1.4.6. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة، الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$x^n / n\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \; / n\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$

$\frac{1}{x^n}$ / $n \in \mathbb{Q}-\{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$ / $n \in \mathbb{Q}-\{1\}$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

2.4.6. خواص

1- إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لِ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لِ $f+g$ على I.

2- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$.

5.6. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f
	$\frac{1}{2}u^2+c$	$u'u$
	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ / $n \in \mathbb{Q}-\{-1\}$	$(n \in \mathbb{Q}-\{-1\})$ $u'u^n$
من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{u}+c$	$\frac{u'}{u^2}$
من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ / $n \in \mathbb{Q}-\{1\}$	$(n \in \mathbb{Q}-\{1\})$ $\frac{u'}{u^n}$

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$a\in\mathbb{R}^*$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$a\in\mathbb{R}^*$
$x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$	$x\mapsto\ln\lvert u(x)\rvert$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$x\mapsto e^{u(x)}$	

تعريف: التكامل غير المحدود لـ f بالنسبة لـ x هو مجموعة كل الدوال الأصلية F ونرمز له بالرمز $\int f(x)dx$ ونكتب: $\int f(x)dx=F(x)+c\,/\,c\in\mathbb{R}$

ملاحظة: الكتابة $\int f(x)dx$ تقرأ تكامل $f(x)$ بالنسبة لـ x

أمثلة:

$$\int 2xdx=x^2+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int 3x^2dx=x^3+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

6.6. التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة

$$\int adx=ax+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^n}dx=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

خواص:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \forall \mathrm{k} \in \mathbb{R}^*$$

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

أمثلة:

$$\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx = 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + c \,/\, c \in \mathbb{R} = \frac{x^4}{2} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 3x^2 dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int xdx + \int 3x^2 dx = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + x^3 + c \,/\, c \in \mathbb{R} = \frac{x^4}{2} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^{10}}dx = -\frac{1}{(10-1)x^{10-1}} + c \,/\, c \in \mathbb{R} = -\frac{1}{9x^9} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt[7]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{7}}dx + c \,/\, c \in \mathbb{R} = \frac{x^{\frac{2}{7}+1}}{\frac{2}{7}+1} + c \,/\, c \in \mathbb{R} = \frac{x^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}} + c \,/\, c \in \mathbb{R} = \frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

تعين الثابت

مثال:

إذا كان: $F(x) = \int (2x+3)dx$ و $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$.

لدينا:

$$F(x)=\int(2x+3)dx=2\int xdx+3\int 1dx=x^2+3x+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

من جهة أخرى $F(3)=2$ تعني $(3)^2+3(3)+c=2$ ومنه $c=-16$

إذن: $F(x)=x^2+3x-16$

قواعد عامة

$$\int\frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int u'(x)e^{u(x)}dx=e^{u(x)}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|u(x)|+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int u'(x)(u(x))^n dx=\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}+c\,/\,c\in\mathbb{R},\ n\in Q\text{-}\{-1\}$$

$$\int\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx=2\sqrt{u(x)}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

أمثلة:

$$\int\frac{1}{x-3}dx=\ln|x-3|+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{2x-1}{x^2-x+10}dx=\ln\left|x^2-x+10\right|+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int(2x-3)\left(x^2-3x-7\right)^{10}dx=\frac{1}{11}\left(\left(x^2-3x-7\right)\right)^{11}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{3x^2-5}{\sqrt{x^3-5x}}dx=2\sqrt{x^3-5x}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$$

7.6. التكامل المحدود

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ دالتها الأصلية F

التكامل المحدود لـ f على $[a;b]$ هو عدد حقيقي نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$ حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$\int_0^1 (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2}\right) = \frac{-1}{6}$$

مثال:

$$\int_1^2 (x^3 - 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^2\Big]_{x=1}^{x=2}$$

$$= \left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^2\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^2\right) = \frac{3}{4}$$

ملاحظة: تبقى الخواص المعطاة من أجل التكامل الغير المحدود صحيحة بالنسبة للتكامل المحدود.

8.6. طريقة المكاملة بتغيير الثابت و التعويض

إذا كانت F دالة أصلية لدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

و إذا كان: $u = g(x)$ فإن: $du = g'(x)\,dx$ أي $\frac{1}{g'(x)}du = dx$ إذن:

$$\int f(u)du = F(u) + c / c \in \mathbb{R}$$

أمثلة:

1- أحسب $I = \int (2x+5)(x^2+5x+2)^3 dx$

نضع $u = x^2+5x+2$ ومنه $du = (2x+5)dx$ أي $\frac{1}{2x+5}du = dx$

بالتعويض في عبارة I نجد وبالتالي: $I = \int u^3 dx$إذن:

$$I = \frac{u^4}{4} + c / c \in \mathbb{R} = \frac{(x^2+5x+2)^4}{4} + c / c \in \mathbb{R}$$

2-أحسب $J = \int x(x+1)^{10} dx$

نضع $u = x+1$ ومنه $1du = 1dx$ أي $dx = du$

بالتعويض في عبارة J نجد وبالتالي: $J = \int (u-1)u^{10} dx$ إذن:

$$J = \int (u-1)u^{10} dx = \int u^{11} - u^{10} dx = \frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{11}}{11} + c / c \in \mathbb{R} = \frac{(x+1)^{12}}{12} - \frac{(x+1)^{11}}{11} + c / c \in \mathbb{R}$$

3-أحسب: $J = \int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2} dx$

نضع $u = \frac{1}{x}+4$ ومنه $1du = -\frac{1}{x^2}dx$ أي $dx = -x^2 du$

بالتعويض في عبارة J نجد وبالتالي: $J = \int u^5 dx$ إذن:

$$I = \frac{u^4}{4} + c / c \in \mathbb{R} = \frac{(x^2+5x+2)^4}{4} + c / c \in \mathbb{R}$$

$$J = \frac{u^6}{6} + c / c \in \mathbb{R} = \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^6}{6} + c / c \in \mathbb{R}$$

9.6. المكاملة بالتجزئة

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

مثال: أحسب التكامل $J = \int x \sin(x)dx$

$$u(x) = x \to u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin x \to v(x) = -\cos x$$

ومنه: $J = \int x\sin xdx = x(-\cos x) - \int (1)(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx$

إذن: $J = -x\cos x + \sin x + c / c \in \mathbb{R}$

مثال: أحسب التكامل $I = \int xe^x dx$

$$u(x) = x \xrightarrow{\text{اشتقاق}} u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$$

ومنه: $J = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c / c \in \mathbb{R}$

10.6. المكاملة باستعمال الكسور الجزئية

هذه الطريقة تستعمل لحساب التكاملات من الشكل $\int \frac{p(x)}{Q(x)}dx$ حيث $p(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود.

1) إذا كانت درجة $p(x)$ أصغر تماما من درجة $Q(x)$ نكتفي بدراسة الحالتين:

الحالة الأولى: إذا كان مقام الكسر يكتب على شكل جداء لعوامل من الدرجة الأولى غير مكررة أي:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_nx + b_n)$$

فإن الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يفكك على شكل مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

حيث A_1 ، A_2 ،.... ، A_n ثوابت حقيقية نعينها.

وبالتالي $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{a_1x+b_1}dx + \int \frac{A_2}{a_2x+b_2}dx + ... + \int \frac{A_n}{a_nx+b_n}dx$

ملاحظة: $\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b|$

مثال: أحسب التكامل: $\int \frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}dx$

أولا نفكك الكسر $\frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}$

بما أن مقام هذا الكسر عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية غير مكررة فإن تفكيك الكسر يتم حسب الحالة الأولى ولدينا:

$$\frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{2x-3} ....(1)$$

حيث A_1، A_2 ثابتان حقيقيان نعينها.

ثانيا تعيين A_1 و A_2

الطريقة الأولى

نوحد مقامي كسري الطرف الأيمن ونطابق مابين بسطي العلاقة الناتجة.

لدينا: $\frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)} = \frac{A_1(2x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(2x-3)}$ ومنه

$$\frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)} = \frac{(2A_1+A_2)x-(3A_1+2A_2)}{(x-2)(2x-3)}$$

بمطابقة بسطي العلاقة الناتجة نجد:

$$\begin{cases} 2A_1 + A_2 = 2 \\ -(3A_1+2A_2) = -5 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد: $A_1 = -1$ و $A_2 = 4$

وبالتالي: $\int \frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}dx = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{4}{2x-3}dx$

إذن: $\int \frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}dx = -\ln|x-2| + 4\ln|2x-3| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

<u>الطريقة الثانية</u>

نضرب طرفي العلاقة (1) في $Q(x)$ ثم نعوض في النتيجة x بالقيم التي تعدم الأقواس في عبارة $Q(x)$.

لدينا: $2x-5=(2x-3)A_1+(x-2)A_2$

لما $x=2$ نجد $-1=1A_1$ ومنه $A_1=-1$

لما $x=\frac{3}{2}$ نجد $-2=\left(\frac{-1}{2}\right)A_2$ ومنه $A_2=4$

وبالتالي: $\int \frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}dx = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{4}{2x-3}dx$

إذن: $\int \frac{2x-5}{(x-2)(2x-3)}dx = -\ln|x-2| + 4\ln|2x-3| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

<u>تطبيق:</u> أحسب التكامل: $\int \frac{2x^2-x-1}{(x-2)(x-3)(2x-5)}dx$

<u>الحالة الثانية:</u> إذا كانت مقام الكسر يكتب على شكل جداء لعوامل من الدرجة الأولى خطية كلها مكررة أي:

$$Q(x)=(ax+b)^n$$

فإن الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يفكك على شكل مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث A_1، A_2، ....، A_n ثوابت حقيقية نعينها.

وبالتالي: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{ax+b}dx + \int \frac{A_2}{(ax+b)^2}dx + ... + \int \frac{A_n}{(ax+b)^n}dx$

ملاحظة: $\int \frac{A_n}{(ax+b)^n}dx = \frac{A_n}{a}\left(\frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}\right)+c\ /\ c\in\mathbb{R},\ \mathrm{n}\geq 2$

مثال: أحسب التكامل: $I=\int\frac{x-1}{(x-2)^2}dx$ و $J=\int\frac{x^2-x}{(x-3)^3}dx$

بالنسبة للتكامل I نلاحظ أنّ المقام $Q(x)$ عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية كلها مكررة لذلك:

فإن الكسر $\frac{x-1}{(x-2)^2}$ يفكك على شكل مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{x-1}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}.........(2)$$

حيث A_1 ، A_2 ثابتان حقيقيان نعينها.

تعيين A_1 و A_2

نضرب طرفي العلاقة (2) في $Q(x)$ ثم نعوض في النتيجة x بالقيم التي تعدم الأقواس في عبارة $Q(x)$

لدينا: $x-1=(x-2)A_1+A_2$

لما $x=2$ نجد $1=A_2$

لتعين A_2 نختار قيمة كيفية لـ x حيث $x\neq 2$

مثلا

لما $x=3$ نجد $2=A_1+A_2$ ومنه $2=A_1+1$ ومنه $A_1=1$

وبالتالي: $\int\frac{x-1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx$

إذن: $\int\frac{x-1}{(x-2)^2}dx=1\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

بالنسبة للتكامل J نلاحظ أنّ المقام $Q(x)$ عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية كلها مكررة لذلك:

فإن الكسر $\frac{x^2-x}{(x-3)^3}$ يفكك على شكل مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{x^2-x}{(x-3)^3}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}+\frac{A_3}{(x-3)^3}.........(*)$$

حيث A_1، A_2، A_3 ثوابت حقيقية نعينها.

تعيين A_1، A_2، A_3

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ في $Q(x)$ ثم نعوض في النتيجة x بالقيم التي تعدم الأقواس في عبارة $Q(x)$

لدينا: $x^2-x=(x-3)^2A_1+(x-3)A_2+A_3$

لما $x=3$ نجد $6=A_3$

لتعين A_1 و A_2 نختار قيمتين كيفيتين مختلفتين لـ x حيث $x\neq 3$

مثلا

لما $x=0$ و $x=4$ نجد $-6=9A_1-3A_2$ و $6=A_1+A_2$ بحل هاتين المعادلتين نجد:

$A_1=1$ و $A_2=5$

وبالتالي:

$$\int\frac{x^2-x}{(x-3)^3}dx=\int\frac{A_1}{x-3}dx+\int\frac{A_2}{(x-3)^2}dx+\int\frac{A_3}{(x-3)^3}dx$$

$$=\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{5}{(x-3)^2}dx+\int\frac{6}{(x-3)^3}dx$$

إذن: $$\int\frac{x^2-x}{(x-3)^3}dx=1\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}-\frac{6}{(x-3)^2}+c\ /\ c\in\mathbb{R}$$

مثال: أحسب التكامل: $J=\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}dx$

بالنسبة للتكامل J نلاحظ أّ ن المقام $Q(x)$ عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية غير مكررة و معاملات خطية مكررة لذلك:

فإن الكسر $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}$ يفكك على شكل مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-2)^1}+\frac{A_3}{(x-2)^2}.........(*)$$

حيث A_1، A_2 ، A_3 ثوابت حقيقية نعينها.

تعيين A_1، A_2 ، A_3

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ في $Q(x)$ ثم نعوض في النتيجة x بالقيم التي تعدم الأقواس في عبارة $Q(x)$

لدينا: $2x-1=(x-2)^2A_1+(x-1)(x-2)A_2+(x-1)A_3$

لما $x=1$ نجد $1=A_1$

لما $x=2$ نجد $3=A_3$

لتعين A_2 نختار قيمة كيفية لـ x حيث $x\neq 2$

مثلا لما $x=3$ نجد $5=1(1)+(2)(1)A_2+(2)(3)$ و $5=7+2A_2$ ومنه $-2=2A_2$ إذن $A_2=-1$

وبالتالي:

$$\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}dx=\int\frac{A_1}{x-1}dx+\int\frac{A_2}{(x-2)^1}dx+\int\frac{A_3}{(x-2)^2}dx$$

$$=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-1}{(x-2)^1}dx+\int\frac{3}{(x-2)^2}dx$$

إذن: $\int \frac{x^2-x}{(x-3)^3}dx = 1\ln|x-1| - 1\ln|x-1| - \frac{3}{(x-2)^1} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

__تطبيق:__

أحسب التكامل: $J = \int \frac{2x^2-5x-3}{(x-1)^2(x-2)^3}dx$

2) إذا كانت درجة $p(x)$ (بسط الكسر) أكبر أو تساوي درجة $Q(x)$ (مقام الكسر)

نجري عملية القسمة الإقليدية لـ $p(x)$ على $Q(x)$ نجد:

$\frac{r(x)}{Q(x)} + q(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $\deg(r(x)) < \deg(Q(x))$.

وبالتالي: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$

__مثال:__

أحسب التكامل: $\int \frac{x^2-3x+5}{x-2}dx$

لدينا:

$$\int \frac{x^2-3x+5}{x-2}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{3}{x-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

سلسلة تمارين غيرمحلولة

التمرين الأول: أحسب التكاملات الآتية:

$$\int \left(3x^2 - x - 5\right)dx, \qquad \int \left(5x - \sqrt[7]{x^5} - \frac{3}{x^2}\right)dx, \qquad \int_0^2 |2x-1|dx$$

التمرين الثاني: باستعمال تبديل المتغير والتعويض أحسب :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx, \quad \int x(x-1)^5 dx, \quad \int (\sin x)^3 \cos x dx, \quad \int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$$

التمرين الثالث: بالمكالمة بالتجزئة أحسب:

$$\int 2xe^x dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int_1^e x^2 \ln x dx$$

التمرين الرابع: أحسب بطريقة المكالمة باستعمال الكسور الجزئية ما يلي:

$$\int \frac{5x-1}{x^2-2x-15}dx, \quad \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx, \quad \int_1^3 \frac{x}{(x-2)^2}dx,$$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^2}dx, \quad \int \frac{x^2-3x+3}{x-2}dx,$$

المحور السابع:

الدوال ذات عدة متغيرات

المحور السابع: الدوال ذات عدة متغيرات

1.7. الدالة ذات عدة متغيرات

تعريف: نسمي دالة ذات عدة متغيرات حقيقية كل دالة f معرفة من جزء D من $\mathbb{R}^n$ أو كل $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}$

صورة $(x_1,x_2,...,x_n)$ هي العدد الحقيقي $f(x_1,x_2,...,x_n)$

في حالة f دالة ذات n متغير حقيقي نكتب:

$$f : D \subseteq R^n \to R$$
$$(x_1,x_2,...,x_n) \to f(x_1,x_2,...,x_n)$$

أمثلة:

$f(x_1,x_2) = 2x_2 - 3x_1 - 10$ هي دالة ذات متغيرين،

$f(x,y,z) = \dfrac{x+y-z}{2y-x-5}$ هي دالة ذات ثلاث متغيرات،

$f(x,y) = \ln(y-x-1)$ هي دالة ذات متغيرين.

2.7. ميدان تعريف دالة ذات عدة متغيرين

تعريف: نسمي ميدان (منطقة) تعريف دالة f ذات متغيرين مجموعة العناصر (x_1,x_2) من $\mathbb{R}^2$ التي لها صورة فعلية بـ f ونرمز لها بـ D_f أي:

$$D_f = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x_1,x_2) \ existe\}$$

مثال: لنعين ميدان تعريف الدالة في كل حالة ممايلي:

$$1)\ \ f_1(x,y) = \frac{x}{y-2x+1}$$

$$2)\ f_2(x,y)=\ln(5x-y-3)$$

$$3)\ f_3(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$$

<u>الحل:</u>

$$D_{f_1}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y-2x+1\neq 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y\neq 2x-1\right\}$$

نعلم أن $y=2x-1$ تمثل معادلة مستقيم.

إذن D_{f_1} هي نقاط المستوي التي لا تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$

$$D_{f_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 5x-y-3>0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y<5x-3\right\}$$

نعلم أن $y=5x-3$ تمثل معادلة مستقيم

إذن D_{f_2} هي نقاط المستوي الواقعة أسفل تماما المستقيم ذو المعادلة $y=5x-3$

$$D_{f_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2-9\geq 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ (x-0)^2+(y-0)^2\geq 3^2\right\}$$

نعلم أن $(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$ تمثل معادلة دائرة C مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $r=3$

إذن D_{f_3} هي نقاط المستوي الواقعة فوق المستقيم (بما فيها نقاط المستقيم) ذو المعادلة $y=5x-3$

3.7. المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى

المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى هي: $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ حيث $\frac{\partial f}{\partial x}$ يحسب باعتبار x متغير و y ثابت و $\frac{\partial f}{\partial x}$ يحسب باعتبار y متغير و x ثابت.

<u>مثال:</u> المشتقان الجزئيان للدالة حيث: $f(x,y)=\ln(y-x-1)$ هما $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{y-x-1}$، $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y-x-1}$.

4.7. المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لدالة f ذات متغيرين هي: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ حيث: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

<u>مثال:</u> لنحسب المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f حيث:

$$f(x,y)=x^3-5y^4x$$

لدينا: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-20y^3x$ ، $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2-5y^4$

ومنه: $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-20y^3x\right)=-60y^2x$

$$\frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-5y^4\right)=6x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2-5y^4\right)=-20y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-20y^3x\right)=-20y^3$$

سلسلة تمارين غير محلولة

تمرين1:

1- عين منطقة (ميدان) تعريف الدالة f في كل حالة :

$$1)\ f(x,y)=\ln(x-y-1)$$

$$2)\ f(x,y)=\sqrt{2x-y-1}$$

$$3)\ f(x,y)=\frac{x+y}{-2x+y-3}$$

$$4)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$$

$$5)\ f(x,y)=\sqrt{x^2-2x+y^2-4y-4}$$

2- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f في كل حالة.

3- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f في الحالات (1) و(2) و(3).

تمرين2:

1- عين منطقة (ميدان) تعريف الدالة f في كل حالة :

$$1)\ f(x,y)=e^{\ln(y-x)}$$

$$2)\ f(x,y)=e^{\frac{x-y}{2x-y-1}}$$

$$3)\ f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$$

2- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f في كل حالة.

3- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f في الحالات (1) و(2) و(3).

المحور الثامن:

المعادلات التفاضلية العادية

المحور الثامن: المعادلات التفاضلية العادية

1.8 المعادلة التفاضلية

تعريف 1:

المعادلات التفاضلية :هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة(تابعة لمتغير) وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف 2:

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

ملاحظة: حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.

2.8 المعادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

1.2.8 المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=f(x)$

حلها هو: $y=\int f(x)dx$.

مثال:

1) حل المعادلة $y'=2x+1$ العام هو $y=\int(2x+1)dx=x^2+x+c/c\in\mathbb{R}$.

2) الحل الخاص لها الذي يحقق : $y(0)=1$ هو : $y_p=x^2+x+1$

2.2.8 المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=f(x)h(y)$

تحوي متغيرين x,y يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالكيفية الآتية :

نكتبها على الشكل : $\frac{1}{h(y)}dy=f(x)dx$ ثم نكامل الطرفين وصولا إلى y حل المعادلة التفاضلية .

مثال: 1) لنحل المعادلة التفاضلية : $y'-3x^2y=0$ بطريقة فصل المتغيرات .

لدينا:

$$\frac{dy}{dx}-3x^2y=0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3x^2y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=3x^2dx$$
$$\Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int 3x^2dx$$
$$\Rightarrow \ln|y|=x^3+c$$
$$\Rightarrow |y|=e^{x^3+c}$$
$$\Rightarrow y=e^{x^3}e^c=c'e^{x^3}\ /\ c'\in\mathbb{R}$$

3.2.8 المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=ay$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$

حلولها هي $y=ce^{ax}\ /\ c\in\mathbb{R}^*$

<u>مثال:</u> حل المعادلة التفاضلية : $y'=5y$ هو : $y=ce^{5x}\ /\ c\in\mathbb{R}^*$

4.2.8 المعادلات التفاضلية من الشكل : $y'=ay+b$ حيث $a,b\in\mathbb{R}^*$

حلولها هي $y=ce^{ax}-\frac{b}{a}\ /\ c\in\mathbb{R}$

<u>مثال:</u> حل المعادلة التفاضلية : $y'=3y+2$ هو : $y=ce^{3x}-\frac{2}{3}\ /\ c\in\mathbb{R}$

5.2.8 المعادلات تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

- **المعادلات التفاضلية من الشكل :** $y''=f(x)$

نحلها على مرحلتين :

$y'=\int f(x)dx=F(x)+c_1$ ثم $y=\int\left(F(x)+c_1\right)dx=G(x)+c_1x+c_2\ /\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$

مثال: حل المعادلة : $y''=2x+e^x$

لدينا: $y'=\int\left(2x+e^{x}\right)dx=x^{2}+e^{x}+c_{1}$ ومنه:

$$y=\int\left(x^{2}+e^{x}+c_{1}\right)dx=\frac{x^{3}}{3}+e^{x}+c_{1}x+c_{2}\,/\,c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$$

– **المعادلات التفاضلية من الشكل: $ay''+by'+cy=f(x)$** $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$.

في حالة $f(x)=0$ تصبح على الشكل: $ay''+by'+cy=0$ تسمى معادلة متجانسة نرمز لحلها بـ y_h ومعادلتها المميزة هي: $ar^{2}+br+c=0$.

نحسب $\Delta=b^{2}-4ac$

– إذا كان $\Delta>0$ فإن للمعادلة المميزة حلان مختلفان $r_{1}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},r_{2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

والحل يعطى بالشكل: $y_{h}=c_{1}e^{r_{1}x}+c_{2}e^{r_{2}x}\,/\,c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$

– إذا كان $\Delta=0$ فإن للمعادلة المميزة حل مضاعف $r=\frac{-b}{a}$ والحل يعطى بالشكل:

$$y_{h}=\left(c_{1}+c_{2}x\right)e^{rx}\,/\,c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$$

– إذا كان $\Delta<0$ فإن للمعادلة المميزة حلان مركبان $r_{1}=a+ib,r_{2}=a-ib$ والحل يعطى بالشكل: $y_{h}=e^{ax}\left(c_{1}\cos(bx)+c_{2}\sin(bx)\right)/\,c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$

<u>أمثلة:</u>

1/ حل المعادلة التفاضلية: $y''+y'-2y=0$

معادلتها المميزة هي: $r^{2}+r-2=0$ و

لدينا $\Delta=(1)^{2}-4(-2)(1)=9$ و $r_{1}\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1,r_{2}=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$

إذن: $y_{h}=c_{1}e^{x}+c_{2}e^{-2x}\,/\,c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$

2/ حل المعادلة التفاضلية: $4y''-4y'+y=0$

معادلتها المميزة هي: $4r^{2}-4r+1=0$ لدينا $\Delta=(4)^{2}-4(4)(1)=0$ و بالتالي للمعادلة المميزة حل مضاعف $r=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

والحل يعطى بالشكل : $y_h=(c_1+c_2x)e^{\frac{1}{2}x}\,/\,c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

في حالة $f(x)\neq 0$

الحل العام لها هو : $y_g=y_h+y_p$ حيث y_h حل المعادلة المتجانسة $ay''+by'+cy=0$

و y_p حل خاص للمعادلة : $ay''+by'+cy=f(x)$

طريقة تعيين الحل الخاص y_p مع $f(x)$ كثير حدود درجته n.

إذا كان $c\neq 0$ نأخذ $y_p=g(x)$ حيث $\deg(g(x))=n$

إذا كان $c=0,\ b\neq 0$ نأخذ $y_p=g(x)$ حيث $\deg(g(x))=n+1$

إذا كان $b=c=0$ نأخذ $y_p=g(x)$ حيث $\deg(g(x))=n+2$

أمثلة:

حل المعادلة التفاضلية : $y''+y'-2y=2x-1$

نحلها على مرحلتين :

نعين y_h

المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة $y''+y'-2y=0$ هي : $r^2+r-2=0$

لدينا $\Delta=(1)^2-4(-2)(1)=9$ و $r_1\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1, r_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$

إذن: $y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x}\,/\,c_1,c_2\in\mathbb{R}$

نعين y_p

بما أن: $f(x)=2x-1$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة 1 و $c\neq 0$ نأخذ:

$$y_p=ax+b$$

لدينا : $y_p'=a$ و $y_p''=0$

ومنه: $y_p''+y_p'-2y_p=2x+1$ تعني $0+a-2(ax+b)=2x+1$ أي :

$-2ax-2b+a=2x-1$ وبالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b + a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

وبالتالي: $y_p = -x - 1$

من 1 و 2 نجد أن : $y_g = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \mathrm{x} - 1 / \mathrm{c}_1, c_2 \in \mathbb{R}$

سلسلة تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y' = 7x + 4$$

$$y' = 5y + 3$$

$$y'' = 5x^2 + e^x$$

التمرين الثاني:

حل بطريقة فصل المتغيرات المعادلات التفاضلية التالية:

1/ $y' - 3x^2 y = 0$

2/ $(x-1)y' - y = 0$

3/ $y' - \dfrac{2x}{x^2 - 1} y = 0$

التمرين الثالث:

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة التالية :

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$y'' + 9y = 0$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة التالية:

$$y'' + y' - 2y = 2x - 1$$

$$y'' + y' - 2y = x^2 - x + 1$$

الفهرس

المراجع

المراجع بالعربية

1. د. محمد جمال حمندوش ، الهندسة التحليلية في الفضاء، منشورات جامعة حلب، 2010.
2. د. عمر قوبا، الجبر 2 (الجبر الخطي) منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، 2017 .
3. د. وسام طالب، التحليل المتجهي، منشورات جامعة دمشق، 2015.
4. د. فرانك آيزو، ملخصات شوم: نظريات ومسائل في المصفوفات، الدار الدولية للنشر والتوزيع (النسخة العربية).
5. د. نزار محمد حسن، الرياضيات (1): منشورات جامعة تشرين كلية الهندسة التقنية، 2006 .
6. د. أحمد الغصن، أ. خديجة قعقع، الهندسة التحليلية في الفراغ، منشورات جامعة تشرين، 2006–2007 .
7. رمضان محمد جهيمة. التفاضل والتكامل ج1. 2018.
8. شيراز الطلباني و نزار إسماعيل، محاضرات في الجبر الخطي (ط3)، ديوان المطبوعات الجامعية، 1989.

المراجع بالفرنسية

1. Baba hamed C, Benhabib K, Algèbre 1 rappels de cours et exercices avec solutions. OPU.
2. Khelladi A. Introduction à l'analyse mathématique, OPU, 2002.
3. ANTON H et RORRES C. Elementary linear algebra: applications version. John Wiley & Sons, 2013.
4. Kuttler, Kenneth. Elementary linear algebra. The Saylor Foundation, 2012.
5. Kirkwood, James R, Bessie H. Kirkwood. Elementary Linear Algebra. Chapman and Hall/CRC, 2017.
6. Blondel V, Mathématiques analyse. Dunod, 2000.
7. Zizi K, Mathématiques algèbre et analyse, OPU, 2003
8. Gilbert S, Linear Algebra and it's Applications, First Edition, Davis California, 2013