



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa-  
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la  
Vie  
Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

## Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**Doctora LMD**

Option : *Physique Théorique*

## Thème

# Investigation de quelques problèmes quantiques en présence des défauts topologiques

par :

*Bouzenada Abdelmalek*

*Devant le jury*

|                               |                   |   |
|-------------------------------|-------------------|---|
| Pr. Benkhedir Mouhamed Loutfi | <b>Président</b>  | Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa |
| Pr. Abdelmalek Boumali        | <b>Rapporteur</b> | Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa |
| Pr. Abdelhafid Bounames       | <b>Examineur</b>  | Université De Mohammed Seddik Benyahia-Jijel    |
| Dr. Zaghrou Nasreddine        | <b>Examineur</b>  | ENS Assia Djebbar-Constantine                   |
| Dr. Houcine Aouanallah        | <b>Examineur</b>  | Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa |

*Date de Soutenance : 29 / 02 / 2024*

© *Mémoire effectué au*  
*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



# Investigation de quelques problèmes quantiques en présence des défauts topologiques

*Bouzenada Abdelmalek*<sup>12</sup>

1. [abdelmalekbouzenada@gmail.com](mailto:abdelmalekbouzenada@gmail.com)
2. [abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz](mailto:abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz)

## Abstract

In this thesis, we investigated the impact of a topological defect known as a Cosmic String on the thermal and magnetic characteristics of the Klein-Gordon oscillator. We used a novel approach derived from the Poisson distribution for the partition function to explicitly solve the Klein-Gordon within the context of topological defects.

We also addressed the Fischbach-Villars equation within a flat metric space and established the Fischbach-Villars oscillator in the presence of a Cosmic topological defect. We explored the associated thermal properties using a Zeta function approximation. Furthermore, we examined this latter oscillator under another metric spacetime.

## Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié l'impact d'un défaut topologique connu sous le nom de Corde Cosmique sur les caractéristiques thermiques et magnétiques de l'oscillateur Klein-Gordon. Nous avons utilisé une approche novatrice dérivée de la distribution de Poisson pour la fonction de partition afin de résoudre explicitement l'équation de Klein-Gordon dans le contexte des défauts topologiques.

Nous avons également abordé l'équation de Fischbach-Villars dans un espace métrique plat et établi l'oscillateur Fischbach-Villars en présence d'un défaut topologique cosmique. De plus, nous avons exploré les propriétés thermiques associées en utilisant une approximation de la fonction Zêta. En outre, nous avons examiné ce dernier oscillateur dans un autre espace-temps métrique.

## ملخص

في هذه الرسالة، قمنا بدراسة تأثير العيب الطبولوجي المعروف باسم "الحبل الكوني" على الخصائص الحرارية والمغناطيسية للمذبذب كلاين-جوردون. لقد استخدمنا نهجاً جديداً مستمداً من التوزيع البواسوني لدالة القسمة لحل كل من معادلتنا كلاين-جوردون وديراك بوضوح ضمن سياق العيوب القومية الكونية، مدققين نظامين مختلفين. كما قمنا أيضاً بمعالجة معادلة فيشباخ-فيلارس في الفضاء المتري المستوي وأنشأنا المذبذب فيشباخ-فيلارس بوجود عيب قومي كوني. بالإضافة إلى ذلك، قمنا بدراسة الخصائص الحرارية المرتبطة باستخدام تقريب رياضي باستخدام دالة زيتا. كما قمنا بفحص هذا المذبذب الأخير تحت متري زمني مختلف.

## Dédicace

*A ma mère et mon père .*

*A mes sœurs Assil, Abdelhadi, Mazen , Batoul , Elhacan , Elhocein*

*A mes sœurs Zohra, Zagheb, Samiha, Amani*

*A mes frères Azzeddine, Abdelkader*

*Aux maris de mes sœurs Tarek Khemici, Hamza Ben Chayeb*

*A Rikeb Djellab*

*A ma famille,*

*A tout mes amis,*

*A mon frère Pr. Attia Mohammed El Hadi*

*A mon frère Pr. Bouzenada Ismail*

*A mon cher amie Dr. Farid Sedairia*

*A mon cher amie Mourad Salmi*

*A mon cher amie Dr. Billal Elhamza*

*A mon cher amie Djalal Rebiai*

*A mes amis Dr. Nadir Djeddi, Bouzenada Badreddine , Dris Abid , Hamel Ayoub*

*A mes professeurs Dr. Abdessadek Saib , Pr. Aoulmi Zoubir , Dr. Mourad Benzaki*

*A mes amis Dr. Moussa Attia , Dr. Houam Alla , Dr. Rabeh Daouadi , Dris Khelil*

*A mes amis Dr. Rouabhia Tarek , Dr. Nabil Korichi , Dr. Moussa Abbad , Dr. Hamdi Seif*

*A mes amis Dr. Djamal Salmi , Haroun Bouamra , Mouataz Salmi , Saaid Salmi*

*A mes amis Sellat Ouaidi , Douaidi Med Cherif , Haroun Abidi , Lekhmici Abdou*

*A mes amis Saoud Haroun , Riyad Salmi , Saoud Foudil , Touares Abdallah, Mounir Bounouara*

*A mes amis Chegrouche Saleh , Brahmi Lazher , Salhi Bilal , Elaarbi Bouamra*

*A Djuini Nada , Aidoudi Khawla , Meriem Louafi , Asma Lagjroud, Rihab Bouamra*

*A Dr. Basma Bekkai , Lynda Brahmi , Gouasmia Hanane , Sara Fares , Sabrina Abdelhay*

*A Tout mes collègues ,*

*A Tout mes enseignants ,*

*Et spécialement mon encadreur Pr. Boumali Abdelmalek*

*Je dédie cet humble travail.*

## Remerciements

Cette thèse a été menée dans le cadre d'un projet de doctorat en physique théorique à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa. Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Allah tout-puissant pour m'avoir donné la détermination et le courage de mener à bien ce travail. Mes remerciements les plus sincères vont à ma chère mère et à mon cher père, qui m'ont soutenu tout au long de ma vie et m'ont donné la force et la détermination pour accomplir cela par moi-même.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, le Professeur **Abdelmalek Boumali**, pour m'avoir proposé un sujet aussi fascinant et enrichissant. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée et la liberté qu'il m'a laissée dans mon travail.

Mes remerciements vont également au Professeur **Benkhedir Moukamed Loutfi**, enseignant à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.

Je tiens à remercier sincèrement le Professeur **Abdelhafid Bourames**, enseignant à l'Université de Tijel, qui a accepté d'être membre du jury de ma thèse.

Je remercie chaleureusement le Dr. **Zaghou Nasreddine**, enseignant à l'ENS Assia Djebar de Constantine, pour avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers le Dr. **Hocine Aounallah**, enseignant à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa, qui a accepté d'être membre du jury de ma thèse. Un remerciement spécial à mon frère, le Professeur Mohammed El Hadi Attia de l'Université de Eloued, Je tiens à remercier chaleureusement mon ami, le Professeur Marwan Al-Raei de l'Université de Damas en Syrie. En particulier, je souhaite exprimer ma sincère gratitude envers mon collègue, le Dr. Farid Sedairia de l'Université de Cape Town en Afrique du Sud, qui m'a apporté son soutien tout au long de ce travail. Merci pour vos encouragements, vos conseils et votre abondante contribution en références scientifiques. Merci d'avoir été à mes côtés tout au long de cette période, et vous resterez mon ami pour toujours. Recevez ici mes sentiments les plus sincères.

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui nous ont encadré, observé, aidé, conseillé, apporté leur aide précieuse avec gentillesse et soutenu tout au long de ces années d'études. Enfin, nous exprimons notre gratitude à toutes les personnes qui ont contribué largement à la réussite de ce travail. Que ce soit depuis longtemps, depuis plusieurs années ou seulement quelques mois, de nombreuses personnes ont contribué à notre épanouissement. Nous les remercions du fond du cœur.



---

# TABLE DES MATIÈRES

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Abstract</b>  | <b>i</b>    |
| <b>Résumé</b>  | <b>ii</b>   |
| <b>ملخص</b>  | <b>iii</b>  |
| <b>Dédicace</b>  | <b>iv</b>   |
| <b>Remerciements</b>   | <b>v</b>    |
| <b>Table des matière</b>   | <b>viii</b> |
| <b>Liste des Tableaux</b>  | <b>ix</b>   |
| <b>Liste des Figures</b>   | <b>xii</b>  |
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>    |
| <b>1 Bref aperçu sur les défauts topologiques</b>                                | <b>6</b>    |
| 1.1 L'espace-temps de Minkowski . . . . .  | 6           |
| 1.1.1 Preamble . . . . .   | 6           |
| 1.1.2 La métrique . . . . .  | 6           |
| 1.2 L'algèbre tensorielle de l'espace-temps courbe . . . . .                     | 7           |
| 1.2.1 Rappel mathématique en (1+3) dimension . . . . .                           | 8           |
| 1.3 Les symboles de Christoffel et le tenseur de la courbure . . . . .           | 8           |
| 1.4 Le rôle fondamental du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire . . . . . | 10          |
| 1.5 Les défauts topologiques . . . . .   | 11          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.5.1    | Bref rappel . . . . .   | 11        |
| 1.5.2    | Classification des défauts topologiques . . . . .   | 11        |
| 1.6      | Les cordes cosmiques . . . . .  | 12        |
| 1.7      | Les équations relativistes dans un espace courbe . . . . .  | 14        |
| 1.7.1    | L'équation de Klein-Gordon . . . . .  | 14        |
| 1.7.2    | L'équation de Dirac . . . . .   | 15        |
| 1.8      | L'équation de Duffin–Kemmer–Petiau (DKP) . . . . .  | 15        |
| <b>2</b> | <b>Propriétés thermiques de l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'une corde cosmique</b>  | <b>17</b> |
| 2.1      | L'oscillateur de Klein-Gordon en 2D en présence d'une corde cosmique : Revue . . . . .  | 18        |
| 2.2      | Propriétés thermiques et magnétiques en présence des cordes cosmiques . . . . .   | 19        |
| 2.2.1    | Méthode de calcul . . . . .   | 19        |
| 2.2.2    | Propriétés thermiques . . . . .   | 21        |
| 2.2.3    | Propriétés magnétiques . . . . .  | 24        |
| <b>3</b> | <b>Propriétés statistiques de l'oscillateur de Feshbach-Villars en présence des cordes cosmiques en rotation</b>  | <b>28</b> |
| 3.1      | L'oscillateur de FV en présence d'une corde cosmique statique . . . . .   | 28        |
| 3.1.1    | L'oscillateur de FV en présence d'une corde cosmique en rotation . . . . .  | 35        |
| 3.2      | Propriétés thermiques de l'oscillateur de FV en présence de corde cosmique en rotation  | 44        |
| 3.2.1    | Fonction de partition . . . . .   | 44        |
| 3.2.2    | Les propriétés thermiques . . . . .   | 46        |
| <b>4</b> | <b>L'oscillateur de Feshbach-Villars dans la théorie de Kaluza-Klein</b>  | <b>51</b> |
| 4.1      | Bref aperçu sur théorie de Kaluza-Klein (KKT) . . . . .   | 52        |
| 4.2      | L'oscillateur de FV dans la théorie de Kaluza-Klein . . . . .   | 52        |
| 4.2.1    | Équation de Feshbach-Villars libre dans une corde cosmique . . . . .  | 52        |
| 4.2.2    | Effets d'un potentiel de paroi rigide . . . . .   | 55        |
| 4.2.3    | L'oscillateur de Feshbach-Villars dans le contexte d'un espace-temps de corde cosmique en théorie de Kaluza-Klein . . . . .   | 56        |
| 4.2.4    | L'oscillateur de Feshbach-Villars avec un potentiel de type paroi dure dans le contexte de l'espace-temps d'une corde cosmique en théorie de Kaluza-Klein . . . . . | 58        |
| 4.3      | L'oscillateur de FV dans une dislocation cosmique de l'espace-temps de Som–Raychaudhuri dans la théorie de Kaluza-Klein . . . . .                                   | 58        |
| 4.3.1    | Rappel . . . . .  | 58        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3.2    | L'équation libre de FV . . . . .   | 60         |
| 4.3.3    | Effets d'un potentiel de paroi rigide . . . . .  | 61         |
| 4.3.4    | Le cas de l'oscillateur de FV . . . . .  | 61         |
| 4.3.5    | L'oscillateur de FV plus un potentiel de paroi rigide . . . . .  | 62         |
| <b>5</b> | <b>L'oscillateur de Feshbach-Villars en présence d'une corde cosmique non-inertiel</b>                                       | <b>64</b>  |
| 5.1      | La dynamique quantique d'une particule de spin-0 dans une corde cosmique non inertiel dans la représentation de FV . . . . . | 64         |
| 5.2      | Quelques applications . . . . .  | 70         |
| 5.2.1    | Mouvement dans un potentiel de paroi rigide . . . . .  | 70         |
| 5.2.2    | Potentiel coulombien . . . . .   | 72         |
| 5.2.3    | L'oscillateur de Feshbach-Villars (FVO) . . . . .  | 74         |
|          | <b>Conclusion et Perspective</b>   | <b>80</b>  |
| <b>A</b> | <b>Généralisation de l'approximation de Poisson</b>  | <b>84</b>  |
| <b>B</b> | <b>La transformation générale de Feshbach-Villars (GFVT)</b>   | <b>86</b>  |
| B.1      | Espace-temps plat . . . . .  | 86         |
| B.2      | Espace-temps courbe . . . . .  | 88         |
| B.3      | L'oscillateur de FV dans un espace plat . . . . .  | 89         |
| <b>C</b> | <b>La formule d'Euler-Maclaurin et la sommation de Poisson</b>   | <b>91</b>  |
| C.1      | Euler-Maclaurin Formula . . . . .  | 91         |
| C.2      | Formule de somme de Poisson . . . . .  | 92         |
| <b>D</b> | <b>La transformation de Foldy-Wouthuysen (FW)</b>  | <b>94</b>  |
| D.1      | La Théorie de Foldy-Wouthuysen . . . . .   | 94         |
| <b>E</b> | <b>Liste des Articles</b>  | <b>100</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>173</b> |

---

## LISTE DES TABLEAUX

---

## TABLE DES FIGURES

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | L'espace temps courbe . . . . .   | 6  |
| 1.2 | L'espace d'un corde Cosmic . . . . .  | 14 |
| 2.1 | L'entropie $S$ et la capacité thermique spécifique $C$ en fonction de la température réduite $\tau$ pour $j = 2$ et différentes valeurs de $\alpha$ , avec le champ magnétique (a) $B = 1$ et (b) $B = 10$ . . . . .  | 22 |
| 2.2 | L'entropie $S$ et la chaleur spécifique $C$ en fonction de la température réduite $\tau$ pour $\alpha = 0, 5$ et différentes valeurs de $j$ , avec le champ magnétique (a) $B = 1$ et (b) $B = 10$ . . . . .          | 23 |
| 2.3 | L'entropie $S$ et la chaleur spécifique $C$ en fonction de la température réduite $\tau$ pour $\alpha = 0, 5$ et différentes valeurs du champ magnétique $B$ , avec le paramètre (a) $j = 0$ et (b) $j = 2$ . . . . . | 23 |
| 2.4 | La dépendance de $M$ et $\chi$ en fonction du champ magnétique $B$ pour différentes valeurs de $\alpha$ , à $\tau = 0$ . . . . .  | 24 |
| 2.5 | La dépendance de $M$ et $\chi$ du champ magnétique $B$ pour différentes valeurs de $\tau$ , à $\alpha = 0, 5$ et $j = 1$ . . . . .  | 25 |
| 2.7 | La dépendance de $M$ par rapport à $\tau$ et $\alpha$ pour différentes valeurs de $B$ en trois dimensions. . . . .  | 26 |
| 2.6 | La dépendance de $M$ en fonction de la température réduite $\tau$ pour différentes valeurs de $B$ et $\alpha$ , à $j = 1$ . . . . .   | 26 |
| 3.1 | L'énergie de la FVO dans une corde cosmique statique en fonction du nombre quantique $n$ pour différentes valeurs de $\alpha$ : ici $j = 1, a = 0.1, \omega = m = 1$ . . . . .  | 33 |
| 3.2 | Traces de la densité de probabilité de la FVO dans une corde cosmique statique en fonction de la distance radiale $r$ pour différentes valeurs de $n$ avec $j = 1$ . . . . .  | 35 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.3 | Traces de la densité de probabilité de l'État fondamental $n = 0$ de la FVO en fonction de la distance radiale $r$ pour différentes valeurs du paramètre $\alpha$ lorsque $\mathcal{N} = m$ : ici $j = m = \omega = 1$ .  | 36 |
| 3.4 | L'énergie de l'oscillateur FVO dans une corde cosmique en rotation en fonction du nombre quantique $n$ : ici, $j = \omega = m = 1$  | 41 |
| 3.5 | Tracés de la densité de probabilité de FVO dans une corde cosmique rotative en fonction de la distance radiale $r$ pour différentes valeurs de $n$ avec les paramètres $a = 0, 5$ et $j = 1$ .  | 42 |
| 3.6 | Tracés de la densité de probabilité de FVO pour l'état fondamental $n = 0$ dans une corde cosmique rotative en fonction de la distance radiale $r$ pour différentes valeurs des deux paramètres $\alpha$ et $a$ : ici $j = m = \omega = 1$ .  | 43 |
| 3.7 | Contour Integration of the Mellin transformation  | 46 |
| 3.8 | Les propriétés thermiques de FVO par rapport à $\tau$ dans le string cosmique rotatif pour $a = 0, 1$ : ici $j = m = \omega = 1$ .  | 48 |
| 3.9 | Les Propriétés thermiques du FVO par rapport à $\tau$ dans le cordon cosmique en rotation pour $\alpha = 0.5$ : ici, $j = m = \omega = 1$ .   | 49 |
| 5.1 | Esquisse des énergies en fonction de $\Omega$ pour $n = 0, j = 0$ et différentes valeurs de $\alpha$ . Lorsque $\alpha$ est réduit, $ E_{n,j}^{(\pm)} $ augmente.   | 71 |
| 5.2 | Esquisse des énergies en fonction de $\Omega$ pour différentes valeurs de $n$ et $\alpha$ . Dans (a), le profil pour $n = 0$ et $j = 1$ , (b) $n = 1$ et $j = 0$ , (c) $n = 1$ et $j = 1$ , et (d) $n = 1$ et $j = -1$ . Nous utilisons $M = 1, k_z = 1$ et $\kappa = 2.5$ . Une manifestation due aux effets de courbure est observée lorsque $\alpha$ est diminué, ce qui implique une augmentation de $ E_{n,j}^{(\pm)} $ .  | 72 |
| 5.3 | Esquisse des énergies (Eq. (5.37)) en fonction de $\Omega$ pour différentes valeurs de $n$ et $\alpha$ . Dans (a), le profil pour $n = 0$ et $j = 1$ , (b) $n = 3$ et $j = 1$ , (c) $n = 6$ et $j = 1$ , et (d) $n = 9$ et $j = 1$ . Nous utilisons $M = 1, k_z = 1$ , et $\kappa = 2, 5$ . Les états avec des valeurs croissantes de $n$ révèlent une approximation entre les courbes d'énergie. Lorsque $\alpha$ est diminué, $ E_{n,j}^{(\pm)} $ augmente.   | 74 |
| 5.4 | Esquisse des énergies (Eq. (5.37)) en fonction de $\Omega$ pour différentes valeurs de $n$ et $\alpha$ . Dans (a), le profil pour $n = 0$ et $j = -1$ , (b) $n = 0$ et $j = -3$ , (c) $n = 0$ et $j = -5$ ; et (d) $n = 0$ et $j = -7$ . Nous utilisons $M = 1, k_z = 1$ , et $\kappa = 2.5$ . En plus des caractéristiques présentes dans la Fig. (5.3), lorsque nous fixons $n$ et considérons différentes valeurs négatives de $m$ , les énergies sont définies dans une plage de rotation qui a tendance à diminuer avec $m$ négatif. | 75 |

- 5.5 Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\Omega$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $\alpha$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\omega = 1$ . . . . . 77
- 5.6 Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\omega$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Dans (a), nous représentons pour  $n = 0$ ,  $j = 1$  et (b)  $n = 0, j = -1$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\Omega = 1$ . . . . . 77
- 5.7 Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\omega$  pour  $n = 0$ ,  $j = -1$ ,  $\Omega = -1$  et différentes valeurs de  $\alpha$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ . . . . . 78

---

## INTRODUCTION

La Relativité Générale (RG) représente une théorie moderne de la gravité, liant cette force à la courbure de l'espace-temps en quatre dimensions [1]. Elle propose une description convaincante de la gravité en tant que propriété géométrique inhérente à l'espace-temps. Plus précisément, elle démontre que le champ gravitationnel classique est une manifestation de la courbure de l'espace-temps. Cette théorie physique est remarquable car elle repose essentiellement sur un fait expérimental bien établi depuis longtemps. Par exemple, elle a prédit avec succès l'existence d'ondes gravitationnelles [2] et de trous noirs [3].

La mécanique quantique est le cadre qui permet de décrire le comportement des particules à l'échelle microscopique [4,5]. C'est une théorie extrêmement réussie, en particulier la théorie quantique des champs, qui explique comment les particules élémentaires interagissent et comment trois des quatre forces fondamentales de la nature, à savoir les interactions faibles, fortes et électromagnétiques, émergent [6]. Cependant, les tentatives visant à élaborer une théorie unifiée conciliant la Relativité Générale et la mécanique quantique, c'est-à-dire une théorie de la gravité quantique, se sont heurtées à plusieurs obstacles et problèmes techniques qui n'ont pu être résolus, du moins jusqu'à présent [7–11].

Une méthode fondamentale pour élaborer une théorie abordant l'interface entre la gravité et la mécanique quantique relativiste consiste à généraliser les aspects de la dynamique relativiste des particules dans l'espace plat de Minkowski à une géométrie d'un espace courbe arbitraire [12–14]. Ainsi, cette approche peut être étendue pour fournir un aperçu de la manière dont le champ gravitationnel affecte les particules relativistes au niveau quantique. De cette manière, il est possible d'adapter cette approche pour traiter différents modèles où la notion de courbure intervient, permettant ainsi de formuler des prédictions sur les valeurs des observables macroscopiques nécessaires à une vérification expérimentale pertinente de certaines conséquences phénoménologiques, notamment en astrophysique et en cosmologie. De plus, la compréhension du comportement thermodynamique des particules relativistes, où les effets gravitationnels doivent être pris en compte [15–19], ainsi que l'analyse des caractéristiques



associées, telles que les quantités statistiques fondamentales, offre la possibilité d'obtenir des résultats utiles et essentiels dans le contexte de la description du comportement quantique de la gravité. Noton ici que l'étude des systèmes quantiques dans des espaces-temps courbes remonte à la fin des années 1920 et au début des années 1930, lorsque la généralisation des équations de Schrödinger et de Dirac à des espaces courbes a été envisagée, motivée par l'idée de construire une théorie conciliant la physique quantique et la Relativité Générale. Les champs spinoriels et les particules interagissant avec les champs gravitationnels ont fait l'objet de nombreuses investigations, notamment celles portant sur la détermination de la valeur du tenseur énergie-impulsion et sur le problème de la création de particules dans l'univers en expansion, ainsi que sur la mécanique quantique dans différents contextes d'espace-temps [20–22]. L'analyse des interactions gravitationnelles avec des systèmes de mécanique quantique a récemment suscité l'attention en physique des particules et est devenue un domaine de recherche actif.

Dans ce sens, la compréhension générale de l'interaction entre les particules mécaniques quantiques relativistes et la gravité repose sur la résolution des équations relativistes générales qui décrivent leur comportement. Ces solutions sont des outils précieux pour examiner et améliorer des modèles ainsi que des méthodes numériques permettant de résoudre des problèmes physiques complexes. De plus, l'influence du champ gravitationnel sur les systèmes quantiques a été un sujet d'intérêt en physique des particules depuis de nombreuses années [23–33].

Les défauts topologiques formés lors des transitions de phase du vide dans l'univers primitif jouent un rôle majeur dans les propriétés physiques des systèmes, tels que les monopôles, les cordes et les parois. L'influence de la topologie sur un système quantique revêt donc une grande importance. Les cordes cosmiques, en particulier, sont d'excellents candidats pour de telles études, car elles modifient la géométrie de l'espace-temps à l'échelle globale. Le rôle de la topologie dans divers systèmes physiques, des monopôles aux cordes cosmiques, est un domaine de recherche actif en cosmologie et en physique de la matière condensée [34–37]. Ainsi, la topologie de l'espace-temps induit des effets gravitationnels intéressants.

L'oscillateur harmonique est depuis longtemps reconnu comme un instrument essentiel dans de nombreux domaines de la physique théorique [38, 39]. Il s'agit d'un modèle bien étudié et entièrement soluble qui peut être utilisé pour examiner de nombreux problèmes complexes dans le cadre de la mécanique quantique. De plus, l'extension relativiste de l'oscillateur harmonique quantique offre un modèle utile pour comprendre un large éventail d'interactions moléculaires, atomiques et nucléaires. Aussi, le fait d'avoir un ensemble complet de solutions analytiques exactes lorsque l'on travaille avec un tel modèle peut donner naissance à des interprétations radicalement différentes de nombreux événements mathématiques et physiques, et par conséquent, des applications connexes peuvent être réalisées via la formulation sous-jacente [38, 40, 41]. Le comportement de divers systèmes quantiques relativistes est

désormais reconnu comme dépendant de manière critique de l'oscillateur de Dirac, tel que spécifié par Itô et al. [42] dans les développements antérieurs de la dynamique des particules de spin-1/2 avec une trajectoire linéaire. Ils ont démontré que la limite non relativiste de ce système conduit à un oscillateur harmonique ordinaire avec un terme de couplage spin-orbite substantiel. En réalité, Moshinsky et Szczepaniak [38] ont démontré que l'oscillateur de Dirac pouvait être dérivé de l'équation de Dirac libre en introduisant un potentiel linéaire externe par le biais d'un remplacement minimal de l'opérateur de moment  $p_\mu \rightarrow p_\mu - im\omega\beta x_\mu$ , avec  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Il convient de noter qu'en plus de la focalisation théorique sur la recherche de l'oscillateur de Dirac, des informations utiles peuvent être obtenues en examinant l'interprétation physique, ce qui est sans aucun doute nécessaire pour comprendre de nombreuses applications connexes [38–41, 43–66]. Inspiré par l'oscillateur de Dirac, un formalisme semblable pour les particules bosoniques a été introduit sous le nom de l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) [67, 68]. Récemment, de nombreux chercheurs se sont penchés sur la version covariante de ce modèle dans des espaces-temps courbes et diverses configurations.

Plusieurs contributions ont été apportées à l'étude des mouvements quantiques relativistes de particules scalaires et vectorielles soumises à l'influence gravitationnelle de différentes géométries de l'espace-temps courbe. Plusieurs chercheurs ont entrepris des efforts pour explorer les fonctions d'onde des bosons de spin-0, des bosons de spin-1 et des fermions de spin-1/2 relativistes, ainsi que leur évolution temporelle en utilisant la formulation hamiltonienne, c'est-à-dire en adoptant des équations de type Schrödinger. À cet égard, les équations de Feshbach et Villars (FV) revêtent une importance particulière [69, 70]. À l'origine, ces équations ont été conçues pour permettre une interprétation relativiste de l'équation de Klein-Gordon du second ordre. Dans ce scénario, les équations de FV découlent de la division de la fonction d'onde de Klein-Gordon en deux composantes pour générer une équation avec une dérivée temporelle du premier ordre. Ce formalisme a contribué à justifier certaines incohérences de l'équation de Klein-Gordon, telles que l'origine des énergies négatives, et il a permis une interprétation probabiliste de la théorie, à condition que la particule en question ait une contrepartie d'anti-particule. Ce sont ces problèmes fondamentaux qui ont conduit à l'abandon de la théorie de Klein-Gordon, et le formalisme présenté par Feshbach et Villars a ouvert la voie à sa réévaluation.

L'équation de Klein-Gordon, impliquant des dérivées du second et du premier ordre, ne comporte pas de densité définie positive  $\rho$  et, par conséquent, ne peut pas représenter une densité de probabilité de particules. De plus, la présence de la seconde dérivée temporelle suggère que la fonction d'onde possède deux degrés de liberté. Dans le cadre de l'interprétation de la théorie des champs, ces deux degrés de liberté correspondent à deux états de charge distincts. En conséquence, le courant de particules est interprété comme un courant de charge, tandis que la densité de charge mesure la différence entre le nombre de particules positives et négatives. Une interprétation particulière de l'équation de Klein-Gordon (KG) devient possible lorsque la séparation de ces deux degrés de liberté est clairement

définie. Cette clarification ouvre la voie à une interprétation probabiliste de l'équation de Klein-Gordon. Contrairement à la théorie de Klein-Gordon, le formalisme de Feshbach-Villars offre une compréhension des énergies négatives et peut aisément être adapté à une interprétation probabiliste. Par ailleurs, bien que FV et KG produisent les mêmes solutions, le formalisme de Feshbach-Villars présente plusieurs avantages par rapport à l'utilisation directe de l'équation de KG : on peut citer les suivants

- Dans l'équation de KG, les solutions d'énergie positive et négative sont mélangées, ce qui peut engendrer des complexités mathématiques et des problèmes d'interprétation. Le formalisme de Feshbach-Villars introduit des champs auxiliaires permettant de séparer les composantes d'énergie positive et négative de la fonction d'onde, simplifiant ainsi le traitement mathématique tout en le rendant plus intuitif sur le plan physique.
- Le formalisme de Feshbach-Villars élimine efficacement les solutions d'énergie négative des équations du mouvement, ce qui est particulièrement utile étant donné que ces solutions d'énergie négative dans l'équation de KG peuvent conduire à des prédictions non physiques. En travaillant exclusivement avec des solutions d'énergie positive, il est possible d'éviter ces problèmes.
- Le formalisme de Feshbach-Villars est couramment utilisé en présence d'interactions électromagnétiques, contribuant ainsi à maintenir l'invariance de jauge et simplifiant le traitement des particules de spin-1/2.
- L'équation issue du formalisme de Feshbach-Villars permet une interprétation probabiliste et offre une justification des énergies négatives en mécanique quantique des particules relativistes sans spin.

En résumé, le formalisme de Feshbach-Villars simplifie le traitement des particules et des champs relativistes, en particulier dans le contexte de la théorie quantique des champs. Il sépare les solutions d'énergie positive et négative, élimine les états d'énergie négative non physiques, tout en maintenant la covariance de Lorentz, ce qui en fait un outil précieux pour aborder divers défis en physique quantique relativiste.

Dans ce sens, cette thèse se concentre sur la résolution des équations relatives aux particules bosoniques de spin-0 en présence des cordes cosmiques dans un environnement gravitationnel, tout en étudiant leurs propriétés thermodynamiques. Ces propriétés ont été trouvés en utilisant plusieurs méthodes, notamment la méthode de Poisson et la méthode d'Euler-Maclaurin.

La thèse est organisée en cinq chapitres principaux plus une introduction.

Le premier chapitre offre un rappel succinct sur les défauts topologiques.

Le deuxième chapitre vise à explorer les propriétés thermiques et magnétiques de l'oscillateur Klein-Gordon en présence d'une corde cosmique.

Le troisième chapitre se penche principalement sur les propriétés statistiques de l'oscillateur de Feshbach-Villars en présence des cordes cosmiques en rotation.

Le quatrième chapitre a pour but d'étudier l'oscillateur de Feshbach-Villars dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein.

Le cinquième chapitre se focalise sur l'examen de la dynamique d'une particule de Klein-Gordon relativiste massive et sans spin dans l'espace-temps généré par une corde cosmique en rotation.

Enfin, la thèse se termine par une synthèse des résultats obtenus et un aperçu des perspectives futures.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## BREF APERÇU SUR LES DÉFAUTS TOPOLOGIQUES

### 1.1 L'espace-temps de Minkowski

#### 1.1.1 Préambule

**E**n mécanique newtonienne, l'espace est décrit par des coordonnées spatiales telles que  $(x, y, z)$ , et le temps est absolu, noté  $t$ . Ainsi, l'espace et le temps sont deux concepts distincts. En relativité restreinte, on introduit le concept d'espace-temps, où les coordonnées spatiales et temporelles sont combinées pour former les coordonnées de l'espace-temps. Chaque point de l'espace-temps représente un événement, associant un lieu spécifique dans l'espace et un moment précis dans le temps. Cette fusion de l'espace et du temps est essentielle pour comprendre la relativité restreinte (voir figure. (1.1)) [71–73].

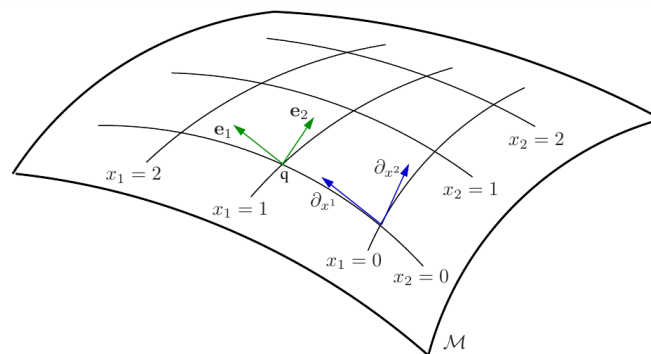


Fig. 1.1: L'espace temps courbe

#### 1.1.2 La métrique

La métrique de l'espace est un concept essentiel en physique, en particulier en relativité générale. Elle définit la géométrie de l'espace en permettant de mesurer les distances entre les points, les angles

et les rapports de longueur des vecteurs dans un espace courbe. Cette métrique est décrite par un tenseur métrique, une fonction mathématique qui assigne à chaque point de l'espace une matrice décrivant les distances entre les points voisins. En relativité générale, la métrique de l'espace est liée à la courbure de l'espace-temps, influençant les trajectoires des particules en l'absence de forces extérieures. Ainsi, la métrique de l'espace est cruciale pour comprendre la relativité générale et les phénomènes gravitationnels, en utilisant l'élément de ligne infinitésimal  $ds^2$ . La form general de la metrique et [7]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

avec  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

En résumé, la métrique est une fonction mathématique qui assigne à chaque point de l'espace-temps courbe une mesure de la distance locale entre deux points voisins. Elle est utilisée pour décrire la géométrie de l'espace-temps courbe dans la théorie de la relativité générale, où elle permet de relier la courbure de l'espace-temps à la distribution de matière et d'énergie.

## 1.2 L'algèbre tensorielle de l'espace-temps courbe

L'algèbre tensorielle est un outil mathématique essentiel pour la description de la géométrie de l'espace-temps courbe. Dans ce contexte, les tenseurs sont des objets mathématiques qui décrivent les propriétés de l'espace-temps courbe, tels que le champ gravitationnel. Les tenseurs sont des objets multidimensionnels qui peuvent être considérés comme des matrices généralisées. Ils sont définis en termes de leurs transformations sous des changements de coordonnées. Dans l'espace-temps courbe, la métrique est un exemple important de tenseur, qui décrit la distance entre deux points de l'espace-temps. L'algèbre tensorielle permet de définir des opérations mathématiques sur les tenseurs, telles que l'addition, la multiplication, la contraction et la dérivation covariante. La dérivation covariante est une généralisation de la dérivation ordinaire dans l'espace-temps courbe, qui prend en compte la courbure de l'espace-temps. L'algèbre tensorielle est utilisée pour décrire les équations de la relativité générale, qui décrivent la relation entre la géométrie de l'espace-temps courbe et le champ gravitationnel. Les équations de la relativité générale sont des équations tensorielles complexes, qui décrivent la courbure de l'espace-temps en termes de la distribution de masse et d'énergie.

Ainsi, l'algèbre tensorielle est un outil mathématique essentiel pour la description de la géométrie de l'espace-temps courbe et pour la formulation des équations de la relativité générale. Elle permet de définir des opérations mathématiques sur les tenseurs, qui décrivent les propriétés de l'espace-temps courbe, telles que le champ gravitationnel.

### 1.2.1 Rappel mathématique en (1+3) dimension

"L'espace-temps, également connu sous le nom d'espace de Minkowski, est un domaine d'étude qui traite de la déformation de l'espace en quatre dimensions. Cela implique un passage de la notation vectorielle tridimensionnelle à la définition de tenseurs en quatre dimensions, en prenant en compte la variable temporelle qui n'est pas fixe, contrairement à ce qui est utilisé dans la modélisation de la physique classique basée sur la mécanique newtonienne. Dans cet espace-temps, nous utilisons la règle de distribution du tenseur par rapport à une base de coordonnées  $\{e_\lambda\}$ , où  $(\lambda = 0, 1, 2, 3)$ . La multiplication matricielle dans cette quatrième dimension consiste à prendre en compte toutes les possibilités possibles et à les additionner.

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

ici

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

est le tenseur métrique fondamental relatif à l'espace-temps de Minkowski, avec [74].

Soit la fonction  $g(x)$ . Si nous prenons la dérivée de cette fonction, nous obtenons [11, 71, 75]

$$\begin{aligned} dg(x) &= \frac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial g}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x^n} dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

En appliquant la règle de sommation des indices répétés d'Einstein, nous pouvons réexprimer la dernière relation comme suit

$$dg(x) = \frac{\partial g}{\partial x^\mu} dx^\mu \Rightarrow \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

Ainsi, à partir de l'équation suivante :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (1.6)$$

alors, (1.5) devient

$$dg(x) = \partial_\mu g(x) dx^\mu. \quad (1.7)$$

## 1.3 Les symboles de Christoffel et le tenseur de la courbure

Les symboles de Christoffel, également connus sous le nom de connexions de Levi-Civita, jouent un rôle crucial dans la théorie de la relativité générale. Ils servent à décrire la dérivation covariante,

c'est-à-dire comment les vecteurs et les tenseurs changent le long d'une courbe dans un espace-temps courbe. Ces symboles sont déterminés à partir de la métrique de l'espace-temps, qui quantifie la distance entre deux points infinitésimaux. Les symboles de Christoffel résultent de la dérivation de la métrique par rapport aux coordonnées de l'espace-temps et de l'inversion de cette métrique. Ils se manifestent sous la forme de coefficients qui mesurent la contribution de la courbure locale de l'espace-temps à la dérivation covariante. Les symboles de Christoffel ne sont pas considérés comme des tenseurs, car leur transformation sous un changement de coordonnées n'est pas simple. Toutefois, en les combinant avec des vecteurs et des tenseurs appropriés, on obtient des quantités tensorielles qui permettent de décrire la courbure de l'espace-temps de manière covariante. Aussi, ces symboles possèdent des propriétés intéressantes, telles que leur symétrie dans leurs deux derniers indices et la torsion nulle, qui sont en relation avec la géométrie de l'espace-temps. Ils sont également essentiels pour décrire des phénomènes physiques tels que les géodésiques, qui décrivent la trajectoire d'un objet se déplaçant en ligne droite dans un espace-temps courbe, et la déviation géodésique, qui explique comment la courbure de l'espace-temps influe sur la trajectoire d'un rayon lumineux. En résumé, les symboles de Christoffel représentent un outil mathématique crucial dans la théorie de la relativité générale. Ils permettent une description tensorielle et covariante de la dérivation covariante et de la courbure locale de l'espace-temps, et peuvent être calculés à partir des dérivées partielles des composantes métriques par rapport aux coordonnées [11,72] comme suit :

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \left( \frac{dg_{\rho\nu}}{d\lambda} + \frac{dg_{\rho\lambda}}{d\nu} - \frac{dg_{\nu\lambda}}{d\rho} \right), \quad (1.8)$$

dont  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  sont les symboles de Christoffel.

En se basant sur cette relation, il est possible d'affirmer que le tenseur de Riemann quantifie l'absence de commutation entre deux dérivées covariantes successives appliquées à un champ vectoriel. En revanche, pour un champ scalaire et une connexion sans torsion, les deux dérivées covariantes successives commutent systématiquement. Si l'on se réfère à une base de coordonnées, les éléments constitutifs du tenseur de Riemann sont exprimés en fonction des coefficients de connexion par la formule suivante [76]:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\beta} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}, \quad (1.9)$$

Ce tenseur vérifiez la relation suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = -R_{\nu\sigma\rho}^{\beta}, \quad (1.10)$$



## 1.4 Le rôle fondamental du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire

Le tenseur de Ricci est un élément essentiel de la théorie de la relativité générale qui permet de caractériser la courbure de l'espace-temps. Il dérive du tenseur de courbure de Riemann et simplifie l'information contenue dans ce dernier. Plus spécifiquement, le tenseur de Ricci résulte de la contraction de deux indices du tenseur de courbure de Riemann. Il prend la forme d'un tenseur de second ordre et renferme des données sur la courbure locale de l'espace-temps en un point donné. Une caractéristique importante du tenseur de Ricci est sa symétrie, ce qui signifie que ses composantes restent inchangées indépendamment de l'ordre des indices.

La courbure scalaire est une grandeur qui décrit la courbure moyenne de l'espace-temps en un point précis. Elle se déduit en prenant la trace du tenseur de Ricci, c'est-à-dire en additionnant les composantes diagonales de ce tenseur. La courbure scalaire est donc une grandeur scalaire, c'est-à-dire une quantité qui ne dépend pas du système de coordonnées choisi. La courbure scalaire est un outil précieux pour caractériser la courbure globale de l'espace-temps. En effet, une courbure scalaire positive indique que l'espace-temps présente une courbure convexe, où la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180 degrés. À l'inverse, une courbure scalaire négative indique une courbure concave, où la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180 degrés. Enfin, une courbure scalaire nulle signifie que l'espace-temps est plat, dépourvu de courbure locale.

Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire jouent un rôle crucial dans la théorie de la relativité générale, car ils simplifient l'information contenue dans le tenseur de courbure de Riemann. Ils sont également fondamentaux pour décrire la courbure globale de l'espace-temps et pour formuler les équations d'Einstein, qui décrivent l'influence de la matière et de l'énergie sur la courbure de l'espace-temps. Ces quantités sont définies à partir du tenseur de Riemann par contraction de ses indices. Le tenseur de Ricci, notamment, est un tenseur du second ordre défini comme suit [11]:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{dx^{\lambda}} - \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^k \Gamma_{k\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^k \Gamma_{\nu k}^{\lambda}, \quad (1.11)$$

Ce tenseur

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (1.12)$$

est symétrique. En contractant les indices du tenseur de Ricci on obtient la courbure scalaire

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Avec le tenseur de Ricci et la courbure scalaire on peut définir le tenseur d'Einstein par [7]:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.14)$$

Puisque  $R_{\mu\nu}$  et  $g_{\mu\nu}$  sont tous deux des tenseurs symétriques du second ordre, le tenseur d'Einstein est également un tenseur symétrique du second ordre.

## 1.5 Les défauts topologiques

### 1.5.1 Bref rappel

La recherche sur les défauts topologiques dans un espace courbe possède une histoire longue et riche en physique, remontant aux années 1970, lorsque les physiciens ont commencé à explorer les propriétés topologiques des champs de jauge et des champs de gravité.

L'introduction de la théorie de la relativité générale d'Einstein a ouvert la voie à l'idée que la courbure de l'espace-temps pouvait être influencée par la présence de matière ou d'énergie.

Les cordes cosmiques, analogues à des défauts topologiques similaires aux lacunes dans les cristaux, ont également fait l'objet d'études approfondies. Les physiciens ont cherché à comprendre leur influence sur la formation des structures à grande échelle dans l'univers, ainsi que leur capacité à offrir des preuves substantielles en faveur de la théorie de la relativité générale.

En résumé, l'exploration des défauts topologiques dans un espace courbe a une histoire qui débute dans les années 1970, marquée par l'intérêt croissant des physiciens pour les propriétés topologiques des champs de jauge et des champs de gravité [1].

### 1.5.2 Classification des défauts topologiques

Un développement passionnant en cosmologie [22] a été la prise de conscience que l'univers peut se comporter très bien comme un système de matière condensée. Après tout, le cosmos est le domaine où la physique des particules à très haute énergie est pertinente et ceci est décrit par la théorie quantique des champs qui est aussi l'outil même utilisé dans la physique de la matière condensée.

La première classification des défauts topologiques et une discussion sur leur évolution ont été présentées par Kibble en 1976 [20]. Bien que les défauts cosmologiques aient des énergies extrêmement élevées, ils n'ont pas encore été détectés, et même les accélérateurs de particules les plus puissants ne peuvent les produire. Cependant, leur rareté suscite un vif intérêt, car leur découverte pourrait fournir un lien direct avec la physique des premiers instants de l'univers.

Les défauts topologiques se manifestent également dans la physique de la matière condensée, sous forme de vortex dans les superconducteurs ou les superfluides, de parois de domaine dans les matériaux

magnétiques, de solitons dans les polymères quasi-unidimensionnels, de dislocations ou de disclinations dans les solides désordonnés et les cristaux liquides.

Selon notre vision actuelle de la physique des particules, la matière aux hautes énergies et les températures doivent être décrites en termes de champs. Les symétries de jauge se sont avérées extrêmement utile pour décrire le modèle standard de la physique des particules. Spontané la rupture d'un groupe de symétrie interne est un élément essentiel de la norme modèle et ses extensions telles que les grandes théories unifiées et la supersymétrie. Ces positions d'énergie potentielle plus élevée sont les défauts topologiques. Le type de défaut formé dépend de l'ordre  $n$  de l'homotopie non triviale du groupe [22,77]: Ainsi, pour  $d = 4 - (n + 1)$ :

- $n = 0$ : **Parois de domaines**,  $d = 3$ .
- $n = 1$ : **Les cordes cosmiques**,  $d = 2$ .
- $n = 2$ : **Monopole Global**,  $d = 1$ .

## 1.6 Les cordes cosmiques

Les cordes cosmiques sont des objets hypothétiques dans l'univers, caractérisés par leur structure principalement linéaire, qui se seraient formés lors d'une transition de phase dans l'univers primordial, associée à des phénomènes tels que les brisures spontanées de symétrie (les parois de domaines, les cordes et les monopôles). Il est essentiel de ne pas confondre le concept de cordes cosmiques avec celui des cordes de la théorie des cordes. Les cordes de la théorie des cordes sont des objets microscopiques, de la taille de la longueur de Planck ( $l_p = 1.616252 \times 10^{-35}$  mètre), tandis que les cordes cosmiques sont des objets aussi grands, voire plus grands, que l'univers observable.

Parmi ces défauts, les cordes cosmiques ont été identifiées comme ayant un grand potentiel pour influencer la formation de la structure cosmique. En tant que concentrations de masse et d'énergie, elles exercent une influence sur le champ gravitationnel. Étant des objets étendus, elles affectent non seulement le mouvement des particules à proximité, mais aussi leur propre trajectoire, ce qui complique le calcul du champ gravitationnel généré par une corde cosmique isolée dans le vide.

La géométrie de l'espace autour d'une corde cosmique est décrite dans des coordonnées cylindriques  $(t, \rho, \varphi, z)$  par une équation spécifique, où  $\alpha$  est l'angle de déficit, défini comme  $\alpha = 1 - 4\mu$ , avec  $\mu$  représentant la densité de masse linéaire de la corde. L'angle azimutal varie dans l'intervalle  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Lorsque  $\alpha = 1$ , il n'y a pas de défaut. Cependant,  $\alpha$  prend des valeurs inférieures à 1, et même des valeurs supérieures à 1, correspondant à un espace-temps anti-conique avec une courbure négative [15, 17]. Cette géométrie présente une singularité conique qui provoque une courbure concentrée le

long de l'axe de la corde cosmique, tandis que la courbure est pratiquement nulle presque partout ailleurs. Cet espace est défini dans les coordonnées cylindriques  $(t, \rho, \varphi, z)$  par l'équation suivante :

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (1.15)$$

et en coordonnées sphériques avec

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.16)$$

Elle possède une singularité conique présentée par le tenseur de courbure suivant :

$$R_{\rho\varphi}^{\rho\varphi} = \frac{1 - \alpha}{4\alpha} \delta_2(\rho), \quad (1.17)$$

ou  $\delta_2(\rho)$  est la fonction bidimensionnelle de Dirac dans l'espace plat. La singularité conique donne naissance à la courbure concentrée sur l'axe de la corde cosmique. Dans les applications cosmologiques, les cordes sont généralement courbes, dynamiques et peuvent former des boucles fermées. L'énergie d'une corde reste concentrée le long d'une courbe dépendant du temps pendant une durée très longue par rapport au temps dynamique de la corde [22].

Pour une corde droite et statique, il suffit de rechercher une solution des équations du mouvement dans deux dimensions spatiales, puis d'utiliser l'invariance de translation pour étendre la solution à trois dimensions. Par exemple, si la solution en deux dimensions est  $\Phi_0(x, y)$ , alors la solution en trois dimensions est  $\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x, y)$ .

La théorie la plus simple qui donne lieu à des solutions de cordes est décrite par le lagrangien :

$$L = \|\partial_\mu \Phi\|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (1.18)$$

où  $\lambda$  est une constante de couplage sans dimension,  $\eta$  est la valeur d'espérance du vide du champ  $\Phi$  et la métrique a une signature  $(+, -, -, -)$ . Nous utiliserons également des unités naturelles tout au long de sorte que  $\hbar = c = 1$ . Ce lagrangien est invariant sous une symétrie globale  $U(1)$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\Lambda}$  (pour toute constante  $\Lambda$ ), et les équations de mouvement correspondantes sont [11, 72]

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = -\frac{\lambda}{2} (|\Phi|^2 - \eta^2) \Phi, \quad (1.19)$$

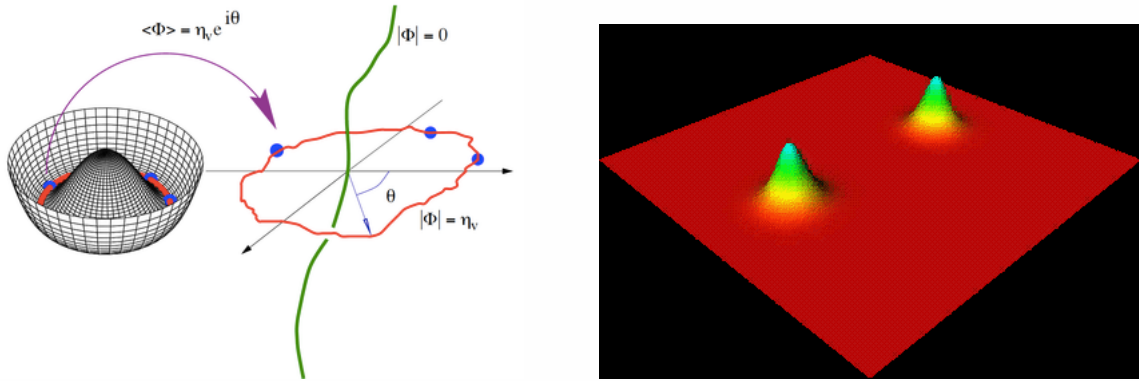


Fig. 1.2: L'espace d'un corde Cosmic

Formation de cordes dans le potentiel "chapeau mexicain"  $V(|\Phi|)$ . Le potentiel est représenté à gauche, avec sa variété circulaire (rouge) sur laquelle 3 points (bleu) ont été choisis au hasard. La partie droite montre (en rouge) un chemin fermé dans l'espace physique, le long duquel  $|\Phi| = \eta_v$ ; les points bleus dans l'espace physique sont les points qui correspondent aux points bleus indiqués sur le collecteur de vide. En faisant le tour du chemin dans l'espace physique, le champ s'enroule une fois autour du collecteur de vide. Par continuité du champ,  $\Phi$  doit disparaître quelque part dans le cercle de l'espace physique. C'est le centre de la chaîne dessinée en vert.

Considérons un champ scalaire complexe,  $\Phi$ , en trois dimensions spatiales, avec une fonction d'énergie potentielle,  $V(|\Phi|) = (|\Phi|^2 - \eta_v^2)^2$ . La configuration d'énergie minimale a  $|\Phi| = \eta_v$  mais la phase de  $\Phi$  est indéterminée et marque les points sur le collecteur de vide qui est un cercle. Un chemin fermé qui s'enroule autour du cercle ne peut pas être contracté en continu jusqu'à un point et il peut donc y avoir des chaînes dans cette théorie des champs. Si, lorsque l'on fait le tour d'un chemin fermé dans l'espace physique, on s'enroule également autour du cercle sur le collecteur de vide  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  fois, alors il y aura peut-être  $n$  cordes passant par le chemin fermé dans l'espace physique. (Voir Figure 1.) Notez qu'au centre de la corde  $|\Phi| = 0$  et donc la densité d'énergie est non nulle au cœur de la corde.

## 1.7 Les équations relativistes dans un espace courbe

### 1.7.1 L'équation de Klein-Gordon

L'équation libre de Klein-Gordon (KG) dans un espace courbe est donnée par la relation suivante :

$$(D^2 - \xi R - m^2) \psi = 0, \quad (1.20)$$

où l'opérateur  $D^2$ , représentant le Dalemberdien dans un espace courbe, est défini par

$$D^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (1.21)$$

$g = |\det(g_{\mu\nu})|$ ,  $R$  est le scalaire de Ricci, et  $\xi$  est une constante de couplage : elle vaut 0 pour le couplage minimal, et  $\frac{1}{6}$  pour le couplage conformationnel. Dans ce qui suit, nous mettons  $\xi = 0$ . En introduisant une interaction électromagnétique, l'équation (1.20) devient :

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + ieA_\mu) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} ((\partial_\nu + ieA_\nu)) - m^2 \right] \psi = 0. \quad (1.22)$$

### 1.7.2 L'équation de Dirac

L'équation de Dirac dans un espace courbe en présence d'un potentiel  $A^\mu$  est donnée par la relation

$$\{i\tilde{\gamma}^\mu(x) [(\partial_\mu + ieA_\mu) - \Gamma_\mu] - m\} \psi = 0, \quad (1.23)$$

avec  $\tilde{\gamma}^\mu(x)$  sont les matrices de Dirac dans l'espace courbe : sa relation avec les matrices  $\gamma^a$  de l'espace plat est donnée par :

$$\gamma^\mu(x) = E_a^\mu(x) \gamma^a. \quad (1.24)$$

$E_a^\mu(x)$  sont les matrices inverse de la tétrade dont

$$g^{\mu\nu} = E_a^\mu E_b^\nu \eta^{ab}. \quad (1.25)$$

Les connections spinorielles  $\Gamma_\mu$  sont calculées en utilisant la relation (1.26)

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}, \quad (1.26)$$

où

$$\Sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (1.27)$$

Notons ici que les indices  $(a, b, c) = 0, 1, 2, 3$  indiquent le repère de référence local, et les indices  $(\mu, \nu)$  indiquent un espace-temps courbe.

## 1.8 L'équation de Duffin–Kemmer–Petiau (DKP)

Dans un espace courbe, l'équation de DKP est donnée par la relation

$$(i\tilde{\beta}^\mu \nabla_\mu - m) \psi_K = 0, \quad (1.28)$$

avec  $m$  est la masse du boson et  $\tilde{\beta}^\mu$  sont les matrices de Kemmer dans la nouvelle configuration satisfaisant à la relation

$$\tilde{\beta}^\mu = E_a^\mu(x) \beta^a. \quad (1.29)$$

La dérivée covariante dans l'équation (1.28) est défini par

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Sigma_\mu, \quad (1.30)$$

dont

$$\Sigma_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b], \quad (1.31)$$

la connexion affine. Enfin, les connexions de spin  $\omega_{\mu ab}$  peuvent écrire en fonction de symboles de Christoffel comme suit :

$$\omega_\mu^{ab} = e_\alpha^a e^{\nu b} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a. \quad (1.32)$$

---

---

## CHAPITRE 2

---

### PROPRIÉTÉS THERMIQUES DE L'OSCILLATEUR DE KLEIN-GORDON EN PRÉSENCE D'UNE CORDE COSMIQUE

**L**e principal objectif de ce travail est d'étudier l'influence des paramètres géométriques de l'espace-temps sur les systèmes de basses dimensions pour un système de mécanique quantique donné. Plus précisément, leurs effets sur les propriétés thermiques et magnétiques de ces systèmes. Dans ce sens, nous nous concentrons sur l'évaluation de la thermodynamique de l'oscillateur Klein-Gordon 2D (KGO) dans un arrière-plan produit par des défauts topologiques en présence d'un champ magnétique appliqué. Ces propriétés ont été calculées en utilisant l'approximation de Poisson [78–80]. La connaissance de ces propriétés des équations relativistes joue un rôle important dans la compréhension globale des propriétés physiques de différents champs gravitationnels dans les régimes relativistes et non relativistes [52, 54, 59, 60, 81–87]. Dans ce sens, nous sommes également intéressés à étudier le système physique, dans lequel la thermodynamique et la relativité générale contribuent également à la dynamique du système. En particulier, nous voulons étudier comment les propriétés statistiques sont modifiées si les particules subissent la courbure de l'espace-temps dérivée des principes de la relativité générale. Remarquez ici que ces problèmes se produisent généralement près d'un trou noir, ou d'étoiles dans le champ gravitationnel d'une galaxie [88]<sup>1</sup>.

---

1. A. Bouzenada, A. Boumali, F. Serdouk, "Thermal properties of the 2D Klein-Gordon oscillator in a cosmic string space-time", *TMF*, 216:1 (2023), 169–183; *Theoret. and Math. Phys.*, 216:1 (2023), 169–183, <https://doi.org/10.1134/S0040577923070115>



## 2.1 L'oscillateur de Klein-Gordon en 2D en présence d'une corde cosmique : Revue

L'oscillateur Klein-Gordon dans l'espace plat est écrit comme suit [89, 90]:

$$\{(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) + E^2 - m^2\} \psi = 0, \quad (2.1)$$

dans lequel le moment  $\mathbf{p}$  est remplacé par  $\mathbf{p} - im\omega\gamma^0\mathbf{r}$ , où  $\mathbf{r}$  est le vecteur de position,  $m$  est la masse de la particule et  $\omega$  est la fréquence de l'oscillateur. Dans le champ gravitationnel, l'équation d'une particule scalaire massive apparaît comme suit [12, 91, 92]:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2 + \zeta R \right\} \psi = 0, \quad (2.2)$$

$\zeta$  est une constante de couplage réelle sans dimension et  $R$  est le scalaire de courbure de Ricci défini par  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de courbure de Ricci.  $g^{\mu\nu}$  est le tenseur métrique inverse et  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

En coordonnées cylindriques  $(t, \rho, \varphi, z)$ , la métrique de l'espace-temps d'une corde cosmique est donnée par [26, 27, 53, 57, 93, 94]:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (2.3)$$

où  $-\infty < (t, z) < +\infty$ ,  $0 < \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Le paramètre  $\alpha = 1 - 4\mu$  est l'angle de déficit associé à une géométrie conique. Ici,  $\mu$  est la densité de masse linéaire de la corde dans des unités naturelles ( $\hbar = c = 1$ ).

Ainsi, les solutions propres pour un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  dans ce type d'espace peuvent être résumées comme suit [53]:

- La forme de la fonction d'onde totale est écrite comme suit :

$$\psi(\rho) = e^{-iEt} e^{ij\phi} (m\Omega\rho^2)^{|j|/\alpha} \exp\left(-\frac{m\Omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha}, m\Omega\rho^2\right), \quad (2.4)$$

avec  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  et  ${}_1F_1$  est la fonction hypergéométrique confluyente [79].

- En revanche, la valeur propre a la forme suivante :

$$E_{n,j,\alpha} = \pm m \sqrt{2m\Omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{|j|}{\alpha}\right) + m^2}, \quad (2.5)$$

avec  $\left(2m\Omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{|j|}{\alpha}\right) + m^2 \geq 0\right)$ ,  $\alpha$  est l'angle de déficit,  $\omega_0 = \frac{eB}{2m}$  est la fréquence cyclotronique de la particule,  $\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$  est le nombre

quantique principal du système [53]. L'apparition du paramètre  $\alpha$  dans le spectre d'énergie brise la dégénérescence des niveaux d'énergie.

La forme du spectre d'énergie nous permet, à travers la fonction de partition, de calculer les propriétés thermiques et magnétiques de notre oscillateur en question. Cette fonction a été dérivée en utilisant l'approximation de **Poisson**.

## 2.2 Propriétés thermiques et magnétiques en présence des cordes cosmiques

### 2.2.1 Méthode de calcul

La fonction de partition du système est le point de départ pour dériver toutes les propriétés thermiques du système en question. Cette caractéristique peut être calculée en additionnant directement tous les niveaux d'énergie disponibles pour le système. En fonction de la forme de la valeur propre de l'énergie, la fonction de partition  $Z$  est écrite comme suit :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{K_B T} \quad (2.6)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Les quantités thermiques telles que l'énergie libre, l'énergie totale, l'entropie et la chaleur spécifique obéissent aux expressions suivantes :

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{d \ln Z}{d\beta} \quad (2.7)$$

$$S = \ln Z - \beta \frac{d \ln Z}{d\beta}, \quad C = \beta^2 \frac{d^2 \ln Z}{d\beta^2}. \quad (2.8)$$

Pour évaluer la fonction de partition, nous utilisons la formule de Poisson [79]. Dans ce sens, pour les fonctions  $f$  appropriées, la formule de sommation de Poisson peut être donnée comme suit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k), \quad (2.9)$$

où  $\hat{f}$  est la transformée de Fourier de  $f$  et avec [95–99]

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} f(n) = \frac{1}{2} (f(0) - f(n_{\max} + 1)) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{n_{\max}+1} f(y) e^{-i2\pi\nu y} dy. \quad (2.10)$$

Stekalov [95–100] a formulé une expression analytique simple pour la fonction de partition des oscillateurs de Morse. Pour réduire les erreurs par rapport aux résultats expérimentaux, il a proposé une expression en forme fermée de la fonction de partition basée sur la formule de sommation de

Poisson. Cette approche devient très utile pour d'autres auteurs [95–100]. Ils l'ont utilisée pour calculer les propriétés thermiques de certaines molécules diatomiques pour différents types de potentiels. Dans toutes ces études, les auteurs ont utilisé l'approximation classique avec  $\nu = 0$ . Dans ce cas, (2.10) se réduit à :

$$\sum_{n=0}^{n_{max}} f(n) = \frac{1}{2} (f(0) - f(n_{max} + 1)) + \int_0^{n_{max}+1} f(y) dy. \quad (2.11)$$

En mettant l'équation (2.5) dans l'équation (2.6), la fonction de partition devient :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-\beta m \sqrt{2m\Omega(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1) - 2m(w + w_0 \frac{|j|}{\alpha}) + m^2}} \\ &= \sum_n e^{-\beta m \sqrt{an+b}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ici

$$a = 4m\Omega, \quad b = 2m\Omega \left( \frac{|j|}{\alpha} + 1 \right) - 2m \left( w + w_0 \frac{|j|}{\alpha} \right) + m^2, \quad (2.13)$$

et

$$f(m) = e^{-\beta m \sqrt{an+b}}. \quad (2.14)$$

Comme la fonction  $f(m)$  obéit à la condition suivante (pour plus de détails, voir Annexe [annexe A])

$$f^{(2S)}(0) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} f^{(S)}(0) = 0 \quad (2.15)$$

la fonction  $Z$  est transformée en

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \frac{2}{a\beta^2} (\beta\sqrt{b} + 1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -\frac{f^{(1)}(0)}{(2\nu\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2\nu\pi)^4} \right), \quad (2.16)$$

où

$$\int_0^{+\infty} f(n) dn = \frac{2}{a\beta^2} (\beta\sqrt{b} + 1), \quad (2.17)$$

$$f^{(1)}(0) = -\frac{a\beta}{2\sqrt{b}} \exp(-\beta\sqrt{b}), \quad (2.18)$$

$$f^{(3)}(0) = -\left( \frac{3a^3\beta}{8b^{\frac{5}{2}}} + \frac{3a^3\beta^2}{8b^2} + \frac{a^3\beta^3}{8b^{\frac{3}{2}}} \right) \exp(-\beta\sqrt{b}). \quad (2.19)$$

À ce stade, nous pouvons noter que notre méthode peut être considérée comme une généralisation de celle utilisée par Strelakov : Dans notre cas, nous avons pris la somme sur toutes les valeurs du paramètre  $\nu$ , contrairement aux cas proposés par [95–100] où ils choisissent  $\nu = 0$ . Dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité, nous fixons  $m = 1$ . Ainsi, notre méthode peut être vue comme une généralisation de celle utilisée par Strelakov [95–100]. Contrairement à l'auteur, nous avons pris la somme sur toutes les valeurs du paramètre  $\nu$ . Dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité, nous

fixons  $m = 1$ .

En introduisant la nouvelle variable  $\tau = \frac{1}{\beta}$ , l'équation (1.5) devient

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \frac{2\tau^2}{a} \left( \frac{\sqrt{b}}{\tau} + 1 \right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -\frac{f^{(1)}(0)}{(\nu\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2\nu\pi)^4} \right). \quad (2.20)$$

Dans ce cas, toutes les grandeurs thermiques définies par les équations (2.7) and (2.8) sont transformées en

$$F = -\tau \ln(Z), \quad U = \tau^2 \frac{d \ln(Z)}{d\tau}, \quad (2.21)$$

$$S = \ln(Z) + \tau^2 \frac{d \ln(Z)}{d\tau}, \quad C = 2\tau \frac{d \ln(Z)}{d\tau} + \tau^2 \frac{d^2 \ln(Z)}{d\tau^2}. \quad (2.22)$$

Maintenant, nous pouvons présenter nos résultats numériques en ce qui concerne les propriétés thermiques et magnétiques de notre problème en question. En particulier, nous nous concentrerons uniquement sur l'influence des différents paramètres liés à la géométrie de l'espace-temps sur les fonctions d'entropie, de chaleur spécifique et de magnétisation.

## 2.2.2 Propriétés thermiques

En utilisant la fonction de partition  $Z$ , les propriétés thermiques de notre système peuvent être facilement accessibles. Ces quantités sont données en fonction de la température réduite  $\tau$  et pour diverses valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $j$  et  $B$ . Les résultats obtenus sont présentés dans les figures. (2.1), (2.2) et (2.3) respectivement. Ils montrent ce qui suit :

- La figure. (2.1) montre la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction de la température  $\tau$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Rappelons que ce paramètre est l'angle de déficit associé à une géométrie conique obéissant à  $\alpha = 1 - 4\eta$ . Comme on peut le voir, même si l'effet de l'angle  $\alpha$  est clair, le champ magnétique n'a aucun effet sur les fonctions  $S$  et  $C$ . Le cas  $j = 0$  n'est pas considéré car il absorbe l'effet du paramètre  $\alpha$  (Eq. (2.5)).
- Contrairement à la figure. (2.1), l'objectif de la construction de la figure. (2.2) est de déterminer l'influence du paramètre  $j$  sur les fonctions représentées dans la figure. (2.1). La figure. (2.2) présente la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique par rapport à la température  $\tau$  pour différentes valeurs du paramètre  $j$ . À l'exception du cas  $j = 0$ , nous observons que l'impact de  $j$ , pour  $B = 1$  et  $B = 10$ , sur les deux fonctions n'est pas significatif.
- Enfin, la figure. (2.3) s'intéresse à tester l'influence du champ magnétique sur les fonctions  $S$  et  $C$ . La construction de cette figure est réalisée en fixant le paramètre  $\alpha$  et en choisissant  $j = 0.2$ . Pour  $j = 0$ , même si le champ magnétique est clairement influencé, l'effet de  $\alpha$  est absent (voir le premier élément). Pour  $j = 2$ , l'effet du défaut topologique via le paramètre  $\alpha$  est montré

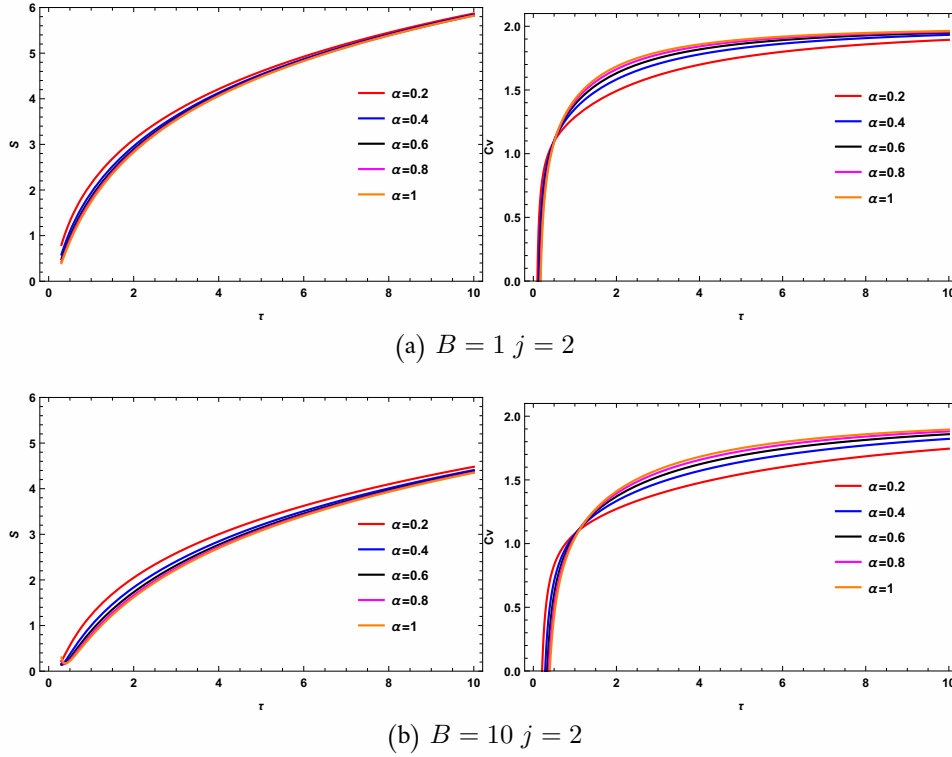
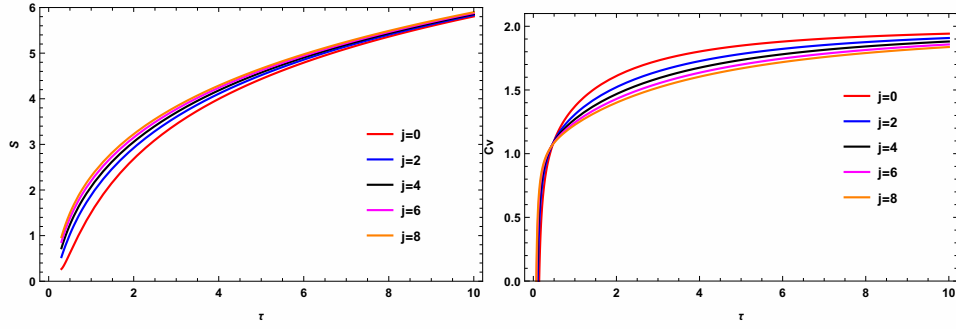


Fig. 2.1: L'entropie  $S$  et la capacité thermique spécifique  $C$  en fonction de la température réduite  $\tau$  pour  $j = 2$  et différentes valeurs de  $\alpha$ , avec le champ magnétique (a)  $B = 1$  et (b)  $B = 10$ .

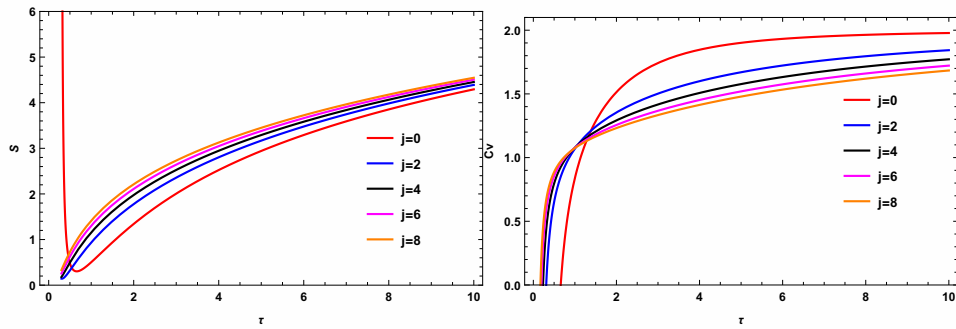
par la approximation proche des courbes d'entropie et de la chaleur spécifique, contrairement au premier cas  $j = 0$ , où toutes les courbes sont bien séparées. Cependant, le champ magnétique affecte toujours les fonctions  $S$  et  $C$ .

À ce stade, deux observations peuvent être faites concernant les courbes de la chaleur spécifique :

- Les courbes de chaleur spécifique convergent vers la point 2.
- La déviation au début de la capacité thermique est due à l'addition de tous les états quantiques possibles. La cause de cela peut être expliquée de la manière suivante : Le système quantique absorbe de la chaleur de l'environnement adjacent au défaut topologique et fournit simultanément une partie de la chaleur stockée.

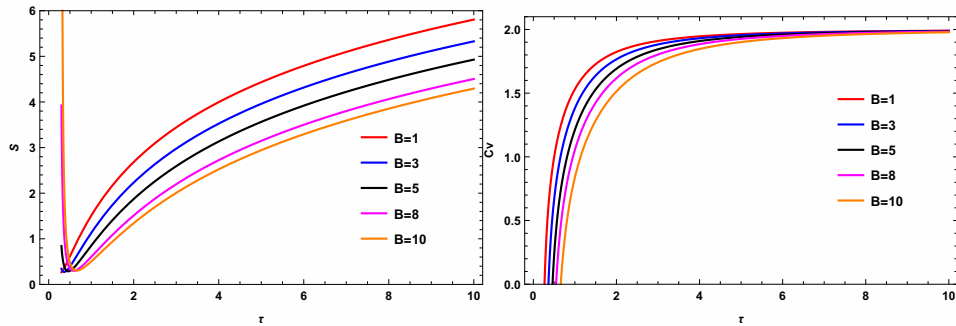


(a)  $B = 1, \alpha = 0.5$

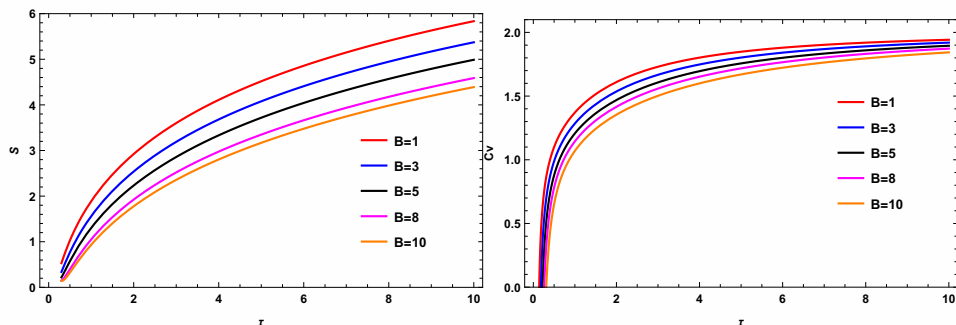


(b)  $B = 10, \alpha = 0.5$

Fig. 2.2: L'entropie  $S$  et la chaleur spécifique  $C$  en fonction de la température réduite  $\tau$  pour  $\alpha = 0, 5$  et différentes valeurs de  $j$ , avec le champ magnétique (a)  $B = 1$  et (b)  $B = 10$ .



(a)  $\alpha = 0.5, j = 0$



(b)  $\alpha = 0.5, j = 2$

Fig. 2.3: L'entropie  $S$  et la chaleur spécifique  $C$  en fonction de la température réduite  $\tau$  pour  $\alpha = 0, 5$  et différentes valeurs du champ magnétique  $B$ , avec le paramètre (a)  $j = 0$  et (b)  $j = 2$ .

Après avoir discuté de toutes les influences possibles des différents paramètres sur les propriétés

thermiques, nous sommes maintenant prêts à examiner l'influence de ces paramètres sur les propriétés magnétiques de notre système.

### 2.2.3 Propriétés magnétiques

La fonction d'aimantation peut être calculée via la fonction de partition comme suit :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \\ &= \tau \frac{\partial \ln Z}{\partial B}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

À la température absolue nulle  $T = 0$ , (2.23) devient

$$M = -\frac{\partial E_{n,\alpha}}{\partial B}, \quad (2.24)$$

avec  $E_{n,\alpha}$  donné par (2.5). Cette quantité sert à examiner la possibilité de phases de transition dans le système.

D'autres quantités intéressantes appelées susceptibilité magnétique  $\chi$  peuvent être introduites en plus de la magnétisation. Cette quantité mesure dans quelle mesure la matière sera magnétisée dans un champ magnétique appliqué. Nous utilisons cette quantité afin de clarifier la nature de la phase de transition si elle existe. Elle est définie comme suit :

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}. \quad (2.25)$$

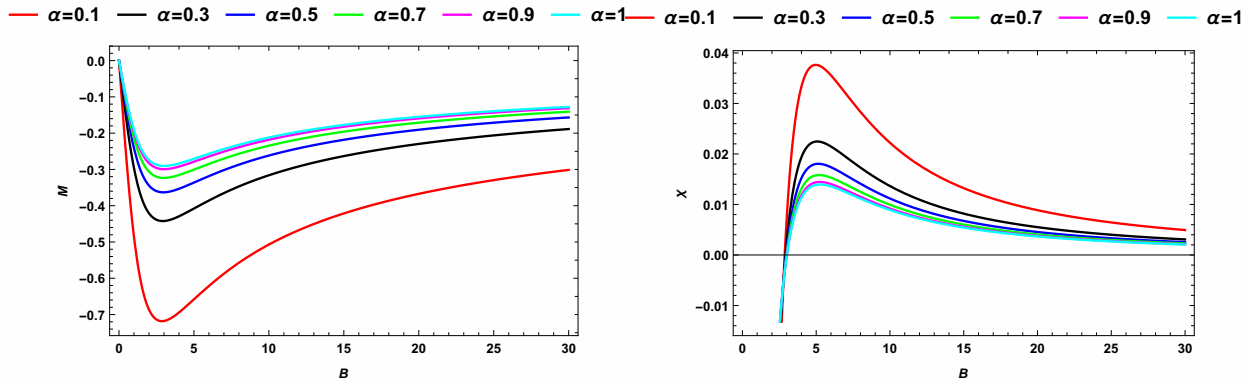


Fig. 2.4: La dépendance de  $M$  et  $\chi$  en fonction du champ magnétique  $B$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , à  $\tau = 0$ .

L'équation (2.25) montre que la fonction  $\chi$  est le rapport de la magnétisation  $M$  à l'intensité du champ magnétique appliqué  $B$ .

Dans notre cas, nous avons d'abord examiné le comportement des fonctions de magnétisation et de susceptibilité par rapport au champ magnétique appliqué à  $\tau = 0$ . Ils sont présentés dans la figure. 2.4. À partir de cette figure, nous pouvons voir que, pour le niveau fondamental  $n = 0$ , l'effet de l'angle de déficit  $\alpha$  sur les fonctions de magnétisation et de susceptibilité est très clair. La variation de la magnétisation avec le champ magnétique montre une diminution continue et rapide d'environ  $B = 5$  puis augmente. C'est toujours la même augmentation de  $\alpha$ . De plus, en raison des courbes de  $\chi$ , la fonction  $M$  peut tendre vers zéro, mais dans un champ magnétique très élevé. La Figure. 2.5 montre

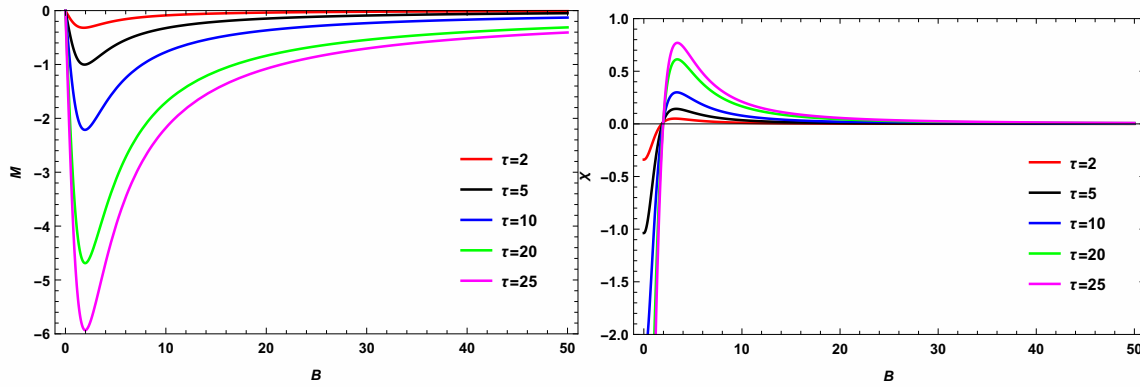


Fig. 2.5: La dépendance de  $M$  et  $\chi$  du champ magnétique  $B$  pour différentes valeurs de  $\tau$ , à  $\alpha = 0, 5$  et  $j = 1$ .

les courbes de magnétisation et de susceptibilité en fonction du champ magnétique à cinq températures différentes. Selon cette figure, le comportement des deux fonctions est le même qu'à  $\tau = 0$ , mais la limite de la magnétisation  $M$  tend à zéro lentement lorsque  $\tau$  augmente. Cela peut s'expliquer de la manière suivante : à zéro degré Kelvin (aucune agitation thermique), notre oscillateur subit une force due au champ magnétique. Ce champ n'annule pas la magnétisation.

En considérant tous les niveaux excités, en augmentant la température, nous obtenons deux forces concurrentes : l'une due au champ magnétique et l'autre due à l'agitation thermique. Ainsi, dans la plage de  $\tau$  allant de  $\tau \leq 10$ , l'agitation thermique est plus forte que la force due au champ magnétique, et donc la magnétisation  $M$  tend vers zéro. L'agitation thermique a un effet plus important que le champ magnétique. Cependant, pour d'autres températures, la situation s'inverse. L'annulation de la magnétisation devient impossible avec des valeurs de champ très élevées.

La figure. (2.6) montre la variation de la magnétisation en fonction de la température pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $B$ . Sur la figure de gauche, nous avons pris  $B = 5$ . L'effet du paramètre  $\alpha$  n'est pas clair. Cependant, sur l'autre figure, lorsque  $\alpha = 0.5$ , l'impact du champ magnétique appliqué est observé.



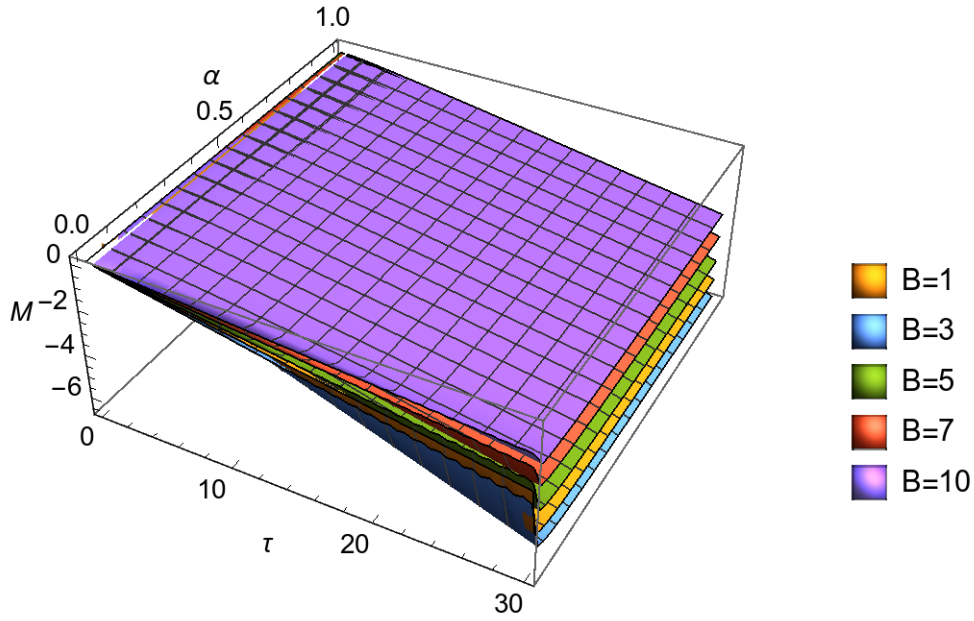


Fig. 2.7: La dépendance de  $M$  par rapport à  $\tau$  et  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $B$  en trois dimensions.

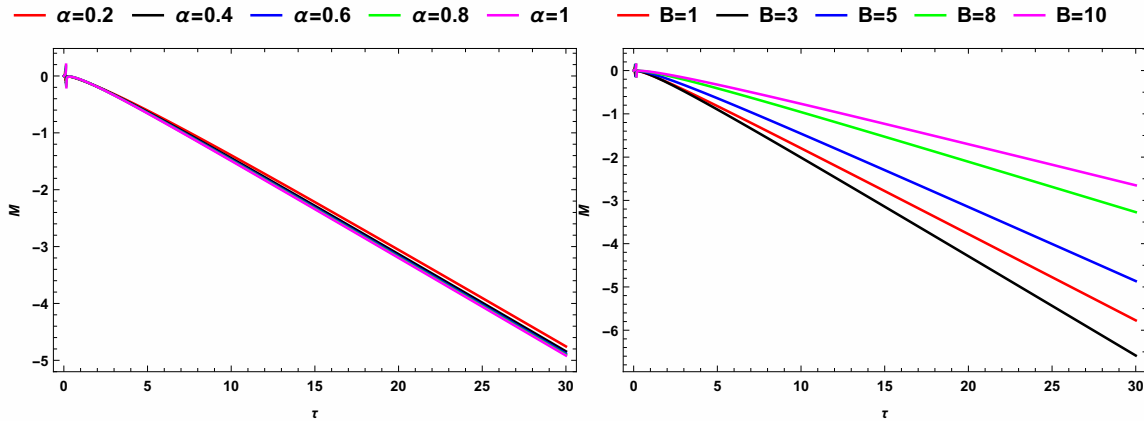


Fig. 2.6: La dépendance de  $M$  en fonction de la température réduite  $\tau$  pour différentes valeurs de  $B$  et  $\alpha$ , à  $j = 1$ .

Nous sommes maintenant prêts à expliquer la source de la présence de la magnétisation négative. Le passage de la magnétisation en fonction de la température d'une valeur positive à une valeur négative d'un matériau (refroidi sous l'effet d'un champ magnétique positif appliqué) est appelé magnétisation négative. L'état de magnétisation négative (avec une susceptibilité différentielle positive) est différent de l'état diamagnétique (avec une susceptibilité différentielle négative) qui se produit pour les matériaux diamagnétiques. Dans une étude de la magnétisation en fonction de la température, la température à laquelle la magnétisation devient nulle et change de signe est appelée température de compensation. Les premiers résultats indiquent que cette température n'est pas présente et que la fonction  $M$  est totalement négative (voir la figure. (2.7)).

L'origine de l'existence de la magnétisation négative peut être invoquée par la présence de la corde cosmique à travers le paramètre  $\alpha$ . Ce paramètre semble essentiel pour l'observation d'une magnétisation négative car il est caractérisé par la présence d'un défaut topologique. En particulier, il y a une interaction entre notre oscillateur et le champ gravitationnel produit par la corde cosmique. Cette corde a créé un champ gravitationnel près du point spécifique dans l'espace-temps en interaction avec notre oscillateur. La même chose a été observée dans le cas d'une chaleur spécifique négative (voir Réfs [15–17, 60, 101–103] où elle a été expliquée par l'existence d'un champ gravitationnel de l'espace-temps en question.

---

---

## CHAPITRE 3

---

### PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE L'OSCILLATEUR DE FESHBACH-VILLARS EN PRÉSENCE DES CORDES COSMIQUES EN ROTATION

Ce chapitre se concentre sur l'exploration de la dynamique quantique d'une particule massive, dépourvue de spin, se déplaçant dans un espace-temps créé par une corde cosmique en rotation. Les équations de mouvement sont déduites en utilisant la formulation Feshbach-Villars de l'équation de Klein-Gordon. Nous dérivons les fonctions d'onde et leurs énergies associées. Ensuite, nous abordons la fonction de partition en utilisant la représentation de la fonction Zêta, ce qui nous permet d'étudier les propriétés thermiques du système. Nous analysons comment ces propriétés varient en fonction des paramètres physiques du modèle, tels que la rotation, la courbure et les nombres quantiques. De plus, nous explorons l'impact du défaut topologique sur le système quantique en cours d'examen<sup>1</sup>.

#### 3.1 L'oscillateur de FV en présence d'une corde cosmique statique

Le but de cette section est d'étudier l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'une corde cosmique en utilisant le formalisme de FV. Il est bien connu que les équations d'onde relativistes généralement covariantes d'une particule scalaire dans un espace-temps riemannien défini par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  peuvent être obtenues en reformulant l'équation de Klein-Gordon de manière à (voir, par exemple, les manuels [13, 14])

$$(\square + m^2 - \xi R) \Phi(x, t) = 0, \quad (3.1)$$

---

1. Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, *Statistical properties of the two dimensional Feshbach-Villars oscillator (FVO) in the rotating cosmic string space-time*, *Annals of Physics*, Volume 452, 2023, 169302, <https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169302>.

avec

$$\square = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu). \quad (3.2)$$

est l'opérateur Laplace-Beltrami et  $\xi$  est une constante de couplage réelle sans dimension,  $R$  est le scalaire de courbure de Ricci défini par  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de courbure de Ricci et  $g^{\mu\nu}$  est le tenseur métrique inverse avec  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

Avant d'explorer l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) dans sa représentation hamiltonienne, commençons par dériver l'équation des ondes de Klein-Gordon (KG) pour une particule scalaire relativiste libre se déplaçant dans un espace-temps généré par une corde cosmique. Nous supposons que cet espace-temps est statique et possède une symétrie cylindrique. L'expression générale pour une métrique de corde cosmique en (1+3) dimensions est définie par l'élément de ligne dans des coordonnées cylindriques comme suit : [34, 104]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ici,  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$  and  $\alpha \in [0, 1[$  est le paramètre angulaire qui détermine le déficit angulaire  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ . Il est lié à la densité linéaire  $\mu$  de la corde par  $\alpha = 1 - 4\mu$ .

Pour simplifier le traitement de notre problème de mécanique quantique, travaillons dans un espace de dimensions inférieures, et comme il n'y a pas de structure dans la direction  $z$ , nous pouvons la supprimer [35, 105]. Ainsi, la métrique d'une corde cosmique statique avec une symétrie cylindrique en deux dimensions a la forme suivante <sup>2</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2, \quad (3.4)$$

Les composantes des tenseurs métriques et des tenseurs métriques inverses sont les suivantes

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha r)^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{(\alpha r)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Nous notons que le sujet des particules massives sans spin dans une géométrie générée par un fond de corde cosmique statique a été discuté dans plusieurs articles (voir, par exemple, Refs. [94, 106]).

Dans ce qui suit, nous adopterons la procédure présentée dans les références [107–109] pour calculer la forme de FV de l'équation d'onde KG dans des espaces courbes. Nous utilisons la transfor-

2. Étant donné que cette métrique est invariante de Lorentz sous les boosters dans le plan  $(t, z)$  [34, 37], et grâce à la symétrie de rotation le long de l'axe  $z$ , il est raisonnable de supposer que la théorie est invariante dans la surface en 2 dimensions  $(r, \varphi)$ .

mation généralisée Feshbach-Villars (GFVT). Une transformation équivalente avait déjà été proposée dans la référence [107–109], appropriée pour décrire à la fois les particules massives et sans masse.

Dans le formalisme GFVT, les composantes de la fonction d'onde  $\Phi$  sont données par [107–109] :

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\tilde{\mathcal{D}}\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{N}$  est un paramètre réel non nul arbitraire, et

$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}, \quad (3.7)$$

dont

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2g^{00}\sqrt{-g}} \{ \partial_i, \sqrt{-g}g^{0i} \}. \quad (3.8)$$

L'accolade dans (3.8) représente l'anti-commutateur.

Selon la transformation mentionnée ci-dessus, l'hamiltonien s'écrit comme suit :

$$\mathcal{H}_{\text{GFVT}} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \quad (3.9)$$

avec

$$\mathcal{T} = \frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} - \mathcal{Y}^2. \quad (3.10)$$

Ici, lorsque  $\mathcal{N} = m$ , les transformations de FV originales sont satisfaites [107–109].

Maintenant, en considérant la métrique (3.4), il est facile de voir que  $R = 0$ , en d'autres termes, l'espace-temps est localement plat (il n'y a pas de gravité locale), et donc le terme de couplage est nul. Le cas  $\xi = 0$  est appelé couplage minimal. Cependant, pour la théorie sans masse,  $\xi$  prend la valeur  $1/6$  (en 4 dimensions). Dans ce cas, les équations du mouvement sont conformément invariantes.

Un calcul direct nous donne  $\mathcal{Y} = 0$ , donc nous obtenons :

$$\mathcal{T} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + m^2. \quad (3.11)$$

En utilisant ces résultats pour trouver l'hamiltonien, on peut supposer une solution de la forme recherchée, c'est-à-dire des solutions qui ont une symétrie cylindrique, c'est-à-dire des solutions qui présentent une symétrie de rotation dans le plan  $(x, y)$  et qui ne dépendent pas explicitement de  $z$ .

$$\Phi(t, r, \varphi) = \Phi(r)e^{-i(Et - j\varphi)}, \quad (3.12)$$

où  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  sont les valeurs propres de la composante  $z$  de l'opérateur moment angulaire. Par conséquent, il en découle que l'équation de FV peut être écrite de manière équivalente comme les deux

équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 + (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 &= 2\mathcal{N}E\phi_1, \\ -(\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 - (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 &= 2\mathcal{N}E\phi_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La somme et la différence entre les deux dernières équations conduisent à une équation différentielle du second ordre pour la composante  $\psi$ . Ainsi, l'équation radiale s'écrit comme suit :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \kappa \right] \psi(r) = 0, \quad (3.14)$$

où nous avons défini

$$\zeta = \frac{j}{\alpha}, \quad \kappa = \sqrt{E^2 - m^2}. \quad (3.15)$$

L'équation (3.14) est une équation de Bessel et sa solution générale est définie par [110]

$$\psi(r) = A J_{|\zeta|}(\kappa r) + B Y_{|\zeta|}(\kappa r), \quad (3.16)$$

où  $J_{|\zeta|}(\kappa r)$  et  $Y_{|\zeta|}(\kappa r)$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $\zeta$  et de premier et deuxième types, respectivement. Ici, A et B sont des constantes arbitraires. Nous remarquons qu'à l'origine, lorsque  $\zeta = 0$ , la fonction  $J_{|\zeta|}(\kappa r) \neq 0$  n'est pas nulle. Cependant,  $Y_{|\zeta|}(\kappa r)$  est toujours divergente à l'origine. Par conséquent, nous ne considérerons que  $J_{|\zeta|}(\kappa r)$  lorsque  $\zeta \neq 0$ .

Ainsi, nous écrivons la solution de l'équation (3.2) comme suit :

$$\psi(r) = A J_{\frac{|j|}{\alpha}} \left( \sqrt{E^2 - m^2} r \right). \quad (3.17)$$

En utilisant cette solution ( $E^2 - m^2 \geq 0$ ), nous pouvons maintenant écrire la fonction d'onde complète à deux composantes de la particule massive et sans spin en utilisant la représentation Feshbach-Villars dans une corde cosmique statique comme suit :

$$\psi(t, r, \varphi) = |C| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et - j\varphi)} J_{\frac{|j|}{\alpha}} \left( \sqrt{E^2 - m^2} r \right). \quad (3.18)$$

La constante  $|C|$  peut être obtenue en appliquant la condition de normalisation appropriée associée à l'équation Feshbach-Villars (par exemple, voir Réf. [111, 112]). Cependant, le fait de ne pas déterminer la constante de normalisation tout au long de ce manuscrit n'affecte pas les résultats finaux.

Nous nous tournons maintenant vers le cas particulier où nous voulons étendre la transformation de Feshbach-Villars généralisée (GFVT) pour l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO).

En général, nous devons effectuer une substitution de l'opérateur impulsion. Par conséquent, il est

possible de réécrire l'équation (3.10) comme suit :

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\omega r \right) (\sqrt{-g}) \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\omega r \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2. \quad (3.19)$$

De manière similaire, un calcul simple basé sur la procédure effectuée dans la discussion ci-dessus peut produire l'équation différentielle suivante :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m^2 \omega^2 r^2 - \frac{\sigma^2}{r^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \quad (3.20)$$

dont

$$\sigma^2 = \left( \frac{j}{\alpha} \right)^2, \quad \delta = E^2 - m^2 + 2m\omega. \quad (3.21)$$

L'équation (3.20) est l'oscillateur de FV pour une particule de spin-0 dans le champ gravitationnel statique du string cosmique.

Pour obtenir la solution de cette équation, nous proposons d'abord une transformation de la coordonnée radiale.

$$\chi = m\omega r^2, \quad (3.22)$$

en substituant l'expression de  $\chi$  dans l'équation (3.20), nous obtenons

$$\left[ \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} - \frac{\sigma^2}{4\chi^2} + \frac{\delta}{4m\omega\chi} - \frac{1}{4} \right] \psi(\chi) = 0. \quad (3.23)$$

Maintenant, si nous étudions le comportement asymptotique de la fonction d'onde à l'origine et à l'infini, et comme nous recherchons des solutions régulières, nous pouvons supposer une solution qui a la forme

$$\psi(\chi) = \chi^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{\chi}{2}} F(\chi), \quad (3.24)$$

Comme précédemment, cela peut être substitué dans l'équation (3.24), nous avons donc

$$\chi \frac{d^2 F(\chi)}{d\chi^2} + (|\sigma| + 1 - \chi) \frac{dF(\chi)}{d\chi} - \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} \right) F(\chi) = 0. \quad (3.25)$$

Il s'agit de l'équation hypergéométrique confluent et ses solutions sont exprimées en termes de la fonction hypergéométrique confluent de type. [110, 113–115]

$$F(\chi) = {}_1F_1 \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \sigma + 1, \chi \right). \quad (3.26)$$

Nous devons noter que la solution (3.26) doit être une fonction polynomiale de degré  $n$ . Cependant, lorsque  $n$  tend vers l'infini, cela pose un problème de divergence. Nous pouvons obtenir un polynôme fini uniquement si le facteur du premier terme dans l'équation (3.26) est un entier négatif, ce qui

signifie :

$$\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n \quad , n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

En exploitant ce résultat, et en insérant les paramètres (3.27), nous pouvons obtenir le spectre d'énergie quantifié de l'oscillateur de FV dans l'espace-temps statique d'une corde cosmique. Par conséquent, :

$$E(n, \alpha, j) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega |j|}{\alpha} + m^2}, \quad (3.28)$$

Les niveaux d'énergie relativistes correspondent au spectre d'énergie relativiste de l'oscillateur FVO dans un fond de chaîne cosmique  $\left(4m\omega n + \frac{2m\omega |j|}{\alpha} + m^2 \geq 0\right)$ . Sur la base de cette forme, nous pouvons voir que l'énergie dépend explicitement du déficit angulaire  $\alpha$ . La présence de l'angle de déficit modifie le spectre dégénéré de la particule. Contrairement à l'espace plat, la présence des défauts rompt la dégénérescence des niveaux d'énergie. Dans la limite où  $\alpha \rightarrow 1$ , et lorsque nous posons  $N = 2n + j$ , ce qui correspond au nombre quantique principal, nous retrouvons le spectre d'énergie de l'oscillateur de FV dans un espace plat : Ainsi, la courbure de l'espace-temps influencée par le défaut topologique, c'est-à-dire la corde cosmique à travers le paramètre de déficit, affectera la dynamique relativiste de la particule scalaire en générant un champ gravitationnel en raison de la présence du paramètre  $\alpha$ . Enfin, (B.29) est identique à celle obtenue pour le cas de l'oscillateur de KG (voir Ref. [94]).

De plus, comme nous l'attendions, le spectre d'énergie est observable et n'est pas affecté par la représentation que nous avons utilisée. Tous ces résultats ont été affichés dans la Figure. (2.1). Cette figure montre les niveaux d'énergie de l'oscillateur de FV en relation avec le nombre quantique  $n$  dans l'espace-temps caractérisé par une corde cosmique statique pour divers paramètres  $\alpha$

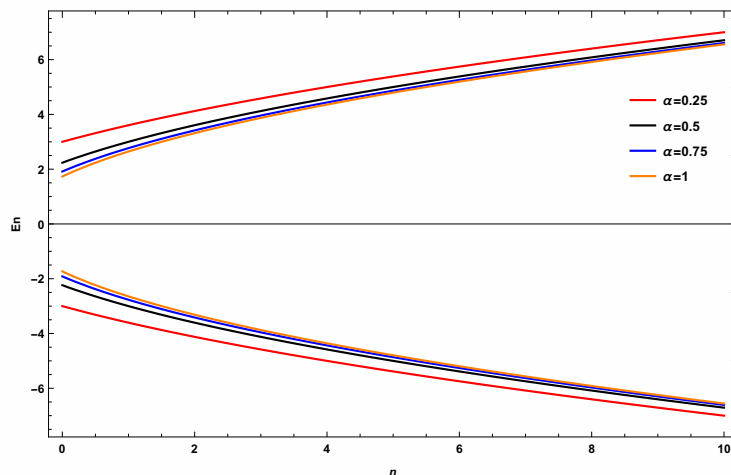


Fig. 3.1: L'énergie de la FVO dans une corde cosmique statique en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  : ici  $j = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $\omega = m = 1$ .



.La fonction d'onde correspondante est donnée par :

$$\psi(r) = |\tilde{C}| (m\omega r^2)^{\frac{|j|}{2\alpha}} e^{-\frac{m\omega r^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|j|}{2\alpha} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega r^2\right). \quad (3.29)$$

La fonction d'onde totale peut être exprimée par :

$$\psi(t, r, \varphi) = |\tilde{C}| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (m\omega r^2)^{\frac{|j|}{2\alpha}} e^{-\frac{m\omega r^2}{2}} e^{-i(Et-j\varphi)} {}_1F_1\left(\frac{|j|}{2\alpha} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega r^2\right), \quad (3.30)$$

où  $|\tilde{C}|$  est la constante de normalisation. Maintenant, avec la fonction d'onde complète ci-dessus, nous sommes en mesure de calculer la densité  $\rho_{\text{FVO}}$  correspondant à la FVO. Cette fonction est donnée par [107–109] :

$$\rho_{\text{FVO}} = \psi^* \tau_z \psi. \quad (3.31)$$

La figure. 3.2 affiche la densité de probabilité de la FVO dans le string cosmique statique en fonction de la distance radiale  $r$  pour quatre niveaux  $n = 0, 1, 2, 3$ . De toute évidence, nous pouvons voir que la densité est affectée par le choix à la fois des paramètres  $\mathcal{N}$  et  $n$ .

Ainsi, en présence de la corde cosmique ( $\alpha = 0.5$ ), nous observons ce qui suit :

- Pour une valeur fixe de  $\mathcal{N}$  et pour différentes valeurs du nombre quantique  $n$ , l'intensité de chaque pic de densité est fortement affectée : de plus, le nombre de ces pics augmente avec  $n$  croissant.
- Maintenant, à une valeur fixe du nombre quantique  $n$ , en augmentant  $\mathcal{N}$ , l'intensité du pic de densité diminue.
- Tous les pics sont symétriques par rapport à une position fixe de  $r$ .

Le cas où  $\mathcal{N} = m$ , ce qui correspond aux transformations de FV [107–109], montre que l'intensité de l'état fondamental ( $n = 0$ ) est plus grande que celle des niveaux excités ( $n = 1, 2, 3$ ).

La Figure. (3.3) présente la densité de probabilité du FVO pour l'état fondamental  $n = 0$  pour divers paramètres  $\alpha$  lorsque  $\mathcal{N} = m$  : pour la transformation de Feshbach-Villars,  $\mathcal{N}$  est défini et égal à la masse de la particule  $m$  [107–109]. De cette figure, l'effet du paramètre géométrique de l'espace-temps sur cette densité est clairement observé.

Toutes ces figures montrent que le signe de la densité de probabilité reste positif en comparaison avec la situation de l'équation de Klein-Gordon : dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, on obtient une densité qui n'est pas positive. La densité de probabilité contient des dérivées temporelles puisque l'équation de Klein-Gordon est du second ordre en  $\partial/\partial t$ . Cela signifie que  $\rho$  n'est pas obligée d'être définie comme positive car à un moment donné, à la fois  $\psi$  et  $\partial/\partial t$ , elle peut avoir des valeurs arbitraires.

Par conséquent,  $\rho$  peut être positive ou négative. Ainsi, le formalisme de Feshbach-Villars, contrairement à la théorie KG, nous aide à comprendre les énergies négatives et une interprétation probabiliste peut être naturellement adaptée. La densité de probabilité dans le formalisme de Feshbach-Villars est donnée par (3.31), et donc la conservation de la charge pour l'équation de Feshbach-Villars donnée par

$$Q = \int \rho_{\text{FVO}} d^3x = \pm 1, \quad (3.32)$$

L'interprétation de la conservation de la charge est qu'elle est composée de deux densités de charge, la composante de particule et sa composante de particule anti-correspondante,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , respectivement. Ainsi, l'équation de Feshbach-Villars fournit une interprétation probabiliste et justifie les énergies négatives pour la mécanique quantique des particules relativistes sans spin [116].

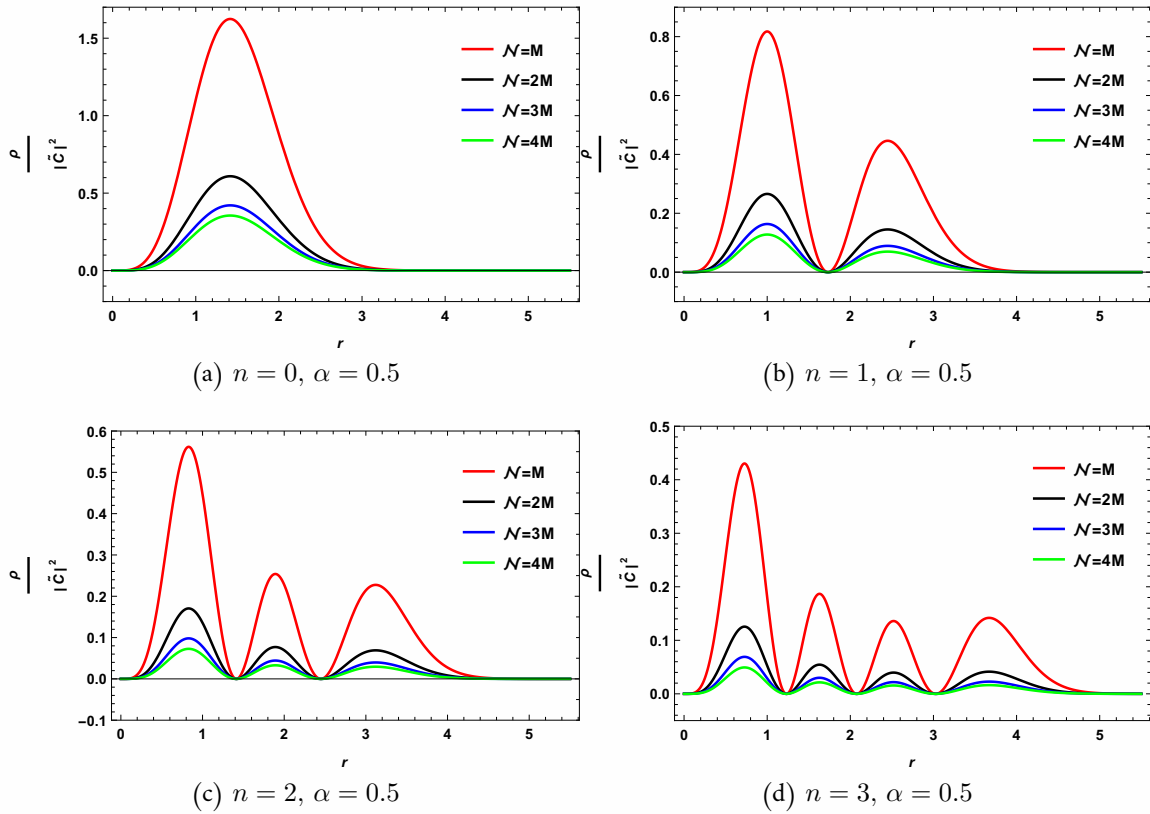


Fig. 3.2: Traces de la densité de probabilité de la FVO dans une corde cosmique statique en fonction de la distance radiale  $r$  pour différentes valeurs de  $n$  avec  $j = 1$ .

### 3.1.1 L'oscillateur de FV en présence d'une corde cosmique en rotation

Dans cette section, nous allons analyser l'oscillateur de Feshbach-Villars en présence d'une corde cosmique en rotation en deux dimensions. Les équations du mouvement d'une particule scalaire peuvent être obtenues en considérant la transformation de Feshbach-Villars généralisée (GFVT). Plusieurs auteurs ont étudié la dynamique quantique de particules relativistes dans une corde cosmique avec des

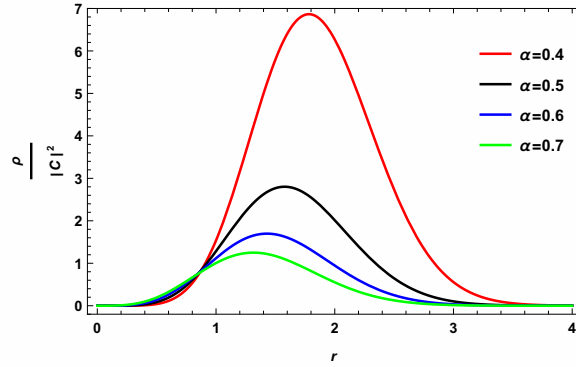


Fig. 3.3: Traces de la densité de probabilité de l'État fondamental  $n = 0$  de la FVO en fonction de la distance radiale  $r$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  lorsque  $\mathcal{N} = m$  : ici  $j = m = \omega = 1$ .

effets de rotation, et de nombreux modèles ont été considérés dans ce contexte. Par exemple, dans un article précédent de Mazur [117], les propriétés mécaniques quantiques de particules massives (ou sans masse) dans le champ gravitationnel d'une corde cosmique en rotation ont été discutées. Il a montré que l'énergie devrait être quantifiée en présence d'un moment angulaire non nul du string.

Plus tard, Gerbert et Jackiw [118] ont présenté des solutions pour les équations de Klein-Gordon (KG) et de Dirac dans un espace-temps bi-dimensionnel créé par une particule ponctuelle massive, avec un moment angulaire arbitraire.

Récemment, les effets gravitationnels des cordes cosmiques en rotation ont suscité un intérêt considérable en lien avec la dynamique des particules quantiques relativistes et leurs propriétés. Par exemple, les fluctuations du vide pour un champ scalaire sans masse autour d'une corde cosmique en rotation ont été étudiées dans la référence [119–122] en utilisant une méthode de renormalisation. De manière similaire, la polarisation du vide d'un champ scalaire dans le contexte gravitationnel d'une corde cosmique en rotation a été examinée dans la référence [120, 123]. De plus, les auteurs de la référence [93, 124–127] ont analysé les niveaux de Landau d'une particule massive sans spin dans l'espace-temps d'une corde cosmique en rotation en utilisant une approche entièrement relativiste. Wang et al. [128] ont traité le modèle de l'oscillateur Klein-Gordon couplé à un champ magnétique uniforme dans le contexte d'une corde cosmique en rotation. De même, le problème d'une particule relativiste sans spin soumise à un champ magnétique uniforme dans l'espace-temps d'une corde cosmique en rotation a été abordé dans la référence [129].

Dans cette section, nous étendons le problème étudié dans la section précédente à un espace-temps plus général avec un moment angulaire non nul. Nous considérons une particule massive relativiste sans spin-0 dont la fonction d'onde est notée  $\psi$  et qui satisfait à l'équation de KG (3.1) dans l'espace-temps bi-dimensionnelle en présence d'une corde cosmique en rotation stationnaire décrite par l'élément de ligne suivant [93, 124–126, 130]:

$$ds^2 = dt^2 + 2a dt d\phi - dr^2 - (\alpha^2 r^2 - a^2) d\varphi^2, \quad (3.33)$$

Les coordonnées cylindriques  $(t, r, \varphi)$  sont toujours dans les intervalles habituelles, et  $\alpha = 1 - 4\mu$  est le paramètre d conique avec  $\alpha = 1 - 4\mu$ . Ici, le paramètre de rotation  $a = 4J$  a des unités de distance avec  $J$  représentant le moment angulaire de la corde.

Les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique sont les suivantes :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -(\alpha^2 r^2 - a^2) \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{\alpha^2 r^2} & 0 & \frac{a}{\alpha^2 r^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{a}{\alpha^2 r^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Pour étudier le mouvement quantique relativiste d'un boson scalaire interagissant avec le champ gravitationnel de la géométrie de l'espace définie par la métrique (3.33), nous devons écrire l'équation générique de Klein-Gordon en question, donnée par :

$$(\square + m^2 - \xi R) \psi(t, r, \varphi) = 0, \quad (3.35)$$

où  $\psi$  est un vecteur à deux composantes

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \equiv (t, r, \varphi), \quad (3.36)$$

satisfaisant à la condition

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}'\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \quad (3.37)$$

dont

$$\mathcal{D}' = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}'. \quad (3.38)$$

La prochaine étape consiste à développer l'approche utilisée dans la section précédente pour le cas des cordes cosmiques en rotation. Nous adoptons la transformation de Feshbach-Villars généralisée (GFVT) pour dériver les équations du mouvement pour ce problème, puis nous les résolvons pour obtenir les fonctions d'onde et les spectres d'énergie. Suivant les travaux de Silenko [107, 109, 131], l'identification de l'hamiltonien conduit à l'idée d'utiliser une formulation à deux composantes de l'équation de KG. Afin de réécrire l'équation (3.35) sous forme hamiltonienne, il est nécessaire d'introduire de nouvelles définitions pour les quantités présentées dans les équations. (3.6), (3.8) et (3.9).

Dans le cas considéré, nous avons :

$$\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}', \quad (3.39)$$

$$\mathcal{T}' = \partial_i \left( \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j \right) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i (\sqrt{-g} G^{ij}) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} [\nabla_i (\mathcal{U}^i)]^2 \quad (3.40)$$

$$- \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j (\mathcal{U}^i) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j (\mathcal{U}^i),$$

$$\mathcal{Y}' = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}, \quad (3.41)$$

avec

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \quad (3.42)$$

Il a été démontré dans les transformations (3.39), (3.40) et (3.41) avec les définitions (3.42) sont exactes et couvrent tous les champs inertes et gravitationnels. Il convient de noter que ces transformations exactes permettent d'obtenir la forme en blocs diagonaux de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{GFVT}$  qui ne dépend pas du paramètre  $\mathcal{N}$ . Pour la géométrie (3.23), les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{Y}'$  sont données par :

$$\mathcal{Y}'\Psi(t, r, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_2, \frac{g^{02}}{g^{00}} \right\} \psi(t, r, \varphi) = \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(t, r, \varphi), \quad (3.43)$$

où le champ  $\psi$  obéit à la transformation non unitaire  $\psi \equiv \Phi' = \mathcal{F}\Phi$  qui permet d'obtenir l'hamiltonien pseudo-hermitien  $\mathcal{H}_{GFVT}^\dagger = \mathcal{F}\mathcal{H}'_{GFVT}\mathcal{F}^{-1}$ ,  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z (\mathcal{H}_{GFVT})^\dagger \tau_z$ . Après quelques calculs algébriques, l'équation (3.40) prend la forme :

$$\mathcal{T}' = -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{m^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \quad (3.44)$$

où, pour la métrique (3.33), le scalaire de Ricci s'annule, c'est-à-dire  $R = 0$ .

En utilisant la fonction d'onde à deux composantes (3.36) et l'hamiltonien (3.39), nous pouvons exprimer l'équation (3.35) sous la forme de l'équation de Schrödinger :

$$\mathcal{H}'_{GFVT}\psi(x) = i \frac{d}{dt} \psi(x), \quad x \equiv (t, r, \varphi). \quad (3.45)$$

Pour résoudre ce problème de valeurs propres, considérons l'ansatz suivant pour la fonction d'onde :

$$\psi(x) = \mathcal{F}\Phi(x) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{pmatrix} e^{-iEt - j\varphi}. \quad (3.46)$$

En substituant (3.28) dans (3.27), nous obtenons les équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) + \mathcal{T}' \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_1 &= 2\mathcal{N} E \mathcal{F} \phi_1, \\ \mathcal{N}^2 \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) - \mathcal{T}' \mathcal{F} (\phi_1 + \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_2 &= 2\mathcal{N} E \mathcal{F} \phi_2, \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nous pouvons additionner et soustraire les deux équations de (3.47) pour obtenir, respectivement :

$$\mathcal{N}\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + \left(\frac{g^{02}}{g^{00}}j\right)\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) = E\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) \quad , \quad (3.48)$$

$$-\mathcal{T}'\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) + \mathcal{N}\left(\frac{g^{02}}{g^{00}}j\right)\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) = \mathcal{N}E\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2). \quad (3.49)$$

Les deux équations indiquent la relation entre les deux composantes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  comme décrit ci-dessous :

$$\phi_1 = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(E - \frac{g^{02}}{g^{00}}j\right)\phi_2. \quad (3.50)$$

Après des manipulations algébriques simples, nous arrivons à l'équation différentielle du second ordre suivante pour la fonction radiale  $\psi(r)$  :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{(aE + j)^2}{\alpha^2 r^2} + E^2 - m^2\right]\psi(r) = 0. \quad (3.51)$$

En posant que

$$\zeta^2 = \frac{(aE + j)^2}{\alpha^2}, \gamma = E^2 - m^2, \quad (3.52)$$

conduit à

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \gamma\right]\phi_2(r) = 0. \quad (3.53)$$

L'équation (3.34) peut être exprimée comme une équation différentielle de Bessel : ses solutions peuvent être écrites en termes de la fonction de Bessel de première espèce comme suit

$$\psi(r) = A' J_{\frac{aE+j}{\alpha}}\left(\sqrt{E^2 - m^2}r\right), \quad (3.54)$$

où  $A'$  est une constante d'intégration. Les états propres totaux sont donnés par

$$\psi(t, r, \varphi) = |C'| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et-j\varphi)} J_{\frac{aE+j}{\alpha}}\left(\sqrt{E^2 - m^2}r\right). \quad (3.55)$$

À partir de maintenant, nous procédons à l'étude de l'équation de Feshbach-Villars (FVO) dans un espace-temps en présence d'une corde cosmique en rotation. Tout d'abord, nous considérons une particule quantique scalaire immergée dans le champ gravitationnel de l'espace-temps décrit par la métrique (3.22). De cette manière, nous introduisons un remplacement de l'opérateur de moment  $p_i \longrightarrow p_i - im\omega x_i$  où  $p_i = -i\nabla_i$  dans (3.40).

Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{T}' = -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\omega r \right) \left( \sqrt{-g} \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\omega r \right) \right) + \frac{\sqrt{-g}}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{m^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (3.56)$$

Selon les analyses précédentes, nous allons appliquer la transformation de Feshbach-Villars généralisée (GFVT) pour le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) dans l'espace en question en suivant les mêmes étapes que précédemment. En insérant les équations (3.56) et (3.43) dans l'hamiltonien (3.39), puis en supposant la solution (3.46), on obtient deux équations différentielles couplées similaires à celles de l'équation (3.47), mais avec une valeur différente de  $\mathcal{T}'$ . En manipulant exactement les mêmes étapes qu'auparavant, on obtient l'équation radiale suivante :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - m^2 \omega^2 r^2 - \frac{\vartheta^2}{r^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \quad (3.57)$$

où nous avons défini :

$$\vartheta^2 = \left( \frac{aE + j}{\alpha} \right)^2, \quad \delta = E^2 - m^2 + 2m\omega. \quad (3.58)$$

Pour résoudre l'équation (3.57), introduisons une nouvelle variable sans dimension  $\varrho = m\omega r^2$ , et par substitution dans (3.56), l'équation résultante s'écrit :

$$\left[ \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{\vartheta^2}{4\varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4m\omega\varrho} \right] \psi(\varrho) = 0. \quad (3.59)$$

Pour éliminer le terme  $d\psi(\varrho)/d\varrho$ , nous considérons le changement de variable suivant :

$$\psi(\varrho) = \varrho^{-\frac{1}{2}} \Xi(\varrho), \quad (3.60)$$

Dans ce cas, l'équation (3.59) devient :

$$\frac{d^2 \Xi(\varrho)}{d\varrho^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4m\omega\varrho} + \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\varrho^2} \right] \Xi(\varrho) = 0. \quad (3.61)$$

Elle a la forme de l'équation différentielle de Whittaker [110, 114].

La solution générale de cette équation, qui est régulière à l'origine, est donnée par :

$$\Xi(\varrho) = |C| \varrho^{-\frac{1}{2}} M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right), \quad (3.62)$$

où  $|C|$  est une constante arbitraire et  $M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right)$  est la fonction  $M$  de Whittaker définie via les fonctions hypergéométriques confluentes comme :

$$M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right) = e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^{\frac{|\vartheta|+1}{2}} {}_1F_1 \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right), \quad (3.63)$$

L'autre solution est la fonction Whittaker  $W$ , donnée par :

$$W_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right) = e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^{\frac{|\vartheta|+1}{2}} U \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right), \quad (3.64)$$

Le terme  $U \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right)$  représente une fonction mathématique appelée la fonction hypergéométrique confluyente de Tricomi ou la fonction de Kummer de la deuxième espèce. Cette fonction, notée  $U(a, b, z)$ , est connue pour avoir une singularité en  $z = 0$ , ce qui signifie qu'elle présente une discontinuité mathématique en ce point. Dans ce contexte, nous nous intéressons à une solution spécifique décrite par l'équation (3.62), qui évite la singularité en  $z = 0$ .

Par conséquent, en se basant sur l'équation (3.63), nous pouvons exprimer la forme finale de la fonction d'onde pour le FVO se propageant dans le contexte d'un filament cosmique rotatif.

$$\psi(t, r, \varphi) = |C| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (m\omega r^2)^{\frac{|\vartheta|}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2} r^2} e^{-i(Et - j\varphi)} {}_1F_1 \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, m\omega r^2 \right), \quad (3.65)$$

où les paramètres  $\vartheta$  et  $\delta$  sont définis dans l'équation (3.58).

$$\frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n, \quad (3.66)$$

Ainsi, après avoir inséré  $\vartheta$  et  $\delta$  et résolu l'équation (3.66) pour  $E$ , nous obtenons :

$$E^{\pm}(n, \alpha, a, j) = \frac{am\omega}{\alpha} \pm \sqrt{4m\omega n + \left(\frac{am\omega}{\alpha}\right)^2 + \frac{2m\omega|j|}{\alpha} + m^2}. \quad (3.67)$$

La figure. (3.4) montre les valeurs propres de l'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  avec des

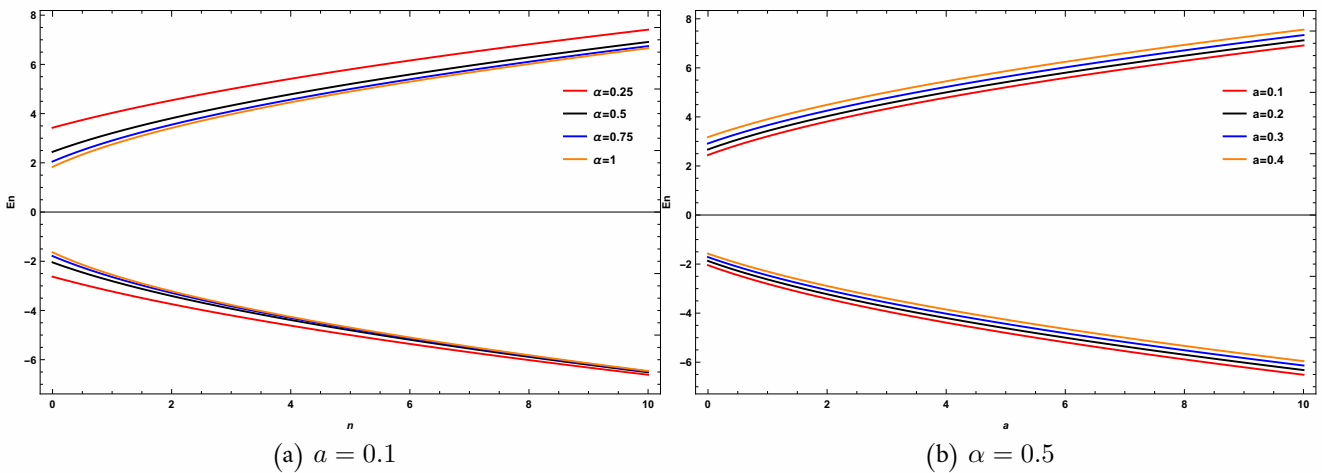


Fig. 3.4: L'énergie de l'oscillateur FVO dans une corde cosmique en rotation en fonction du nombre quantique  $n$  : ici,  $j = \omega = m = 1$

paramètres fixes  $\omega = j = 1$ , et pour plusieurs valeurs des deux paramètres  $\alpha$  et  $a$ . Sur la base de cette



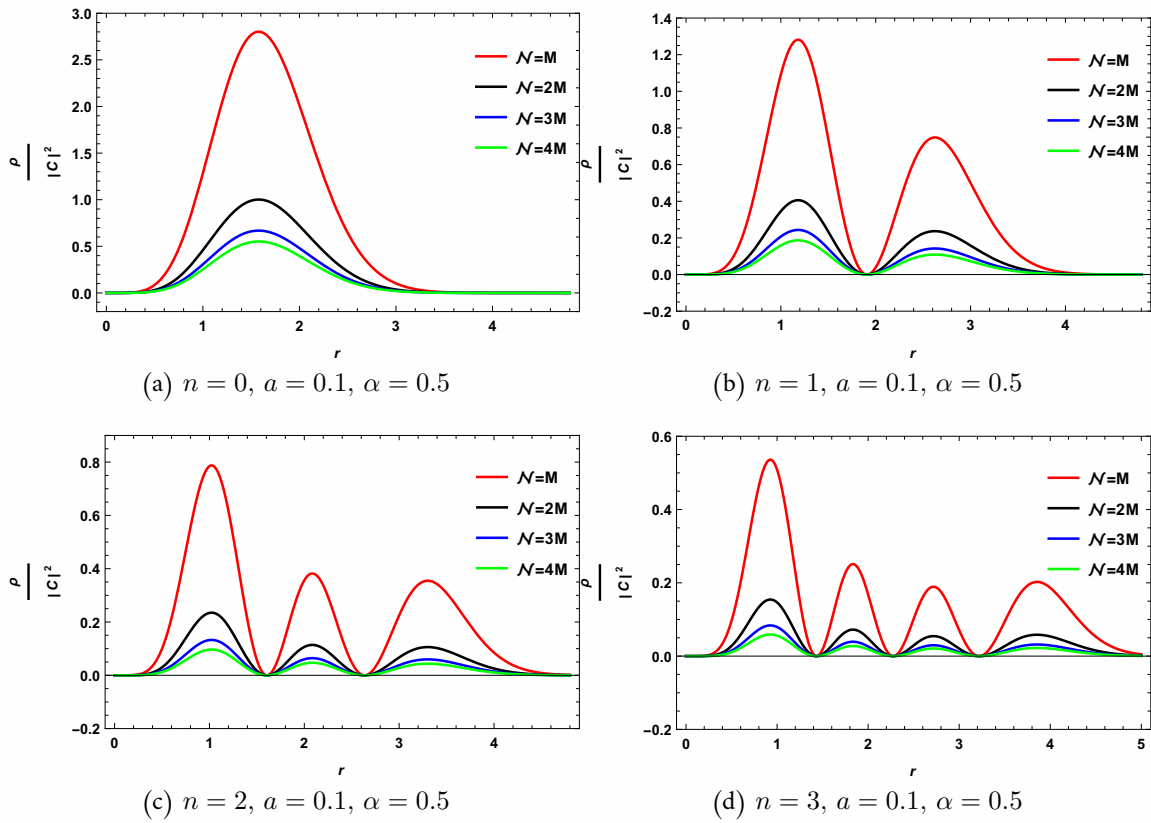


Fig. 3.5: Tracés de la densité de probabilité de FVO dans une corde cosmique rotative en fonction de la distance radiale  $r$  pour différentes valeurs de  $n$  avec les paramètres  $a = 0,5$  et  $j = 1$ .

figure, un résultat intéressant peut être résumé comme suit :

- Le spectre d'énergie dépend de tous les paramètres qui caractérisent la géométrie de fond, tels que le paramètre de déficit angulaire  $\alpha$  et le paramètre de rotation  $a$ .
- Nous nous attendons à ce que le champ gravitationnel externe d'un string cosmique en rotation affecte la dynamique relativiste de la particule quantique, essentiellement, son moment angulaire apparaît à travers le paramètre  $a$ .
- En comparant la forme de l'énergie (3.67) à celle du FVO dans un string cosmique statique (3.28), on peut voir que  $E(n, \alpha, a, j)$  est décalée de la quantité  $am\omega/\alpha$  et  $a$  grandie par le facteur conique.
- La présence des deux paramètres  $\alpha$  et  $a$  a modifié le spectre dégénéré de la particule : Ainsi, l'apparition de ces paramètres rompt également la dégénérescence des niveaux d'énergie.
- Dans les limites où  $a \rightarrow 0$ , on retrouve le spectre d'énergie du FVO dans un string cosmique statique (3.28). Maintenant, les deux limites  $\alpha \rightarrow 1$  et  $a \rightarrow 0$  conduisent au spectre d'énergie du FVO dans un espace-temps plat.

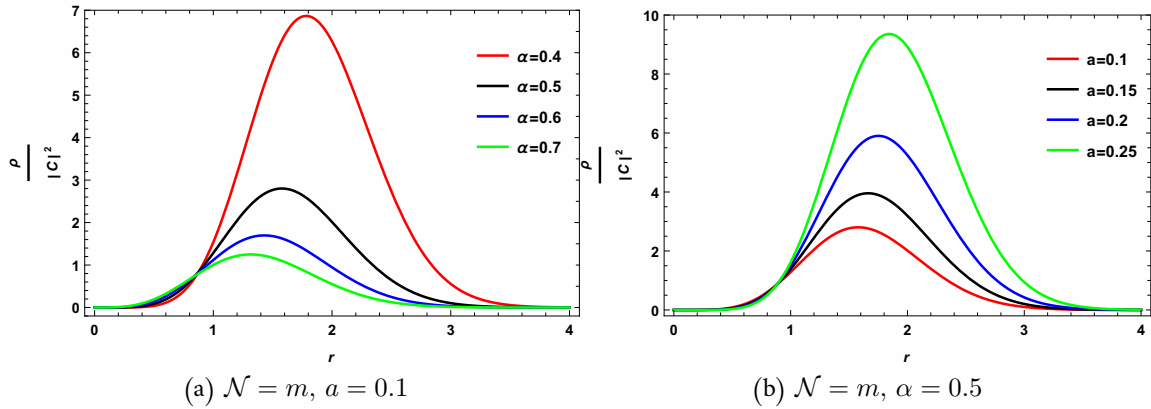


Fig. 3.6: Tracés de la densité de probabilité de FVO pour l'état fondamental  $n = 0$  dans une corde cosmique rotative en fonction de la distance radiale  $r$  pour différentes valeurs des deux paramètres  $\alpha$  et  $a$  : ici  $j = m = \omega = 1$ .

- Enfin, la forme de notre spectre d'énergie est similaire à celle obtenue par Wang et al. [128, 132] pour un cas spécifique..

Maintenant, en tenant compte de ces résultats, nous pouvons estimer la densité de probabilité du FVO dans l'espace-temps d'un string cosmique en rotation.

La figure. (3.5) montre la densité de probabilité du FVO dans le string cosmique en rotation en fonction de la distance radiale  $r$  pour quatre niveaux  $n = 0, 1, 2, 3$ . Sur la base de cette figure, nous observons ce qui suit :

- Le signe de la densité en présence des paramètres  $\alpha$  et  $a$  est positif.
- Cette densité est fortement influencée par le choix des variables  $\mathcal{N}$  et  $n$  en présence des paramètres  $\alpha$  et  $a$ .
- Pour une valeur fixe de  $\mathcal{N}$  et pour différentes valeurs du nombre quantique  $n$ , les intensités de chaque pic de densité sont fortement influencées par rapport au cas du string cosmique statique. Cela est dû à l'introduction du paramètre de rotation  $a$  de l'espace-temps.
- Le nombre de ces pics augmente lorsque  $n$  augmente. D'autre part, ils sont symétriques à un point  $r$  fixe.

Rappelons ici que  $\mathcal{N}$  est un paramètre réel non nul arbitraire. Pour le traitement de Feshbach-Villars, il est défini et égal à la masse des particules  $m$ .

La figure. (3.6) fournit la densité de probabilité pour l'état fondamental  $n = 0$  en présence des paramètres  $\alpha$  et  $a$  de l'espace-temps. Sur la base de cette figure, nous concluons :

- À une valeur de rotation  $a$  fixe, l'intensité de chaque pic de densité diminue avec l'augmentation du déficit angulaire  $\alpha$ . Tous les pics ne sont pas symétriques.

- Maintenant, pour une valeur fixe du paramètre  $\alpha$ , l'intensité augmente avec la rotation  $a$ . Tous les pics ne sont également pas symétriques.

Nous sommes maintenant prêts à discuter des propriétés thermiques de FVO dans l'espace-temps du string cosmique en rotation.

## 3.2 Propriétés thermiques de l'oscillateur de FV en présence de corde cosmique en rotation

Cette section se concentre sur les propriétés thermiques qui peuvent se produire tout au long de notre étude de KGO dans l'espace-temps produit par une corde cosmique en rotation. Ayant déjà obtenu le spectre d'énergie, nous sommes maintenant en mesure de présenter les quantités thermodynamiques en calculant la fonction de partition qui fournit toutes les informations physiques de notre système quantique. Pour mieux illustrer nos résultats, nous présentons quelques figures dans la prochaine discussion.

### 3.2.1 Fonction de partition

Nous sommes intéressés à déterminer la fonction de partition du FVO interagissant avec le champ gravitationnel induit par le string cosmique en rotation. Par conséquent, des quantités statistiques telles que l'énergie libre  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , l'entropie  $S$  et la chaleur spécifique  $C_v$ , associées à la particule sans spin relativiste dans cet espace-temps, peuvent être obtenues à partir de la forme de cette fonction.

La fonction de partition du système canonique à température finie  $T$  est donnée par

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \quad (3.68)$$

où  $E_n$  désigne les valeurs propres d'énergie correspondantes et  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , avec  $k_B$  étant la constante de Boltzmann.

En tenant compte du spectre (3.67) et en ne considérant que les énergies positives, la fonction de partition peut être exprimée comme suit :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(Y + \sqrt{An+B})} = e^{-\beta Y} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \sqrt{An+B}}, \quad (3.69)$$

avec

$$Y = \frac{am\omega}{\alpha}, \quad A = 4m\omega, \quad B = \left(\frac{am\omega}{\alpha}\right)^2 + \frac{2m\omega|j|}{\alpha} + m^2. \quad (3.70)$$

Ici, le fait de considérer uniquement les énergies positives dans le calcul de la fonction de partition peut être justifié comme suit :

- Tout d'abord, Accioly et al. [133] ont prouvé que l'équation FV pour les particules sans spin dans un espace-temps courbe a une transformation exacte Foldy-Wouthuysen (FWT). Cela signifie que les solutions d'énergie positive et négative ne se mélangent pas. En d'autres termes, cela signifie que les états d'énergie négative ou positive sont occupés, mais jamais un mélange des deux branches, ce qui provoquerait l'annihilation des particules-antiparticules.
- Deuxièmement, nous supposons que l'énergie négative (antiparticule) est entièrement occupée : Il est vrai que le cas des bosons est très différent de celui des fermions : Tous les bosons peuvent occuper le même niveau, contrairement au cas des fermions où ils sont ordonnés par le principe de Pauli. Malgré cela, nous pouvons étendre la méthode de remplissage de la mer avec des fermions d'énergie négative pour le cas des bosons [85, 134, 135].
- En conséquence, les états des bosons sont divisés en deux secteurs : le secteur positif habituel composé d'états avec un nombre positif de bosons, et le secteur négatif, composé d'états avec un nombre négatif de bosons. Une fois qu'un état entre dans le secteur négatif, il ne peut pas retourner dans le secteur positif habituel par une interaction ordinaire, en raison de la présence d'une barrière [136] (La barrière est similaire à la bande interdite en physique de l'état solide).

Dans ce qui suit, nous suivons de près les méthodes décrites dans [60] la référence et révisées dans la référence [61] dans le but d'approximer la somme infinie apparente dans l'équation (3.69). Pour ce faire, nous commencerons par réécrire la représentation en série de la fonction de partition  $Z$  en fonction de la fonction Zêta.

Ainsi, nous avons [136]

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{An+B}} = e^{-\tilde{\beta}} + \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}}, \quad n = n' + 1. \quad (3.71)$$

Ici, nous avons introduit la notation suivante :

$$\tilde{\beta} = \beta\sqrt{B}, \quad D = \frac{A}{B}. \quad (3.72)$$

En utilisant l'intégrale de Cahen-Mellin [137-139]

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds, \quad \left( |\arg z| < \frac{\pi}{2}; z \neq 0 \right). \quad (3.73)$$

où le chemin d'intégration est la ligne verticale  $\Re(s) = c$ , avec  $c \in \mathbb{R}^*$ , se trouvant à droite de tous les

pôles de  $\Gamma(s)$ , le terme  $\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}}$  peut être exprimé comme (voir Fig. (3.7))

$$\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\tilde{\beta}\sqrt{D})^{-s} \Gamma(s) \zeta_H\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{D} + 1\right), \quad (3.74)$$

avec  $\Gamma(s)$  et  $\zeta_H$  se référant respectivement aux fonctions Gamma d'Euler et zêta de Hurwitz [139,140].

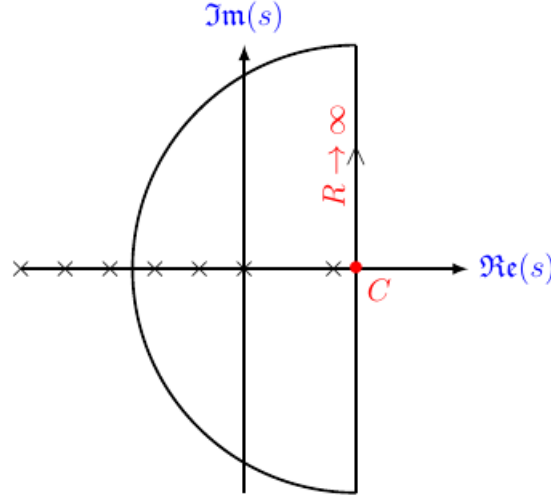


Fig. 3.7: Contour Integration of the Mellin transformation

Nous notons que l'intégrale converge uniquement lorsque  $s/2 > 1$ , ce qui nécessite  $c > 2$ . Comme nous devons résoudre l'intégrale (3.74), il est clair que l'intégrale a des pôles en  $s = -k$ ; ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) de  $\Gamma(s)$ , avec une résidu  $(-1)^k/k!$  (voir Figure. (3.7)). De plus, nous avons un pôle simple en  $s = 2$  de  $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{D} + 1\right)$  avec un résidu égal à 2. Une évaluation directe des résidus aux pôles  $\{s = 0, 2, -k\}$  conduit à l'expression suivante de la fonction de partition

$$Z(\tilde{\beta}) = e^{-\tilde{\beta}YB^{-1/2}} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{D} \left( \frac{2}{\tilde{\beta}^2} - 1 \right) + e^{-\tilde{\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tilde{\beta}\sqrt{D})^n}{n!} \zeta_H\left(-\frac{n}{2}, 1 + \frac{1}{D}\right) \right], \quad (3.75)$$

dont

$$\zeta_H(0, p) = \frac{1}{2} - p. \quad (3.76)$$

### 3.2.2 Les propriétés thermiques

Ayant estimé la fonction de partition de FVO, toutes les quantités thermiques de FVO peuvent être calculées à l'aide des expressions suivantes

$$F = -\frac{\sqrt{B}}{\tilde{\beta}} \ln(Z), U = -\sqrt{B} \frac{d \ln(Z)}{d\tilde{\beta}}, \quad (3.77)$$

$$S = \ln(Z) - \tilde{\beta} \frac{d \ln(Z)}{d \tilde{\beta}}, C_V = \tilde{\beta}^2 \frac{d^2 \ln(Z)}{d \tilde{\beta}^2}. \quad (3.78)$$

Les représentations en série de la fonction de partition  $Z$  en termes de  $\zeta_H$  peuvent être évaluées numériquement en ne tenant compte que d'un nombre fini de pôles apparaissant dans la somme de (3.75): Dans notre cas, nous avons pris  $n_{max} = 1000$ .

Tous les résultats ont été reportés dans les figures. (3.8) et (3.9) en fonction de la température réduite  $\tau = \frac{1}{\tilde{\beta}}$ . En utilisant cette nouvelle variable, les équations (3.77) et (3.78) sont modifiées et transformées en

$$F = -\tau \sqrt{B} \ln(Z), U = \sqrt{B} \tau^2 \frac{d \ln(Z)}{d \tau}, \quad (3.79)$$

$$S = \ln(Z) + \tau \frac{d \ln(Z)}{d \tau}, C_V = \tau^2 \frac{d^2 \ln(Z)}{d \tau^2} + 2\tau \frac{d \ln(Z)}{d \tau}. \quad (3.80)$$

Les figures. (3.8) et (3.9) montrent les différentes quantités thermiques de l'oscillateur de FV dans une corde cosmique en rotation en fonction des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $a$ . Elles présentent les quantités suivantes telles que l'énergie libre, l'entropie, la chaleur spécifique et l'énergie interne en fonction de la variable  $\tau$ . Sur toutes les courbes, ces quantités augmentent en fonction de  $\tau$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $a$ .

Sur la base des deux figures, les principaux résultats que nous avons observés peuvent être résumés comme suit :

1. Selon la Figure. (3.8), toutes les propriétés thermiques sont présentées pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  à une valeur fixe de la rotation  $a = 0.1$ . Ainsi,

- Toutes les grandeurs thermodynamiques sont affectées par le défaut topologique à travers le paramètre  $\alpha$ .
- En particulier, ces effets sont bien observés dans les courbes de la chaleur spécifique. Les courbes montrent un pic à une certaine température, qui diminue à mesure que  $\alpha$  augmente.
- La nature de ces pics peut être identifiée en examinant les courbes de l'entropie : aucune variation brusque autour d'une température n'a été identifiée dans ces courbes. Cela signifie que la courbure observée dans la courbe de la chaleur spécifique ne montre ni n'indique l'existence d'une transition de phase.
- À très haute température, toutes les courbes de chaleur spécifique tendent vers le point limite 2.
- En revanche, à très basse température, la troisième loi de la thermodynamique  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_v = 0$  est satisfaite [141].

2. Maintenant, dans la Figure. (3.9), toutes les propriétés thermiques sont présentées pour différentes valeurs du paramètre  $a$  à  $\alpha = 0.5$ . Donc,

- Toutes les grandeurs thermodynamiques sont influencées par le défaut topologique à travers le paramètre  $a$ .
- Toutes les courbes de la capacité calorifique coïncident autour d'une température spécifique. Par conséquent, ces effets sont beaucoup plus petits dans les courbes de capacité calorifique par rapport au premier cas montré dans la figure (3.8).
- Comme dans le premier cas, l'existence d'une bosse dans les courbes de capacité calorifique ne signifie pas qu'il y a une transition de phase.
- Enfin, toutes les courbes de capacité calorifique tendent vers le point limite 2 et la troisième loi de la thermodynamique  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_v = 0$  est remplie.

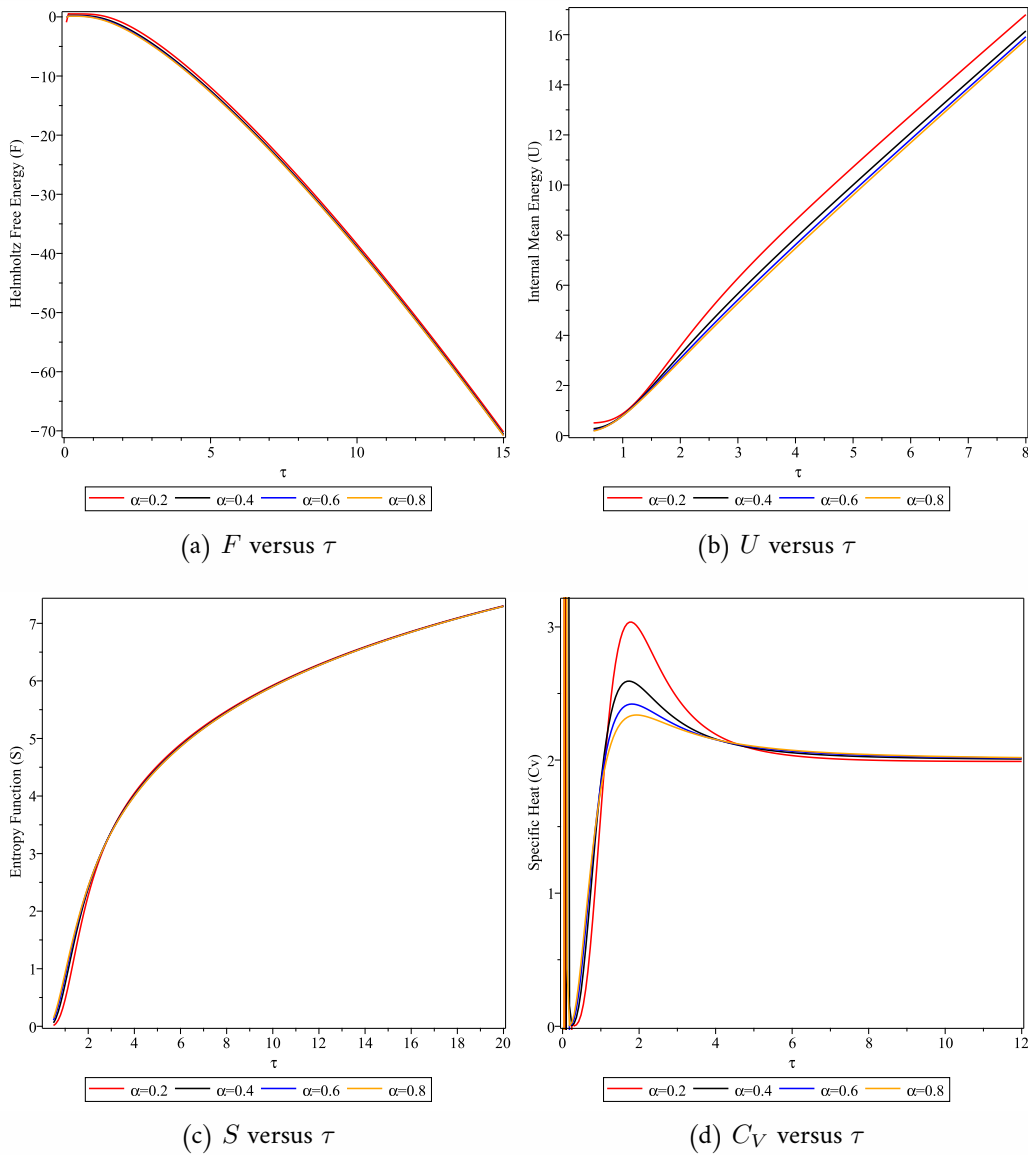


Fig. 3.8: Les propriétés thermiques de FVO par rapport à  $\tau$  dans le string cosmique rotatif pour  $a = 0, 1$  : ici  $j = m = \omega = 1$ .

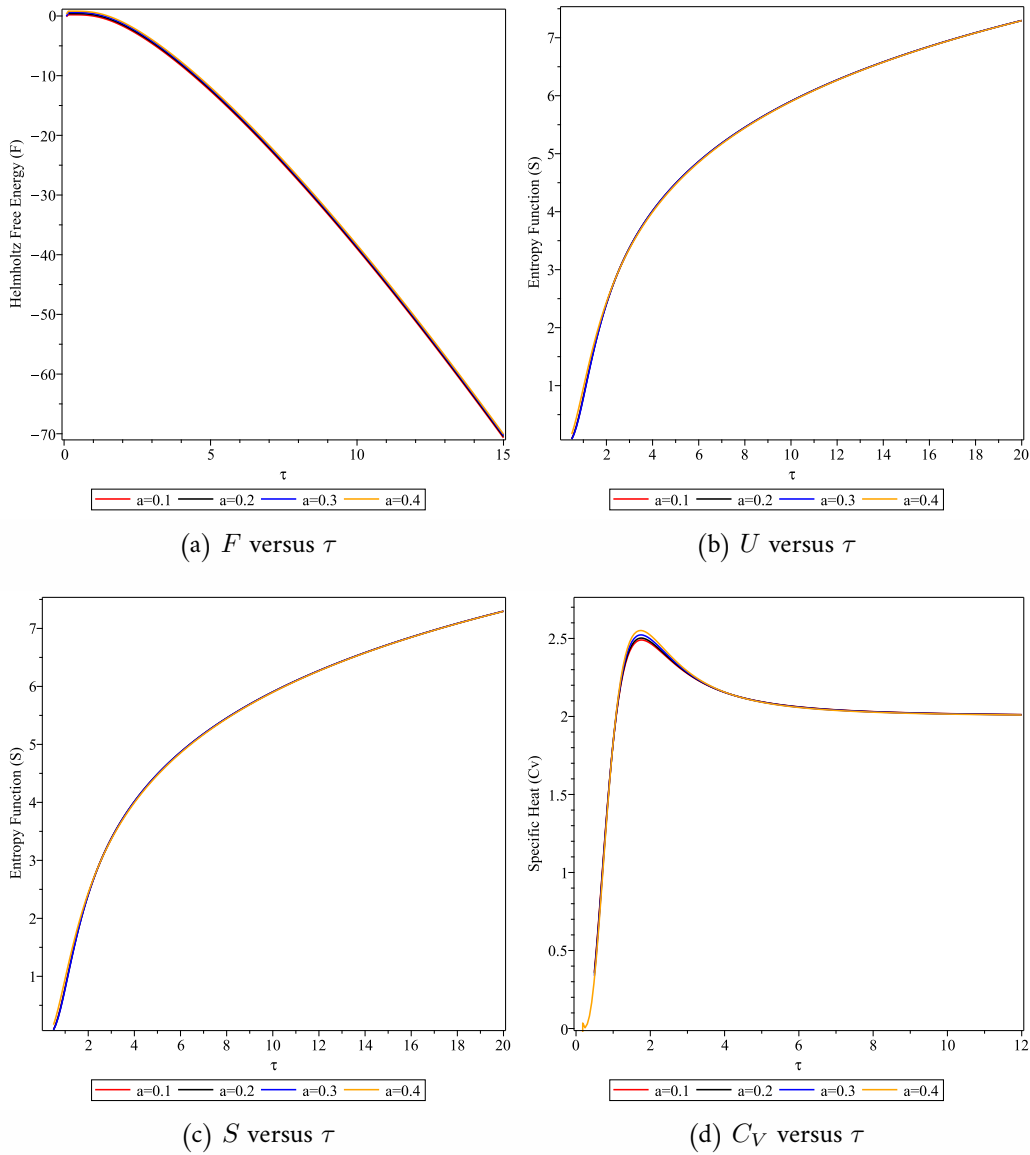


Fig. 3.9: Les Propriétés thermiques du FVO par rapport à  $\tau$  dans le cordon cosmique en rotation pour  $\alpha = 0.5$  : ici,  $j = m = \omega = 1$ .

Enfin, permettez-nous de mentionner quelques remarques sur la relation entre la corde cosmique, qui est un modèle cosmologique, et un problème accessible en laboratoire.

Tout d'abord, nous notons que la réalisation expérimentale des oscillateurs relativistes en laboratoire a été effectuée par Franco-Villafane et al [142]. Bermudez et al [143, 144] montrent que la mise en œuvre d'un oscillateur relativiste en 2D dans un ion piégé, avec toutes les analogies et les observables mesurés, est accessible avec la technologie actuelle, et cette mise en œuvre expérimentale devrait confirmer les phénomènes relativistes prédits et éventuellement mesurer ceux qui ne l'ont pas été. Geritsma, Lamata et Blatt [145–147] ont indiqué que les ions piégés sont particulièrement intéressants pour la simulation quantique car ils permettent un contrôle exceptionnel des paramètres expérimentaux (pour plus de détails, voir Réf. [52]). Certains auteurs ont montré l'existence d'une correspondance



exacte entre l'oscillateur relativiste et le graphène sous l'effet d'un champ magnétique [55, 148]. Le graphène est un cristal atomique bidimensionnel de carbone. Il existe et il relie différentes branches de la physique. L'existence expérimentale de différents défauts topologiques dans tous les échantillons de graphène a une forte influence sur la structure électronique. De tels défauts se produisent dans un espace-temps plat ou courbe [149–154].

Gallerati [154] montre qu'une analogie avec les cordes cosmiques permet de traiter un nombre arbitraire de défauts topologiques situés à des positions arbitraires sur le plan du graphène. Il propose un modèle pour ces défauts basé sur une analogie avec les cordes cosmiques et les résultats sur les inhomogénéités induites par ce désordre topologique. Son modèle peut être considéré comme un exemple de l'interaction entre la cosmologie et la matière condensée. En suivant cette approche, le modèle a la particularité que c'est la cosmologie qui fournit le modèle au graphène, contrairement à la situation habituelle où les systèmes de matière condensée sont utilisés comme laboratoires pour tester des modèles de haute énergie. Ainsi, le graphène peut être considéré comme le système le plus prometteur dans le domaine des matériaux de Dirac.

Dans ce contexte, et en raison de l'ensemble des travaux décrits ci-dessus, ainsi que d'autres travaux éventuels que nous n'avons pas mentionnés ici, nous pouvons nous attendre à ce que nos résultats soient considérés comme une bonne approche pour calculer les propriétés thermiques du système de graphène modélisé par la métrique des cordes cosmiques.

---

---

## CHAPITRE 4

---

### L'OSCILLATEUR DE FESHBACH-VILLARS DANS LA THÉORIE DE KALUZA-KLEIN

Ce chapitre se concentre sur l'exploration de la dynamique quantique relativiste des particules massives chargées de spin-0 dans le cadre de l'oscillateur de Feshbach-Villars (FVO), dans le contexte de la théorie de Kaluza-Klein (KKT). Plus précisément, nous examinons le comportement de ces particules en présence d'un espace-temps de corde cosmique dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein. Pour commencer, nous résolvons l'équation de Feshbach-Villars dans le fond d'un espace-temps de corde cosmique en tenant compte des principes de la théorie de Kaluza-Klein. Nous obtenons la solution des valeurs propres, ce qui fournit des informations précieuses sur le comportement du système. Ensuite, nous réexaminons ce système en considérant l'oscillateur quantique de Feshbach-Villars, une représentation mathématique spécifique de l'équation de Feshbach-Villars. En utilisant cet oscillateur, nous sommes en mesure de déterminer analytiquement les valeurs propres du système. Cette solution analytique permet une compréhension plus approfondie des caractéristiques du système. À l'étape suivante, nous étudions l'interaction entre l'équation de Feshbach-Villars et l'oscillateur en présence d'une dislocation cosmique dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein. Nous résolvons analytiquement l'équation d'onde associée à ce système, éclairant le comportement de la fonction d'onde. De plus, nous analysons l'influence du défaut topologique (dislocation cosmique) sur la quantification de l'énergie et de la fonction d'onde de l'oscillateur de Feshbach-Villars. Nous explorons également l'impact des champs externes sur le système. Ces analyses fournissent des informations précieuses sur la manière dont ces paramètres affectent le comportement et les propriétés de l'oscillateur Feshbach-Villars <sup>1</sup>.

---

1. **Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, R.L.L. Vitória, Faizuddin Ahmed, Marwan Al-Raei, Feshbach-Villars oscillator in Kaluza-Klein theory, Nuclear Physics B, Volume 994, 2023, 116288, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116288>.**

## 4.1 Bref aperçu sur théorie de Kaluza-Klein (KKT)

La théorie de Kaluza-Klein est une proposition significative en physique théorique qui cherche à unifier la gravité d'Einstein et l'électromagnétisme de Maxwell dans un cadre cohérent. Elle porte le nom des physiciens Theodor Kaluza et Oskar Klein, qui ont élaboré cette théorie dans les années 1920.

Le principe central de la théorie de Kaluza-Klein est l'extension de l'espace-temps traditionnel à une dimension supplémentaire. Outre les quatre dimensions habituelles de l'espace-temps (trois dimensions spatiales et une dimension temporelle), Kaluza et Klein ont proposé une cinquième dimension spatiale, enroulée sur elle-même pour former une boucle minuscule. Cette dimension supplémentaire est souvent qualifiée de dimension secrète ou compacte.

Cette notion de dimension supplémentaire permet de représenter à la fois la gravité et l'électromagnétisme dans un cadre géométrique unifié. Les équations de la relativité générale d'Einstein, qui décrivent la gravité, et les équations de Maxwell, qui décrivent l'électromagnétisme, apparaissent naturellement lorsque l'on examine comment les champs et les géométries interagissent dans cet espace-temps étendu.

La théorie de Kaluza-Klein a pavé la voie à des avancées ultérieures dans le domaine de la physique des particules et de la cosmologie. Elle a notamment influencé le développement de la théorie des supercordes, qui est une tentative de créer une théorie unifiée de toutes les forces fondamentales de la nature.

En résumé, la théorie de Kaluza-Klein [155, 156] est une proposition théorique importante qui explore la possibilité d'une dimension spatiale supplémentaire pour unifier la gravité et l'électromagnétisme dans un cadre géométrique commun. Elle a eu un impact considérable sur la recherche en physique théorique et continue d'influencer notre compréhension de l'univers à des échelles très petites et très grandes [157].

## 4.2 L'oscillateur de FV dans la théorie de Kaluza-Klein

### 4.2.1 Équation de Feshbach-Villars libre dans une corde cosmique

Inspirés par la description d'une dislocation de bord dans les solides cristallins, nous construisons une généralisation de ce défaut topologique en gravité. Nous pouvons observer qu'une dislocation de bord est une dislocation en spirale, qui est une déformation d'un cercle en une spirale. L'élément de ligne décrivant l'espace-temps avec ce défaut topologique est (en utilisant les unités  $\hbar = c = 1$ )

[31, 112, 158–162]

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= dt^2 - d\rho^2 - (\alpha\rho)^2 d\varphi^2 - (dz + Jd\varphi)^2 - \left(dx + \frac{\Phi}{2\pi}d\varphi\right)^2, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

où  $\chi$  est une valeur constante liée à la distorsion du défaut. Par  $J = \frac{|\vec{b}|}{2\pi}$ , le paramètre est également lié au vecteur de Burgers  $\vec{b}$ <sup>2</sup>. Ici  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , et  $\alpha \in [0, 1[$  est le paramètre angulaire qui définit le déficit angulaire  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ , qui est lié à la densité linéaire de masse  $\mu$  de la corde par  $\alpha = 1 - 4\mu$ .

Les composantes du tenseur métrique et du tenseur métrique inverse sont, respectivement,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left\{(\alpha\rho)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2 + J^2\right\} & -J & -\frac{\Phi}{2\pi} \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Phi}{2\pi} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} \\ 0 & 0 & \frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} & -\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2}\right) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Dans notre cas, il est facile de voir que  $R = 0$ , ce qui implique que l'espace-temps est localement plat (pas de gravité locale), et donc la composante de couplage s'annule. La condition  $\xi = 0$  est connue sous le nom de couplage minimal. Cependant, dans la théorie sans masse,  $\xi$  équivaut à  $1/6$  (en 4 dimensions). Les équations du mouvement sont alors invariantes sous une transformation conforme dans ce dernier cas.

Un calcul simple donne  $\mathcal{Y} = 0$ , et nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \left( -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} - \left(1 + \frac{J^2}{\alpha^2 \rho^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} - \left(1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2}\right) \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{1}{\mathcal{F}} \\
&+ \frac{1}{\mathcal{F}} \left( \frac{2J}{\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dz} \right) + \frac{\Phi}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dx} \right) - \frac{\Phi J}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \right) \right) \frac{1}{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

dont

$$\Phi(t, \rho, \varphi, z, x) = \Phi(\rho) e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)}, \tag{4.4}$$

2. Le vecteur de Burgers, également connu sous le nom de vecteur de translation, est un concept important en cristallographie et en science des matériaux. Il est utilisé pour décrire les dislocations, qui sont des défauts cristallins linéaires dans une structure cristalline.

où  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  sont les valeurs propres de l'opérateur de la composante  $z$  du moment angulaire.

Ainsi, l'équation de FV peut être écrite de manière équivalente aux deux équations couplées suivantes

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 + (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 &= 2\mathcal{N}E\phi_1 \\ -(\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 - (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 &= 2\mathcal{N}E\phi_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

La somme et la différence des deux équations précédentes conduisent à une équation différentielle du second ordre pour le champ  $\psi$ . En conséquence, l'équation radiale est la suivante :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \kappa \right] \psi(r) = 0, \quad (4.6)$$

dont

$$\zeta = \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \quad (4.7)$$

$$\kappa = \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \quad (4.8)$$

Nous pouvons observer que l'équation (4.6) est une équation de Bessel et sa solution générale est définie par [79]

$$\psi(r) = A J_{|\zeta|}(\kappa\rho) + B Y_{|\zeta|}(\kappa\rho), \quad (4.9)$$

où  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  et  $Y_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  sont les fonctions de Bessel du premier et du deuxième type d'ordre  $\zeta$ , respectivement. Ici,  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. Nous remarquons qu'à l'origine, lorsque  $\zeta = 0$ , la fonction  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho) \neq 0$ . Cependant,  $Y_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  est toujours divergente à l'origine. Dans ce cas, nous ne tiendrons compte que de  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  lorsque  $\zeta \neq 0$ .

Par conséquent, nous écrivons la solution de l'équation (4.6) comme suit :

$$\psi(\rho) = A J_{\left| \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right|} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right), \quad (4.10)$$

Nous pouvons maintenant exprimer l'ensemble de la fonction d'onde à deux composantes de la particule de KG massive sans spin dans l'espace-temps d'une dislocation cosmique en utilisant cette solution

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |\mathcal{C}_1| \left( \begin{array}{c} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{array} \right) e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} J_{\left| \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right|} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right), \quad (4.11)$$

La constante  $|\mathcal{C}_1|$  peut être obtenue en appliquant la condition de normalisation appropriée à l'équation de KG (par exemple, voir Réf. [112, 158]). Il est important de noter que l'omission de déterminer les constantes de normalisation tout au long de ce manuscrit n'affecte pas les résultats finaux. La fonction

d'onde qui représente le système pour les valeurs ( $\ell = 0, K = 0$ ) est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système tel qu'étudié dans [61, 62].

## 4.2.2 Effets d'un potentiel de paroi rigide

À partir de maintenant, nous considérons que la particule scalaire analysée dans la section précédente interagit avec un potentiel de paroi rigide. Ce type de potentiel est caractérisé par la condition aux limites suivante :

$$\psi(\rho_0) = 0, \quad (4.12)$$

Dans le domaine des mathématiques, cette condition est connue dans la littérature sous le nom de condition de Dirichlet, et  $\rho_0$  est un point fixe.

Ce type de potentiel a été étudié dans plusieurs systèmes de mécanique quantique. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur non relativiste [163], de l'oscillateur de Dirac et de Klein-Gordon dans l'espace-temps d'un monopôle global [164], de la quantification de Landau relativiste dans l'espace-temps avec torsion [30], dans des scénarios possibles de violation de la symétrie de Lorentz [31, 163] et induit par les effets non inertiels dans l'espace-temps avec une symétrie axiale [25, 162, 163].

Par conséquent, pour compléter notre analyse, considérons le cas particulier  $\sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho_0 \gg 0$ . Dans ce cas particulier, la fonction de Bessel est réécrite comme suit :

$$J_\Lambda \rightarrow \cos \left[ \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} \right] \quad (4.13)$$

Avec  $\Lambda = \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha}$ , En substituant l'équation (4.13) dans l'équation (4.11), nous obtenons, à partir de la condition aux limites (4.12), l'expression suivante :

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ \Xi^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.14)$$

Avec  $\Xi^2 = m^2 + K^2 + \lambda^2$ , L'équation (4.14) représente les niveaux d'énergie relativistes d'une particule scalaire soumise au potentiel de paroi rigide dans un espace-temps non trivial composé de courbure et de torsion, caractérisé par les paramètres  $\alpha$  et  $J$ , qui possède une dimension supplémentaire de type Kaluza-Klein. En faisant tendre  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $J \rightarrow 0$  et  $\alpha \rightarrow 1$ , nous obtenons le profil d'énergie relativiste d'une particule scalaire interagissant avec un potentiel de paroi dure dans l'espace-temps de Minkowski, le même résultat particulier obtenu dans la référence [165].

### 4.2.3 L'oscillateur de Feshbach-Villars dans le contexte d'un espace-temps de corde cosmique en théorie de Kaluza-Klein

Maintenant, nous examinerons le cas spécifique où nous souhaitons étendre la transformation de générale de FV (GFVT) pour l'oscillateur de Klein-Gordon. En général, nous devons substituer l'opérateur de moment dans l'équation (5.1). Par conséquent, l'équation (4.9) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \frac{1}{\mathcal{F}} \left[ - \left( \frac{d}{d\rho} - m\omega\rho \right) (\sqrt{-g}) \left( \frac{d}{d\rho} + m\omega\rho \right) - \sqrt{-g} \left( \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left( 1 + \frac{J^2}{\alpha^2\rho^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \left( 1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \frac{1}{\mathcal{F}} \\ + (\sqrt{-g}) \frac{1}{\mathcal{F}} \left( \frac{2J}{\alpha^2\rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dz} \right) + \frac{\Phi}{\pi\alpha^2\rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dx} \right) - \frac{\Phi J}{\pi\alpha^2\rho^2} \left( \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \right) \right) \frac{1}{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

De manière similaire, l'équation différentielle suivante peut être obtenue à l'aide d'un calcul simple basé sur l'approche décrite ci-dessus

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + m^2\omega^2\rho^2 - \frac{\sigma^2}{\rho^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \quad (4.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2 \\ \delta = E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + 2m\omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'oscillateur de FV pour une particule de spin-0 dans l'espace-temps (1+4) dans la théorie de KKT est donné par l'équation (4.16).

Pour dériver la solution à ce problème, nous proposons d'abord une transformation des coordonnées radiales

$$\mathcal{Q} = m\omega r^2, \quad (4.18)$$

En substituant l'expression de  $\chi$  dans l'équation (4.16), nous obtenons :

$$\left[ \frac{d^2}{d\mathcal{Q}^2} + \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{d\mathcal{Q}} - \frac{\sigma^2}{4\mathcal{Q}^2} + \frac{\delta}{4m\omega\mathcal{Q}} - \frac{1}{4} \right] \psi(\chi) = 0. \quad (4.19)$$

Donc, si nous examinons le comportement asymptotique de la fonction d'onde à l'origine et à l'infini, et que nous cherchons des solutions régulières, nous pouvons supposer une solution du type :

$$\psi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{\mathcal{Q}}{2}} F(\mathcal{Q}), \quad (4.20)$$

Comme précédemment, nous pouvons réinjecter cela dans l'équation (4.18), et nous obtenons :

$$\mathcal{Q} \frac{d^2 F(\mathcal{Q})}{d\mathcal{Q}^2} + (|\sigma| + 1 - \mathcal{Q}) \frac{dF(\mathcal{Q})}{d\mathcal{Q}} - \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} \right) F(\mathcal{Q}) = 0, \quad (4.21)$$

Il s'agit de l'équation hypergéométrique confluent, dont les solutions sont définies par l'expression suivante

$$F(\mathcal{Q}) = {}_1F_1\left(\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, \mathcal{Q}\right), \quad (4.22)$$

Il convient de noter que la solution (4.21) doit être un polynôme de degré  $n$ . Cependant, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , cela pose un problème de divergence. Nous pouvons obtenir un polynôme fini uniquement si le facteur du dernier terme dans l'équation (4.22) est un entier négatif, c'est-à-dire :

$$\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.23)$$

Avec ce résultat et les paramètres de l'équation (4.17), nous pouvons déduire le spectre d'énergie quantifié de l'oscillateur de FV dans une dislocation cosmique, et donc,

$$E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega}{\alpha} \left| (l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right] \right| + m^2 + K^2 + \lambda^2}, \quad (4.24)$$

À ce stade, quelques remarques peuvent être faites.

- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [61, 62].
- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [53, 57].
- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$ , et en l'absence de défaut topologique, est entièrement compatible avec l'énergie  $E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + m^2}$ . Nous pouvons noter que l'énergie dépend clairement du déficit angulaire  $\alpha$ . En d'autres termes, en raison de la présence de l'angle conique, la courbure de l'espace-temps impactée par le défaut topologique, c'est-à-dire la corde cosmique, affecterait la dynamique relativiste de la particule scalaire en créant un champ gravitationnel. La fonction d'onde correspondante est donnée par

$$\psi(\rho) = |\mathcal{C}_2| (m\omega\rho^2)^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, m\omega\rho^2\right), \quad (4.25)$$

Ensuite, les fonctions propres générales sont écrites comme suit :

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |\mathcal{C}_2| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (m\omega\rho^2)^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} \times {}_1F_1\left(\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, m\omega\rho^2\right), \quad (4.26)$$

où  $|\mathcal{C}_2|$  est la constante de normalisation et  $(\sigma, \delta)$  sont donnés dans (4.17).



- La fonction d'onde qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [61, 62].

#### 4.2.4 L'oscillateur de Feshbach-Villars avec un potentiel de type paroi dure dans le contexte de l'espace-temps d'une corde cosmique en théorie de Kaluza-Klein

Désormais, considérons l'oscillateur quantique relativiste interagissant avec un potentiel de paroi rigide défini par la condition aux limites donnée dans l'équation (4.12). Afin d'obtenir le profil énergétique relativiste de ce système, examinons le cas particulier où  $\delta/4m\omega \gg 1$ . De plus, le nombre quantique  $l$  et  $\rho_0$  sont fixes. Dans ce cas particulier, la fonction hypergéométrique confluent peut être exprimée sous la forme suivante [166]:

$${}_1F_1(A, B; Q_0) \rightarrow \cos\left(\sqrt{2BQ_0 - 4AQ_0}\right) - \frac{B\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (4.27)$$

dont

$$A = \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}; \quad B = |\sigma| + 1. \quad (4.28)$$

Par conséquent, en substituant les équations (4.27) et (4.22) dans l'équation (4.14), nous obtenons

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ \Xi^2 - 2m\omega + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.29)$$

L'équation (4.29) représente les niveaux d'énergie relativistes de l'oscillateur de FV interagissant avec un potentiel de paroi rigide dans un espace-temps de type Kaluza-Klein avec torsion et courbure. En comparant les équations (4.24) et (4.29), nous pouvons noter que la présence du potentiel de paroi rigide modifie le profil d'énergie relativiste de l'oscillateur de FV. De plus, en comparant les équations (4.14) et (4.29), nous pouvons observer que la présence de l'oscillateur FV modifie les niveaux d'énergie relativistes du potentiel de paroi rigide dans l'espace-temps défini par l'élément de ligne (4.1). Cette modification est explicite grâce au terme  $-2m\omega$ .

### 4.3 L'oscillateur de FV dans une dislocation cosmique de l'espace-temps de Som-Raychaudhuri dans la théorie de Kaluza-Klein

#### 4.3.1 Rappel

Les nouvelles données d'observation suggèrent que l'univers est à la fois en expansion et en rotation, ce qui a suscité un intérêt croissant pour le développement de théories visant à expliquer ces phéno-

mènes. L'une de ces théories a été proposée par Gödel [167] dans les années 1950 pour un univers en rotation rigide, caractérisé par un terme dans la métrique et une source de courbure connue sous le nom de fluide de Weyssenhoff-Raabe [167, 168]. Des chercheurs ont étudié la dynamique quantique de cette théorie dans des espaces-temps en (3+1) dimensions [112, 158, 169]. Les auteurs de cet article se concentrent sur la dislocation cosmique dans une solution Gödel ou Som-Raychaudhuri [168] en théorie de Kaluza-Klein. Ils supposent qu'une particule scalaire chargée est exposée à un champ magnétique uniforme, introduit à l'aide de la théorie de Kaluza-Klein à travers la géométrie de l'espace-temps. Étant donné que la rotation revêt une importance dans les scénarios actuels, les auteurs utilisent la théorie de Kaluza-Klein pour décrire la dynamique quantique d'une particule de Klein-Gordon dans ce contexte de rotation. Ils présentent une nouvelle solution pour l'espace-temps de Som-Raychaudhuri qui inclut un défaut topologique de désorientation cosmique, localisé parallèlement à l'axe de rotation. Les auteurs examinent l'influence de l'introduction d'une corde cosmique dans un univers de type Gödel, contrairement à leur étude précédente où ils ont étudié la dynamique quantique dans un contexte de défaut topologique.

Plus précisément, ils considèrent la solution de Som-Raychaudhuri de l'équation de champ d'Einstein [169] avec une dislocation cosmique, décrite dans une théorie de Kaluza-Klein avec une source de torsion en rotation le long de l'axe de symétrie des espaces-temps de métrique suivante

$$ds^2 = (dt + \alpha\Omega\rho^2 d\varphi)^2 - d\rho^2 - (\alpha\rho)^2 d\varphi^2 - (dz + Jd\varphi)^2 - \left(dx + \left(\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right) d\varphi\right)^2 \quad (4.30)$$

où les composantes des tenseurs métriques et métriques inverses sont, respectivement

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\Omega\rho^2 & 0 & -\left[(\alpha\Omega\rho^2)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right)^2 + J^2\right] & -J & -\left[\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right] \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right] & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\Omega\rho)^2 & 0 & \frac{\Omega}{\alpha} & -\frac{\Omega J}{\alpha} & -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha} + \frac{eB\Omega}{2\alpha}\rho^2\right] \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eB}{2\alpha^2}\right] \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eJB}{2\alpha^2}\right] \\ -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha} + \frac{eB\Omega}{2\alpha}\rho^2\right] & 0 & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eB}{2\alpha^2}\right] & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eJB}{2\alpha^2}\right] & -\left[1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2} + \frac{e\Phi B}{2\pi\alpha^2} + \left(\frac{eB}{2\alpha}\rho\right)^2\right] \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

### 4.3.2 L'équation libre de FV

Dans la prochaine partie des calculs mathématiques, nous considérons que le champ magnétique est inexistant ( $B = 0$ ), alors,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\Omega\rho^2 & 0 & -\left[(\alpha\Omega\rho^2)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2 + J^2\right] & -J & -\left[\frac{\Phi}{2\pi}\right] \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{\Phi}{2\pi}\right] & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\Omega\rho)^2 & 0 & \frac{\Omega}{\alpha} & -\frac{\Omega J}{\alpha} & -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha}\right] \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] \\ -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha}\right] & 0 & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] & -\left[1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2}\right] \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

De même, l'équation différentielle suivante peut être obtenue à l'aide d'un calcul simple basé sur l'approche décrite ci-dessus

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\xi^2}{\rho^2} + \kappa' \right] \psi(r) = 0 \quad (4.35)$$

avec

$$\xi^2 = \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2$$

$$\kappa' = E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 \quad (4.36)$$

Nous pouvons observer que la solution de l'équation est une équation de Bessel et sa solution générale est définie par

$$\psi(r) = A' J_{|\xi|}(\kappa'\rho) + B' Y_{|\xi|}(\kappa'\rho) \quad (4.37)$$

où  $J_{|\xi|}(\kappa'\rho)$  et  $Y_{|\xi|}(\kappa'\rho)$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $\xi$  de première et de deuxième espèce, respectivement. Ici,  $A'$  et  $B'$  sont des constantes arbitraires. Nous remarquons qu'à l'origine, lorsque  $\xi = 0$ , la fonction  $J_{|\xi|}(\kappa'\rho) \neq 0$ . Cependant,  $Y_{|\xi|}(\kappa'\rho)$  diverge toujours à l'origine. Dans ce cas, nous ne tiendrons compte que de  $J_{|\xi|}(\kappa'\rho)$  lorsque  $\xi \neq 0$ . Par conséquent, nous écrivons la solution comme suit :

$$\psi(\rho) = A' J_{\sqrt{\frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha}}} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2} \rho \right) \quad (4.38)$$

Nous pouvons maintenant exprimer la fonction d'onde à deux composantes de la particule de KG dans une dislocation cosmique en Som-Raychaudhuri à partir de la théorie de Kaluza-Klein comme suit :

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |C_3| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{N} \\ 1 - \frac{E}{N} \end{pmatrix} e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} J_{\left[ \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right]} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right), \quad (4.39)$$

La fonction d'onde qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0)$  est parfaitement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système telle qu'étudiée dans [61, 62].

### 4.3.3 Effets d'un potentiel de paroi rigide

Avec les résultats obtenus dans la précédente sous-section, nous pouvons aller plus loin pour obtenir les niveaux d'énergie relativistes en présence d'un potentiel de paroi rigide, tel que donné dans l'Équation (4.12). Par conséquent, en suivant les mêmes étapes entre les Équations (4.12) et (4.14), nous obtenons l'expression suivante :

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 - \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left( l - Jk - \frac{\Phi\lambda}{2\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.40)$$

ce qui représente les niveaux d'énergie relativistes d'une particule scalaire soumise à un potentiel de paroi rigide dans l'espace-temps de Som-Raychaudhuri avec une dimension supplémentaire de type Kaluza-Klein. Nous pouvons noter que le système est influencé par la topologie non triviale de l'espace-temps. En comparant les résultats donnés par les équations (4.14) et (4.40), nous pouvons noter que les effets gravitationnels intrinsèques de la métrique de Som-Raychaudhuri modifient les niveaux d'énergie de la particule scalaire interagissant avec le potentiel de paroi rigide grâce au terme  $\frac{\Omega}{\alpha}$ ; en prenant  $\Omega \rightarrow 0$ , nous retrouvons le résultat obtenu dans l'équation (4.14).

### 4.3.4 Le cas de l'oscillateur de FV

De manière similaire, l'équation différentielle suivante peut être obtenue en utilisant un calcul simple basé sur l'approche décrite ci-dessus : ainsi, nous avons

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + m^2 \omega^2 \rho^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2} + \eta \right] \psi(r) = 0 \quad (4.41)$$

avec

$$\mu^2 = \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2$$

$$\eta = E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 + 2m\omega \quad (4.42)$$

Avec ce résultat et les paramètres (4.17), nous pouvons déduire le spectre énergétique quantifié de l'oscillateur de Feshbach-Villars dans l'espace-temps de la dislocation cosmique, et donc,

$$E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega}{\alpha} \left| (l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right] \right| + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 + m^2 + K^2 + \lambda^2} \quad (4.43)$$

Quelques remarques peuvent être faites ici :

- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [61, 62].
- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [53, 57, 94].
- L'énergie qui représente le système pour les valeurs de  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$ , et en l'absence de défaut topologique, est entièrement compatible avec l'énergie  $E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + m^2}$ . On peut remarquer que l'énergie dépend clairement du déficit angulaire  $\alpha$ . En d'autres termes, en raison de la présence de l'angle de conique, la courbure de l'espace-temps impactée par le défaut topologique, c'est-à-dire la corde cosmique, affecterait la dynamique relativiste de la particule scalaire en créant un champ gravitationnel.

La fonction d'onde correspondante est donnée par :

$$\psi(\rho) = |\mathcal{C}_4| (m\omega\rho^2)^{\frac{|\mu|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} {}_1F_1 \left( \frac{|\mu|}{2} - \frac{\eta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\mu| + 1, m\omega\rho^2 \right) \quad (4.44)$$

Ensuite, les fonctions propres générales sont écrites comme suit :

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |\mathcal{C}_4| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{N} \\ 1 - \frac{E}{N} \end{pmatrix} (m\omega\rho^2)^{\frac{|\mu|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} {}_1F_1 \left( \frac{|\mu|}{2} - \frac{\eta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\mu| + 1, m\omega\rho^2 \right) \quad (4.45)$$

où  $|\mathcal{C}_4|$  est la constante de normalisation et  $(\mu, \eta)$  sont donnés dans (4.41).

- La fonction d'onde qui représente le système pour des valeurs de  $(\ell = 0, K = 0)$  est entièrement compatible avec l'énergie de l'ensemble du système étudié dans [61, 62].

### 4.3.5 L'oscillateur de FV plus un potentiel de paroi rigide

Considérons l'oscillateur de FV en interaction avec un potentiel de paroi rigide défini par la condition aux limites donnée dans l'équation (4.12). Par analogie, suivons les mêmes étapes que celles

données dans les équations (4.12) à (4.14), de sorte que nous ayons :

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 - 2m\omega - \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left( l - Jk - \frac{\Phi\lambda}{2\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

L'équation (4.46) nous donne les niveaux d'énergie relativistes de l'oscillateur de FV en interaction avec un potentiel de paroi dure dans un espace-temps de Som-Raychaudhuri avec une dimension supplémentaire de type Kaluza-Klein. En comparant les équations (4.40) et (4.46), on peut remarquer que la présence de l'oscillateur de FV modifie le spectre d'énergie relativiste de ce système quantique. Cette modification se manifeste à travers le terme  $-2m\omega$ . En faisant tendre  $\omega$  vers 0 dans l'équation (4.46), nous retrouvons le résultat de l'équation (4.40) ; en faisant tendre  $\Omega$  vers 0 dans l'équation (4.40), nous retrouvons l'équation (4.14).

---

---

## CHAPITRE 5

---

### L'OSCILLATEUR DE FESHBACH-VILLARS EN PRÉSENCE D'UNE CORDE COSMIQUE NON-INERTIEL

Dans ce présent chapitre, nous étudions le mouvement quantique relativiste d'une particule sans spin en utilisant le formalisme de Feshbach-Villars (FV) dans l'espace-temps d'une corde cosmique en rotation. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant la formulation FV de premier ordre de l'équation de Klein-Gordon (KG). Nous appliquons l'équation du mouvement (a) pour étudier le mouvement de la particule confinée à un potentiel de paroi rigide, (b) le mouvement en présence d'un potentiel de type Coulomb, et (c) la particule interagissant avec l'oscillateur de Feshbach-Villars (FVO). Les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde sont obtenus pour les trois cas. Notre étude s'est concentrée sur l'impact de la rotation et de la courbure sur les niveaux d'énergie de la particule <sup>1</sup>.

#### 5.1 La dynamique quantique d'une particule de spin-0 dans une corde cosmique non inertielle dans la représentation de FV

Les équations régissant le comportement d'une particule scalaire dans un espace-temps riemannien, défini par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ , peuvent être obtenues en reformulant l'équation de KG. Cette approche, largement discutée dans divers manuels [13, 170–174], permet une compréhension plus approfondie de la dynamique des particules dans un espace-temps courbe. L'équation de KG est donnée par :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + M^2 - \xi R \right) \Phi(x, t) = 0. \quad (5.1)$$

---

1. Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek. Boumali, Edilberto.O.Silva, *Ann. Physics*, Journal Pre-proof (accepted for publication), ..., (2023). (Classe A ; ImpactFactor = 3 ; CiteScore = 5.4 ) : Applications of the Klein-Gordon equation in the Feshbach-Villars representation in the non-inertial cosmic string space-time <https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169479>

Ici, l'opérateur Laplace-Beltrami

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \quad (5.2)$$

joue un rôle crucial. Il représente l'opérateur différentiel utilisé dans l'équation de KG dans l'espace-temps courbe du défaut topologique cosmique, dont l'élément de ligne est défini plus tard. De plus,  $\xi$  désigne une constante de couplage réelle et sans dimension, et  $R$  correspond au scalaire de courbure de Ricci défini par  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , où  $R_{\mu\nu}$  représente le tenseur de courbure de Ricci. Le tenseur métrique inverse est désigné par  $g^{\mu\nu}$ , et  $g = \det(g_{\mu\nu})$  est le déterminant du tenseur métrique. Ces grandeurs contribuent collectivement à la formulation de l'équation de KG dans l'espace-temps du défaut topologique cosmique.

Dans le but de comprendre la dynamique quantique des particules de spin-0 dans un espace-temps influencé par les effets non inertiels d'un défaut topologique cosmique, notre objectif actuel est de déterminer l'équation du mouvement qui régit leur trajectoire. Pour ce faire, nous utiliserons la représentation de FV. Cependant, avant d'aborder des modèles physiques spécifiques, nous allons d'abord dériver l'équation d'onde de KG pour une particule scalaire relativiste libre se propageant dans un espace-temps de corde cosmique qui est statique et d'une symétrie cylindrique. Cela servira de base pour de futures études sur le comportement des particules en présence de cordes cosmiques.

L'élément de ligne qui définit la métrique d'une corde cosmique dans un espace-temps (3+1) dimensions peut être exprimé sous une forme générale comme suit [173–176]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (5.3)$$

avec  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , et  $\alpha \in [0, 1[$  est le paramètre qui détermine le déficit angulaire  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ , et qui est également lié à la densité linéaire de masse  $\mu$  de la corde par  $\alpha = 1 - 4\mu$ . De plus, en posant  $\varphi' = \alpha\varphi$ , cela représente un espace extérieur conique plat avec un déficit d'angle  $\delta\varphi = 8\pi\mu$ . L'élément de ligne (5.3) fournit une représentation mathématique de la géométrie de l'espace-temps associée à la corde cosmique, capturant les relations entre les distances et les intervalles dans cet espace-temps courbe particulier. En examinant la structure spécifique de cet élément de ligne, on peut étudier les propriétés et les caractéristiques de la métrique de la corde cosmique dans un cadre de dimension (3 + 1).

Alternativement, on peut considérer une corde avec une densité linéaire de masse égale le long de l'axe  $z$ , avec la métrique de Lorentz

$$ds^2 = dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (5.4)$$



et les changements de coordonnées

$$x' = R \cos \alpha \Phi, y' = R \sin \alpha \Phi, z = Z, \text{ et } t = T, \quad (5.5)$$

ce qui conduit à l'élément de ligne de l'espace-temps d'une corde cosmique avec des coordonnées cylindriques [156, 177–182].

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - (\alpha R)^2 d\Phi^2 - dZ^2. \quad (5.6)$$

En plus de la présence d'effets non inertiels, nous analysons un référentiel qui tourne uniformément avec une vitesse angulaire constante  $\Omega$ . L'élément de ligne qui décrit ce système est écrit comme suit [183]:

$$ds^2 = (1 - \alpha^2 \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega \alpha^2 r^2 d\varphi dt - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (5.7)$$

Comme nous ne voulons pas que le terme  $g^{00}$  devienne positif, nous exigeons que

$$0 < r < \frac{1}{\alpha \Omega}. \quad (5.8)$$

Cela garantit que la coordonnée radiale du tenseur métrique (5.7) est définie dans la plage physiquement acceptable. En d'autres termes, lorsque les particules KG se trouvent dans la région où  $r \geq \alpha \Omega$ , elles se trouvent en dehors du cône de lumière car leur vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière. Par conséquent, le tenseur métrique (5.7) n'est pas bien défini pour  $r \geq \alpha \Omega$ , et la fonction d'onde de la particule doit se situer uniquement dans la plage (5.8). En raison de cette restriction, la fonction d'onde de la particule de KG doit s'annuler à  $r = \alpha \Omega$  (voir Réf. [183]). Nous utiliserons cette condition plus tard dans la section Applications.

Les composantes du tenseur métrique et du tenseur métrique inverse sont données respectivement par [20, 23, 37, 117, 183–186]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\alpha \Omega r)^2 & 0 & -\Omega (\alpha r)^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega (\alpha r)^2 & 0 & -(\alpha r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & \Omega^2 - \frac{1}{(\alpha r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Il convient de noter que le problème des particules lourdes sans spin dans la géométrie formée par un fond de chaîne cosmique non inertielle a été étudié dans diverses études (voir, par exemple, [20, 23, 37, 117, 183–186]). Pour obtenir la forme FV de l'équation d'onde de KG dans des variétés courbes, nous utiliserons l'approche décrite dans les références [187]. Nous utiliserons la transformation généralisée de Feshbach-Villars (GFVT) pour décrire à la fois les particules massives et sans masse (une transformation équivalente a été présentée précédemment dans Ref. [37, 184]).

Les composantes de la fonction d'onde  $\Phi$  dans le GFVT sont fournies par [187]

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\tilde{\mathcal{D}}\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \quad (5.10)$$

où  $\mathcal{N}$  est un paramètre réel arbitraire non nul, et nous avons défini  $\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}$ , avec

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2g^{00}\sqrt{-g}} \left\{ \partial_i, \sqrt{-g}g^{0i} \right\}. \quad (5.11)$$

L'accolade dans l'équation (5.11) représente l'anticommutateur. Avec les transformations mentionnées ci-dessus, l'hamiltonien peut être exprimé de manière plus compacte comme suit :

$$\mathcal{H}_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \quad (5.12)$$

avec

$$\mathcal{T} = \frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ij} \partial_j + \frac{M^2 - \xi R}{g^{00}} - \mathcal{Y}^2, \quad \text{with } (i, j = 1, 2, 3). \quad (5.13)$$

À ce stade, il est utile d'examiner de plus près la situation impliquant des particules sans masse ( $m = 0$ ). Étant donné que la transformation FV originale correspond à  $\mathcal{N} = m$ , elle ne peut pas être appliquée aux particules sans masse. Par conséquent, si nous utilisons la méthode originale, le cas des particules sans masse ne peut pas être considéré comme une limite (lorsque  $m \rightarrow 0$ ) des particules massives. Il est important de noter que le cas sans masse ne peut pas être obtenu en prenant la limite  $m \rightarrow 0$  du cas massif (voir Ref. [188]). Pour remédier à cette limitation, nous utilisons la transformation GFVT, développée par Silenko [107–109]. Cette transformation, qui utilise un paramètre général désigné par  $\mathcal{N}$ , nous permet de formuler le cadre hamiltonien englobant les particules massives et sans masse. Pour plus de détails, veuillez vous référer à Ref. [37]. Il convient de mentionner que lorsque  $\mathcal{N} = M$ , les transformations FV originales sont satisfaites. En utilisant la métrique (5.7), nous pouvons vérifier que l'espace-temps est localement plat car le tenseur de Riemann est nul, et donc le terme de couplage disparaît<sup>2</sup>. Les équations du mouvement sont alors invariantes conformément dans ce dernier cas. Si  $\mathcal{Y} \neq 0$ , alors nous obtenons

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}'\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \quad (5.14)$$

avec  $\mathcal{D}' = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}'$  dont

$$\mathcal{Y}' = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}. \quad (5.15)$$

La prochaine étape consiste à étendre la méthode employée à la situation des cordes cosmiques en rotation. La GFVT est utilisée pour construire les équations du mouvement pour cette question,

2. La condition  $\xi = 0$  est connue sous le nom de couplage minimal. Dans la théorie sans masse,  $\xi$  équivaut à  $1/6$  (en quatre dimensions).

qui sont ensuite résolues pour donner les fonctions d'onde et les spectres d'énergie. Selon les références [37, 174], l'identification de l'hamiltonien conduit à l'utilisation d'une formulation à deux composantes des champs de type KG. Pour reformuler l'équation (5.17) sous forme hamiltonienne, des définitions supplémentaires des quantités décrites dans les équations (5.9) doivent être introduites dans les équations (5.11) à (5.20) [184]. De cette manière, nous écrivons

$$\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}', \quad (5.16)$$

dont

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & \partial_i \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j + \frac{M^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i (\sqrt{-g} G^{ij}) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) \\ & + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} [\nabla_i (\mathcal{U}^i)]^2 - \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j (\mathcal{U}^i) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j (\mathcal{U}^i), \end{aligned} \quad (5.17)$$

où

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \quad (5.18)$$

L'auteur [109] démontre que les transformations (5.16) et (5.17) avec les définitions de l'équation (5.18) sont précises et englobent tous les champs inertiels et gravitationnels. Il convient de souligner que l'utilisation de ces transformations précises garantit l'obtention de la forme bloc-diagonale de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{GFVT}$ , qui est indépendante du paramètre  $\mathcal{N}$ . Les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{Y}'$  dans l'équation (5.15) pour l'élément de ligne dans l'équation (5.7) sont données par

$$\mathcal{Y}'\Psi(t, r, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_2, \frac{g^{02}}{g^{00}} \right\} \Psi(t, r, \varphi) = \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi(t, r, \varphi), \quad (5.19)$$

où le champ  $\Psi$  obéit à la transformation non unitaire

$$\Psi \equiv \Phi' = \mathcal{F}\Phi,$$

ce qui permet d'obtenir un Hamiltonien pseudo-hermitien  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \mathcal{F}\mathcal{H}_{GFVT}\mathcal{F}^{-1}$ , avec  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z (\mathcal{H}'_{GFVT})^\dagger \tau_z$ .

Après quelques manipulations algébriques, l'équation (5.17) prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \sqrt{-g} \left( \Omega^2 - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sqrt{-g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} \\ & + \frac{M^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

où, pour la métrique (5.7), le scalaire de Ricci s'annule, c'est-à-dire  $R = 0$ . Maintenant, nous sommes

prêts à résoudre l'équation suivante

$$\mathcal{H}'_{GFVT}\Psi'(\mathbf{x}) = i \frac{d}{dt}\Psi'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \equiv (t, r, \varphi, z). \quad (5.21)$$

où  $\mathcal{H}'_{GFVT}$  est calculé en utilisant à la fois les équations (5.19) et (5.20). Donc, considérons l'ansatz suivant pour la fonction d'onde afin de résoudre ce problème aux valeurs propres.

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{r}) \\ \phi_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} e^{-(iEt - j\varphi - k_z z)}, \quad (5.22)$$

où  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  est le nombre quantique du moment angulaire, et  $k_z \in [-\infty, +\infty]$ . En remplaçant l'équation (5.22) dans l'équation (5.21), nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + \mathcal{T}' \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F}\phi_1 &= 2\mathcal{N}E\mathcal{F}\phi_1, \\ \mathcal{N}^2 \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) - \mathcal{T}' \mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F}\phi_2 &= 2\mathcal{N}E\mathcal{F}\phi_2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'addition et la soustraction de ces équations conduisent, après simplification, à des ensembles d'équations couplées pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

$$\mathcal{N}\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) = E\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2), \quad (5.24)$$

$$-\mathcal{T}'\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) + \mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) = \mathcal{N}E\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2), \quad (5.25)$$

dont

$$\phi_1 = \frac{1}{\mathcal{N}} \left( E - \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right), \quad \phi_2 = \frac{1}{\mathcal{N}} (E + \Omega j) \phi_2. \quad (5.26)$$

Après quelques manipulations algébriques simples, nous obtenons l'équation différentielle du second ordre suivante pour la fonction radiale  $\psi(r)$  :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \gamma^2 \right] \psi(r) = 0, \quad (5.27)$$

où nous avons défini les paramètres  $\zeta^2 = j^2/\alpha^2$  et  $\gamma^2 = (E + \Omega j)^2 - M^2 - k_z^2$ . On peut montrer que l'équation (5.27) est une équation différentielle de type Bessel, et sa solution générale est donnée par :

$$\psi(r) = A' J_\zeta(\gamma r) + B' N_\zeta(\gamma r), \quad (5.28)$$

où  $J_\zeta(\gamma r)$  et  $N_\zeta(\gamma r)$  sont les fonctions de Bessel du premier et du deuxième genre, et  $A'$  et  $B'$  sont des constantes arbitraires. Dans les prochaines sections, nous allons faire quelques applications du formalisme ci-dessus. Nous allons considérer des modèles déjà consolidés dans la littérature pour mettre en évidence les implications physiques dues aux effets non inertiels et au paramètre de courbure

de la corde cosmique.

## 5.2 Quelques applications

### 5.2.1 Mouvement dans un potentiel de paroi rigide

Dans cette section, nous allons explorer le mouvement d'une particule scalaire soumise à une condition limite de paroi rigide dans l'espace-temps d'une cordon cosmique. Le potentiel de paroi rigide impose une condition limite à la fonction d'onde de la particule, ce qui affecte son comportement en présence des effets non inertiels et de courbure du cordon cosmique. Étudier le mouvement relativiste d'une particule de spin-0 confinée à un potentiel de mur rigide est important en physique théorique et nous fournit des résultats très intéressants. En explorant ce scénario, nous acquérons des informations précieuses sur le comportement des particules dans des conditions extrêmes et sur l'interaction entre la relativité et la mécanique quantique. Cette étude nous permet d'approfondir notre compréhension des principes fondamentaux, d'affiner les cadres théoriques et de développer des techniques de calcul. De plus, elle sert de tremplin pour la compréhension de systèmes plus complexes, nous guidant vers une compréhension plus complète de l'univers. Grâce à cette recherche, nous dévoilons la dynamique complexe des particules de spin-0 et contribuons à l'avancement plus large de la physique dans son ensemble. Pour le modèle simple décrit par la solution de l'Eq. (5.27), nous devons considérer la solution physiquement acceptable dans la région d'intérêt. Dans ce cas, puisque la solution (5.28) doit être régulière à l'origine et que la fonction  $N_\zeta(\gamma r)$  n'est pas bien comportée dans cette région, nous devons prendre  $B = 0$  dans la solution (5.28).

La solution pertinente est la suivante :

$$\psi(r) = A' J_\zeta(\gamma r). \quad (5.29)$$

Pour avoir une fonction d'onde normalisée dans la région définie par la plage (5.8), nous devons exiger que :

$$\psi\left(r \rightarrow r_0 = \frac{1}{\alpha\Omega}\right) = 0. \quad (5.30)$$

Notez que nous pouvons supposer des valeurs suffisamment grandes et fixes de  $r_0$  de sorte que nous puissions considérer  $\gamma r_0 \gg 1$ , et des valeurs fixes de  $\zeta$  et  $\gamma$ . Dans cette limite, nous pouvons écrire la solution (5.29) sous la forme :

$$\psi(\mathbf{r}) = |\mathcal{C}_1| \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r_0}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{N} \\ 1 - \frac{E}{N} \end{pmatrix} e^{-i(Et - j\varphi - k_z z)} \cos\left(\gamma r_0 - \frac{\zeta\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.31)$$

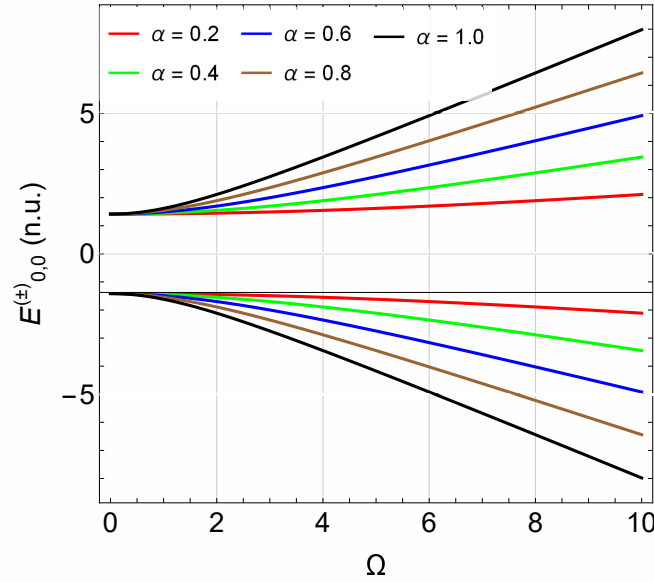


Fig. 5.1: Esquisse des énergies en fonction de  $\Omega$  pour  $n = 0, j = 0$  et différentes valeurs de  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha$  est réduit,  $|E_{n,j}^{(\pm)}|$  augmente.

En appliquant la condition (5.30) à la solution (5.31), nous obtenons la relation :

$$\gamma r_0 - \frac{\zeta\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{n\pi}{2}, \text{ with } n \in \mathbb{Z}^*, \quad (5.32)$$

ce qui, résolu par rapport à  $E$ , donne :

$$E_{n,j}^{(\pm)} = -j\Omega \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\pi\Omega|j| + \frac{1}{4}\pi\Omega\alpha + \frac{1}{2}n\pi\Omega\alpha\right)^2 + k_z^2 + M^2}, \quad (5.33)$$

Ce qui représente l'énergie de la particule. En étudiant ces énergies, nous pouvons rapporter certaines caractéristiques inhérentes au modèle. Nous évaluons certains états particuliers de l'énergie ( $E_{n,j}^{(\pm)}$ ) en fonction de  $\Omega$ . Pour toutes les analyses graphiques de notre article, nous utilisons  $M = 1, k_z = 1$ , et  $\kappa = 2.5$ . Nous pouvons voir que  $E_{n,j}^{(\pm)}$  présente différents profils lorsque  $\alpha$  change, par exemple, lorsque  $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ , et  $j = 0$ ,  $|E_{0,0}^{(\pm)}|$  est symétrique par rapport à  $\Omega = 0$ , et augmente lorsque  $\Omega$  est augmenté (Figure. (5.1)).

D'autres caractéristiques intéressantes peuvent être observées lorsque nous comparons les profils d'énergie pour différentes valeurs de  $n$  et  $j$  (Figure. (5.2)). Par exemple, lorsque nous comparons les profils de  $|E_{0,1}^{(\pm)}|$  et  $|E_{1,0}^{(\pm)}|$ , nous constatons que  $|E_{0,1}^{(+)}| < |E_{1,0}^{(+)}|$  tandis que  $|E_{0,1}^{(-)}| > |E_{1,0}^{(-)}|$  (Figure. (5.2) (a)-(b)). De même, lorsque nous représentons les énergies pour  $n = 1, j = 1$  (Figure. (5.2) (c)) et  $n = 1, j = -1$  (Figure. (5.2) (d)), nous observons que  $|E_{1,1}^{(\pm)}|$  et  $|E_{1,-1}^{(\pm)}|$  augmentent avec  $\Omega$ . De plus,  $|E_{1,1}^{(+)}| < |E_{1,-1}^{(+)}|$  tandis que  $|E_{1,1}^{(-)}| > |E_{1,-1}^{(-)}|$ . Cette manifestation est due aux effets combinés de la rotation et du paramètre  $\alpha$ .

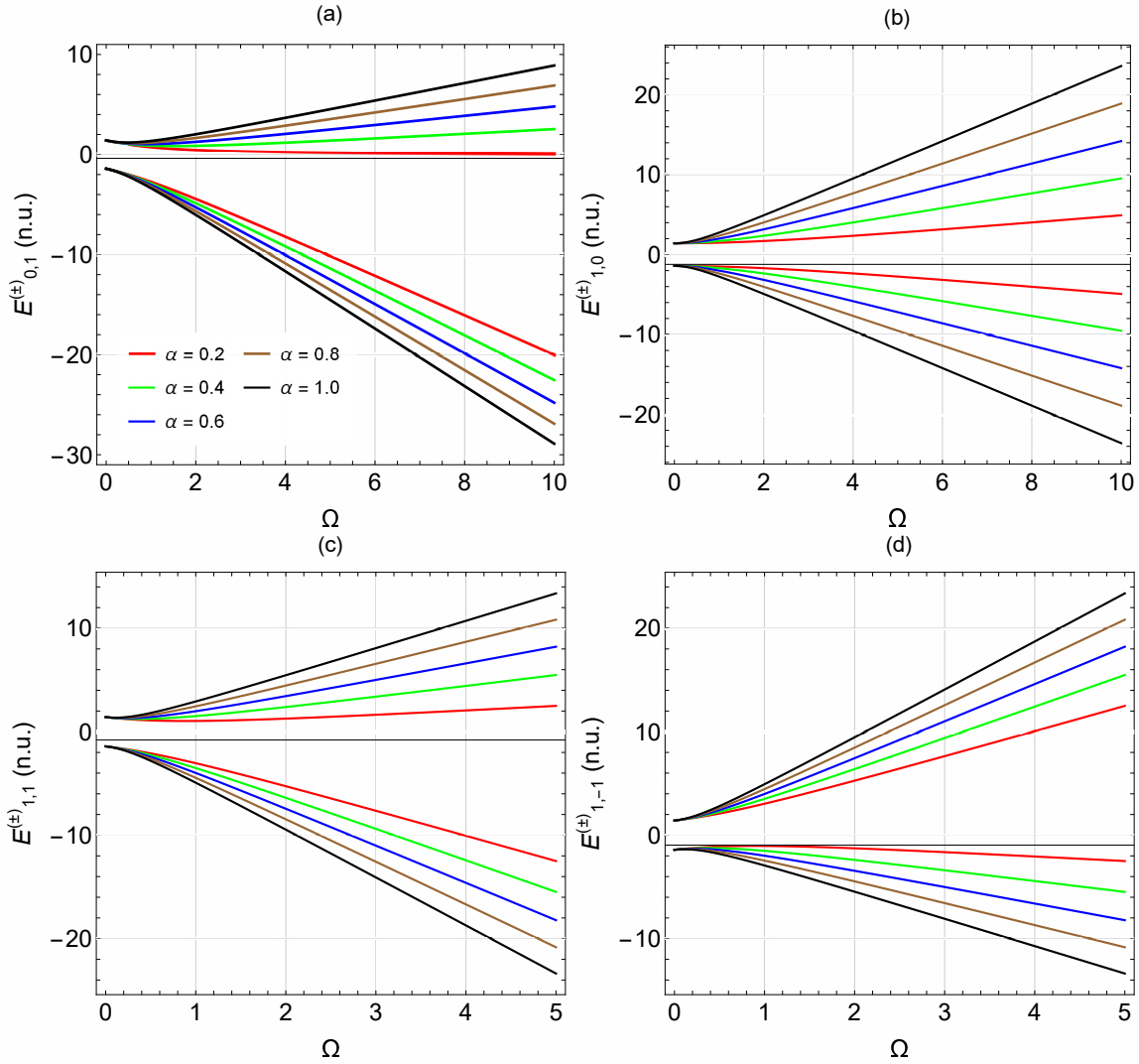


Fig. 5.2: Esquisse des énergies en fonction de  $\Omega$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $j$ . Dans (a), le profil pour  $n = 0$  et  $j = 1$ , (b)  $n = 1$  et  $j = 0$ , (c)  $n = 1$  et  $j = 1$ , et (d)  $n = 1$  et  $j = -1$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$  et  $\kappa = 2.5$ . Une manifestation due aux effets de courbure est observée lorsque  $\Omega$  est diminué, ce qui implique une augmentation de  $|E_{n,j}^{(\pm)}|$ .

## 5.2.2 Potentiel coulombien

Dans cette section, nous résolvons l'équation KG avec un potentiel de type Coulomb dans le formalisme de FV. L'inclusion de ce potentiel dans l'équation KG permet l'étude des interactions électromagnétiques à longue portée et décrit l'interaction entre les particules chargées. Cette investigation est cruciale pour comprendre divers phénomènes physiques, de la structure atomique à la physique des particules élémentaires. Nous devons considérer un potentiel de type Coulomb attractif pour résoudre l'équation et analyser des propriétés fondamentales telles que les états liés. Nous incluons le potentiel dans l'équation de mouvement en remplaçant  $E \rightarrow E - V(r)$  dans

l'équation (5.27). Le potentiel  $V(r)$  est spécifié par :

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad (5.34)$$

où  $\kappa$  est un paramètre arbitraire positif. L'équation radiale à résoudre est :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \frac{2\lambda}{r} - \gamma^2 \right] \psi_C(r) = 0, \quad (5.35)$$

où

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \zeta^2 - \kappa^2, \\ \gamma^2 &= M^2 + k_z^2 - (\mathcal{E} + \Omega j)^2, \\ \lambda &= \kappa(\mathcal{E} + \Omega j), \end{aligned}$$

et  $\psi_C(r)$  représente la solution radiale du problème de type Coulomb. L'équation radiale (5.35) est de type hypergéométrique confluent, et une solution satisfaisant les limites asymptotiques à la fois pour  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow +\infty$  peut être trouvée. De plus, cette équation apparaît dans plusieurs problèmes résolus dans la littérature, nous ne jugeons donc pas nécessaire de présenter une solution détaillée. Ainsi, en utilisant les résultats ci-dessus, il peut être démontré que les fonctions propres et les valeurs propres d'énergie de l'équation (5.35) dans la représentation de FV sont respectivement données par :

$$\psi_C(\mathbf{r}) = C_n \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{N} \\ 1 - \frac{E}{N} \end{pmatrix} e^{-i(Et - j\zeta - k_z z)} (2\gamma)^{\zeta + \frac{1}{2}} e^{-\gamma r} r^\zeta {}_1F_1(-n, 2\zeta + 1, 2\gamma r), \quad (5.36)$$

$$\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)} = -j\Omega \pm \frac{(2\zeta + 2n + 1)^2 (k_z^2 + M^2)}{\sqrt{(2\zeta + 2n + 1)^2 (4\kappa^2 + (2\zeta + 2n + 1)^2) (k_z^2 + M^2) - 4(\Omega j \kappa)^2}}. \quad (5.37)$$

Il peut être vérifié que les choix possibles pour les paramètres dans (5.37) peuvent afficher différents profils. Par exemple, en analysant les états avec  $j = 1$  et  $n = 0, 3, 6, 9$ , les valeurs positives et négatives de  $\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}$  sont représentées dans la Figure 5.3. Les effets de courbure sur les énergies ont directement un impact sur l'espacement entre les courbes d'énergie, rendant cet espacement légèrement plus petit pour des valeurs de  $n$  de plus en plus grandes (Figures (5.3)(a)-(d)). L'encart de la Figure (5.3)(d) montre que de tels espacements sont maintenus, et l'énergie présente un changement approximativement linéaire sur de petits intervalles de rotation. Pour cette configuration particulière,  $|\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}|$  diminue lorsque  $\Omega$  augmente, et elle existe uniquement dans l'intervalle  $0 < \Omega < 1$ .

Une deuxième configuration est présentée dans la Figure (5.4) pour  $n = 0$  et  $j = -1, -2, -3, -4$ . Pour cette configuration particulière,  $|\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}|$  augmente lorsque  $\alpha$  est réduit. Cependant, lorsque  $m$  prend des valeurs plus élevées, la plage de  $\Omega$  qui définit les énergies autorisées est réduite. Cet effet devient



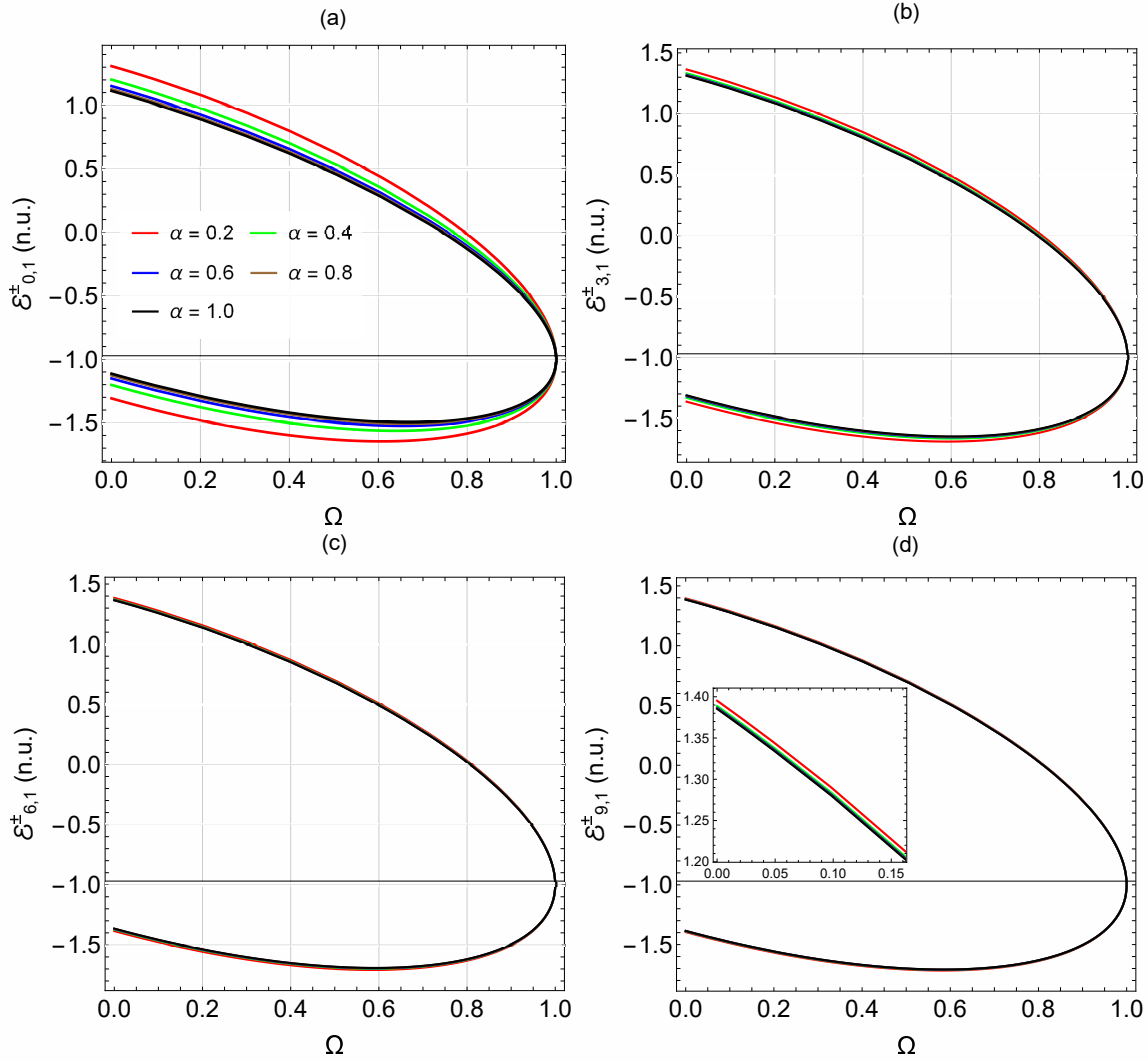


Fig. 5.3: Esquisse des énergies (Eq. (5.37)) en fonction de  $\Omega$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $\alpha$ . Dans (a), le profil pour  $n = 0$  et  $j = 1$ , (b)  $n = 3$  et  $j = 1$ , (c)  $n = 6$  et  $j = 1$ , et (d)  $n = 9$  et  $j = 1$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\kappa = 2, 5$ . Les états avec des valeurs croissantes de  $n$  révèlent une approximation entre les courbes d'énergie. Lorsque  $\alpha$  est diminué,  $|E_{n,j}^{(\pm)}|$  augmente.

clair lorsque l'on regarde les profils d'énergie dans les Figures. (5.4) (a)-(5.4) (d).

### 5.2.3 L'oscillateur de Feshbach-Villars (FVO)

La dernière application de notre étude implique l'inclusion de l'oscillateur Feshbach-Villars (FVO) dans l'équation de mouvement. Le FVO est un modèle bien connu et exactement soluble en mécanique quantique relativiste, qui a été construit à la fois dans l'espace-temps plat et courbe [61]. Ce modèle combine les principes de la relativité restreinte avec la mécanique quantique, offrant des perspectives sur la dynamique des particules de spin 0 dans un potentiel harmonique. En explorant le FVO, nous acquérons une compréhension plus approfondie des équations d'onde, des spectres d'énergie et de la quantification des champs. De plus, cette étude ouvre la voie à l'investigation de phénomènes tels que la création et l'annihilation de particules, les fluctuations du vide et la manifestation de symétries. En

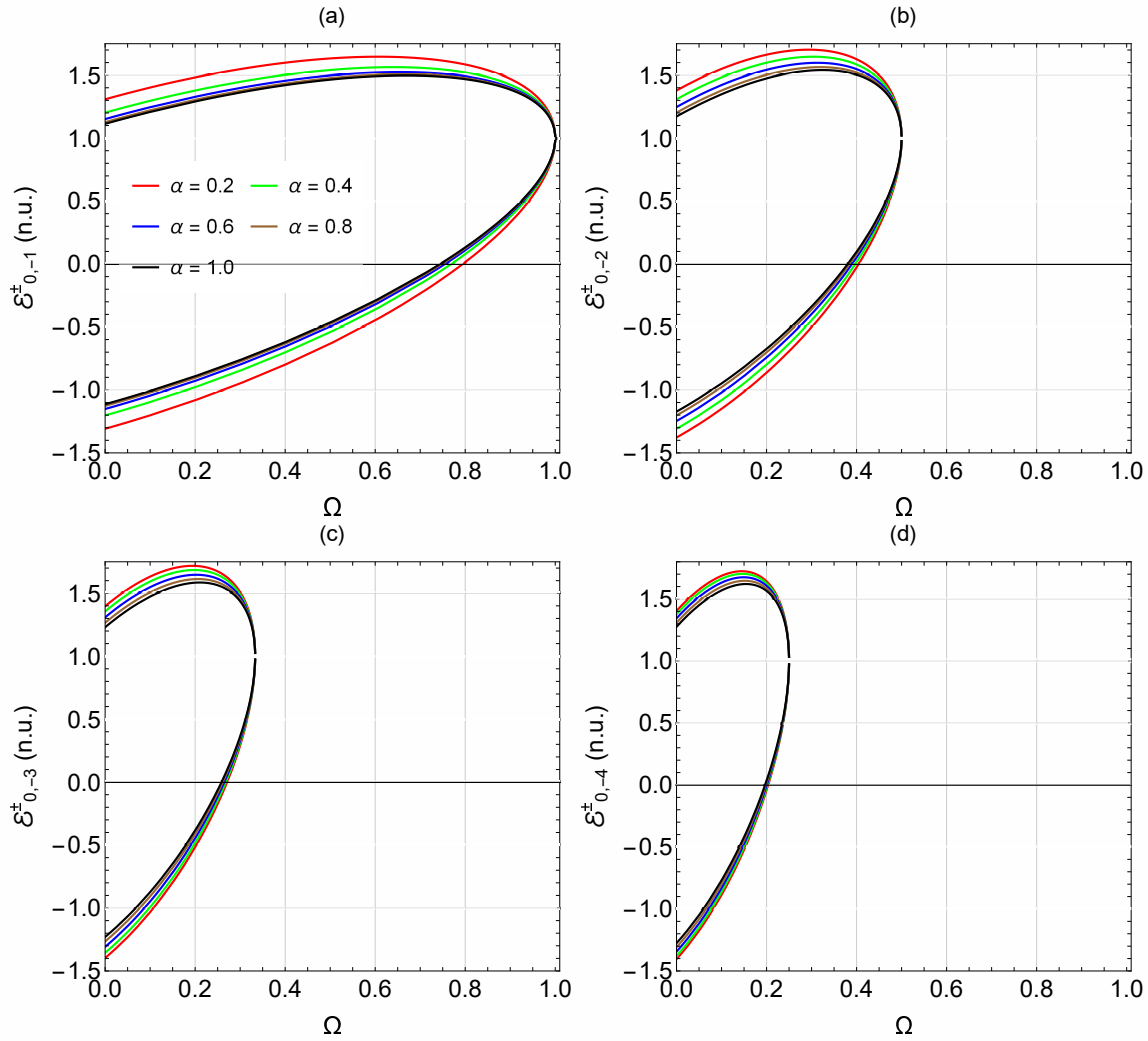


Fig. 5.4: Esquisse des énergies (Eq. (5.37)) en fonction de  $\Omega$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $\alpha$ . Dans (a), le profil pour  $n = 0$  et  $j = -1$ , (b)  $n = 0$  et  $j = -3$ , (c)  $n = 0$  et  $j = -5$  ; et (d)  $n = 0$  et  $j = -7$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\kappa = 2.5$ . En plus des caractéristiques présentes dans la Fig. (5.3), lorsque nous fixons  $n$  et considérons différentes valeurs négatives de  $m$ , les énergies sont définies dans une plage de rotation qui a tendance à diminuer avec  $m$  négatif.

tant qu'extension, il est important d'étudier le FVO dans d'autres contextes physiques car cela nous aide à élargir notre connaissance de la physique fondamentale, à améliorer nos capacités analytiques pour résoudre de nouvelles équations de mouvement et à préparer un modèle pour les avancées futures dans la théorie quantique des champs. Il convient de noter que des recherches antérieures explorant des sujets similaires ont été menées dans la littérature (par exemple, voir les références suivantes [61, 158, 189]). Le FVO est introduit dans les équations (5.15) et (5.17) en remplaçant  $\partial_r \rightarrow \partial_r + M\omega r$ .

Ainsi, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + M\omega r \right) \left( \sqrt{-g} \left( \frac{\partial}{\partial r} - M\omega r \right) \right) + \sqrt{-g} \left( \Omega^2 - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sqrt{-g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} \\ & + \frac{M^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.38)$$

et

$$\mathcal{Y}' = 0. \quad (5.39)$$

L'équation (5.38) peut être résolue en suivant les mêmes étapes qu'auparavant. Nous insérons les équations (5.38) et (5.19) dans l'hamiltonien (5.16). Ensuite, nous supposons que la solution (5.22) donne deux équations différentielles couplées similaires à celles de l'équation (5.23), mais avec une expression différente pour  $\mathcal{T}'$ . Nous obtenons l'équation radiale :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - M^2 \omega^2 r^2 - \frac{\vartheta^2}{r^2} + \delta \right] \psi_{osc}(r) = 0, \quad (5.40)$$

où

$$\vartheta^2 = \frac{j^2}{\alpha^2}, \quad \delta = (E + \Omega j)^2 - M^2 - k_z^2 + M\omega, \quad (5.41)$$

dont  $\psi_{osc}(r)$  représente la fonction d'onde radiale pour le problème de FVO. Pour résoudre l'équation (5.40), nous introduisons la nouvelle variable sans dimension  $\mathcal{U} = M\omega r^2$ , et la remplaçons dans l'équation (5.40). L'équation résultante s'écrit comme suit :

$$\left[ \frac{d^2}{d\mathcal{U}^2} + \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{d}{d\mathcal{U}} - \frac{\vartheta^2}{4\mathcal{U}^2} - \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4M\omega\mathcal{U}} \right] \psi_{osc}(\mathcal{U}) = 0. \quad (5.42)$$

Maintenant, nous introduisons la nouvelle fonction

$$\psi_{osc}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{J}(\mathcal{U}). \quad (5.43)$$

Avec cette substitution, l'équation (5.42) devient

$$\frac{d^2 \mathcal{J}(\mathcal{U})}{d\mathcal{U}^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4M\omega\mathcal{U}} + \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\mathcal{U}^2} \right] \mathcal{J}(\mathcal{U}) = 0. \quad (5.44)$$

Il peut être démontré que l'équation (5.44) est de type hypergéométrique confluent, dont la solution est donnée en termes de fonctions de Kummer. Ainsi, en utilisant la définition (5.22), la solution de

l'équation (5.44) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_{osc}(\mathbf{r}) = & |\mathcal{C}_3| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (M\omega r^2)^{\frac{|\vartheta|}{2}} e^{-\frac{M\omega}{2}r^2} e^{-i(Et-j\varphi-ik_z z)} \\ & \times {}_1F_1\left(\frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, M\omega r^2\right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

où les paramètres  $\vartheta$  et  $\delta$  sont définis dans l'équation (5.41). Les niveaux d'énergie de FVO sont trouvés en utilisant la relation

$$\frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4M\omega} + \frac{1}{2} = -n. \quad (5.46)$$

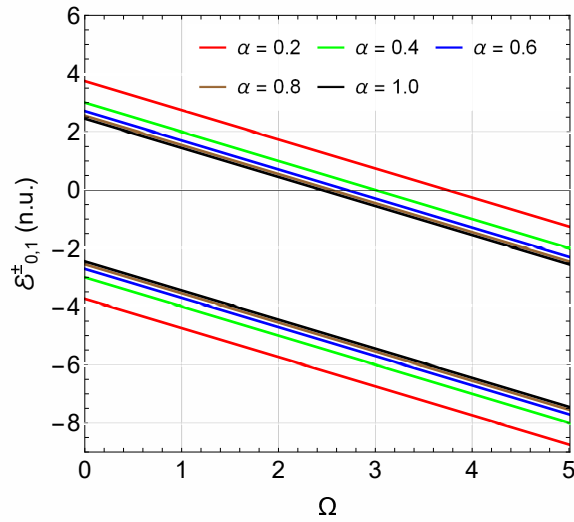


Fig. 5.5: Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\Omega$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $\alpha$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\omega = 1$ .

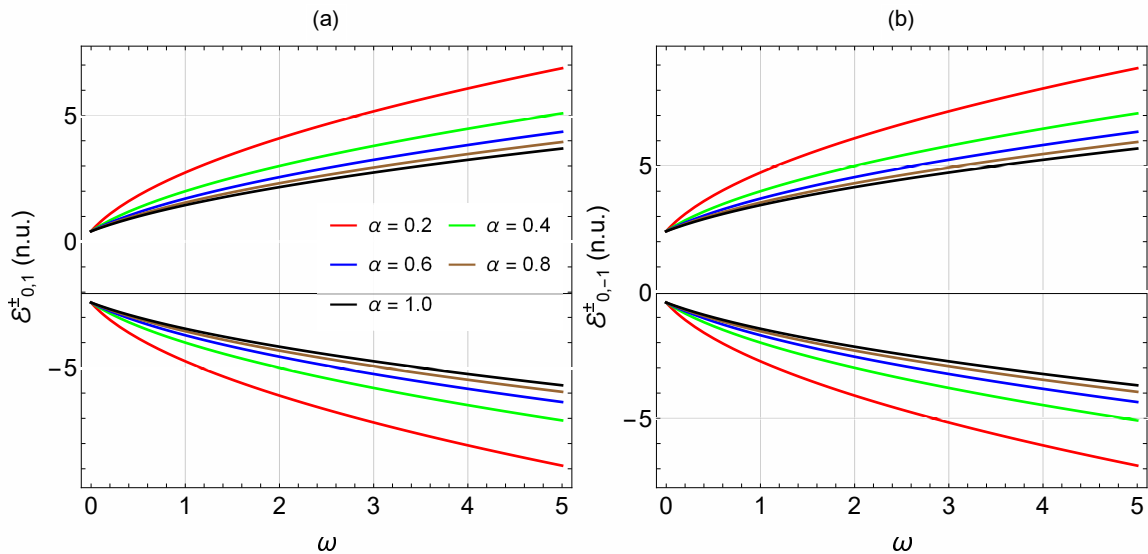


Fig. 5.6: Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\omega$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Dans (a), nous représentons pour  $n = 0$ ,  $j = 1$  et (b)  $n = 0$ ,  $j = -1$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , et  $\Omega = 1$ .

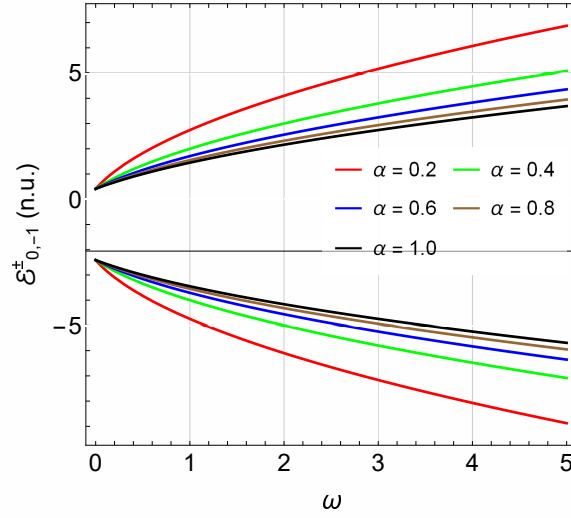


Fig. 5.7: Esquisse des énergies (Eq. (5.47)) en fonction de  $\omega$  pour  $n = 0$ ,  $j = -1$ ,  $\Omega = -1$  et différentes valeurs de  $\alpha$ . Nous utilisons  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ .

En substituant les paramètres  $\vartheta$  et  $\delta$  dans l'équation (5.46) et en résolvant l'équation résultante pour  $E$ , nous obtenons les niveaux d'énergie

$$E^{\pm}(n) = -\Omega j \pm \sqrt{2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) + M^2 + k_z^2}, \quad (5.47)$$

et les fonctions d'onde correspondantes sont

$$\psi_{osc}(\mathbf{r}) = |\mathcal{C}_3| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (M\omega r^2)^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{M\omega}{2}r^2} e^{-i(Et - j\varphi - ik_z z)} {}_1F_1(-n, |j| + 1, M\omega r^2). \quad (5.48)$$

Nous constatons que les valeurs absolues de  $\mathcal{E}_{0,1}^{(\pm)}$  et  $\mathcal{E}_{0,-1}^{(\pm)}$  augmentent lorsque  $\alpha$  diminue (Figure (5.6)). De plus,  $\mathcal{E}_{0,1}^{(+)} < \mathcal{E}_{0,-1}^{(+)}$  tandis que  $\mathcal{E}_{0,1}^{(-)} > \mathcal{E}_{0,-1}^{(-)}$  (voir Figures. (5.6) (a)-(b) pour comparaison). Lorsque nous assumons des valeurs négatives de  $\Omega$  dans la figure. (5.6) (b), par exemple,  $\Omega = -1$ , les énergies de l'oscillateur pour  $\alpha = 0.2$  sont toutes négatives (voir la ligne rouge continue dans la figure. (5.7)). Les énergies du FVO sont affectées par la courbure, en particulier par le terme  $|j|/\alpha$ .

À ce stade, une observation sur la différence entre nos résultats et ceux obtenus par Bastos [190] peut être faite ici :

- Dans l'approche relativiste conventionnelle, l'interaction entre les hadrons de spin  $S = 0$  et  $S = 1$  avec différents noyaux a été décrite par l'équation de KG d'ordre 2 pour  $S = 0$  et l'équation de Proca pour les particules de spin  $S = 1$ .
- L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [191–193] représente une généralisation des équations de KG et de Proca. Ce formalisme unifie les particules scalaires et vectorielles, de manière

analogue à la manière dont l'équation de Dirac le fait pour les fermions. Cependant, l'équation DKP a perdu de son intérêt en raison de son équivalence avec la description de KG dans les scénarios à l'état final, ainsi que de sa complexité algébrique accrue par rapport à la formulation de KG.

- À l'inverse, comme discuté dans la section d'introduction, le formalisme FV linéarise la dérivée temporelle de l'équation de KG tout en préservant sa dépendance d'ordre 2 dans l'espace des coordonnées. Cette transformation transforme efficacement l'équation de KG en une équation de type Schrödinger.
- En tenant compte des points précédents, il devient évident que les oscillateurs FVO et DKP pour les particules scalaires ne sont pas directement liés, même si leurs solutions peuvent sembler similaires.

Enfin, nous tenons à signaler que l'espace-temps (5.7) a été utilisé pour étudier d'autres modèles en physique des hautes énergies. Dans ces études, on peut trouver différentes valeurs de  $\Omega$ . Par exemple, l'existence du courant électrique le long de l'axe de rotation de la matière est prédite lorsque l'on étudie les particules interagissant électrofaiblement dans la matière en rotation, nous prendrons  $\alpha = 1$  et  $\Omega \leftrightarrow \omega$ . [194]. Cet effet est connu sous le nom d'effet Galvano-rotationnel, qui est causé par l'interaction de violation de la parité entre les particules chargées sans masse dans la matière en rotation. Dans cette étude, il est présenté la possibilité de l'apparition de l'effet Galvano-rotationnel dans la matière dense des objets astrophysiques compacts. Dans le cas d'une pulsar, l'effet Galvano-rotationnel est utilisé pour générer un champ magnétique toroïdal à l'intérieur de celle-ci de l'ordre de  $B \approx 4.9 \times 10^8$  G ( $\approx 49.0$  K Tesla) pour  $\Omega = 10^3$  Hz. D'autres études, y compris  $\Omega$  de l'ordre de KHz, ont également été développées dans le contexte des étoiles en rotation en relativité [195]. Les étoiles relativistes en rotation ont été largement étudiées ces dernières années, tant du point de vue théorique qu'observationnel, en raison des informations qu'elles pourraient fournir sur l'équation d'état de la matière à des densités extrêmement élevées et parce qu'elles sont considérées comme des sources prometteuses d'ondes gravitationnelles (voir la référence [196] pour accéder à davantage de sujets sur cette question). Pour des investigations purement théoriques, en fonction du modèle étudié, on peut certainement utiliser des valeurs de rotation plus élevées ( $10^9 - 10^{20}$  Hz) [197].

---

## CONCLUSION ET PERSPECTIVE

L'objectif principal de cette thèse était d'étudier le comportement dynamique des particules de spin-0 en présence de défauts topologiques. Cette analyse a été menée en utilisant deux approches distinctes : l'une basée sur l'équation de Klein-Gordon et l'autre sur le formalisme général de Feshbach-Villars (GFVT) dans un espace courbe. Le GFVT présente l'avantage de fournir une interprétation probabiliste et de justifier les énergies négatives dans le contexte de la mécanique quantique des particules relativistes sans spin. Pour atteindre ces objectifs, notre étude a commencé par une analyse approfondie de

- Les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur bidimensionnel Klein-Gordon en présence d'une corde cosmique soumise à un champ magnétique externe ont été étudiées. Les résultats ont été présentés en fonction de la température et du champ magnétique appliqué, pour différentes configurations de notre système. Il a été constaté que la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction de la température  $\tau$  n'a pas clairement révélé l'impact du champ magnétique sur ces propriétés. De plus, les résultats obtenus à partir des courbes de la chaleur spécifique ont montré que (i) ces courbes convergent vers la valeur 2, et (ii) la déviation initiale de la capacité calorifique est due à l'inclusion de tous les états quantiques possibles. Cette déviation est due au fait que le système quantique absorbe de la chaleur de l'environnement à proximité du défaut topologique tout en restituant une partie de la chaleur stockée. Ensuite, nous avons constaté que les courbes de magnétisation présentaient une valeur totalement négative. L'origine de cette magnétisation négative peut s'expliquer par la présence du champ gravitationnel de l'espace-temps, similaire au cas de la chaleur spécifique négative. Les courbes de magnétisation ont un minimum à une valeur spécifique du champ magnétique, qui augmente avec l'augmentation du paramètre  $\alpha$ . À une température  $\tau = 0$ , toutes les courbes ne passent pas par zéro, mais elles convergent rapidement vers cette valeur à mesure que la température augmente. Ce phénomène s'explique par la compétition entre l'agitation thermique

et le champ magnétique externe. Les courbes de susceptibilité magnétique présentent un pic à une valeur spécifique du champ magnétique, dépendant de la température. On a observé que la susceptibilité magnétique augmentait avec le champ magnétique externe et avec diverses valeurs de paramètres à basse température. Cependant, à haute température, ces quantités diminuaient en raison de l'occupation accrue des niveaux énergétiques.

Après cela, nous avons introduit pour la première fois la notion de l'oscillateur de Feshbach-Villars. Cet oscillateur a été étudié dans différents scénarios comme suit :

- Nous avons étudié les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Feshbach-Villars (FVO) dans un espace-temps courbe influencé par des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques statiques et rotatives. Les solutions exactes pour ces deux systèmes ont été obtenues, et les spectres d'énergie quantifiée dépendant des paramètres de la topologie de l'espace-temps ont été présentés. Les fonctions d'onde du système quantique ont été exprimées en termes de fonctions hypergéométriques confluentes. Nous avons utilisé des transformations généralisées de Feshbach-Villars pour obtenir des observables significatives, ce qui nous a permis de comprendre les énergies négatives et d'adapter l'interprétation des probabilités. En utilisant le spectre d'énergie, nous avons calculé les propriétés thermiques du FVO en calculant la fonction de partition en fonction de la fonction zêta de Hurwitz. Ces propriétés thermiques ont été influencées par les paramètres géométriques et topologiques de l'espace-temps dans différentes situations. À de très basses températures, les courbes de la chaleur spécifique ont satisfait à la troisième loi de la thermodynamique, atteignant une saturation à la limite de  $2k_B$  à des températures plus élevées. Bien que des pics aient été observés dans les courbes de susceptibilité magnétique, il n'y avait pas de changement abrupt dans les courbes d'entropie, indiquant l'absence d'une phase de transition.
- Nous avons étudié la dynamique quantique des particules massives sans spin de type scalaire, appelées oscillateurs de Feshbach-Villars (FVO), dans un contexte de la théorie de Kaluza-Klein. L'espace-temps étudié présente à la fois de la torsion et de la courbure, avec la présence de dislocations en vis et de cordes cosmiques. De plus, un flux quantique à travers une dimension supplémentaire de type Kaluza-Klein est introduit : Les principaux points de cette recherche sont les suivants :
  - Particule scalaire dans un espace-temps complexe : Des solutions générales pour une particule scalaire dans cet espace-temps complexe sont obtenues, exprimées en termes de fonctions de Bessel de premier type. Ces solutions sont fortement influencées par la géométrie sous-jacente, notamment la torsion, la courbure et la dimension supplémentaire.
  - Intégration d'un potentiel à parois dures : En ajoutant des conditions limites spécifiques, les niveaux d'énergie relativistes de ce système sont déterminés. Ils dépendent des paramètres



- géométriques de l'espace-temps, montrant un comportement similaire à l'effet Aharonov-Bohm pour les états liés.
- Couplage non minimal avec l'oscillateur FVO : En introduisant un couplage non minimal entre l'oscillateur FVO et l'équation d'onde, les effets gravitationnels sur ce modèle d'oscillateur quantique relativiste sont explorés. Les niveaux d'énergie du système sont fortement influencés par la torsion, la courbure, et la dimension supplémentaire.
  - Espace-temps de type Gödel : L'oscillateur FVO est étudié dans un espace-temps de type Gödel, caractérisé par divers éléments tels que la courbure intrinsèque, des cordes cosmiques, des dislocations en vis, et une dimension supplémentaire de type Kaluza-Klein. Les résultats montrent que les niveaux d'énergie dépendent du paramètre de vorticité associé à cet espace-temps, généralisant ainsi les conclusions précédentes.
  - En résumé, cette recherche contribue à une meilleure compréhension de la dynamique quantique des particules massives sans spin de type scalaire dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein, en tenant compte de la complexité de l'espace-temps, des défauts topologiques, et des interactions avec des champs externes.
- Enfin,, nous avons aussi exploré le comportement quantique relativiste d'une particule sans spin en résolvant l'équation de Klein-Gordon dans la représentation de Feshbach-Villars (FV). Elle tient compte de l'influence du spin de la particule dans l'espace-temps en présence d'une corde cosmique en rotation. Trois différents scénarios ont été examinés :
    - La particule confinée à un potentiel à parois dures.
    - Le mouvement de la particule en présence d'un potentiel de type Coulomb. 3. L'inclusion de l'oscillateur de Klein-Gordon dans l'analyse.
    - Dans chacun de ces modèles, les fonctions d'onde et les niveaux d'énergie correspondants ont été déterminés. Les graphiques des niveaux d'énergie révèlent que certaines valeurs de rotation et de courbure (via le paramètre  $\mathbb{L}$ ) affectent de manière significative l'énergie de la particule, en particulier en présence de rotation. De plus, la courbure a un impact marqué sur l'amplitude des niveaux d'énergie.
    - Ces résultats suggèrent que d'autres aspects physiques tels que les propriétés optiques, thermodynamiques, et les connexions avec d'autres systèmes de matière condensée méritent d'être explorés.

En ce qui concerne les orientations futures de notre étude, nous envisageons d'élargir notre domaine de recherche en passant des particules sans spin aux particules de spin-1/2. Les particules

de spin-1/2 sont régies par l'équation de Dirac, qui constitue l'équation fondamentale pour ces particules relativistes. Dans cette perspective, nous explorons l'équation de Dirac en utilisant le formalisme de Feshbach-Villars, en adoptant une dérivée temporelle linéaire et une dérivée spatiale quadratique. Une extension possible de ce formalisme à un espace courbe, similaire à ce que nous avons réalisé pour les particules de spin-0 (GFVT), pourrait être envisagée. Cette approche nous permet de représenter les équations relativistes sous une forme hamiltonienne, analogue à l'équation de Schrödinger, tout en préservant les caractéristiques relativistes et les structures de spin au sein d'une fonction d'onde composée de plusieurs composantes.

---



---

## ANNEXE A

---

### GÉNÉRALISATION DE L'APPROXIMATION DE POISSON

**A** fin d'évaluer la somme suivante de l'approximation de Poisson [95–97, 99, 198],

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{f(0)}{2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{ax+b}} e^{-2im\pi x} dx \right), \quad (\text{A.1})$$

où  $f(x) = e^{-\beta\sqrt{ax+b}}$ , nous avons d'abord étendu la partie intégrale  $\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{ax+b}} e^{-2im\pi x} dx$  [199].

Ainsi,

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-2im\pi x} dx = \int_0^{\infty} f(x) (\cos(2m\pi x) - i \sin(2m\pi x)) dx. \quad (\text{A.2})$$

Maintenant, nous nous concentrons sur la partie réelle. En utilisant l'intégrale par partie, on obtient [199]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f(x) dx &= \underbrace{\frac{1}{2m\pi} f(x) \sin(2m\pi x)}_{=0} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx \\ &= -\frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Suivant la même méthode, la dernière intégrale devient [199]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx &= \frac{-f^{(1)}(x)}{2m\pi} \cos(2m\pi x) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx \\ &= \frac{f^{(1)}(0)}{2m\pi} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi

$$\int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f(x) dx = -\frac{1}{2m\pi} \left\{ \frac{f^{(1)}(0)}{2m\pi} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Toujours, en utilisant plusieurs fois l'intégration par partie, on obtient [199]

$$\int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f(x) dx = -\frac{f^{(1)}(0)}{(2m\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2m\pi)^4} + \frac{1}{(2m\pi)^4} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f^{(4)}(x) dx. \quad (\text{A.6})$$

La dernière intégrale peut être généralisée comme suit [199] :

$$\int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f(x) dx = \sum_{r=1}^{2k-1} \left\{ (-1)^r \frac{f^{(2r-1)}(0)}{(2\pi m)^{2r}} \right\} + R_k, \quad (\text{A.7})$$

avec

$$R_k = \sum_{r=2k}^{\infty} \frac{1}{(2\pi m)^{2k}} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f^{(2k)}(x) dx, \quad (\text{A.8})$$

est le terme d'erreur. Le terme de reste survient parce que l'intégrale n'est généralement pas exactement égale à la somme. La formule peut être dérivée en appliquant une intégration répétée par parties.

Parce que les fonctions sin et cos sont bornées dans l'intervalle  $[-1, +1]$ , le terme de reste peut être estimée comme [199]

$$R_k \leq \sum_{r=2k}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\nu)^{2k}} \int_0^{\infty} f^{(2k)}(x) dx. \quad (\text{A.9})$$

Enfin, la fonction de partition est donnée par [199]

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(x) dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{2k-1} \left\{ (-1)^r \frac{f^{(2r-1)}(0)}{(2\pi\nu)^{2r}} \right\} + R_k, \quad (\text{A.10})$$

---

---

## ANNEXE B

---

### LA TRANSFORMATION GÉNÉRALE DE FESHBACH-VILLARS (GFVT)

#### B.1 Espace-temps plat

Cette section aborde la description quantique relativiste d'une particule de spin-0 se propageant dans l'espace-temps de Minkowski en utilisant le tenseur métrique  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . L'équation de Klein-Gordon covariante habituelle pour une particule scalaire massive  $\Phi$  avec une masse  $m > 0$  est la suivante :

$$(\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2) \Psi(x, t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

Le dérivé covariant minimale couplé est noté  $D_\mu = -i(p_\mu - ie A_\mu)$ . Le quadrivecteur classique de la quantité de mouvement est  $p_\mu = (E, -p_i)$ , tandis que le quadrivecteur électromagnétique est  $A_\mu = (A_0, -A_i)$ . La magnitude de la charge de la particule est donnée par  $e$ .

Il est à noter à ce stade que (B.1) peut être exprimée sous une forme hamiltonienne avec la première dérivée par rapport au temps, c'est-à-dire sous la forme d'une équation de type Schrödinger : [69]

$$\mathcal{H} \Phi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t), \quad (\text{B.2})$$

Le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  peut être défini en utilisant le processus de linéarisation de FV, qui consiste à convertir (B.1) en une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps.

La fonction d'onde à deux composantes est introduite,

$$\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{m} \mathcal{D} \\ 1 - \frac{i}{m} \mathcal{D} \end{pmatrix} \psi(x, t) \quad (\text{B.3})$$

Ici,  $\psi(x, t)$  obéit à l'équation d'onde de KG, et  $\mathcal{D}$  est défini de telle manière que

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i e A_0(x) \quad (\text{B.4})$$

La transformation mentionnée (B.3) implique l'insertion de fonctions d'onde qui satisfont aux exigences.

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}\psi = m(\phi_1 - \phi_2). \quad (\text{B.5})$$

Il est plus pratique d'écrire, pour notre revue ultérieure

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2m} \left[ m + i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] \psi \\ \phi_2 &= \frac{1}{2m} \left[ m - i \frac{\partial}{\partial t} + e A_0 \right] \psi, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L'équation (B.1) devient équivalente à

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] (\phi_1 + \phi_2) &= m (\phi_1 - \phi_2) \\ \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] (\phi_1 - \phi_2) &= \left[ \frac{(p_i - e A_i)^2}{m} + m \right] (\phi_1 + \phi_2), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

L'addition et la soustraction de ces deux équations donnent un système d'équations différentielles couplées du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{(p_i - A_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) + (m + e A_0) \phi_1 &= i \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ - \frac{(p_i - e A_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) - (m - e A_0) \phi_2 &= i \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

L'Hamiltonien de FV d'une particule scalaire en présence de l'interaction électromagnétique peut être exprimé en utilisant les équations (B.8) comme suit :

$$\mathcal{H}_{\text{FV}} = (\tau_3 + i \tau_2) \frac{(p_i - e A_i)^2}{2m} + m \tau_3 + e A_0(x), \quad (\text{B.9})$$

où  $\tau_i (i = 1, 2, 3)$  sont les matrices de Pauli 2x2 conventionnelles données par :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Il est à noter que l'Hamiltonien (B.9) satisfait à l'exigence de généralité hermitienne.<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{\text{FV}} = \tau_3 \mathcal{H}_{\text{FV}}^\dagger \tau_3, \quad \mathcal{H}_{\text{FV}}^\dagger = \tau_3 \mathcal{H}_{\text{FV}} \tau_3. \quad (\text{B.11})$$

L'Hamiltonien de FV unidimensionnel se réduit à celui de la propagation de la particule libre, c'est-à-dire qu'aucune interaction n'est supposée ( $A_\mu = 0$ ).

$$\mathcal{H}_0 = (\tau_3 + i \tau_2) \frac{p_x^2}{2m} + m \tau_3, \quad (\text{B.12})$$

Les solutions de l'hamiltonien libre indépendant du temps sont simplement des états stationnaires. En supposant la solution,

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad (\text{B.13})$$

avec  $E$  représentant l'énergie du système. Par conséquent, l'équation (B.2) peut être représentée comme

$$\mathcal{H}_0 \Phi(x) = E \Phi(x), \quad (\text{B.14})$$

Il s'agit de l'équation de FV unidimensionnelle de la particule relativiste libre de spin-0, et elle est réalisée afin d'obtenir une équation de type Schrödinger alternative à l'équation de KG.

Dans ce qui suit, nous passons en revue le formalisme de FV dans un espace-temps courbe.

## B.2 Espace-temps courbe

Il est largement connu que les équations d'ondes relativistes généralement covariantes d'une particule scalaire dans un espace-temps riemannien caractérisé par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  peuvent être trouvées en reformulant l'équation KG de manière à ce que [201]

$$(\square + m^2 - \xi R) \Phi(x, t) = 0, \quad (\text{B.15})$$

où  $\square$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami représenté par

$$\square = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (\text{B.16})$$

La notation  $\xi$  désigne une constante de couplage réelle sans dimension, et  $R$  est le scalaire de courbure de Ricci donné par  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de courbure de Ricci. Le tenseur métrique inverse est  $g^{\mu\nu}$ ,  $etg = \det(g_{\mu\nu})$ .

Maintenant, selon les travaux de Silenko [107, 109, 202], le cas de l'espace-temps plat peut être

1. L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  est dit pseudo-hermitien s'il existe un opérateur linéaire  $\beta$  inversible, hermitien tel que  $\mathcal{H}^\dagger = \beta \mathcal{H} \beta^{-1}$ . [200].

étendu au cas de l'espace-temps courbe comme suit : La forme détaillée de (B.15) est :

$$\left( \partial_0^2 + \frac{1}{g_{00}\sqrt{-g}} \{ \partial_i \sqrt{-g} g^{0i} \} \partial_0 + \frac{1}{g_{00}\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} \right) \Phi(x, t) = 0 \quad (\text{B.17})$$

L'anticommutateur est noté par une accolade dans l'équation (B.18).

En utilisant la transformation suivante dans les composantes de la fonction d'onde [107, 109, 202] :

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y} \right) \psi = \mathcal{N} (\phi_1 - \phi_2), \quad (\text{B.18})$$

où  $\mathcal{N}$  est un paramètre réel non nul arbitraire et

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}, \quad (\text{B.19})$$

nous obtenons la forme hamiltonienne de l'équation KG comme suit : [107, 109, 202]

$$\mathcal{H}_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \partial_i \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i (\sqrt{-g} G^{ij}) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} [\nabla_i (\mathcal{U}^i)]^2 \\ & - \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j (\mathcal{U}^i) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j (\mathcal{U}^i), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

dont

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \quad (\text{B.22})$$

Nous remarquons que les transformations de FV initiales sont satisfaites pour  $\mathcal{N} = m$ .

### B.3 L'oscillateur de FV dans un espace plat

Pour la prochaine discussion, il est préférable d'analyser l'oscillateur quantique relativiste (KGO) dans l'espace-temps de Minkowski en utilisant la méthode décrite ci-dessus. Pour examiner l'oscillateur de Feshbach-Villars (FV), nous commençons par la substitution minimale  $p \rightarrow p - im\omega x$  de l'opérateur moment. Ici,  $\omega$  est la fréquence d'oscillation et  $x_\mu = (0, x, 0, 0)$ .

Ainsi, en généralisant l'opérateur moment, l'Hamiltonien de FV unidimensionnel ((?)) devient :

$$\mathcal{H}_{FVO} = \frac{1}{2m} (\tau_z + i\tau_y) (p_x + im\omega x) (p_x - im\omega x) + m\tau_z, \quad (\text{B.23})$$

De cette manière, la formulation de Schrödinger de l'oscillateur quantique harmonique unidimensionnel



est obtenue en remplaçant l'ansatz (??) dans (B.23) par ce qui suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + m\omega \right] (\phi_1 + \phi_2) + m\phi_1 &= E\phi_1 \\ -\frac{1}{2m} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + m\omega \right] (\phi_1 + \phi_2) - m\phi_2 &= E\phi_2. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Après avoir effectué un calcul similaire à celui réalisé dans l'équation précédente pour l'oscillateur quantique harmonique non relativiste, on obtient que

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + (E^2 - m^2 + m\omega) \right] \psi(x) = 0, \quad (\text{B.25})$$

où,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \right] \psi(x) = 0, \quad (\text{B.26})$$

où nous avons défini,

$$\lambda_1 = m^2\omega^2, \quad \lambda_2 = E^2 - m^2 + m\omega. \quad (\text{B.27})$$

L'équation (B.26) est une équation différentielle du second ordre pour le champ  $\psi$  décrivant la dynamique du FVO dans un espace-temps plat de Minkowski à une dimension. La solution de l'équation ci-dessus peut être trouvée dans la littérature, et une condition de quantification de l'énergie découle de cette solution, ce qui donne.

$$\frac{E^2 - m^2 + m\omega}{2m} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.28})$$

Après avoir arrangé et simplifié la condition (B.24), nous trouvons l'expression suivante pour le spectre d'énergie [89]:

$$E = \pm \sqrt{2m\omega n + m^2}. \quad (\text{B.29})$$

L'équation (B.29) montre le spectre d'énergie relativiste de l'oscillateur de FV dans un espace-temps de Minkowski, qui est le même que celui obtenu pour l'oscillateur de Klein-Gordon dans un espace-temps plat.

---

---

# ANNEXE C

---

## LA FORMULE D'EULER-MACLAURIN ET LA SOMMATION DE POISSON

### C.1 Euler-Maclaurin Formula

**E**n mathématiques, la formule d'Euler-Maclaurin est une formule pour la différence entre une intégrale et une relation proche somme tardive. Il peut être utilisé pour approximer les intégrales par fini sommes, ou inversement pour évaluer des sommes finies et des séries infinies en utilisant les intégrales et la machinerie du calcul.

Si  $m$  et  $n$  sont des nombres naturels et  $f(x)$  est un complexe ou réel, fonction continue valuée pour les nombres réels  $x$  dans le intervalle  $[m, n]$ , alors l'intégrale :

$$I = \int_n^m f(x) dx. \quad (\text{C.1})$$

peut être approché par la somme (méthode du rectangle) :

$$S = f(m+1) + \dots + f(n-1) + f(n). \quad (\text{C.2})$$

La formule d'Euler-Maclaurin fournit des expressions pour différence entre la somme et l'intégrale en termes de les dérivées supérieures  $f^{(k)}(x)$  évaluées aux extrémités de la intervalle, c'est-à-dire lorsque  $x = m$  et  $x = n$ . Ainsi, pour  $p$  un entier positif et une fonction  $f(x)$  qui est  $p$  fois continuellement dérivable dans l'intervalle  $[m, n]$ , on a

$$S - I = \sum_{k=1}^p \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p, \quad (\text{C.3})$$

où  $B_k$  est le  $k$ -ème nombre de Bernoulli et  $R_p$  est un terme d'erreur qui dépend de  $n, m, p$  et  $f$  et est généralement petit pour des valeurs de  $p$ .

La formule est souvent écrite avec l'indice prenant que des valeurs paires puisque les nombres impairs de Bernoulli sont nuls sauf pour  $B_1$ . Dans ce cas, nous avons

$$\sum_{i=m}^n f(i) = \int_n^m f(x) dx + \frac{f(n) + f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)) + R_p, \quad (\text{C.4})$$

Enfin, dans le cadre du calcul de développements asymptotiques de sommes et de séries, généralement la forme la plus utile de l'Euler La formule de Maclaurin est

$$\sum_{n=a}^b f(n) \simeq \int_a^b f(x) dx + \frac{f(b) + f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)), \quad (\text{C.5})$$

Maintenant, quand  $a = 0$  et  $b = \infty$ , on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \simeq \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0). \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Formule de somme de Poisson

Pour les fonctions appropriées de , la formule de sommation de Poisson peut s'énoncer ainsi :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n), \quad (\text{C.7})$$

où  $\hat{f}(n)$  est la transformée de Fourier de  $f$ ; c'est-à-dire  $\hat{f}(n) = \mathcal{F}\{f(n)\}$ , Considérez la fonction

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n), \quad (\text{C.8})$$

C'est une fonction périodique de période 1 : on peut donc prendre son expansion en série de Fourier

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i2\pi n x}, \quad (\text{C.9})$$

avec

$$a_n = \int_0^1 F(x) e^{-i2\pi n x} dx = \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) e^{-i2\pi n x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-i2\pi n x} dx, \quad (\text{C.10})$$

et

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-i2\pi n x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-i2\pi n(x+m)} d(x+m), \quad (\text{C.11})$$

ou

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-i2\pi n(x+m)} d(x+m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi n t} = \hat{f}(n), \quad (\text{C.12})$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{i2\pi n x}. \quad (\text{C.13})$$

et le résultat suit en évaluant à  $x = 0$  [86].

---

---

# ANNEXE D

---

## LA TRANSFORMATION DE FOLDY-WOUTHUYSEN (FW)

La méthode de Foldy-Wouthuysen [187], introduite en 1950 par les physiciens Marshall Foldy et Stanley Wouthuysen, est une technique mathématique employée en physique quantique pour simplifier l'analyse des systèmes de particules relativistes en interaction avec un champ électromagnétique. À cette époque, la mécanique quantique relativiste était un domaine de recherche en plein développement, et les chercheurs cherchaient des moyens d'alléger les calculs requis pour l'étude de tels systèmes complexes.

Cette transformation, qui implique une série de manipulations mathématiques, vise à diagonaliser le Hamiltonien d'un système relativiste soumis à l'influence d'un champ électromagnétique. En d'autres termes, elle permet de trouver une base dans laquelle le Hamiltonien devient aussi simple que possible, simplifiant ainsi considérablement la résolution des équations du système.

Depuis son introduction, la méthode de Foldy-Wouthuysen est devenue un outil largement utilisé en physique des particules, en physique nucléaire, en théorie des champs, ainsi que dans d'autres domaines de la physique quantique. Elle reste aujourd'hui un outil essentiel pour simplifier l'analyse de problèmes complexes en physique relativiste.

### D.1 La Théorie de Foldy-Wouthuysen

Considérons une particule chargée de masse au repos  $m_0$ , charge  $q$  en présence d'un champ électromagnétique caractérisé par  $E = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ , et  $B = \nabla \times \mathbf{A}$ . Puis l'équation de Dirac est [203,204]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}_D\psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{D.1})$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} &= m_0c^2\boldsymbol{\beta} + (q\phi) + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} \\ &= m_0c^2\boldsymbol{\beta} + (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + (\hat{\boldsymbol{\varphi}})\end{aligned}\quad (\text{D.2})$$

dont

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= q\phi \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

où

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (\text{D.4})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)\quad (\text{D.5})$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\boldsymbol{p}} - q\mathbf{A}$ ,  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , et  $\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 = \hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 + \hat{\pi}_z^2$

Dans le régime non relativiste, les deux premières composantes du spineur de Dirac  $\Psi$  sont beaucoup plus grandes que les deux dernières composantes. L'opérateur  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , qui n'induit pas de couplage entre les composantes importantes et les composantes moins importantes de  $\Psi$ , est appelé "pair", tandis que  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  est appelé un opérateur "impair" car il provoque un couplage entre les composantes importantes et les composantes moins importantes. Il convient de noter que : [203]

$$\boldsymbol{\beta}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\beta} \text{ et } \boldsymbol{\beta}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\beta}\quad (\text{D.6})$$

La recherche porte sur une transformation unitaire,  $\Psi' = \Psi \rightarrow \hat{\mathcal{U}}\Psi$ , de manière à ce que l'équation ne contienne aucun opérateur impair.

Dans le cas des particules libres (avec  $\phi = 0$  et  $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\boldsymbol{p}}$ ), une telle transformation de Foldy-Wouthuysen est donnée par : [203]

$$\Psi \rightarrow \Psi' \rightarrow \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{F}}\Psi\quad (\text{D.7})$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{F}} = e^{i\hat{S}} = e^{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\theta}, \quad \text{Tan}(2|\hat{\boldsymbol{p}}|\theta) = \frac{|\hat{\boldsymbol{p}}|}{m_0c}\quad (\text{D.8})$$

Cette transformation élimine complètement la composante impaire de la particule libre de Dirac, la réduisant à une forme diagonale. [203] :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r}, t) = e^{i\hat{S}}(m_0c^2\boldsymbol{\beta} + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})e^{-i\hat{S}}\psi'(\mathbf{r}, t)\quad (\text{D.9})$$

donc

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\mathbf{r}, t) &= \left( \cos(|\hat{\mathbf{p}}|\theta) + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|} \sin(|\hat{\mathbf{p}}|\theta) \right) (m_0 c^2 \boldsymbol{\beta} + c \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ &\times \left( \cos(|\hat{\mathbf{p}}|\theta) - \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|} \sin(|\hat{\mathbf{p}}|\theta) \right) \psi'(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Alors

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\mathbf{r}, t) &= (m_0 c^2 \cos(2|\hat{\mathbf{p}}|\theta) + c|\hat{\mathbf{p}}| \sin(2|\hat{\mathbf{p}}|\theta)) \beta \psi'(\mathbf{r}, t) \\ &= \left( \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hat{\mathbf{p}}^2} \right) \beta \psi'(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Généralement, lorsque l'électron est dans un temps dépendant électromagnétique champ, il n'est pas possible de construire une  $e^{i\hat{S}}$  qui supprime les opérateurs impairs du Hamiltonien transformé complètement. Cela nécessite une expansion non relativiste du Hamiltonien transformé en une puissance série en  $1/m_0 c^2$  en respectant l'ordre souhaité. Noter que dans le cas non relativiste, quand  $|\hat{\mathbf{p}}| \ll m_0 c$ , l'opérateur de transformation  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{F}} = e^{i\hat{S}}$  avec  $\hat{S} \approx -\frac{i\beta \hat{\mathcal{O}}}{2m_0 c^2}$ , où  $\hat{\mathcal{O}} = c \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}$  est la partie impaire du libre Hamiltonien. Donc, dans le cas général, nous pouvons commencer par la transformation [203, 204]

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= e^{i\hat{S}_1} \Psi \\ \hat{S}_1 &= -\frac{i\beta \hat{\mathcal{O}}}{2m_0 c^2} = -\frac{i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}}{2m_0 c} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Ensuite, l'équation pour  $\Psi^{(1)}$  est [203]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(1)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{i\hat{S}_1} \Psi \right) \quad (\text{D.13})$$

$$= i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{i\hat{S}_1} \right) \Psi + i\hbar e^{i\hat{S}_1} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi) \quad (\text{D.14})$$

$$= \left[ i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{i\hat{S}_1} \right) + e^{i\hat{S}_1} \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} \right] \Psi \quad (\text{D.15})$$

$$= \left[ i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{i\hat{S}_1} \right) e^{-i\hat{S}_1} + e^{i\hat{S}_1} \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} e^{-i\hat{S}_1} \right] \Psi^{(1)} \quad (\text{D.16})$$

$$= \left[ e^{i\hat{S}_1} \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} e^{-i\hat{S}_1} - i\hbar e^{i\hat{S}_1} \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\hat{S}_1} \right) \right] \Psi^{(1)} \quad (\text{D.17})$$

donc

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(1)} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}^{(1)} \Psi^{(1)} \quad (\text{D.18})$$

où nous avons utilisé l'identité [181, 203, 204]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\hat{A}} \right) e^{-\hat{A}} + e^{\hat{A}} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\hat{A}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{I} = 0 \quad (\text{D.19})$$

Maintenant, en utilisant les deux identités [181, 203, 204]

$$e^{\hat{A}}\hat{\mathcal{B}}e^{-\hat{A}} = \hat{\mathcal{B}} + [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] + \frac{1}{2!} [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]] + \frac{1}{3!} [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]]] + \dots \quad (\text{D.20})$$

Donc [203, 204]

$$e^{\hat{A}(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\hat{A}(t)} = \left( 1 + \hat{A}(t) + \frac{1}{2!} (\hat{A}(t))^2 + \frac{1}{3!} (\hat{A}(t))^3 + \dots \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \left( 1 - \hat{A}(t) + \frac{1}{2!} (\hat{A}(t))^2 - \frac{1}{3!} (\hat{A}(t))^3 + \dots \right) \quad (\text{D.21})$$

comme résultat

$$= \left( 1 + \hat{A}(t) + \frac{1}{2!} (\hat{A}(t))^2 + \frac{1}{3!} (\hat{A}(t))^3 + \dots \right) \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) + \frac{1}{2!} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \hat{A}(t) + \hat{A}(t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \right\} \right) \times \left( -\frac{1}{3!} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] (\hat{A}(t))^2 + \hat{A}(t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \hat{A}(t) + (\hat{A}(t))^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \right\} \dots \right) \quad (\text{D.22})$$

Enfin

$$\approx -\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) - \frac{1}{2!} \left[ \hat{A}(t), \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] - \frac{1}{3!} \left[ \hat{A}(t), \left[ \hat{A}(t), \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \right] - \frac{1}{4!} \left[ \hat{A}(t), \left[ \hat{A}(t), \left[ \hat{A}(t), \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right] \right] \right] \quad (\text{D.23})$$

avec  $\hat{A}(t) = i\hat{S}_1$ , nous trouvons [203, 204]

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}^{(1)} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} - \hbar \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial t} + i \left[ \hat{S}_1, \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} - \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial t} \right] - \frac{1}{2!} \left[ \hat{S}_1, \left[ \hat{S}_1, \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} - \frac{\hbar}{3} \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial t} \right] \right] - \frac{i}{3!} \left[ \hat{S}_1, \left[ \hat{S}_1, \left[ \hat{S}_1, \hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} - \frac{\hbar}{4} \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial t} \right] \right] \right] \quad (\text{D.24})$$

simplifiant la droite utiliser les relations  $\beta \hat{\mathcal{O}} = -\hat{\mathcal{O}}\beta$  et  $\beta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}\beta$  et recueillir les conditions ensemble des rendements

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}^{(1)} \approx m_0 c^2 \beta + \hat{\varepsilon}_1 + \mathcal{O}_1 \quad (\text{D.25})$$

dont

$$\hat{\varepsilon}_1 \approx \hat{\varepsilon} + \frac{\beta}{2m_0 c^2} (\hat{\mathcal{O}})^2 - \frac{1}{8m_0^2 c^4} \left[ \hat{\mathcal{O}}, \left( [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varepsilon}] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} \right) \right] - \frac{\beta}{8m_0^2 c^4} \beta (\hat{\mathcal{O}})^4 \quad (\text{D.26})$$

$$\hat{\mathcal{O}}_1 \approx \frac{\beta}{2m_0 c^2} \left( [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varepsilon}] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{3m_0^2 c^4} (\hat{\mathcal{O}})^3 \quad (\text{D.27})$$

Une deuxième transformation Foldy-Wouthuysen est appliquée avec le même prescription pour réduire



la force des termes impairs plus loin dans le Hamiltonien transformé [203]:

$$\Psi^{(2)} = e^{i\hat{S}_2}\Psi^{(1)} \quad (\text{D.28})$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 &= -\frac{i\beta\hat{\mathcal{O}}_1}{2m_0c^2} \\ &= -\frac{i\beta}{2m_0c^2} \left[ \frac{\beta}{2m_0c^2} \left( [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varepsilon}] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{3m_0^2c^4} (\hat{\mathcal{O}})^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Après cette transformation, [203, 204]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(2)} = \hat{\mathcal{H}}_D^{(2)} \Psi^{(2)} \quad (\text{D.30})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_D^{(2)} = m_0c^2\beta + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\mathcal{O}}_2 \quad (\text{D.31})$$

$$\hat{\varepsilon}_2 \approx \hat{\varepsilon}_1, \hat{\mathcal{O}}_2 \approx \frac{\beta}{2m_0c^2} \left( [\hat{\mathcal{O}}_1, \hat{\varepsilon}_1] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}_1}{\partial t} \right) \quad (\text{D.32})$$

Après la troisième transformation, [203]

$$\Psi^{(3)} = e^{i\hat{S}_3}\Psi^{(2)} \quad (\text{D.33})$$

$$\hat{S}_3 = -\frac{i\beta\hat{\mathcal{O}}_2}{2m_0c^2} \quad (\text{D.34})$$

nous avons utilisé [203]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(3)} = \hat{\mathcal{H}}_D^{(3)} \Psi^{(3)} \quad (\text{D.35})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_D^{(3)} = m_0c^2\beta + \hat{\varepsilon}_3 + \hat{\mathcal{O}}_3 \quad (\text{D.36})$$

$$\hat{\varepsilon}_3 \approx \hat{\varepsilon}_2 \approx \hat{\varepsilon}_1, \hat{\mathcal{O}}_3 \approx \frac{\beta}{2m_0c^2} \left( [\hat{\mathcal{O}}_2, \hat{\varepsilon}_2] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}_2}{\partial t} \right) \quad (\text{D.37})$$

donc [203, 204]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_D^{(1)} &\approx m_0c^2\beta + \hat{\varepsilon} + \frac{\beta}{2m_0c^2} (\hat{\mathcal{O}})^2 - \frac{1}{8m_0^2c^4} \left[ \hat{\mathcal{O}}, \left( [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varepsilon}] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\beta}{8m_0^3c^6} \beta \left[ \hat{\mathcal{O}}^4, \left( [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\varepsilon}] + i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

La transformation de Foldy-Wouthuysen est une méthode employée pour réorganiser l'équation de Dirac en une forme plus pratique pour effectuer des calculs. Cette méthode implique l'application d'une transformation unitaire à l'équation de Dirac dans le but de se débarrasser des termes indésirables.

La nouvelle équation obtenue est alors appelée l'équation de Foldy-Wouthuysen. Cette dernière est plus facile à résoudre que l'équation de Dirac d'origine et offre une meilleure compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. La conversion de Foldy-Wouthuysen est largement utilisée dans des domaines tels que la physique des particules, la théorie quantique des champs et d'autres branches de la physique. Elle simplifie les calculs et facilite l'analyse des systèmes quantiques relativistes. La méthode de Foldy-Wouthuysen illustre l'importance des transformations unitaires en physique quantique, qui sont des outils essentiels pour élucider les propriétés des systèmes quantiques complexes.

---

---

## ANNEXE E

---

### LISTE DES ARTICLES

- **Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, Ann. Physics , 452, 169302, (2023).** (Classe A ; ImpactFactor = 3 ; CiteScore = 5.4 ) : Statistical properties of the two dimensional Feshbach-Villars oscillator (FVO) in the rotating cosmic string space-time
- **Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, Serdouk Fadila, Theoret. Math. Phys., 216 , 1055-1067 (2023).** (Classe A ; ImpactFactor = 0.685 ; CiteScore = 1.8 ) : Thermal properties of the 2D Klein-Gordon oscillator in a cosmic string space-time
- **Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, R.L.L. Vitoria, Faizuddin Ahmed, Marwan Al- Raei, Nuclear Phys. B, 994, 116288 (2023).** (Classe A ; ImpactFactor = 2.8 ;CiteScore = 5.8 ) : Feshbach-Villars oscillator in Kaluza-Klein Theory
- **Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali, Edilberto. O. Silva, Ann. Physics , Journal Pre-proof (accepted for publication) ,(2023).** (Classe A ; ImpactFactor = 3 ; CiteScore = 5.4 ) : Applications of the Klein-Gordon equation in the Feshbach-Villars representation in the non-inertial cosmic string space-time, <https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169479>



Contents lists available at ScienceDirect

## Annals of Physics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/aop](http://www.elsevier.com/locate/aop)

# Statistical properties of the two dimensional Feshbach–Villars oscillator (FVO) in the rotating cosmic string space–time



Abdelmalek Bouzenada, Abdelmalek Boumali \*

Laboratory of theoretical and applied Physics, Echahid Cheikh Larbi Tebessi University, Algeria

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 22 December 2022

Accepted 26 March 2023

Available online 27 March 2023

## Keywords:

Klein–Gordon oscillator

Feshbach–Villars transformation

Topological defects

Cosmic string space–time

Partition function

Thermal properties

## ABSTRACT

This paper focuses on the quantum mechanical dynamics of a massive and spinless relativistic particle in space–time generated by a rotating cosmic string. The equations of motion are found by the use of the Feshbach–Villars formulation of the Klein–Gordon equation. The wave functions and related energies have been deduced. Subsequently, the partition function was approached with the help of the representation of the Zeta function. Through this function, thermal properties are reported. The behavior of these properties in relation to the physical parameters of the model such as rotation, curvature and quantum numbers was investigated. Moreover, the impact of the topological defect on the quantum system under investigation is discussed.

© 2023 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

It is of general interest to understand the influence of the gravitational field on the dynamics of quantum mechanical systems. Einstein's theory of general relativity (GR) [1], on the one hand, provides a persuasive description of gravity as a geometric property of space–time. In particular, it demonstrates that the classical gravitational field is a manifestation of the curvature of space–time. It has, for example, successfully predicted the existence of gravitational waves [2] and black hole [3]. Quantum mechanics (QM), on the other hand, is the framework for describing the behavior of particles in the microscopic scale [4]. It is an extremely successful theory (typically quantum

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz](mailto:abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz) (A. Bouzenada), [boumali.abdelmalek@gmail.com](mailto:boumali.abdelmalek@gmail.com) (A. Boumali).

field theory) in explaining how the tiny particles interact and how three of the four fundamental forces of nature: the weak, strong, and electromagnetic interactions are emerging [5]. However, the attempts to have a unified theory which can reconcile general relativity and quantum mechanics, i.e. a theory of quantum gravity, is still suffering from several obstacles and technical issues that cannot be encountered, at least until the recent time [6,7]. One basic method for formulating a theory in which the interface between gravity and relativistic quantum mechanics arises, is by generalizing the aspects of the relativistic dynamics of particles in flat Minkowski space to an arbitrary curved background geometry [8,9], and therefore one can extend this formulation to establish a broad picture on how the gravitational field affects on the relativistic particles at quantum level. In this way, it is possible to adapt the approach to dealing with different models where the notion of curvature appears, and hence incorporate more predictions on the values of macroscopic observables which are required to make relevant experimental verification of certain phenomenological consequences, specifically in astrophysics and cosmology. In addition, understanding the thermodynamic behavior of relativistic particles where gravitational effects have to be taken into account [10–12], and analyzing the associated features, i.e. the fundamental statistical quantities, would offer the possibility of obtaining useful and essential results in the context of describing the quantum behavior of gravity.

Over the past few decades, topological defects (domain walls, cosmic strings, monopoles, and textures) have been tackled intensively as a subject of research and still one of the most active fields in condensed matter physics, cosmology, astrophysics and elementary particle models. It is believed that these structures raised as a consequence of the Kibble mechanism [13–15] where the defects are formed in symmetry-breaking phase transitions during the cooling of the early universe [16,17]. The particular defect that concerns us is the cosmic strings (see Ref. [18]). These objects (static or rotating) can produce observable effects. For example, they provide a promising scheme for seeding galaxy formation and the gravitational lensing effects. Moreover, by studying cosmic strings and their properties, we can learn much more about particle physics at very high energies in different scenarios. In addition, the possibility that cosmic strings could behave like superconducting wires has been raised with intriguing consequences in modern physics.

It has been known for many years now that the harmonic oscillator (HO) is considered as an essential tool in many disciplines of theoretical physics [19]. It is a well studied exactly solvable model which can be used to analyze various complex problems in the framework of quantum mechanics [20]. Furthermore, the relativistic generalization of the quantum harmonic oscillator yields an effective model in explaining very diverse aspects of molecular, atomic and nuclear interactions. Indeed, the feature of having a complete set of exact analytical solutions when dealing with such model can give rise to significantly different explanations of many mathematical and physical phenomena, and hence related applications can be achieved via the underlying formulation.

It is now accepted that the behavior of several relativistic quantum systems depends crucially on the so-called Dirac oscillator (DO) as pointed out by Itô et al. [21] in earlier developments of spin-1/2 particle dynamics with linear trajectory. They showed that the non-relativistic limit of this system leads to the ordinary harmonic oscillator with a strong spin-orbit coupling term. Actually, according to Moshinsky and Szczepaniak [22] the above mentioned DO could be obtained from the free Dirac equation by introducing an external linear potential through a minimal substitution of the momentum operator  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - im\omega\beta\hat{r}$ . It is interesting to point out that besides the theoretical focus on studying the DO, valuable insights can be obtained by considering the physical interpretation which is certainly essential in understanding many relevant applications.

Inspired by the DO, an analogous formalism was introduced for the case of bosonic particles and hence it was named a Klein-Gordon oscillator (KGO) [23,24]. The covariant form of this model in curved space-time and within the different configuration has recently been an active field of investigation by several authors. There are numerous contributions on the subject of the relativistic quantum motions of scalar and vector particles under gravitational effects produced by different curved space-time geometries, for example, the problem of the interaction between KGO coupled with topological defects in Kaluza-Klein theory is studied in Ref. [25]. The relativistic quantum dynamics of spin-0 particles in a rotating cosmic string space-time with a scalar and vector potentials of Coulomb-type has been studied in Ref. [26]. Furthermore, rotating effects on the

scalar field in the cosmic string space–time, in the space–time with space-like dislocation and in the space–time with a spiral dislocation have been investigated in Ref. [27]. Recently, the authors of Ref. [28] have analyzed the KGO in a cosmic string space–time and studied the effects stemming from the rotating frame and non-commutativity in momentum space. In addition, the KGO subjected to a magnetic quantum flux in the presence of a Cornell-type scalar and Coulomb-type vector potentials in a rotating cosmic string space–time have been examined in Ref. [29].

Attempts to investigate the relativistic spin-0, spin-1 bosons and spin-1/2 fermions wave functions and their time evolution have been pursued by various authors [30–32] making use of the Hamiltonian form, i.e., having Schrodinger’s equations. The so-called Feshbach–Villars (FV) equations [33] are of particular interest in this respect. These equations were initially constructed with the purpose of permitting a relativistic single particle interpretation of the second order KG equation. For the later case, FV equations originate from splitting the KG wave function into two components in order to obtain an equation with first order time derivative. In recent decades, a number of papers have been produced with the aim of exploring the relativistic dynamical properties of single particles and solving their wave equations by adopting the FV scheme (see Refs. [34–40] and references therein).

In a quest to map out a description of the dynamics of spinless, massive bosons in a space–time with a topological defect, namely the cosmic string geometry, we employ the methods of the FV transformation to derive FV equations of motion in a static and rotating cosmic string background. The main purpose of this paper is, firstly, to solve the derived FV equations and obtain the associated spectra, and secondly, to investigate the thermodynamic properties of these systems and understand how the geometry of the space–time affects the observable quantities.

The structure of this paper is as follows. In the next section we derive the FV equations for scalar boson in Minkowski and static Cosmic string space–time considering both the free and the interaction case. We introduce the KG oscillator in a Hamiltonian form, then we solve the obtained equations to deduce the eigenstates and the energy levels. In Section 3 we further construct the previous equations in the case where the geometry of the cosmic string is characterized by a rotation, the same procedure of Section 2 is used in this section. In Section 4 we study the statistical properties of the system in question and we discuss the influence of the topological defect on these quantities. We give our conclusions in Section 5. Throughout the paper, we will always use natural units  $\hbar = c = G = k_B = 1$ , and our metric convention is  $(+, -, -, -)$ .

## 2. The FV representation of particle of spin-0 in Minkowski space–time

### 2.1. The KG equation in Schrödinger form

In this section, we deal with the relativistic quantum description of spin-0 particle propagating in Minkowski space–time with the metric tensor  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . For a scalar massive particle  $\Phi$  with mass  $m > 0$ , the standard covariant KG equation reads [41,42]

$$(\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2) \Phi(x, t) = 0, \quad (1)$$

where  $D_\mu = i(p_\mu - eA_\mu)$  denotes the minimally coupled covariant derivative with  $e$  is the magnitude of the particle charge. Here,  $p_\mu = (E, -p_i)$  is the canonical four momentum and  $A_\mu = (A_0, -A_i)$  is the electromagnetic four potential respectively.

At this stage, it is worth emphasizing that Eq. (1) can be rewritten in a Hamiltonian form with the time first derivative i.e., a Schrodinger’s equation

$$\mathcal{H}\Phi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t). \quad (2)$$

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  can be defined by the use of the FV linearization procedure, i.e., transforming (1) to a first order in time differential equation. We introduce the two component wave function [43,44],

$$\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{m} \mathcal{D} \\ 1 - \frac{i}{m} \mathcal{D} \end{pmatrix} \psi(x, t), \quad (3)$$

where  $\psi(x, t)$  obeys the KG wave equation, and we have defined  $\mathcal{D}$  such that

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + ieA_0(x). \tag{4}$$

The above transformation (3) consists in introducing wave functions satisfying the conditions

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}\psi = m(\phi_1 - \phi_2). \tag{5}$$

For our subsequent review, it is convenient to write

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2m} \left[ m + i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] \psi \\ \phi_2 &= \frac{1}{2m} \left[ m - i\frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right] \psi. \end{aligned} \tag{6}$$

Equivalently, (1) becomes

$$\begin{aligned} \left[ i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\phi_1 + \phi_2) &= m(\phi_1 - \phi_2) \\ \left[ i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\phi_1 - \phi_2) &= \left[ \frac{(p_i - eA_i)^2}{m} + m \right] (\phi_1 + \phi_2). \end{aligned} \tag{7}$$

The addition and subtraction of these two equations lead to a system of paired differential equations of first order in time,

$$\begin{aligned} \frac{(p_i - eA_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) + (m + eA_0) \phi_1 &= i\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ -\frac{(p_i - eA_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) - (m - eA_0) \phi_2 &= i\frac{\partial \phi_2}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8}$$

With the help of Eq. (8), the FV Hamiltonian of a scalar particle in the presence of electromagnetic interaction can be written as

$$\mathcal{H}_{FV} = (\tau_z + i\tau_y) \frac{(p_i - eA_i)^2}{2m} + m\tau_z + eA_0(x), \tag{9}$$

where  $\tau_i$  ( $i = x, y, z$ ) are the conventional  $2 \times 2$  Pauli matrices given by

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

It is noteworthy that the Hamiltonian (9) fulfills the generalized hermicity condition,<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{FV} = \tau_z \mathcal{H}_{FV}^\dagger \tau_z, \quad \mathcal{H}_{FV}^\dagger = \tau_z \mathcal{H}_{FV} \tau_z. \tag{11}$$

For the free particle propagation i.e., no interaction is considered ( $A_\mu = 0$ ), the one dimensional FV Hamiltonian simplifies to

$$(\mathcal{H}_{FV})_0 = (\tau_z + i\tau_y) \frac{p_x^2}{2m} + m\tau_z, \tag{12}$$

The solutions to the free Hamiltonian (which is independent of time) are just stationary states. Assuming a solution of the form [36],

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \tag{13}$$

<sup>1</sup> The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is said to be pseudo-Hermitian if there is an invertible, Hermitian, linear operator  $\beta$  such that  $\mathcal{H}^\dagger = \beta \mathcal{H} \beta^{-1}$  [45].

with  $E$  being the energy of the system. In this case, (2) can then be written as

$$(\mathcal{H}_{\text{FV}})_0 \Phi(x) = E \Phi(x), \tag{14}$$

which is the one-dimensional FV equation of the free relativistic spin-0 particle and is performed for the purpose of having an alternative Schrodinger to KG equation.

In what follows, the above method will be used to find the solutions of wave equations in curved space-time, namely, the static cosmic string.

### 2.2. The KGO in Schrödinger form

For the next discussion, it is preferable to analyze the KGO in Minkowski space-time using the method described above. To look at the KGO in the FV representation, we begin with the minimal substitution  $p \rightarrow p - im\omega x$  of the momentum operator [46]. Here  $\omega$  is the oscillation frequency and  $x_\mu = (0, x, 0, 0)$ . Thus, by generalizing the momentum operator, the one dimensional FV Hamiltonian (12) becomes

$$\mathcal{H}_{\text{FVO}} = \frac{1}{2m} (\tau_z + i\tau_y) (p_x + im\omega x) (p_x - im\omega x) + m\tau_z, \tag{15}$$

In this way, the Schrödinger formulation of the KGO in one dimension is obtained by replacing the ansatz (13) into (15) with the following :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + m\omega \right] (\phi_1 + \phi_2) + m\phi_1 &= E\phi_1 \\ -\frac{1}{2m} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + m\omega \right] (\phi_1 + \phi_2) - m\phi_2 &= E\phi_2. \end{aligned} \tag{16}$$

After making a calculation similar to that which was made in the previous equation of the FVO, it follows that

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2 x^2 + (E^2 - m^2 + m\omega) \right] \psi(x) = 0, \tag{17}$$

or,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \right] \psi(x) = 0, \tag{18}$$

where we have set,

$$\lambda_1 = m^2\omega^2, \quad \lambda_2 = E^2 - m^2 + m\omega. \tag{19}$$

Eq. (18) is a second order differential equation for the field  $\psi$  describing the FVO dynamics in one dimensional Minkowski space-time. The solution of the above equation can be found in the literature, and a quantification condition of energy results from this solution, providing.

$$\frac{E^2 - m^2 + m\omega}{2m} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{20}$$

Having arranged and simplified the condition (16), we find the following expression of the energy spectrum [47]

$$E = \pm \sqrt{2m\omega n + m^2}. \tag{21}$$

Eq. (17) shows the relativistic energy spectrum of the FVO in space-time at Minkowski, which is the same as the one obtained for the KGO in flat space-time (see Ref. [47]). We see that this result is expected because the energy spectrum is observable and is not affected by the representation we used.



### 3. The FV representation of spin-0 particle in a static cosmic string space-time

The purpose of this section is to investigate the KGO in the background geometry of a cosmic string using the FV schema. It is well known that the generally covariant relativistic wave equations of a scalar particle in a Riemannian space-time defined by the metric tensor  $g_{\mu\nu}$ , can be obtained by reformulating the KG equation such that (see, e.g., the textbooks [8,9])

$$(\square + m^2 - \xi R) \Phi(x, t) = 0, \tag{22}$$

where  $\square$  is the Laplace–Beltrami operator given by

$$\square = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu). \tag{23}$$

Here  $\xi$  is a real dimensionless coupling constant,  $R$  is the Ricci scalar curvature defined by  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  where  $R_{\mu\nu}$  is the Ricci curvature tensor and  $g^{\mu\nu}$  is the inverse metric tensor with  $g = \det(g^{\mu\nu})$ .

We now would like to study the quantum dynamics of spin-0 particles in the space-time induced by a (1 + 2)-dimensional static cosmic string and set up the corresponding FV formulation.

#### 3.1. The FVO in the static cosmic string space-time

Before we study the KGO in the Hamiltonian representation, let us first derive the KG wave equation for the free relativistic scalar particle propagating in the cosmic string space-time that is assumed to be static and cylindrical symmetric. The general expression for a (1 + 3)-dimensional cosmic string metric is defined by the line element in cylindrical coordinates as<sup>2</sup> [48,49]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz. \end{aligned} \tag{24}$$

Here  $-\infty \leq t \leq +\infty, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq +\infty$  and  $\alpha \in [0, 1[$  is the angular parameter which determines the angular deficit  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ . It is related to the linear mass density  $\mu$  of the string by  $\alpha = 1 - 4\mu$ .

To simplify the handling of our quantum mechanics problem, let us work in a space of lower dimensions, and because there is no structure in the  $z$  direction, we can remove it [50,51]. Thus, the metric of a static cosmic string with cylindrical symmetry in two dimensions has the following form<sup>3</sup>

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2, \tag{25}$$

where the components of the metric and the inverse metric tensors are, respectively,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha r)^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{(\alpha r)^2} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

We note that the subject of mass particles without a spin in geometry generated by a static cosmic string background has been discussed in several articles(see, for example Refs. [25,52]).

In the following, we will adopt the procedure presented in references [53,54] for calculating the FV form of the KG wave equation in curved manifolds. We use the generalized Feshbach–Villars transformation (GFVT).<sup>4</sup> An equivalent transformation was proposed earlier in Ref. [55] that is appropriate for describing both massive and massless particles.

<sup>2</sup> Note that this metric is an exact solution to Einstein’s field equations for  $0 \leq \mu < 1/4$ , and by setting  $\varphi' = \alpha\varphi$ , then it represents a flat conical exterior space with angle deficit  $\delta\varphi = 8\pi\mu$ .

<sup>3</sup> Since this metric is Lorentz-invariant under boosts in the  $(t, z)$  plane [18,48], and by the virtue of rotational symmetry along the  $z$ -axis, it is reasonable to assume that the theory is invariant in the 2-dimensional  $(r, \varphi)$  surface.

<sup>4</sup> An equivalent transformation was proposed earlier in Ref. [55].

In the GFVT, the components of the wave function  $\Phi$  are given by [53]

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\tilde{D}\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \tag{27}$$

where  $\mathcal{N}$  is an arbitrary nonzero real parameter, and

$$\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}, \tag{28}$$

with

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2g^{00}\sqrt{-g}} \{ \partial_i, \sqrt{-g}g^{0i} \}. \tag{29}$$

The curly bracket in (29) denotes the anti-commutator. According to the aforementioned transformation, the Hamiltonian reads

$$\mathcal{H}_{\text{GFVT}} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \tag{30}$$

with

$$\mathcal{T} = \frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} - \mathcal{Y}^2. \tag{31}$$

Here, when  $\mathcal{N} = m$ , the original FV transformations are satisfied [54]. Now, considering the metric (25), it is easy to find that  $R = 0$ , in other words, the space-time is locally flat (there is no local gravity), and hence the coupling term is vanishing.<sup>5</sup>

A straightforward calculation leads to  $\mathcal{Y} = 0$ , so we get

$$\mathcal{T} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + m^2. \tag{32}$$

Using these results to find the Hamiltonian (20), one can assume a solution of the form,<sup>6</sup>

$$\Phi(t, r, \varphi) = \Phi(r)e^{-i(Et-j\varphi)}, \tag{33}$$

where  $j = 0, \pm 1, \pm 2, ..$  are the eigenvalues of the  $z$  component of the angular momentum operator. Therefore, it follows that the FV equation (22) may be written equivalently to the following two coupled equations

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}^2 + \mathcal{T})\phi_1 + (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T})\phi_2 &= 2\mathcal{N}E\phi_1, \\ -(\mathcal{N}^2 + \mathcal{T})\phi_2 - (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T})\phi_1 &= 2\mathcal{N}E\phi_2. \end{aligned} \tag{34}$$

The sum and the difference between the last two equations result in a second-order differential equation for the component.  $\psi$ . Thus, the radial equation is written as follows :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \kappa \right] \psi(r) = 0, \tag{35}$$

where we have set

$$\zeta = \frac{j}{\alpha}, \quad \kappa = \sqrt{E^2 - m^2}. \tag{36}$$

Eq. (35) is a Bessel equation and its general solution is defined by [56]

$$\psi(r) = AJ_{|\zeta|}(\kappa r) + BY_{|\zeta|}(\kappa r), \tag{37}$$

<sup>5</sup> The case  $\xi = 0$  is referred to as minimal coupling. However, for massless theory,  $\xi$  takes the value 1/6 (in 4 dimensions). Then, in this case, the equations of motion are conformally invariant.

<sup>6</sup> we seek solutions that are cylindrical symmetric, i.e. solutions that have a rotational symmetry in the  $(x, y)$ -plane and do not explicitly depend on  $z$ .

where  $J_{|\zeta|}(\kappa r)$  and  $Y_{|\zeta|}(\kappa r)$  are the Bessel functions of order  $\zeta$  and of the first and the second kind, respectively. Here  $A$  and  $B$  are arbitrary constants. We notice that at the origin when  $\zeta = 0$ , the function  $J_{|\zeta|}(\kappa r) \neq 0$ . However,  $Y_{|\zeta|}(\kappa r)$  is always divergent at the origin. By extension, we will consider only  $J_{|\zeta|}(\kappa r)$  when  $\zeta \neq 0$ . Hence, we write the solution to Eq. (23) as follows

$$\psi(r) = AJ_{\frac{|j|}{\alpha}}\left(\sqrt{E^2 - m^2}r\right). \tag{38}$$

Using this solution, we can now write the complete two-component wave-function of the spinless massive FV particle in the space-time of a static cosmic string as follows :

$$\psi(t, r, \varphi) = |C| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et-j\varphi)} J_{\frac{|j|}{\alpha}}\left(\sqrt{E^2 - m^2}r\right). \tag{39}$$

The constant  $|C|$  can be obtained by the appropriate normalization condition associated with the FV equation (e.g., see Ref. [57,58]). However, the non-determination of the normalizing constant throughout this manuscript does not affect the final results.

We turn now to the particular case where we want to extend the GFVT for the KGO. In general, we need to perform a substitution of the momentum operator in Eq. (22). Consequently, it is possible to rewrite Eq. (31) as :

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\omega r \right) (\sqrt{-g}) \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\omega r \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2. \tag{40}$$

Similarly, a simple calculation based on the procedure carried out in the discussion above can produce the following differential equation

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m^2 \omega^2 r^2 - \frac{\sigma^2}{r^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \tag{41}$$

with

$$\sigma^2 = \left( \frac{j}{\alpha} \right)^2, \quad \delta = E^2 - m^2 + 2m\omega. \tag{42}$$

Eq. (41) is the FVO for spin-0 particle in the static cosmic string. To obtain the solution of this equation, we first propose a transformation of the radial coordinate

$$\chi = m\omega r^2, \tag{43}$$

substituting the expression for  $\chi$  into Eq. (41) we obtain

$$\left[ \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} - \frac{\sigma^2}{4\chi^2} + \frac{\delta}{4m\omega\chi} - \frac{1}{4} \right] \psi(\chi) = 0. \tag{44}$$

Now, if we study the asymptotic behavior of the wavefunction at origin and infinity, and as we are in search of regular solutions, we can assume a solution that has the form

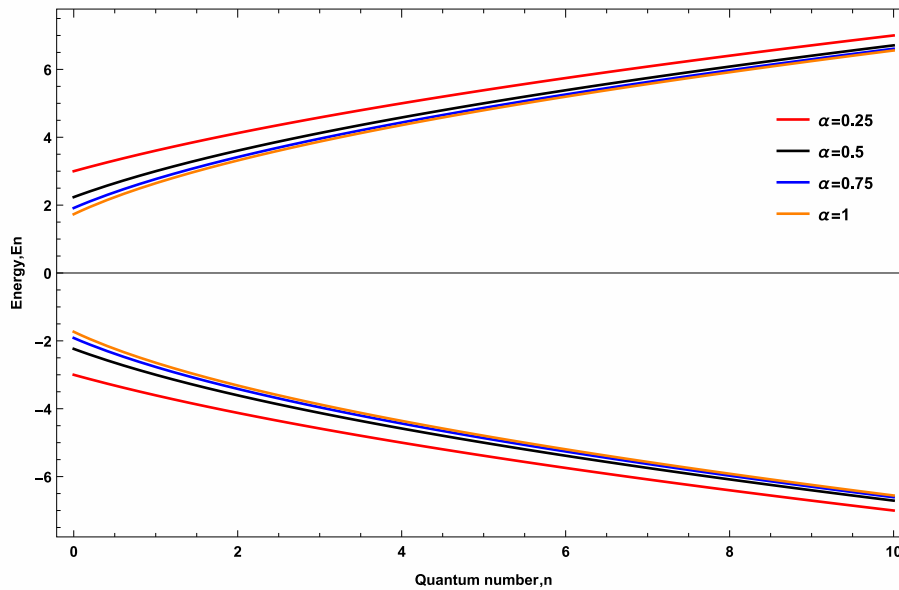
$$\psi(\chi) = \chi^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{\chi}{2}} F(\chi), \tag{45}$$

As before, this may be substituted in the Eq. (44), so we have

$$\chi \frac{d^2 F(\chi)}{d\chi^2} + (|\sigma| + 1 - \chi) \frac{dF(\chi)}{d\chi} - \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} \right) F(\chi) = 0. \tag{46}$$

This is the confluent hypergeometric equation and its solutions are expressed in terms of the type of confluent hypergeometric function [56,59]

$$F(\chi) = {}_1F_1 \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \sigma + 1, \chi \right). \tag{47}$$



**Fig. 1.** Energy of the FVO in static cosmic string as a function of the quantum number  $n$  for different values of  $\alpha$ : here  $j = 1, a = 0.1, \omega = m = 1$ .

We should note that the solution (47) must be a polynomial function of degree  $n$ . However, taking  $n \rightarrow \infty$  imposes a divergence issue. We can have a finite polynomial only if the factor of the first term in Eq. (47) is a negative integer, meaning,

$$\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{48}$$

By exploiting this result, and by inserting the parameters (48), we can get the quantified energy spectrum of the FVO into the static space–time of the cosmic chain. Hence,

$$E(n, \alpha, j) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega |j|}{\alpha} + m^2}, \tag{49}$$

The relativistic energy levels correspond to the relativistic energy spectrum of the FVO in a cosmic string background. Based on this form, we can see that energy explicitly depends on the angular  $\alpha$  deficit. The presence of the deficit angle modifies the degenerate spectrum of the particle. Unlike the flat space, the presence of the defects breaks the degeneration of the energy levels. In the limit where  $\alpha \rightarrow 1$ , and when we put  $N = 2n + j$ , which corresponds to the principal quantum number, we recover the energy spectrum of the FVO in flat space: Thus, the curvature of the space–time which is influenced by the topological defect i.e., the cosmic string through the deficit parameter will affect the relativistic dynamics of the scalar particle by generating a gravitational field due to the presence of the parameter  $\alpha$ . Finally, the Eq. (17) is identical with that obtained for the KGO (see Ref. [52]). What is more, as we expected, the energy spectrum is observable and is not affected by the representation we used. All these results have been displayed in Fig. 1. This figure shows the energy levels of the FVO in relation to the quantum number  $n$  in the characterized static cosmic string space–time for various  $\alpha$  parameters.

The corresponding wave function is given by

$$\psi(r) = |\tilde{C}| (m\omega r^2)^{\frac{|j|}{2\alpha}} e^{-\frac{m\omega r^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|j|}{2\alpha} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega r^2\right). \tag{50}$$

The total eigenfunction can be expressed by

$$\psi(t, r, \varphi) = |\tilde{C}| \left( \frac{1 + \frac{E}{\mathcal{N}}}{1 - \frac{E}{\mathcal{N}}} \right) (m\omega r^2)^{\frac{|j|}{2\alpha}} e^{-\frac{m\omega r^2}{2}} e^{-i(Et - j\varphi)} {}_1F_1\left(\frac{|j|}{2\alpha} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega r^2\right), \tag{51}$$

where  $|\tilde{C}|$  is the normalization constant. Now, having the complete wave-function above, we are in position to calculate the density  $\rho_{\text{FVO}}$  corresponding to the FVO. This function is given by [33]

$$\rho_{\text{FVO}} = \psi^* \tau_z \psi. \quad (52)$$

Fig. 2 displays the probability density of FVO in the static cosmic string in relation to the radial distance  $r$  for four levels  $n = 0, 1, 2, 3$ . Obviously, we can see that the density is affected by the choice of both parameters  $\mathcal{N}$  and  $n$ . Thus, in the presence of cosmic string ( $\alpha = 0.5$ ), we observe the following :

- For a fixed value of  $\mathcal{N}$  and for various values of the quantum number  $n$ , the intensity of each density peak is strongly affected: additionally, the number of these peaks increases as  $n$  increases.
- Now, at a fixed value of the quantum number  $n$ , increasing  $\mathcal{N}$ , the intensity of the density peak decreases.
- All peaks are symmetrical to a fixed position  $r$ .

The case where  $\mathcal{N} = m$ , which corresponds to the FV transformations [54], shows that the intensity of the ground state ( $n = 0$ ) is greater than the excited levels ( $n = 1, 2, 3$ ).

Fig. 3 presented the probability density of FVO for the ground state  $n = 0$  for various parameters  $\alpha$  when  $\mathcal{N} = m$ : for the Feshbach–Villars transformation,  $\mathcal{N}$  is definite and equal to the particle mass  $m$  [54]. From this figure, the effect of the geometric parameter of space–time on this density is clearly observed.

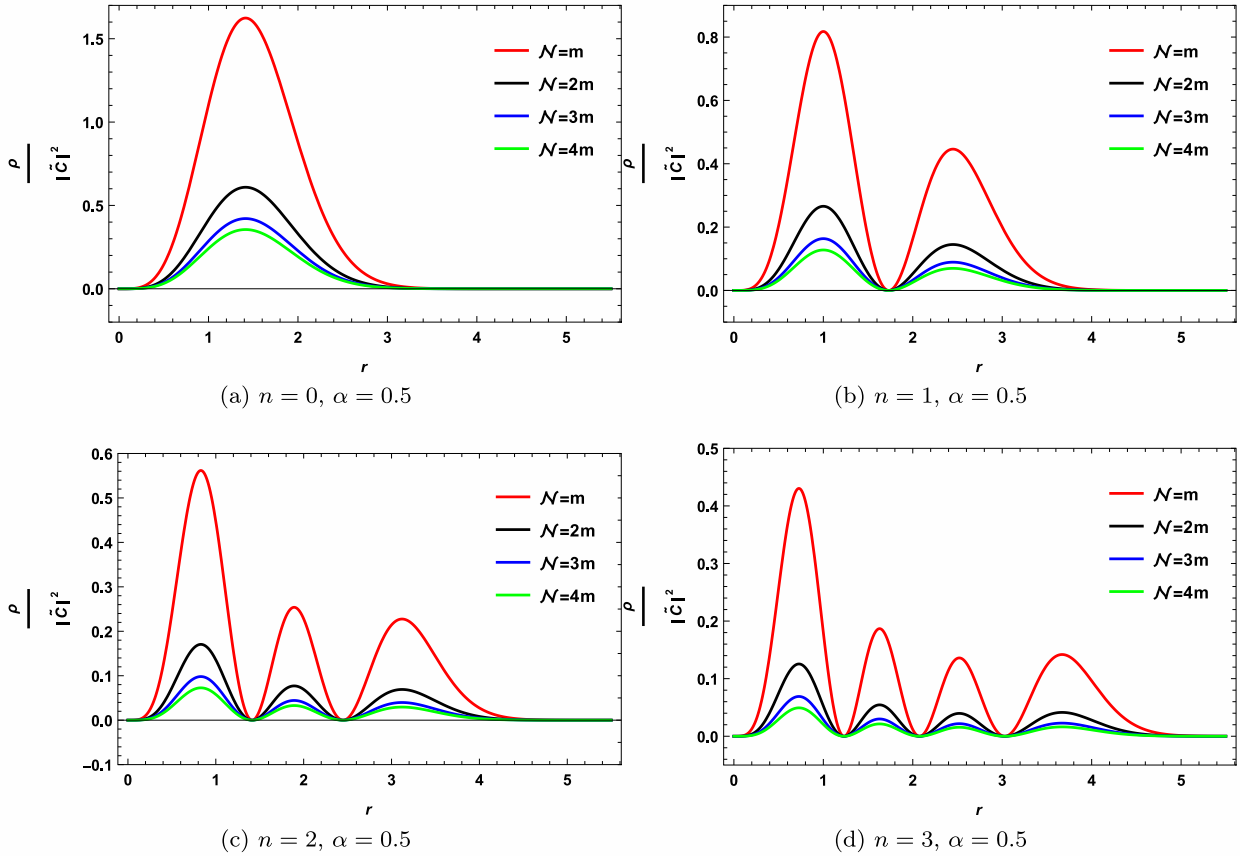
All these figures show that the sign of probability density is still positive in comparison with the situation of Klein–Gordon equation: In the case of the Klein–Gordon equation, one gets a density that is not positive. The “probability density” contains time derivatives since the Klein–Gordon equation is second order in  $\partial/\partial t$ . This means that  $\rho$  is not obliged to be defined as positive because at a given time both  $\psi$  and  $\partial/\partial t$ , it can have arbitrary values. As a result  $\rho$  can be positive or negative. As a result, the Feshbach–Villars formalism, unlike the KG theory, helps us to understand negative energies and probabilistic interpretation can naturally be adapted. The density of probability in the Feshbach–Villars formalism is given by (52), and therefore the charge conservation for the Feshbach–Villars equation given by.

$$Q = \int \rho_{\text{FVO}} d^3x = \pm 1, \quad (53)$$

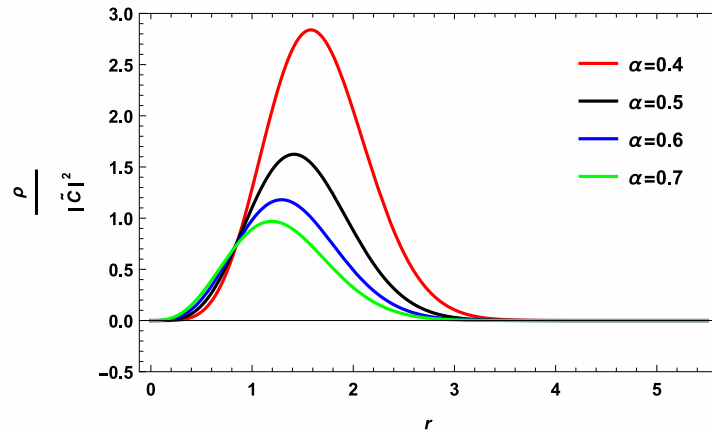
The interpretation for charge conservation is that it is composed of two charge densities, the particle and its corresponding anti-particle component,  $\phi_1$  and  $\phi_2$ , respectively. Thus, the Feshbach–Villars equation provides a probabilistic interpretation and gives justification for negative energies for quantum mechanics of relativistic particles without spin [33,60].

### 3.2. The FVO in rotating cosmic string space–time

In this section we shall analyze the FVO in the background geometry of a rotating cosmic string in two-dimensions. Similarly to the case studied in Section 3, the equations of motion of a scalar particle can be achieved by considering the GFVT. Several authors studied the quantum dynamics of relativistic particles in the space–time of a cosmic string with rotational effects, and many models were considered in this context. For instance, in a previous paper by Mazur [61], the quantum mechanical properties of massive (or massless) particles in the gravitational field of spinning cosmic strings were discussed. He showed that the energy should be quantized in the presence of non-zero angular momentum of the string. Later, Gerbert and Jackiw [62] have presented solutions for the KG and Dirac equations in the  $(1+2)$ -dimensional space–time created by a massive point particle, with arbitrary angular momentum. In Ref. [63], the vacuum expectation value of the stress–energy tensor for a massless scalar field conformally coupled to gravitation was discussed. The authors of Ref. [64] have examined the behavior of a quantum test particle satisfying the Klein–Gordon equation in a space–time of a spinning cosmic string. Additionally, it was shown in Ref. [65] that the rotating cosmic string solution of  $U(1)$  scalar field theory with a cylindrical symmetric energy density can



**Fig. 2.** Plots of the density of probability of the FVO in static cosmic string as a function of the radial distance  $r$  for different values of  $n$  with  $j = 1$ .



**Fig. 3.** Plots of the density of probability of the FVO for the ground state  $n = 0$  in a static cosmic string as a function of the radial distance  $r$  for different values of the parameter  $\alpha$  when  $\mathcal{N} = m$ : here  $j = m = \omega = 1$ .

be characterized as extreme of the field’s energy for given angular and linear momenta. Moreover, topological and geometrical phases due to the gravitational field of a cosmic string that has mass and angular momentum were investigated in Ref. [66].

Recently, the subject of gravitational effects of rotating cosmic strings has attracted considerable interest in connection with the dynamics of relativistic quantum particles and their properties. For example, vacuum fluctuations for a massless scalar field around a spinning cosmic string were studied in Ref. [67] applying a re-normalization method. In like manner, vacuum polarization of a scalar field in the gravitational background of a spinning cosmic string was investigated in Ref. [68].

Furthermore, the authors of Ref. [69] have analyzed the Landau levels of a spinless massive particle in the spacetime of a rotating cosmic string by means of a fully relativistic approach. Wang et al. [70] have treated the model of the KGO coupled to a uniform magnetic field in the background of the rotating cosmic string. Also, the problem of a spinless relativistic particle subjected to a uniform magnetic field in the spinning cosmic string space–time was addressed in Ref. [71]. Besides, the relativistic quantum dynamics of a KG scalar field subjected to a Cornell potential in spinning cosmic string space–time was presented in Ref. [72]. In addition, the relativistic scalar charged particle in a rotating cosmic string space–time with Cornell-type potential and Aharonov–Bohm effect was analyzed in Ref. [29]. Other publications in which rotating cosmic strings have been considered to study the quantum properties of relativistic systems could be mentioned in this respect (e.g., [71–78] and related references therein). Aside from investigating bosonic particles in that specific space–time, in the literature one can find various discussions concerning the effects of the topology and geometry of this space–time on the quantum dynamics of fermionic particles and their behavior (see for instance Refs. [79–85]).

In the next discussion, we extend the problem studied in Section 3 to a more general space–time with non-zero angular momentum. We consider a massive, relativistic spin-0 particle whose wave-function is denoted by  $\psi$  and satisfies the KG equation (Eq. (22)) in the space–time induced by a (1 + 2)-dimensional stationary rotating cosmic string which is described by the following line element [86–89]

$$ds^2 = dt^2 + 2a dt d\phi - dr^2 - (\alpha^2 r^2 - a^2) d\phi^2, \tag{54}$$

always the cylindrical coordinates  $(t, r, \phi)$  are with usual ranges, and  $\alpha = 1 - 4\mu$  is the wedge parameter with  $\alpha < 1$ . Here, the rotation parameter  $a = 4J$  has units of distance with  $J$  standing for the angular momentum of the string.

The covariant and contravariant components of the metric tensor are

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -(\alpha^2 r^2 - a^2) \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{\alpha^2 r^2} & 0 & \frac{a}{\alpha^2 r^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{a}{\alpha^2 r^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

To study the relativistic quantum motion of a scalar boson interacting with the gravitational field of the background geometry defined by the metric (54), we need to write the generic KG equation in the curved space in question, given by

$$(\square + m^2 - \xi R) \psi(t, r, \phi) = 0, \tag{56}$$

where  $\psi$  is a two-component vector

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \equiv (t, r, \phi), \tag{57}$$

satisfying the condition

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}'\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \tag{58}$$

with

$$\mathcal{D}' = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}'. \tag{59}$$

The next step is to develop the approach used in Section 3 for the case of rotating cosmic strings. We adopt the GFVT to derive the equations of motion for this problem, then we solve them to obtain the wave functions and the energy spectra. Following Refs. [53,54], the identification of the Hamiltonian leads to the idea of employing a two-component formulation of the KG equation. In order to rewrite Eq. (56) in the Hamiltonian form, one requires to introduce new definitions for the quantities presented in Eqs. (27), (29) and (31). In the case under consideration, we have

$$\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}', \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & \partial_i \left( \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j \right) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i (\sqrt{-g} G^{ij}) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) \\ & + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} [\nabla_i (\mathcal{U}^i)]^2 \\ & - \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j (\mathcal{U}^i) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j (\mathcal{U}^i), \end{aligned} \tag{61}$$

$$\mathcal{Y}' = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \sqrt{-g} \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}, \tag{62}$$

where

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \tag{63}$$

It has been shown in Ref. [54] that the transformations (60), (61) and (62) with the definitions (63) are exact and cover any inertial and gravitational fields. It should be noted that these exact transformations ensure to obtain the block-diagonal form of the Hamiltonian  $\mathcal{H}_{GFVT}$  which does not depend on the parameter  $\mathcal{N}$ . For the geometry (44), the eigenvalues of the operator  $\mathcal{Y}'$  are given by

$$\mathcal{Y}'\Psi(t, r, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_2, \sqrt{-g} \frac{g^{02}}{g^{00}} \right\} \psi(t, r, \varphi) = \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(t, r, \varphi), \tag{64}$$

where the field  $\psi$  obeys the non-unitary transformation  $\psi \equiv \Phi' = \mathcal{F}\Phi$  which permits to obtain pseudo-Hermitian Hamiltonian  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \mathcal{F}\mathcal{H}_{GFVT}\mathcal{F}^{-1}$ ,  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z (\mathcal{H}'_{GFVT})^\dagger \tau_z$ . After some algebraic calculations, Eq. (61) takes the form

$$\mathcal{T}' = -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{m^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \tag{65}$$

where for the metric (54) the Ricci scalar vanishes i.e,  $R = 0$ .

Using the two components wave function (57) and the Hamiltonian (60), we can express Eq. (56) as the Schrodinger's equation

$$\mathcal{H}'_{GFVT} \psi(x) = i \frac{d}{dt} \psi(x), \quad x \equiv (t, r, \varphi). \tag{66}$$

To solve this eigenvalue problem, let us consider for the wave function the ansatz below

$$\psi(x) = \mathcal{F}\Phi(x) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{pmatrix} e^{-i(Et-j\varphi)}. \tag{67}$$

Substituting (49) into (48), we find the following coupled differential equations

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) + \mathcal{T}' \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_1 &= 2NE\mathcal{F} \phi_1, \\ \mathcal{N}^2 \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) - \mathcal{T}' \mathcal{F} (\phi_1 + \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_2 &= 2NE\mathcal{F} \phi_2, \end{aligned} \tag{68}$$

We can add and subtract the two equations of (68) to get, respectively,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) + \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} (\phi_1 + \phi_2) &= E\mathcal{F} (\phi_1 + \phi_2), \\ -\mathcal{T}' \mathcal{F} (\phi_1 + \phi_2) + \mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2) &= NE\mathcal{F} (\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \tag{69}$$

Both equations indicate the relationship between the two components  $\phi_1$  and  $\phi_2$  as described below

$$\phi_1 = \frac{1}{\mathcal{N}} \left( E - \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \phi_2. \tag{70}$$



After simple algebraic manipulations, we arrive at the following second order differential equation for the radial function  $\psi(r)$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{(aE + j)^2}{\alpha^2 r^2} + E^2 - m^2 \right] \psi(r) = 0. \tag{71}$$

Setting

$$\zeta^2 = \frac{(aE + j)^2}{\alpha^2}, \gamma = E^2 - m^2, \tag{72}$$

yields

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \gamma \right] \phi_2(r) = 0. \tag{73}$$

Eq. (55) is expressed as a Bessel differential equation: its solutions can be written in terms of Bessel function of first kind as

$$\psi(r) = A' J_{\frac{aE+j}{\alpha}} \left( \sqrt{E^2 - m^2} r \right), \tag{74}$$

where  $A'$  is an integration constant. The total eigenstates are given by

$$\psi(t, r, \varphi) = |C'| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et-j\varphi)} J_{\frac{aE+j}{\alpha}} \left( \sqrt{E^2 - m^2} r \right). \tag{75}$$

From now, we proceed to study the FVO in a rotating cosmic string space-time. Firstly, we consider a scalar quantum particle embedded in the background gravitational field of the space-time described by the metric (43). In this way, we shall introduce a replacement of the momentum operator  $p_i \rightarrow p_i - im\omega x_i$  where  $p_i = -i\nabla_i$  in Eq. (61). So, we have

$$\mathcal{T}' = -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} - m\omega r \right) \left( \sqrt{-g} \left( \frac{\partial}{\partial r} + m\omega r \right) \right) + \frac{\sqrt{-g}}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{m^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2. \tag{76}$$

Based on the previous analyses, we will apply the GFVT for the case of KGO in the concerned space through the same steps used before. Inserting Eqs. (76) and (64) into the Hamiltonian (60), then assuming the solution (67) gives two coupled differential equations similar to those of Eq. (68) but with different value of  $\mathcal{T}'$ .

Manipulating exactly the same steps as before, we obtain the following radial equation

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - m^2 \omega^2 r^2 - \frac{\vartheta^2}{r^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \tag{77}$$

where we have defined

$$\vartheta^2 = \left( \frac{aE + j}{\alpha} \right)^2, \quad \delta = E^2 - m^2 + 2m\omega. \tag{78}$$

To solve Eq. (77), we introduce a new dimensionless variable  $\varrho = m\omega r^2$ , and by substitution into (76), the resulting equation reads

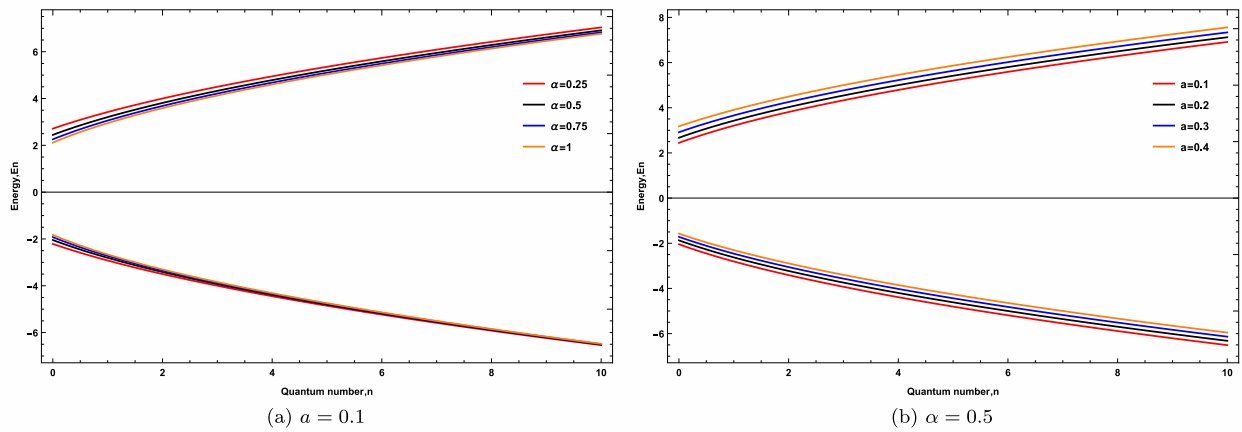
$$\left[ \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{\vartheta^2}{4\varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4m\omega\varrho} \right] \psi(\varrho) = 0. \tag{79}$$

To eliminate the term  $d\psi(\varrho)/d\varrho$ , we consider the following change of variable

$$\psi(\varrho) = \varrho^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}(\varrho), \tag{80}$$

In this case, Eq. (79) becomes

$$\frac{d^2 \mathcal{E}(\varrho)}{d\varrho^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4m\omega\varrho} + \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\varrho^2} \right] \mathcal{E}(\varrho) = 0. \tag{81}$$



**Fig. 4.** Energy of the FVO in rotating cosmic string as a function of the quantum number  $n$ : here,  $j = \omega = m = 1$ .

It has the form of the Whittaker differential equation [56,59]. The general solution of this equation, which is regular at the origin, is given by

$$\mathcal{E}(\varrho) = |C| \varrho^{-\frac{1}{2}} M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right), \tag{82}$$

where  $|C|$  is an arbitrary constant and  $M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right)$  is the Whittaker M-function defined via the confluent hypergeometric functions as

$$M_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right) = e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^{\frac{|\vartheta|+1}{2}} {}_1F_1 \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right), \tag{83}$$

The other solution is the WhittakerW given by

$$W_{\delta, \vartheta} \left( \frac{\delta}{4m\omega}, \frac{|\vartheta|}{2}, \varrho \right) = e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^{\frac{|\vartheta|+1}{2}} U \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right), \tag{84}$$

which  $U \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, \varrho \right)$  is the Tricomi confluent hypergeometric function (or Kummer's function of the second kind) [56,59]. In general,  $U(a, b, z)$  has a branch point at  $z = 0$ , i.e., it has a singularity at zero. Thus we keep only the solution described by (82).

Now, according to the (83), the final expression of the wave-function of the FVO propagating in the rotating cosmic string background can be represented by

$$\psi(t, r, \varphi) = |C| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (m\omega r^2)^{\frac{|\vartheta|}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2} r^2} e^{-i(Et-j\varphi)} {}_1F_1 \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, m\omega r^2 \right), \tag{85}$$

where the parameters  $\vartheta$  and  $\delta$  are defined in Eq. (78).

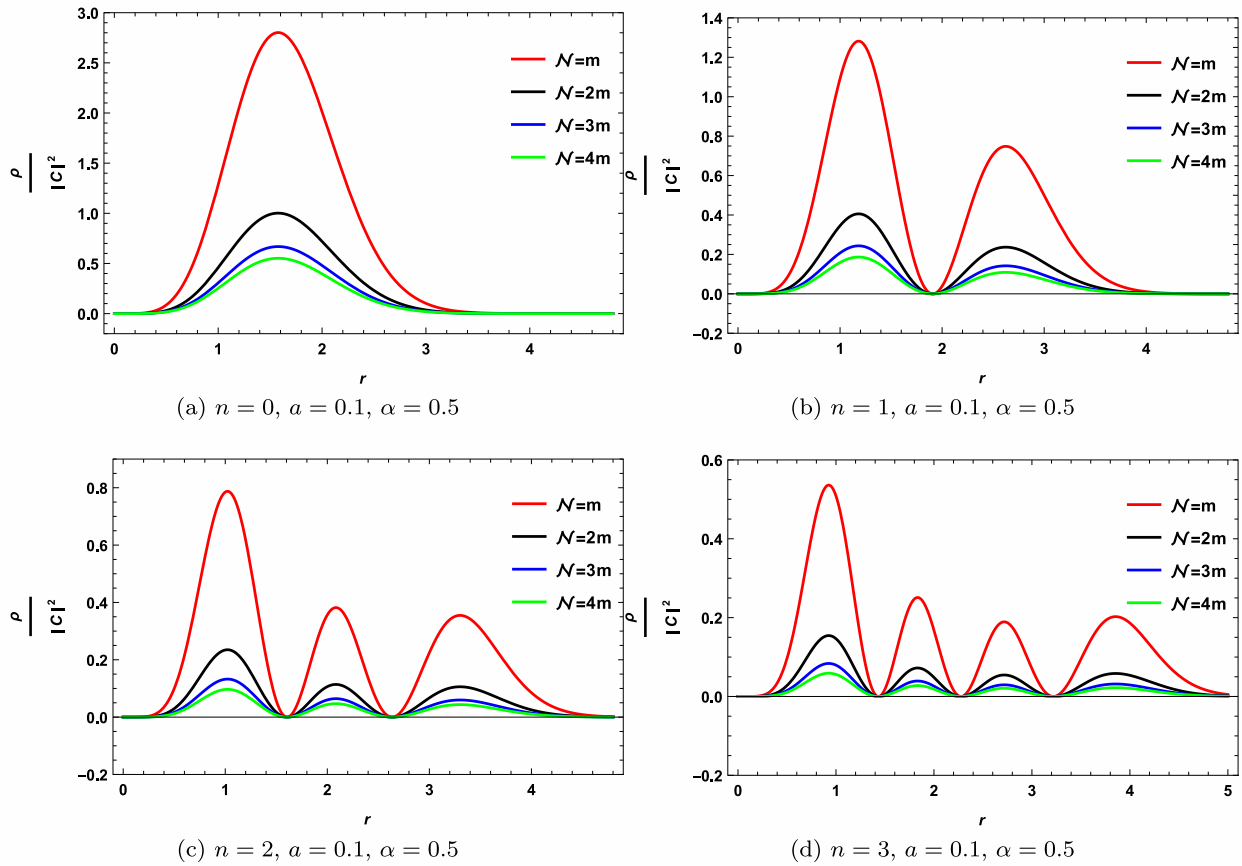
Again, the asymptotic behavior of the confluent hyper-geometric function implies that

$$\frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n, \tag{86}$$

Thus, after inserting  $\vartheta$  and  $\delta$  and by solving Eq. (86) for  $E$ , we obtain

$$E^\pm(n, \alpha, a, j) = \frac{am\omega}{\alpha} \pm \sqrt{4m\omega n + \left(\frac{am\omega}{\alpha}\right)^2 + \frac{2m\omega|j|}{\alpha} + m^2}. \tag{87}$$

Fig. 4 shows the eigenvalues of the energy according to the quantum number  $n$  with fixed parameters  $\omega = j = 1$ , and for several values of the two parameters  $\alpha$  and  $a$ . Based on this figure, an interesting result may be summarized as follows:



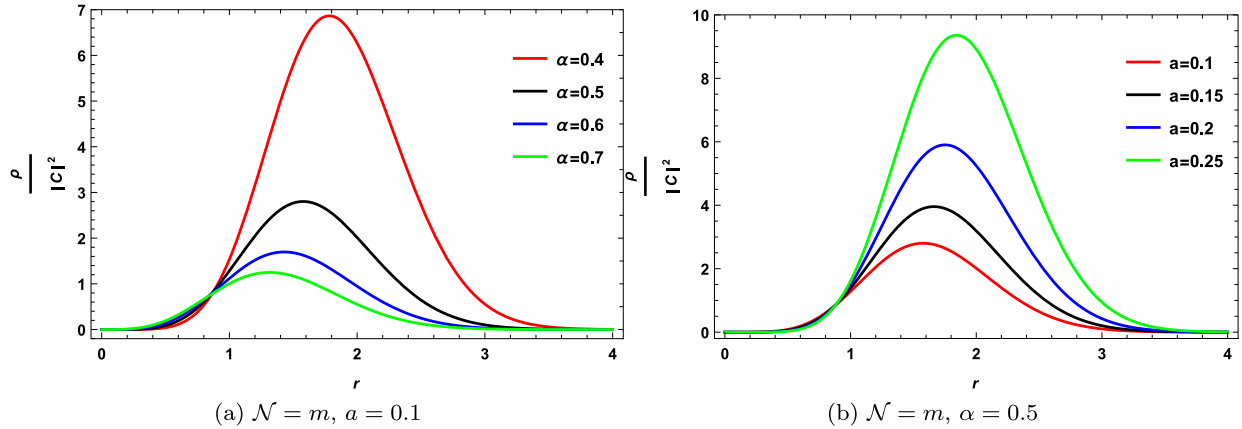
**Fig. 5.** Plots of the density of probability of FVO in rotating cosmic string as a function of the radial distance  $r$  for different values of  $n$  with the parameters  $a = 0.5$  and  $j = 1$ .

- The energy spectrum depends on all parameters that characterize the background geometry, like the  $\alpha$  angular deficit parameter and the rotation parameter  $a$ .
- We expect that the external gravitational field of a rotating cosmic string will affect the relativistic dynamics of the quantum particle, essentially, its angular momentum appears throughout the parameter  $a$ .
- By comparing the form of energy (87) to that of the FVO within a static cosmic string (49), it can be seen that  $E(n, \alpha, a, j)$  is shifted by the quantity  $am\omega/\alpha$  and enlarged by the conical factor.
- The presence of both  $\alpha$  and  $a$  parameters modified the degenerate spectrum of the particle: Thus, the occurrence of these parameters also breaks the degeneration of energy levels.
- In the limits where  $a \rightarrow 0$ , one recovers the energy spectrum of the FVO in a static cosmic string (49). Now, the two  $\alpha \rightarrow 1$  and  $a \rightarrow 0$  limits lead to the energy spectrum of the FVO in a flat space–time (21).
- Finally, the form of our energy spectrum is similar to that obtained by Wang et al. [83] for a specific case.

Now, considering these results helps us estimate the density of the probability of FVO in the rotating cosmic string space–time.

Fig. 5 shows the probability density of the FVO in the rotating cosmic string in relation to the radial distance  $r$  for four levels  $n = 0, 1, 2, 3$ . Based on that figure, we see the following :

- The sign of the density in the presence of both  $\alpha$  and  $a$  parameters is positive.
- This density is strongly influenced by the selection of the two  $\mathcal{N}$  and  $n$  variables in the presence of both  $\alpha$  and  $a$  parameters.



**Fig. 6.** Plots of the density of probability of FVO for the ground state  $n = 0$  in rotating cosmic string as a function of the radial distance  $r$  for different values of the two parameters  $\alpha$  and  $a$ ; here  $j = m = \omega = 1$ .

- For a fixed value of  $\mathcal{N}$  and for various values of the quantum number  $n$ , the intensities of each density peak are highly influenced relative to the case of the static cosmic string. This is due to the introduction of the rotational parameter  $a$  of space–time.
- The number of these peaks increases when  $n$  increases. On the other hand, they are symmetrical at a fixed point  $r$ .

Recall here that  $\mathcal{N}$  is an arbitrary non-zero real parameter. For Feshbach–Villars processing, it is defined and equal to the mass of particles  $m$  [54]. Fig. 6 provided the probability density for the ground state  $n = 0$  in the presence of both  $\alpha$  and  $a$  space–time parameters. On the basis on this figure, we conclude:

- At a fixed rotation value  $a$ , the intensity of each density peak decreases with increasing angular  $\alpha$  deficit. All the peaks are not symmetrical.
- Now, for a fixed value of the  $\alpha$  parameter, the intensity increases as the rotation  $a$ . All the peaks are also not symmetrical.

We are now ready to discuss the thermal properties of FVO in the rotating cosmic string.

#### 4. Thermal properties of the FVO in the rotating cosmic string

This section focuses on the thermal properties that may occur throughout our study of the KGO in space–time produced by a rotating cosmic string. Having already obtained the energy spectrum, we are now able to present the thermodynamic quantities by calculating the partition function that provides all the physical information of our quantum system. To better illustrate our results, we present some figures in the next discussion.

##### 4.1. Partition function

We are interested in determining the partition function of the FVO interacting with the gravitational field induced by the rotating cosmic string. Therefore, statistical quantities such as free energy  $F$ , average energy  $U$ , entropy  $S$ , and specific heat  $C_v$ , associated with the relativistic spinless particle in this space–time may be obtained from the form of this function.

The canonical ensemble partition function at finite temperature  $T$  is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \tag{88}$$

where  $E_n$  denotes the corresponding energy eigenvalues and  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  with  $k_B$  being the Boltzmann constant.

Taking into consideration the spectrum ((87)) and considering only positive energies, the partition function can be expressed as follows:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(Y+\sqrt{An+B})} = e^{-\beta Y} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{An+B}}, \tag{89}$$

with

$$Y = \frac{am\omega}{\alpha}, \quad A = 4m\omega, \quad B = \left(\frac{am\omega}{\alpha}\right)^2 + \frac{2m\omega|j|}{\alpha} + m^2. \tag{90}$$

Here, considering only positive energies in calculating the partition function can be justified as below

- First, Accioly et al. [90] proved that the FV equation for spinless particles in curved space-time has an exact Foldy–Wouthuysen (FWT) transformation. This means that positive and negative energy solutions do not mix. In other words, the states of negative or positive energy are occupied, but never a mixture of both branches, which would cause the annihilation of particles–antiparticles.
- Second, we assume that the negative energy (antiparticle) as fully occupied: It is correct that the case of bosons is very different from the one of fermions: All bosons can occupy the same level, unlike the case of fermions where they are ordered by the principle of Pauli. Despite that, we can extend the method of filling the sea with negative energy Dirac for the case of fermions to the case of bosons [91–93].
- As a consequence, the bosons states are divided into two sectors: the usual positive sector consisting of states with a positive number of bosons, and the negative sector, consisting of states with a negative number of bosons. Once a state goes into the negative sector, it cannot return to the usual positive sector through ordinary interaction, because of the presence of a barrier [94] (The barrier is like the gap in solid-state physics).

In the following, we closely follow the methods described in Ref. [47] and revised in Ref. [95] with the intention of approximating the apparent infinite sum in Eq. ((89)). To do so, we will begin by rewriting the series representation of the Z partition function based on the Zeta function. Hence, we have [95]

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{An+B}} = e^{-\tilde{\beta}} + \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}}, \quad n = n' + 1. \tag{91}$$

Here, we have introduced the following notation

$$\tilde{\beta} = \beta\sqrt{B}, \quad D = \frac{A}{B}. \tag{92}$$

Using the Cahen–Mellin integral [96,97]

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds, \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}; z \neq 0\right). \tag{93}$$

where the path of integration is the vertical line  $\Re(s) = c$ , with  $c \in \mathbb{R}^*$ , lying to the right of all the poles of  $\Gamma(s)$ , the term  $\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}}$  can be expressed as (see Fig. 7)

$$\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}\sqrt{D}\sqrt{\frac{1}{D}+(n'+1)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\tilde{\beta}\sqrt{D})^{-s} \Gamma(s) \zeta_H\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{D} + 1\right) ds, \tag{94}$$

with  $\Gamma(s)$  and  $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{D} + 1\right)$  refer to the Euler Gamma and Hurwitz zeta functions receptively.

We note that the integral converges only when  $s/2 > 1$  requires  $c > 2$ . As we need to work out the integral (94), it is clear that the integral has poles at  $s = -k; (k = 0, 1, 2, \dots)$  of  $\Gamma(s)$ , with residue  $(-1)^k/k!$  (see Fig. 7). In addition, we have a simple pole at  $s = 2$  of  $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{D} + 1\right)$  with

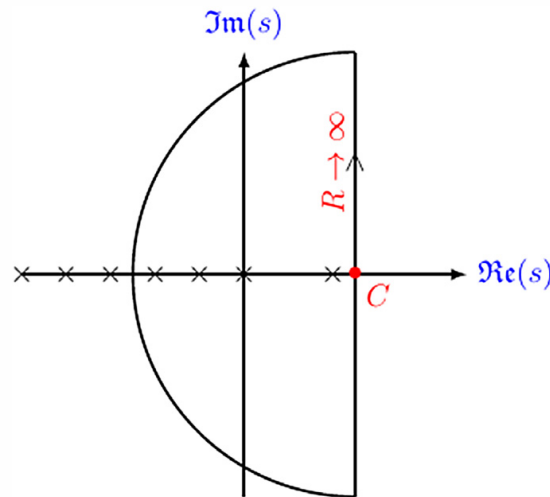


Fig. 7. Contour integration of the Mellin transformation [95,97].

residue equals to 2. A straightforward evaluation of the residues at the poles  $\{s = 0, 2, -k\}$  leads to the following expression of the partition function

$$Z(\tilde{\beta}) = e^{-\tilde{\beta}Y_B^{-1/2}} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{D} \left( \frac{2}{\tilde{\beta}^2} - 1 \right) + e^{-\tilde{\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tilde{\beta}\sqrt{D})^n}{n!} \zeta_H \left( -\frac{n}{2}, 1 + \frac{1}{D} \right) \right], \quad (95)$$

where

$$\zeta_H(0, p) = \frac{1}{2} - p. \quad (96)$$

#### 4.2. Thermal properties

Having estimated the partition function of FVO in rotating cosmic string, all thermal quantities of the FVO may be calculated using the following expressions

$$F = -\frac{\sqrt{B}}{\tilde{\beta}} \ln(Z), \quad U = -\sqrt{B} \frac{d \ln(Z)}{d\tilde{\beta}}, \quad (97)$$

$$S = \ln(Z) - \tilde{\beta} \frac{d \ln(Z)}{d\tilde{\beta}}, \quad C_V = \tilde{\beta}^2 \frac{d^2 \ln(Z)}{d\tilde{\beta}^2}. \quad (98)$$

The series representations of the partition function  $Z$  in terms of the  $\zeta_H$  can be evaluated numerically by taking into account only a finite number of poles appear in the sum of (95): In our case, we have taken  $n_{max} = 1000$ . All results have been reported in Figs. 8 and 9 according to reduced temperature  $\tau = \frac{1}{\tilde{\beta}}$ . Using that new variable, Eqs. (97) and (98) are modified and transformed into

$$F = -\tau\sqrt{B} \ln(Z), \quad U = \sqrt{B}\tau^2 \frac{d \ln(Z)}{d\tau}, \quad (99)$$

$$S = \ln(Z) + \tau \frac{d \ln(Z)}{d\tau}, \quad C_V = \tau^2 \frac{d^2 \ln(Z)}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d \ln(Z)}{d\tau}. \quad (100)$$

Figs. 8 and 9 show the different thermal quantities of the FVO in (1+2)-dimensional rotating cosmic string according to the values of both  $\alpha$  and  $a$  parameters. They display the following quantities such as free energy, entropy, specific heat and internal energy as a function of the variable  $\tau$ . In all curves, these quantities increase according to  $\tau$  for different values of  $\alpha$  and  $a$  parameters.

On the basis of the two figures, the principal results we observed can be summarized as follows:

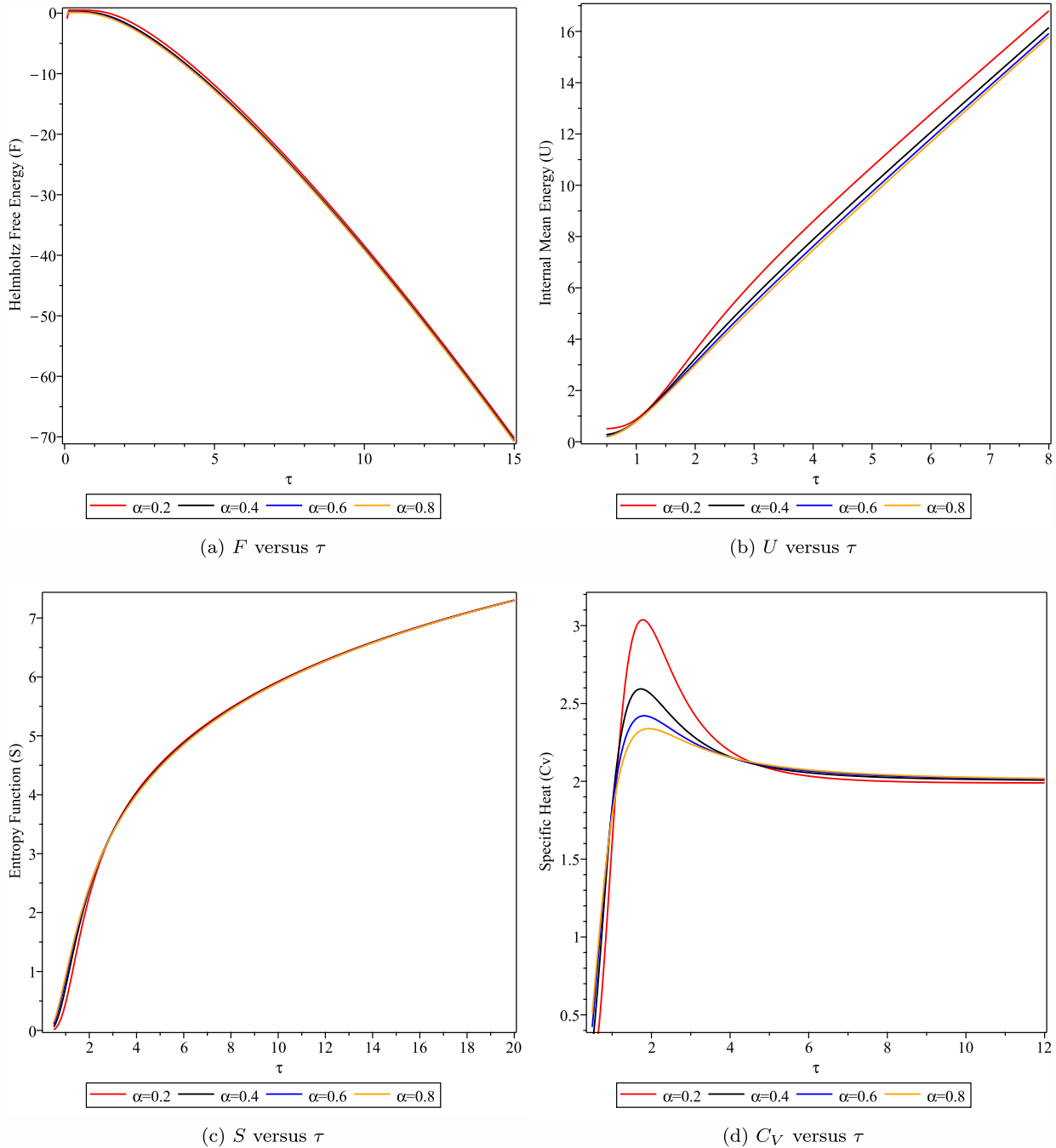
1. According to Fig. 8, all the thermal properties are presented for various values of the parameter  $\alpha$  at a fixed value of the rotation  $a = 0.1$ . Hence
  - All thermodynamic quantities are affected by the topological defect through the  $\alpha$  parameter.
  - In particular, these effects are well observed in special heat curves. The curves indicate a bump around a certain temperature, which decreases as  $\alpha$  increases.
  - The nature of these bumps can be identified using the entropy function curves: no sudden changes around a temperature have been identified in these curves. This means that the curvature, observed in the specific heat curve does not show or indicate the existence of a phase transition.
  - For very high temperatures, all specific heat curves tend towards limit point 2.
  - Now, at very low temperatures, the third law of the thermodynamic  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_v = 0$  is fulfilled [98].
2. Now, in Fig. 9, all thermal properties are reported for different values of the parameter  $a$  at  $\alpha = 0.5$ . So,
  - All the thermodynamics quantities are influenced by the topological defect through the parameter  $a$ .
  - All the curves of the specific heat coincide around a specific temperature. As a result, these effects are much smaller in the specific heat curves relative to the first case shown in the Fig. 8.
  - As in the first case, the existence of a bump in the specific heat curves does not mean that a phase transition is present.
  - Finally, all specific heat curves tend to limit point 2 and the third law of thermodynamics  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_v = 0$  is filled as above.

In conclusion, let us quote some remarks on the relation between the cosmic string, which is a cosmological model, and a problem that can be reached in the laboratory.

First, we note that the experimental realization of relativist oscillators in the laboratory is done by Franco–Villafane et al. [99]. Bermudez et al. [100,101] show that the implementation of a 2D-DO in a single trapped ion, with all analogies and measured observable, is in reach with current technology, and this experimental implementation shall confirm the predicted relativistic phenomena and possibly measure the non-predicted ones. Gerritsma, Lamata and Blatt [102–104] indicated that the trapped ions are particularly interesting for the purpose of quantum simulation as they allow for exceptional control of experimental parameters (for more detail see Ref. [105]). Certain authors have been show the existence of an exact mapping between the relativistic oscillator and the graphene under magnetic field [106,107]. The graphene is a two dimensional atomic crystal of carbon. Its exists and its connects different branches of physics. The experimental existence of different topological defect in all graphene samples have a strong influence on the electronic structure. Such defects occur in a flat or curved space–time [108–112].

Gallerati [113] shows that a cosmic string analogy permits to treat an arbitrary number of topological defects located at arbitrary positions on the graphene plane. He gives a model for these defects based on a cosmic string analogy and the results on the inhomogeneities induced by this topological disorder. His model can be considered as an example of the interplay between cosmology and condensed matter. Following him, the model has the peculiarity that it is cosmology what provides the model to graphene unlike the usual situation in which condensed matter systems are used as laboratories to test high energy models. So, the graphene may be considered to be the most promising system in Dirac material.

In this context, and as a result of all the work described above, and possibly others that we have not mentioned here, we can expect our results to be regarded as a good approach for calculating the thermal properties of the graphene system modeled by the cosmic string metric.

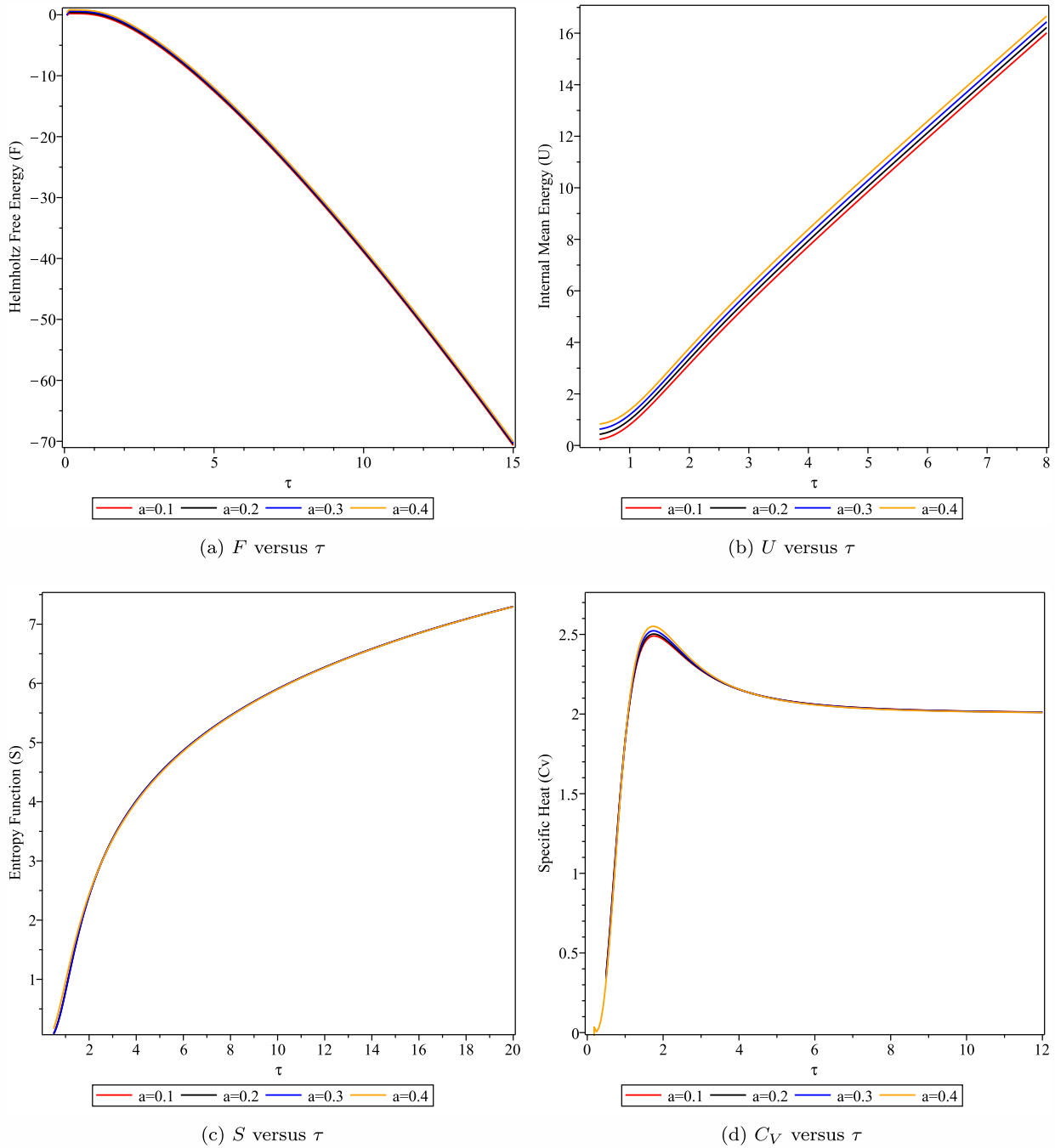


**Fig. 8.** Thermal properties of FVO versus  $\tau$  in rotating cosmic string for  $a = 0.1$  : here  $j = m = \omega = 1$ .

### 5. Conclusion

The aim of the present work is to study the relativistic oscillators of spinless quantum particle via the Feshbach–Villars representation in the gravitational field generated by the background geometry of : (i) static cosmic string, and (ii) rotating cosmic string. Starting from the FV formulation of scalar fields in curved space–time, we derived the corresponding formulations in rotating cosmic strings. We obtained the exact solutions of both systems, and we presented the quantized energy spectra which depend on the parameters that characterize the space–time topology. The wave-function of our quantum system are expressed in terms of the confluent hypergeometric functions for both static and rotating cosmic strings. In our above discussion, we made use of the generalized





**Fig. 9.** Thermal properties of the FVO versus  $\tau$  in rotating cosmic string for  $\alpha = 0.5$  : here  $j = m = \omega = 1$ .

Feshbach–Villars transformations in order to get relevant observable. Such transformations have been shown to be exact and covers any inertial and gravitational fields.

Using the eigenfunctions, the results show, and contrary to the case of the Klein–Gordon oscillator, the probability density of the FVO in both cases is always positively defined. Hence, the Feshbach–Villars formalism, unlike the KG theory, helps us to understand negative energies, and the interpretation of probabilities can naturally be adapted.

In addition, through the form of the energy spectrum, we have computed the thermal properties of FV oscillator. These thermal properties were found by calculating the partition function in relation to the Hurwitz zeta function. We noticed that all these thermal quantities are affected by the geometric and topological parameters of the background geometry in various situations of the

choice of the parameter  $\mathcal{N}$ . In the  $\mathcal{N} = m$  case, corresponding to the FV formalism, all the thermal quantities were determined.

Finally, we observe, at very low temperatures, that the specific heat curves satisfied the third law of thermodynamics. At the higher temperatures, they are saturated to the  $2k_B$  limit. Moreover, the curves show a bump around certain temperatures: As there is no sudden change in the entropy curves, there is no evidence of the existence of the transition phase.

### CRediT authorship contribution statement

**Abdelmalek Bouzenada:** Concentrates on programming the system's thermal properties, Reviewed the manuscript. **Abdelmalek Boumali:** Writing – original draft, Writing – review & editing, Reviewed the manuscript.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Data availability

The datasets used and/or analyzed during the current study available from the corresponding author on reasonable request.

### Acknowledgments

The authors are grateful to the referees for a thorough reading of our manuscript and for their constructive suggestions.

### Funding

- Authors report that no funding is available.

### References

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys.* 49 (1916) 769.
- [2] B.P. Abbott, et al., *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- [3] K. Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019) L1.
- [4] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Courier Corporation, 1965.
- [5] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2013.
- [6] A. Ashtekar, J.J. Stachel, *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, Birkhäuser, 1991.
- [7] L. Smolin, *The Trouble with Physics : The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*, Mariner Books, 2007.
- [8] N.D. Birrell, P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1984.
- [9] L. Parker, D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime : Quantized Fields and Gravity*, Cambridge University Press, 2009.
- [10] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* 43 (1975) 199.
- [11] W.G. Unruh, R.M. Wald, *Phys. Rev. D* 25 (1982) 942.
- [12] G.L. Sewell, *Ann. Physics* 141 (1982) 201.
- [13] T.W.B. Kibble, *J. Phys. A* 9 (1976) 1387.
- [14] Y.B. Zel'dovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 192 (1980) 663.
- [15] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* 121 (1985) 263.
- [16] T.W.B. Kibble, *Phys. Rep.* 67 (1980) 183.
- [17] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* 133 (1983) 177.
- [18] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 1985.
- [19] M. Moshinsky, Y.F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.
- [20] A. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*, Physics Publ Bristol, 1994.
- [21] D. Itô, K. Mori, E.W. Carriere, *Il Nuovo Cimento A* 51 (1967) 1119.
- [22] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A Math. Gen.* 22 (1989) L817.

- [23] S.A. Bruce, P.C. Minning, *Il Nuovo Cimento A* 106 (1993) 711.
- [24] V.V. Dvoeglazov, *Il Nuovo Cimento A* 107 (1994) 1785.
- [25] J. Carvalho, A.M. de M. Carvalho, E. Cavalcante, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) 365.
- [26] L.C. dos Santos, C. de Camargo Barros, *Eur. Phys. J. C* 78 (2017) 560.
- [27] R.L.L. Vitória, K. Bakke, *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 175.
- [28] R.R. Cuzinatto, M. de Montigny, P. Pompeia, *Classical Quantum Gravity* 39 (2022) 075006.
- [29] F. Ahmed, *Europhys. Lett.* 131 (2020) 30002.
- [30] K.M. Case, *Phys. Rev.* 95 (1954) 1323.
- [31] L.L. Foldy, *Phys. Rev.* 102 (1956) 568.
- [32] L.L. Foldy, S.A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* 78 (1950) 29.
- [33] H. Feshbach, F.M.H. Villars, *Rev. Modern Phys.* 30 (1958) 24.
- [34] B.A. Robson, D.S. Staudte, *J. Phys. A Math. Gen.* 29 (1996) 157.
- [35] D.S. Staudte, *J. Phys. A* 29 (1996) 169.
- [36] M. Merad, L. Chetouani, A. Bounames, *Phys. Lett. A* 267 (2000) 225.
- [37] A. Bounames, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* 279 (2001) 139.
- [38] S. Haouat, L. Chetouani, *Eur. Phys. J. C* 41 (2005) 297.
- [39] N. Brown, Z. Papp, R.M. Woodhouse, *Few-Body Syst.* 57 (2015) 103.
- [40] B. Motamedi, T. Shannon, Z. Papp, *Few-Body Syst.* 60 (2019) 1–7.
- [41] O. Klein, *Z. Phys.* 37 (1926) 895.
- [42] W. Gordon, *Z. Phys.* 40 (1926) 117.
- [43] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [44] F.L. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, John Wiley and Sons, 1993.
- [45] A.J. Silenko, *Phys. Rev. A* 77 (2008) 012116.
- [46] B. Mirza, M. Mohadesi, *Commun. Theor. Phys.* 42 (2004) 664.
- [47] A. Boumali, *EJTP* 12 (2015) 121–130.
- [48] J.R. Gott, *Astrophys. J.* 288 (1985) 422.
- [49] W.A. Hiscock, *Phys. Rev. D* 31 (1985) 3288.
- [50] J.R. Gott, M. Alpert, *Gen. Relativity Gravitation* 16 (1984) 243.
- [51] D.V. Gal'tsov, P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* 47 (1993) 4273.
- [52] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys.* 92 (2014) 1460.
- [53] A.J. Silenko, *Theoret. Math. Phys.* 156 (2008) 1308.
- [54] A.J. Silenko, *Phys. Rev. D* 88 (2013) 045004.
- [55] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A* 31 (1998) 7829.
- [56] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1970.
- [57] E. Bragança, H.S. Mota, E.B. de Mello, *Internat. J. Modern Phys. D* 24 (2015) 1550055.
- [58] F. Ahmed, *Sci. Rep.* 12 (2022) 8794.
- [59] G. Arfken, H. Weber, F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists : A Comprehensive Guide*, Elsevier, Science, 2012.
- [60] A. Garcia. Vallejo, *Solution of the Relativistic Feshbach-Villars Equation for Spin-1/2 Particles*, California State University, Long Beach, 2020.
- [61] P.O. Mazur, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 929.
- [62] P.S. Gerbert, R. Jackiw, *Comm. Math. Phys.* 124 (1989) 229.
- [63] G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* 42 (1990) 2927.
- [64] A. Corichi, M. Pierri, *Phys. Rev. D* 51 (1995) 5870.
- [65] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* 45 (1992) 2794.
- [66] J.S. Anandan, *Phys. Lett. A* 195 (1994) 284.
- [67] V. De Lorenci, E. Moreira, *Phys. Rev. D* 63 (2000) 027501.
- [68] V. De Lorenci, E. Moreira, *Nuclear Phys. B* 127 (2004) 150.
- [69] M.S. Cunha, C.R. Muniz, H.R. Christiansen, V.B. Bezerra, *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) 512.
- [70] B.-Q. Wang, Z.W. Long, C.-Y. Long, S. Wu, *Modern Phys. Lett. A* 33 (2018) 1850025.
- [71] Z. Wang, Z.W. Long, C.-Y. Long, B.-Q. Wang, *Can. J. Phys.* 95 (2017) 331.
- [72] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, M. de Montigny, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 15 (2018) 3862854.
- [73] C. Furtado, F. Moraes, V.B. Bezerra, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 107504.
- [74] V. De Lorenci, E. Moreira, *Phys. Rev. D* 70 (2004) 047502.
- [75] V. De Lorenci, E. Moreira, *Phys. Lett. B* 679 (2009) 510.
- [76] C. Muniz, V. Bezerra, M. Cunha, *Ann. Phys.* 350 (2014) 105.
- [77] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* 130 (2015) 236.
- [78] F. Ahmed, *Europhys. Lett.* 130 (2020) 40003.
- [79] F. Ahmed, *Modern Phys. Lett. A* 35 (2020) 2050220.
- [80] K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* 127 (2012) 82.
- [81] K. Bakke, *Gen. Relativity Gravitation* 45 (2013) 1847.
- [82] P. Strange, L.H. Ryder, *Phys. Lett. A* 380 (2016) 3465.
- [83] B.-Q. Wang, Z.-W. Long, C.-Y. Long, S.-R. Wu, *Internat. J. Modern Phys. A* 33 (2018) 1850025.
- [84] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, M. de Montigny, *Eur. Phys. J. C* 79 (2019) 311.
- [85] F. Ahmed, *Europhys. Lett.* 132 (2020) 20009.
- [86] M.M. Cunha, E.O. Silva, *Adv. High Energy Phys.* 451 (2021).

- [87] M.M. Cunha, E.O. Silva, *Universe* 6 (2020) 203.
- [88] S. Deser, R. Jackiw, G. Hooft, *Ann. Physics* 152 (1984) 220.
- [89] C.J.C. Burges, *Phys. Rev. D* 32 (1985) 504.
- [90] A. Accioly, H. Blas, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 067501.
- [91] H.B. Nielsen, M. Ninomiya, *Progr. Theoret. Phys.* 113 (2005) 603.
- [92] H.B. Nielsen, M. Ninomiya, *Progr. Theoret. Phys.* 113 (2005) 625.
- [93] A. Boumali, *Z. Naturf. a* 70 (2015) 867–874.
- [94] N.M. Myers, O. Abah, S. Deffner, *New J. Phys.* 23 (2021) 105001.
- [95] A.M. Frassino, D. Marinelli, O. Panella, P. Roy, *J. Phys. A* 53 (2020) 185204.
- [96] R.B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*, Vol. 85, Cambridge University Press, 2001.
- [97] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [98] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [99] J.A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T.H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 170405.
- [100] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* 76 (2007) 041801.
- [101] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* 77 (2008) 033832.
- [102] L. Lamata, J. Casanova, R. Gerritsma, C.F. Roos, J.J. Garcia-Ripoll, E. Solano, *New J. Phys.* 13 (2011) 095003.
- [103] R. Blatt, C.F. Roos, *Nat. Phys.* 8 (2012) 277.
- [104] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F.Z. Jähringer, E. Solano, R. Blatt, C.F. Roos, *Nature* 463 (2010) 68.
- [105] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* 128 (2013) 124.
- [106] D.L. Miller, K.D. Kubista, G.M. Rutter, M. Ruan, W.A. de Heer, P.N. First, J.A. Stroscio, *Science* 324 (2009) 925–927.
- [107] A. Boumali, *Phys. Scr.* 90 (2015) 109501.
- [108] A. Hashimoto, K. Suenaga, A. Gloter, K. Urita, S. Iijima, *Nature* 430 (2004) 870–876.
- [109] J.C. Meyer, A.K. Geim, M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov, T.J. Booth, S. Roth, *Nature* 446 (2007) 60–63.
- [110] M. Ishigami, J.H. Chen, W.G. Cullen, M.S. Fuhrer, E.D. Williams, *Nano Lett.* 7 (2007) 1643–1648.
- [111] A. Cortijo, M.A.H. Vozmediano, *Nuclear Phys. B* 763 (2007) 293–308.
- [112] C. Bauerle, Yu.M. Bunkov, S.N. Fisher, H. Godfrin, G.R. Pickett, *Nature* 382 (1996) 332–334.
- [113] A. Gallerati, *Eur. Phys. J. Plus* 134 (2019) 202.

## THERMAL PROPERTIES OF THE 2D KLEIN–GORDON OSCILLATOR IN A COSMIC STRING SPACE–TIME

A. Bouzenada,\* A. Boumali,\* and F. Serdouk\*

*This study is devoted to the thermal and magnetic properties of the 2D Klein–Gordon oscillator in a cosmic string space–time. These properties are determined by the partition function based on the Poisson approximation. We provide analytic expressions for the partition function and analyze the entropy, specific heat, magnetization, and magnetic susceptibility of this system numerically. We focus on the effect of a cosmic string, the applied magnetic field, and the temperature on these properties. The results show a totally negative magnetization of our oscillator.*

**Keywords:** Klein–Gordon oscillator, cosmic string, thermal properties, magnetic properties

DOI: 10.1134/S0040577923070115

### 1. Introduction

To construct a theory that combines quantum physics and general relativity, several quantum systems have been investigated in a curved space–time. These studies have recently attracted interest of particle physicists and have been an active area of research. Among them, we can mention the problem of the creation of particles in the expanding universes and problems associated with quantum mechanics in various space–time backgrounds [1], [2]. Furthermore, the influence of the gravitational field on quantum systems attracted attention to particle physics several years ago [3]–[18]. The best method used to understand this influence consists in resolving the relativistic wave equations of these particles in the presence of gravitational fields. These solutions can be used as an invaluable tool in reviewing models for solving these problems.

Topological defects were formed through a vacuum phase transition in the early universe. They appear in gravity as monopoles, strings, and walls. The cosmic strings are one of these topological defects. They have a chance to be the best candidates to observe. The space–time around a cosmic string is locally, but not globally flat. They produce no local gravitational interaction, but they change the geometry of space–time by producing a solid deficit angle [19]–[23].

Topological defects can occur in many physical systems covering subjects like liquid crystals, graphene physics, magnetism, and cosmology (see [24] and the references therein). A single-layer graphene experiment was able to observe the effects of topological defects in laboratory. The energy excitation in the graphene system follows the 2D Dirac equation without mass [25]. Chakraborty et al. [26] explored the possibility to study the quantum dynamics of Dirac fermions in the presence of a cosmic string by introducing a conical topological defect in graphene in the presence of a Coulomb charge. They proposed to modulate the

---

\*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi-Tébessi, Tébessa, Algeria,  
e-mails: abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz (abdelmalekbouzenada@gmail.com),  
abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz (corresponding author, boumali.abdelmalek@gmail.com),  
fadila.serdouk@univ-tebessa.dz (iserdouk@yahoo.fr).

---

Prepared from an English manuscript submitted by the authors; for the Russian version, see *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, Vol. 216, No. 1, pp. 169–183, July, 2023. Received January 8, 2023. Revised January 30, 2023. Accepted February 16, 2023.

cosmic string by the introduction of a suitable flux tube, analogous to a cosmic string, passing through the origin. They suggested using this measurement tube to model the conical topological defect on the 2D graphene sheet. They experimentally observed inequivalent quantizations of Dirac fermions in the presence of a cosmic string defect and numerous other interesting supercritical phenomena.

Also, it is possible to consider the situation with not only a tube of magnetic field lines but also a symmetric and cylindrical external static gravity field whose symmetry axis coincides with the axis of the magnetic tube. From all these studies, topological defects in low-dimensional quantum systems show remarkable properties in various physical systems, especially where the cosmic string is present. This presence forces a particle to exhibit new nonperturbative quantum features such as inequivalent quantizations [27]–[29]. Finally, we observe that although these characteristics are theoretically interesting, it is difficult to conceive an experiment with a cosmic string that would show such a quantum effect.

The relativistic harmonic oscillator is one of the most important quantum systems because it is one of the few to be exactly solvable. The interaction of the Dirac relativistic oscillator has a significant potential for both theory and application. It was for the first time studied in [30]. Moshinsky and Szczepaniak [31], [32] revived interest in this problem. They called it the Dirac oscillator (DO) because, in the nonrelativistic limit, it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin–orbit coupling. Recently, this oscillator has attracted significant interest both because it provides an examples of the exact solvability of the Dirac equation and because of its numerous physical applications [3], [5], [7], [33]–[46]. Furthermore, the first experimental proposal of the unidimensional DO microwave experiment was given in [47], where the physical aspects of the Dirac oscillator were discussed for the first time.

The main purpose of this paper is to study the influence of geometric space–time parameters on low-dimensional quantum mechanics systems, or more precisely, on their thermal and magnetic properties. In this context, we focus on the thermodynamics of the Klein–Gordon oscillator (KGO) in a background produced by topological defects in the presence of the applied magnetic field. These properties are calculated based on the Poisson approximation [48].

Knowledge of these properties of relativistic equations plays is important in the comprehensive understanding of the physical properties of different gravitational fields in relativistic and nonrelativistic regimes [33]–[36], [41]–[43]. From this standpoint, we are also interested in studying the physical system in which thermodynamics and general relativity also contribute to the dynamics of the system. In particular, we want to study how the statistical properties are modified if the particles experience the space–time curvature derived from the principles of general relativity. We note that this usually happens near black holes or stars in the gravitational field of a galaxy [49].

The structure of this paper is as follows. Section 2 is an overview of the solutions of the KGO in the space–time of a cosmic magnetic string [37]. In Sec. 3, we focus on the study of thermal and magnetic properties in magnetic cosmic space using the Poisson approximation. We conclude in Sec. 4.

## 2. 2D KGO in a cosmic string space–time. A review

The KGO in flat space is written as [35], [50]

$$\{(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) + E^2 - m^2\}\psi = 0, \quad (1)$$

where the moment  $\mathbf{p}$  is replaced with  $\mathbf{p} - im\omega\gamma^0\mathbf{r}$ , with  $\mathbf{r}$  being the position vector,  $m$  the particle mass, and  $\omega$  the frequency of the oscillator. In a gravitational field, the equation for a massive scalar becomes [51]–[53]

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2 + \zeta R \right\} \psi = 0, \quad (2)$$

where  $\zeta$  is a real dimensionless coupling constant and  $R$  is the Ricci scalar defined by  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , where  $R_{\mu\nu}$  is the Ricci tensor [54]–[56],  $g^{\mu\nu}$  is the inverse metric tensor, and  $g = \det(g^{\mu\nu})$ .

In cylindrical coordinates  $(t, \rho, \varphi, z)$ , the metric of the cosmic string space–time is given by [3]–[5], [37], [57], [58]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3)$$

where  $0 < \rho < +\infty$ ,  $-\infty < (t, z) < +\infty$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . The parameter  $\alpha = 1 - 4\mu$  is the deficit angle associated with a conical geometry. Here,  $\mu$  is the linear mass density of the string in natural units ( $\hbar = c = 1$ ).

The eigensolutions in the applied uniform magnetic field  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  for this type of space can be summarized as follows [37]:

- The total wave function is

$$\psi(\rho) = e^{-iEt} e^{ij\phi} (m\Omega\rho^2)^{|j|/\alpha} \exp\left(-\frac{m\Omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha}, m\Omega\rho^2\right), \quad (4)$$

where  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  and  ${}_1F_1$  is the confluent hypergeometric function [48].

- The eigenvalues are

$$E_{n,j,\alpha} = \pm m \sqrt{2m\Omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{|j|}{\alpha}\right) + m^2}, \quad (5)$$

where  $\alpha$  is the deficit angle,  $\omega_0 = eB/2m$  is the cyclotron frequency of the particle,  $\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2$ , and  $n = 0, 1, 2, \dots$  is the principal quantum number of the system [37]. The appearance of the parameter  $\alpha$  in the energy spectrum breaks the degeneracy of energy levels.

The form of the energy spectrum enables us to compute the thermal and magnetic properties of our oscillator. For this, we use the partition function, which we derive in the Poisson approximation.

### 3. Thermal and magnetic properties of the 2D KGO in a cosmic string space–time

**3.1. Methods.** The partition function of the system is the starting point for deriving all the thermal properties of the system. It can be calculated by directly summing all available energy levels for the system. Based on the form of the energy eigenvalues, the partition function  $Z$  is written as

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (6)$$

where  $k_B$  is the Boltzmann constant. The thermal quantities such as the free energy, total energy, entropy, and specific heat are given by

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{d \ln Z}{d\beta}, \quad (7)$$

$$S = \ln Z - \beta \frac{d \ln Z}{d\beta}, \quad C = \beta^2 \frac{d^2 \ln Z}{d\beta^2}. \quad (8)$$

To evaluate the partition function, we use the Poisson resummation formula [48]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k), \quad (9)$$

where  $\hat{f}$  is the Fourier transform of  $f$  and

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} f(n) = \frac{1}{2} (f(0) + f(n_{\max} + 1)) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{n_{\max}+1} f(y) e^{-i2\pi\nu y} dy. \quad (10)$$

In [59], [60], a simple analytic formulation for the partition function of Morse oscillators was derived based on the Poisson resummation formula, which allowed calculating thermal properties of some diatomic molecules for different types of potentials. In these studies, the classical approximation was used with  $\nu = 0$ . In this case, Eq. (10) becomes

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} f(n) = \frac{1}{2}(f(0) - f(n_{\max} + 1)) + \int_0^{n_{\max}+1} f(y) dy. \quad (11)$$

Substituting Eq. (4) in (6), we have the partition function

$$Z = \sum_n e^{-\beta m \sqrt{2m\Omega(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1) - 2m(\omega + \omega_0 \frac{|j|}{\alpha}) + m^2}} = \sum_n e^{-\beta m \sqrt{an+b}} \equiv f(n), \quad (12)$$

where

$$a = 4m\Omega, \quad b = 2m\Omega\left(\frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - 2m\left(\omega + \omega_0 \frac{|j|}{\alpha}\right) + m^2, \quad f(n) = e^{-\beta m \sqrt{an+b}}. \quad (13)$$

The function  $f(n)$  satisfies the condition

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f^{(s)}(0) = 0, \quad (14)$$

and therefore  $Z$  is transformed into (see the Appendix for more details)

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \frac{2}{a\beta^2}(\beta\sqrt{b} + 1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -\frac{f^{(1)}(0)}{(2\nu\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2\nu\pi)^4} \right), \quad (15)$$

where

$$\int_0^{+\infty} f(n) dn = \frac{2}{a\beta^2}(\beta\sqrt{b} + 1), \quad (16)$$

$$f^{(1)}(0) = -\frac{a\beta}{2\sqrt{b}} e^{-\beta\sqrt{b}}, \quad f^{(3)}(0) = -\left( \frac{3a^3\beta}{8b^{5/2}} + \frac{3a^3\beta^2}{8b^2} + \frac{a^3\beta^3}{8b^{3/2}} \right) e^{-\beta\sqrt{b}}.$$

We note that our method can be considered a generalization of that used by Strekalov. In contrast to the case  $\nu = 0$  studied in [60], we take the sum over all values of  $\nu$ . In what follows, we set  $m = 1$  for simplicity.

In terms of the new variable  $\tau = 1/\beta$ , Eq. (15) becomes

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \frac{2\tau^2}{a} \left( \frac{\sqrt{b}}{\tau} + 1 \right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -\frac{f^{(1)}(0)}{(\nu\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2\nu\pi)^4} \right). \quad (17)$$

The thermal quantities defined by Eqs. (7) and (8) are transformed into

$$F = -\tau \ln Z, \quad U = \tau^2 \frac{d \ln Z}{d\tau}, \quad (18)$$

$$S = \ln Z + \tau^2 \frac{d \ln Z}{d\tau}, \quad C = 2\tau \frac{d \ln Z}{d\tau} + \tau^2 \frac{d^2 \ln Z}{d\tau^2}.$$

We now present our numerical results for the thermal and magnetic properties of our problem. In particular, we focus on the influence of the different parameters related to the geometry of space-time on the entropy, specific heat, and magnetization.

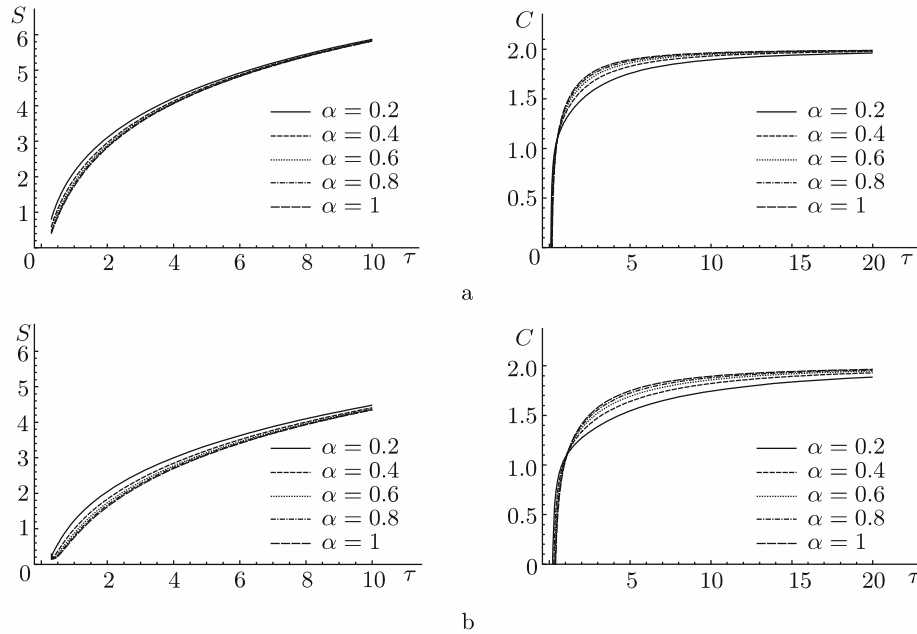


**3.2. Thermal properties.** Using the  $Z$  partition function, we can study the thermal properties of our system. We calculate the entropy and specific heat as functions of the reduced temperature  $\tau$  for different values of the parameters  $\alpha$ ,  $j$ , and  $B$ . The results obtained are shown in Figs. 1, 2, and 3. Our observations are as follows.

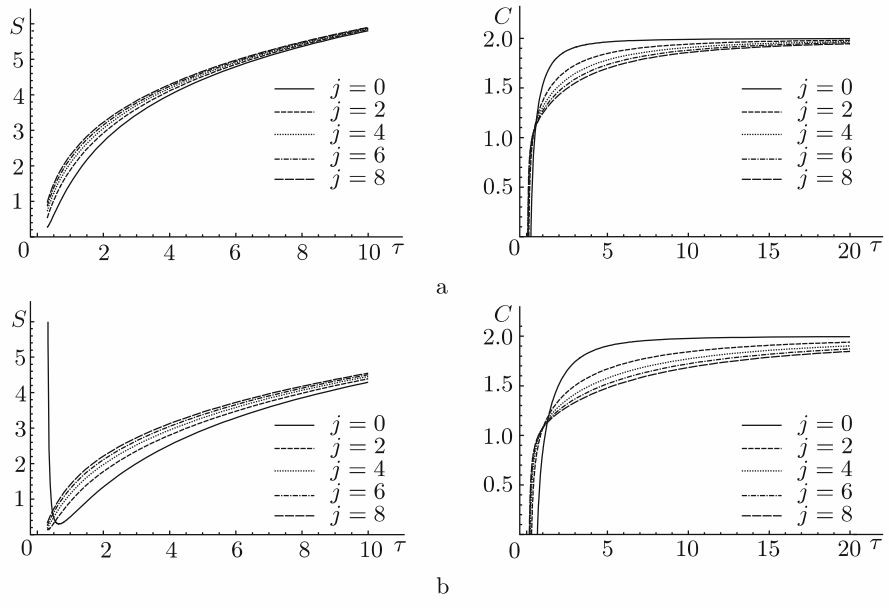
- Figure 1 shows the variation of the entropy and specific heat as functions of the temperature  $\tau$  for different values of  $\alpha$ . We recall that this parameter is the deficit angle associated with a conical geometry obeying  $\alpha = 1 - 4\mu$ . As can be seen, even if the effect of the angle  $\alpha$  is pronounced, the magnetic field has no effect on  $S$  and  $C$ . The case  $j = 0$  is not considered because the spectrum is then independent of  $\alpha$  (see Eq. (5)).
- Figure 2 shows the influence of the parameter  $j$ . We compare the dependence of entropy and specific heat on the temperature  $\tau$  for different choices of  $j$ . Except for the case  $j = 0$ , we observe that for  $B = 1$  and  $B = 10$ , the effect of  $j$  on both functions is insignificant.
- Figure 3 shows the influence of the magnetic field on the  $S$  and  $C$  functions for  $\alpha = 0.5$ . The plots were obtained by setting the parameter  $\alpha$  and choosing  $j = 0$  and  $j = 2$ . For  $j = 0$ , even if the effect of the magnetic field is pronounced, the effect of  $\alpha$  is absent (see first item). For  $j = 2$ , the topological defect via the parameter  $\alpha$  can be seen in the entropy and specific heat curves running closer to one another, in contrast to the case  $j = 0$ , where all curves are well separated. However, the dependence of  $S$  and  $C$  on the magnetic field persists.

Two observations in relation to specific heat curves are in order.

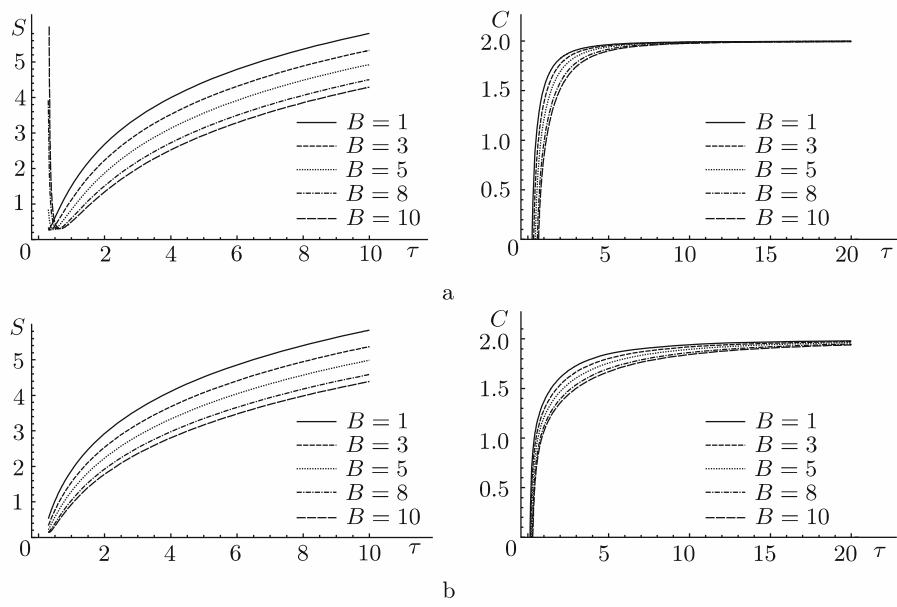
- The specific heat curves converge at point 2 as the reduced temperature increases.
- The initial increase in heat capacity is due to the addition of all possible quantum states. The cause for this is arguably that the quantum system absorbs heat from the environment adjacent to the topological defect and simultaneously releases part of the stored heat.



**Fig. 1.** The entropy  $S$  and specific heat  $C$  versus the reduced temperature  $\tau$  for  $j = 2$  and different values of  $\alpha$ , with the magnetic field (a)  $B = 1$  and (b)  $B = 10$ .



**Fig. 2.** The Entropy  $S$  and specific heat  $C$  versus the reduced temperature  $\tau$  for  $\alpha = 0.5$  and different values of  $j$ , with the magnetic field (a)  $B = 1$  and (b)  $B = 10$ .



**Fig. 3.** The entropy  $S$  and specific heat  $C$  versus the reduced temperature  $\tau$  for  $\alpha = 0.5$  and different values of the magnetic field  $B$ , with the parameter (a)  $j = 0$  and (b)  $j = 2$ .

We next discuss the influence of the parameters on the magnetic properties of our system.

**3.3. Magnetic properties.** The magnetization function can be found from the partition function as

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B} = \tau \frac{\partial \ln Z}{\partial B}. \quad (19)$$

At the absolute zero temperature  $T = 0$ , this equation becomes

$$M = -\frac{\partial E_{n,\alpha}}{\partial B}, \quad (20)$$

with  $E_{n,\alpha}$  is given by (5). Magnetization serves to examine the possibility of phase transitions in the system.

Another interesting quantity, the magnetic susceptibility  $\chi$ , can be introduced in addition to magnetization. This quantity measures how much matter is magnetized in an applied magnetic field. We use this quantity to clarify the nature of the phase transition if it exists. It is defined as

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}. \quad (21)$$

This equation shows that the function  $\chi$  is the ratio of magnetization  $M$  to the applied magnetic field strength  $B$ .

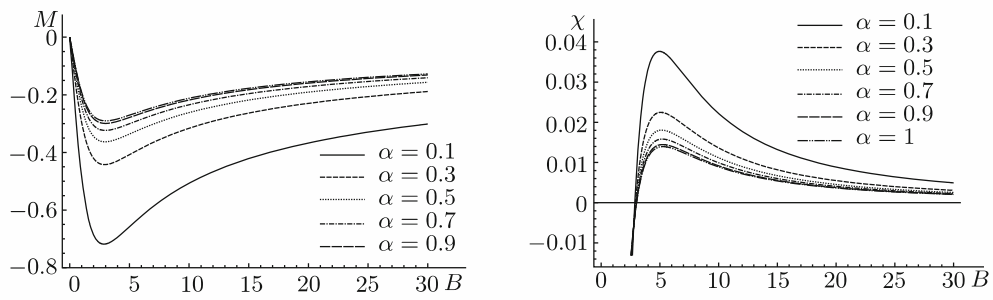
We first examined the behavior of the magnetization and susceptibility as functions of the applied magnetic field at  $\tau = 0$ . They are presented in Fig. 4. From this figure, we can see a pronounced effect of the deficit angle  $\alpha$  on the magnetization and susceptibility functions for the fundamental level  $n = 0$ . As a function of the magnetic field, magnetization rapidly decreases to approximately  $B = 5$  and then increases. This behavior persists as  $\alpha$  increases. Moreover, from the  $\chi$  curves, we see that the  $M$  function can tend to zero, but in a very strong magnetic field.

Figure 5 shows the magnetization and susceptibility as functions of the magnetic field at five temperatures. According to this figure, the behavior of both functions is the same as in the case  $\tau = 0$ , but the magnetization  $M$  slowly tends to zero as  $\tau$  increases. This can be explained in the following way: at zero temperatures (no heat agitation), our oscillator experiences the force caused by the magnetic field. This field does not compensate the magnetization. By considering all the exciting levels as the temperature increases, we have two competitive forces: one from the magnetic field and the other from thermal excitation. In the range  $\tau \leq 10$ , the thermal excitation is greater than the force due to the magnetic field, and therefore the magnetization  $M$  tends to zero. However, the situation is reversed for other temperatures. Magnetization cannot be compensated in very strong fields.

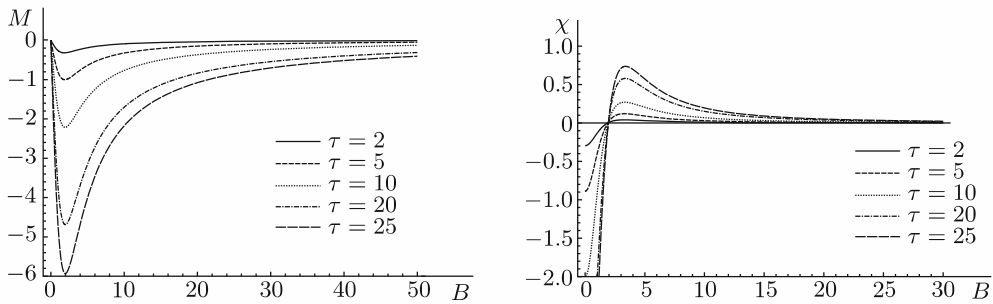
Figure 6 shows the magnetization as a function of temperature for different values of  $\alpha$  and  $B$ . In the left figure,  $B = 5$ . The effect of the parameter  $\alpha$  is unclear. In the right figure,  $\alpha = 0.5$  and the impact of the applied magnetic field is observed.

We are now ready to explain the source of negative magnetization. By negative magnetization, we mean a crossover of the magnetization as a function of temperature from a positive value to a negative value (when a material is cooled in an applied positive magnetic field). The negative magnetization state (with a positive differential susceptibility) is different from the diamagnetic state (with negative differential susceptibility) that occurs for diamagnetic materials. In a temperature-dependent magnetization study, the temperature at which the magnetization becomes zero and changes sign is referred to as the compensation temperature. The first results indicate that this temperature is not present and the  $M$  function is totally negative (see Fig. 7).

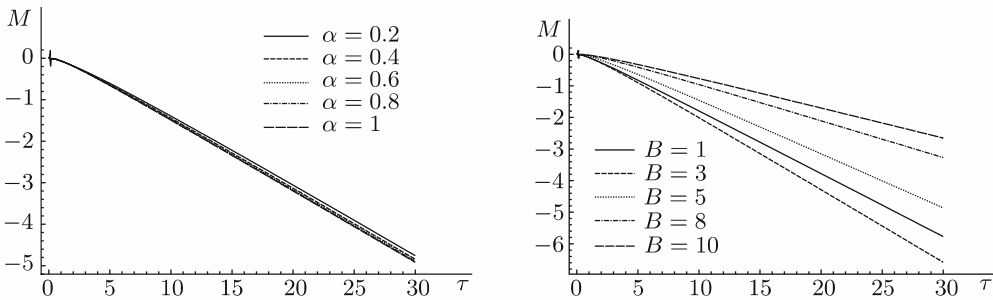
The origin of the negative magnetization can be explained by the effect of the cosmic string via the parameter  $\alpha$ . This parameter is apparently essential because it characterizes the presence of a topological defect. In particular, we have an interaction between our oscillator and the gravitational field produced by the cosmic string. A similar effect has been observed in the case of a negative specific heat (see [61]–[66]), where it was explained by the existence of a gravitational field in space–time.



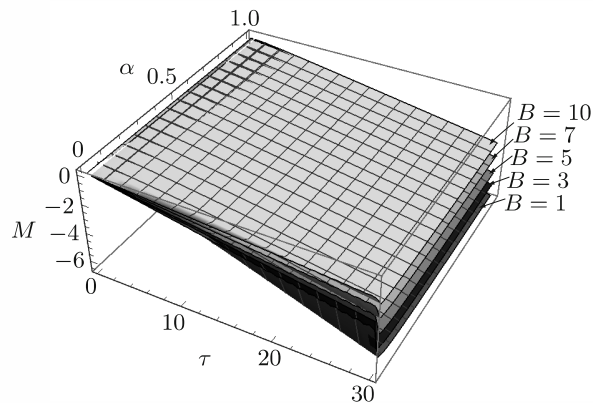
**Fig. 4.** The dependence of  $M$  and  $\chi$  on the magnetic field  $B$  for different values of  $\alpha$ , at  $\tau = 0$ .



**Fig. 5.** The dependence of  $M$  and  $\chi$  on the magnetic field  $B$  for different values of  $\tau$ , at  $\alpha = 0.5$  and  $j = 1$ .



**Fig. 6.** The dependence of  $M$  on the reduced temperature  $\tau$  for different values of  $B$  and  $\alpha$ , at  $j = 1$ .



**Fig. 7.** The dependence of  $M$  on  $\tau$  and  $\alpha$  for different values of  $B$  in three dimensions.

## 4. Conclusions

This paper is devoted to a theoretical study of the thermodynamic properties of a two-dimensional KGO in the presence of a cosmic string in the applied magnetic field. The results are presented as functions of the temperature and applied magnetic field for different parameters of our problem. We have found that the variation of both entropy and specific heat with the temperature  $\tau$  for different values of the parameter  $\alpha$  does not clearly manifest the effect of the magnetic field on these functions. Also, the results obtained from the specific heat curves show that these curves converge to the point at value 2 and the initial increase in the heat capacity is due to the addition of all possible quantum states. The reason for this is that the quantum system absorbs heat from the medium adjacent to the topological defect and simultaneously releases part of the stored heat. At this stage, we can therefore conclude that the influence of the geometric parameters of the cosmic string space-time is quite clear.

Our findings also show that the magnetization is everywhere negative. The origin of negative magnetization is arguably the existence of the space-time gravitational field, as in the case of a negative specific heat. These magnetization curves have a minimum at a certain value of the magnetic field. This minimum increases as  $\alpha$  increases. At the temperature  $\tau = 0$ , the curves do not cross the zero value. However, when we increase the temperature, the curves tend rapidly to this value until a temperature range is reached where these curves do not attend it. This phenomenon can be explained by the existence of mutual competition between thermal excitation and the applied magnetic field.

Magnetic susceptibility curves have a peak at some value of the magnetic field, which depends on the temperature. We conclude that the magnetic susceptibility increases with the external magnetic field at various parameter values within the low-temperature area. In addition, the reported quantities decrease in the high-temperature range as a result of the increased occupancy of levels. These curves do not show any evidence of a phase transition.

Finally, as a further extension, we want to study the case of a rotating cosmic string. The rotating cosmic strings are one-dimensional stable topological defects, probably formed, together with their static counterparts, at the initial stages of the universe. They are characterized by the parameter  $\alpha$  that depends on the linear energy density  $\mu$  and the angular momentum  $J$  [67].

## Appendix: Proof of Eq. (17)

To evaluate the Poisson approximation sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{f(0)}{2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{ax+b}} e^{-2im\pi x} dx \right), \quad (\text{A.1})$$

where  $f(x) = e^{-\beta\sqrt{ax+b}}$ , we first expand the integral part:

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-2im\pi x} dx = \int_0^{\infty} f(x) (\cos(2m\pi x) - i \sin(2m\pi x)) dx. \quad (\text{A.2})$$

We focus on the real part. Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(2m\pi x) f(x) dx &= \underbrace{\frac{1}{2m\pi} f(x) \sin(2m\pi x)}_{=0} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2m\pi} \int_0^{\infty} \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

By the same method, the last integral becomes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(2m\pi x) f^{(1)}(x) dx &= -\frac{f^{(1)}(x)}{2m\pi} \cos(2m\pi x) \Big|_0^\infty + \frac{1}{2m\pi} \int_0^\infty \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx = \\ &= \frac{f^{(1)}(0)}{2m\pi} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^\infty \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Hence,

$$\int_0^\infty \cos(2m\pi x) f(x) dx = -\frac{1}{2m\pi} \left\{ \frac{f^{(1)}(0)}{2m\pi} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^\infty \cos(2m\pi x) f^{(2)}(x) dx \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Integrating by parts many times, we obtain

$$\int_0^\infty \cos(2m\pi x) f(x) dx = -\frac{f^{(1)}(0)}{(2m\pi)^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{(2m\pi)^4} + \frac{1}{(2m\pi)^4} \int_0^\infty \cos(2m\pi x) f^{(4)}(x) dx. \quad (\text{A.6})$$

The last integral can be generalized as follows:

$$\int_0^\infty \cos(2m\pi x) f(x) dx = \sum_{r=1}^{2k-1} \left( (-1)^r \frac{f^{(2r-1)}(0)}{(2\pi m)^{2r}} \right) + R_k, \quad (\text{A.7})$$

where

$$R_k = \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{1}{(2\pi m)^{2k}} \int_0^\infty \cos(2m\pi x) f^{(2k)}(x) dx, \quad (\text{A.8})$$

is the reminder term as in the Euler–Maclaurin formula [48]. Because the sine and cosine are bounded functions, the remainder can be estimated as

$$R_k \leq \sum_{r=2k}^{\infty} \frac{1}{(2\pi m)^{2k}} \int_0^\infty f^{(2k)}(x) dx. \quad (\text{A.9})$$

Finally, The partition function is given by

$$Z = \frac{f(0)}{2} + \int_0^\infty f(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{2k-1} \left( (-1)^r \frac{f^{(2r-1)}(0)}{(2\pi m)^{2r}} \right) + R_k, \quad (\text{A.10})$$

or, more explicitly,

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{2}{a\beta^2} (\beta\sqrt{b} + 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a\beta}{2\sqrt{b}} \right) \frac{1}{(2m\pi)^2} - \left( \frac{3a^3\beta}{8b^{5/2}} + \frac{3a^3\beta^2}{8b^2} + \frac{a^3\beta^3}{8b^{3/2}} \right) \frac{1}{(2m\pi)^4} \right].$$

**Conflicts of interest.** The authors declare no conflicts of interest.

## REFERENCES

1. T. W. B. Kibble, “Topology of cosmic domains and strings,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**, 1387–1398 (1976).
2. R. H. Brandenberger, “Topological defects and structure formation,” *Internat. J. Modern Phys. A*, **09**, 2117–2189 (1994).
3. K. Bakke and C. Furtado, “On the Klein–Gordon oscillator subject to a Coulomb-type potential,” *Ann. Phys.*, **355**, 48–54 (2015).

4. N. Messai and A. Boumali, "Exact solutions of a two-dimensional Kemmer oscillator in the gravitational field of cosmic string," *Eur. Phys. J. Plus*, **130**, 140, 10 pp. (2015).
5. K. Bakke and H. Mota, "Dirac oscillator in the cosmic string spacetime in the context of gravity's rainbow," *Eur. Phys. J. Plus*, **133**, 409 (2018), arXiv:1802.08711.
6. I. C. Fonseca and K. Bakke, "Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring," *Eur. Phys. J. Plus*, **131**, 67 (2016).
7. K. Bakke, "Bound states for a Coulomb-type potential induced by the interaction between a moving electric quadrupole moment and a magnetic field," *Ann. Phys.*, **341**, 86–93 (2014).
8. F. Ahmed, "The generalized Klein–Gordon oscillator in the background of cosmic string space-time with a linear potential in the Kaluza–Klein theory," *Eur. Phys. J. C.*, **80**, 211, 12 pp. (2020).
9. F. Ahmed, "Non-inertial effects on Klein–Gordon oscillator under a scalar potential using the Kaluza–Klein theory," *Pramana J. Phys.*, **95**, 159, 7 pp. (2021).
10. F. Ahmed, "Aharonov–Bohm effect on a generalized Klein–Gordon oscillator with uniform magnetic field in a spinning cosmic string space-time," *Europhys. Lett.*, **130**, 40003, 6 pp. (2020).
11. G. de A. Marques, V. B. Bezerra, and S. G. Fernandes, "Exact solution of the Dirac equation for a Coulomb and scalar potentials in the gravitational field of a cosmic string," *Phys. Lett. A.*, **341**, 39–47 (2005).
12. S. Zare, H. Hassanabadi, and M. de Montigny, "Non-inertial effects on a generalized DKP oscillator in a cosmic string space-time," *Gen. Rel. Grav.*, **52**, 25, 20 pp. (2020).
13. M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, and M. de Montigny, "The Dirac oscillator in a spinning cosmic string space-time," *Eur. Phys. J. C*, **79**, 311, 7 pp. (2019).
14. M. Hosseinpour, F. M. Andrade, E. O. Silva, and H. Hassanabadi, "Scattering and bound states for the Hulthén potential in a cosmic string background," *Eur. Phys. J. C*, **77**, 270, 6 pp. (2017).
15. M. M. Cunha and E. O. Silva, "Self-adjoint extension approach to motion of spin-1/2 particle in the presence of external magnetic fields in the spinning cosmic string spacetime," *Universe*, **6**, 203, 18 pp. (2020).
16. M. M. Cunha, H. S. Dias, and E. O. Silva, "Dirac oscillator in a spinning cosmic string spacetime in external magnetic fields: Investigation of the energy spectrum and the connection with condensed matter physics," *Phys. Rev. D*, **102**, 105020, 13 pp. (2020).
17. H. Aounallah and A. Boumali, "Solutions of the Duffin–Kemmer equation in non-commutative space of cosmic string and magnetic monopole with allowance for the Aharonov–Bohm and Coulomb potentials," *Phys. Part. Nucl. Lett.*, **16**, 195–205 (2019).
18. H. Aounallah, A. R. Soares, and R. L.L. Vitoria, "Scalar field and deflection of light under the effects of topologically charged Ellis–Bronnikov-type wormhole spacetime," *Eur. Phys. J. C*, **80**, 447, 6 pp. (2020).
19. A. Vilenkin, "Gravitational field of vacuum domain walls and strings," *Phys. Rev. D*, **23**, 852–857 (1981).
20. A. Vilenkin, "Cosmic strings and domain walls," *Phys. Rep.*, **121**, 263–315 (1985).
21. A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
22. R. Durrer, M. Kunz, and A. Melchiorri, "Cosmic structure formation with topological defects," *Phys. Rep.*, **364**, 1–81 (2002).
23. M. Sazhin, G. Longo, M. Capaccioli et al., "CSL-1: chance projection effect or serendipitous discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string?," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **334**, 353–359 (2003).
24. M. M. Cunha and E. O. Silva, "Relativistic quantum motion of an electron in spinning cosmic string spacetime in the presence of uniform magnetic field and Aharonov–Bohm potential," *Adv. High Energy Phys.*, **2021**, 6709140, 15 pp. (2021).
25. A. Cortijo and M. A. H. Vozmediano, "A cosmological model for corrugated graphene sheets," *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **148**, 83–89 (2007).
26. B. Chakraborty, K. S. Gupta and S. Sen, "Topology, cosmic strings and quantum dynamics – a case study with graphene," *J. Phys.: Conf. Ser.*, **442**, 012017, 14 pp. (2013).
27. O. P. Pandey, *A study of some relativistic fields of gravitation and topological defects in general relativity* (PhD thesis), Hindu Post Graduate College, Ghazipur (2005).

28. Y. Zhu, *Topological defects and structures in the early universe* (PhD thesis), Princeton Univ., Princeton, NJ (1997).
29. L. E. Pogosian, *Formation and interactions of topological defects and their role in cosmology* (PHD thesis), Case Western Reserve Univ., Cleveland, OH (2001).
30. D. Itô, K. Mori, and E. Carriere, “An example of dynamical systems with linear trajectory,” *Nuovo. Cimento A*, **51**, 1119–1121 (1967).
31. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, “The Dirac oscillator,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, L817–L819 (1989).
32. M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Contemporary Concepts in Physics, Vol. 9, Harwood Academic Publ., Amsterdam (1996).
33. A. Boumali, F. Serdouk, and S. Dilmi, “Superstatistical properties of the one-dimensional Dirac oscillator,” *Phys. A*, **533**, 124207, 13 pp. (2020).
34. H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. Boumali, and S. Zarrinkamar, “The statistical properties of Klein–Gordon oscillator in noncommutative space,” *J. Math. Phys.*, **55**, 033502, 11 pp. (2014).
35. A. Boumali, “The one-dimensional thermal properties for the relativistic harmonic oscillators,” *Electronic J. Theor. Phys.*, **12**, 121–130 (2015), arXiv:1409.6205.
36. A. Boumali, “Thermodynamic properties of the graphene in a magnetic field via the two-dimensional Dirac oscillator,” *Phys. Scr.*, **90**, 045702 (2015).
37. A. Boumali and N. Messai, “Klein–Gordon oscillator under a uniform magnetic field in cosmic string space-time,” *Can. J. Phys.*, **92**, 1460–1463 (2014).
38. C. Quesne and V. M. Tkachuk, “Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**, 1747–1765 (2005).
39. N. Korichi, A. Boumali, and H. Hassanabadi, “Thermal properties of the one-dimensional space quantum fractional Dirac oscillator,” *Phys. A*, **587**, 126508, 18 pp. (2022).
40. N. Korichi, A. Boumali, and Y. Chargui, “Statistical properties of the 1D space fractional Klein–Gordon oscillator,” *J. Low. Temp. Phys.*, **206**, 32–50 (2021).
41. M. H. Pacheco, R. R. Landim, and C. A. S. Almeida, “One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath,” *Phys. Lett. A*, **311**, 93–96 (2003).
42. M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, and R. R. Landim, “Three-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath,” *Europhys. Lett.*, **108**, 10005 (2014), arXiv:1406.5114.
43. A. Boumali and H. Hassanabadi, “The thermal properties of a two-dimensional Dirac oscillator under an external magnetic field,” *Eur. Phys. J. Plus*, **128**, 124, 18 pp. (2013).
44. J. Bentez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator,” *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1643–1645 (1990).
45. M. Moreno and A. Zentella, “Covariance, CPT and the Foldy–Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, L821–L825 (1989).
46. R. P. Martínez y Romero, and A. L. Salas-Brito, “Conformal invariance in a Dirac oscillator,” *J. Math. Phys.*, **33**, 1831–1836 (1992).
47. J. A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, and T. H. Seligman, “First experimental realization of the Dirac oscillator,” *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 170405, 5 pp. (2013).
48. G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
49. T. J. Stait-Gardner, *Thermodynamics in curved space* (PhD thesis), Western Sydney Univ., Sydney, Australia (2005).
50. A. Boumali, A. Hafdallah, and A. Toumi, “Comment on ‘Energy profile of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator’,” *Phys. Scr.*, **84**, 037001, 3 pp. (2011).
51. S. A. Werner and H. Kaiser, *Quantum Mechanics in Curved Space-Time*, NATO Science Series B, Vol. 230, Springer, New York (1990).
52. S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 17, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).



53. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Vol. 7, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984).
54. B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009).
55. K. D. Krori, P. Borgohain, P. K. Kar, and Dipali Das (Kar), “Exact scalar and spinor solutions in some rotating universes,” *J. Math. Phys.*, **29**, 1645–1649 (1988).
56. K. D. Krori, P. Borgohain, and Dipali Das (Kar), “Exact scalar and spinor solutions in the field of a stationary cosmic string,” *J. Math. Phys.*, **35**, 1032–1036 (1994).
57. M. M. Cunha, H. S. Dias, and E. O. Silva, “Dirac oscillator in a spinning cosmic string spacetime in external magnetic fields: Investigation of the energy spectrum and the connection with condensed matter physics,” *Phys. Rev. D.*, **102**, 105020, 13 pp. (2020).
58. A. Boumali and N. Messai, “Exact solutions of a two-dimensional Duffin–Kemmer–Petiau oscillator subject to a Coulomb potential in the gravitational field of cosmic string,” *Can. J. Phys.*, **95**, 999–1004 (2017).
59. M. L. Strelakov, “On the partition function of Morse oscillators,” *Chem. Phys. Lett.*, **393**, 192–196 (2004); “Energy levels and partition functions of internal rotation: Analytical approximations,” *Chem. Phys.*, **362**, 75–81 (2009).
60. M. L. Strelakov, “An accurate closed-form expression for the partition function of Morse oscillators,” *Chem. Phys. Lett.*, **439**, 209–212 (2007); “An accurate closed-form expression for the rovibrational partition function of diatomic molecules,” **764**, 138262 (2021); “Partition function of the hindered rotor: Analytical solutions,” *Chem. Phys.*, **355**, 62–66 (2009).
61. S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature*, **248**, 30–31 (1974).
62. S. W. Hawking, “Black holes and thermodynamics,” *Phys. Rev. D.*, **13**, 191–197 (1976).
63. A. Boumali and T. I. Rouabhia, “The thermal properties of the one-dimensional boson particles in Rindler spacetime,” *Phys. Lett. A*, **385**, 126985, 8 pp. (2021).
64. J. D. Beckenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics,” *Phys. Rev. D*, **9**, 3292–3300 (1972).
65. D. Lynden-Bell and R. M. Lynden-Bell, “On the negative specific heat paradox,” *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **181**, 405–419 (1977).
66. S. Zaim, H. Guelmamene, and Y. Delenda, “Negative heat capacity for a Klein–Gordon oscillator in non-commutative complex phase space,” *Int. J. Geom. Methods Math. Phys.*, **14**, 1750141, 9 pp. (2017).
67. M. S. Cunha, C. R. Muniz, H. R. Christiansen, and V. B. Bezerra, “Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime,” *Eur. Phys. J. C*, **76**, 512, 7 pp. (2016).



## High Energy Physics – Theory

## Feshbach–Villars oscillator in Kaluza-Klein theory

Abdelmalek Bouzenada <sup>a</sup>, Abdelmalek Boumali <sup>a,\*</sup>, R.L.L. Vitória <sup>b</sup>,  
Faizuddin Ahmed <sup>c</sup>, Marwan Al-Raei <sup>d</sup><sup>a</sup> *Laboratory of theoretical and applied Physics, Echahid Cheikh Larbi Tebessi University, Algeria*<sup>b</sup> *Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, Av. Augusto Corrêa, Guamá, Belém, PA 66075-110, Brazil*<sup>c</sup> *Department of Physics, University of Science & Technology Meghalaya, Ri-Bhoi, Meghalaya 793101, India*<sup>d</sup> *Faculty of Science, Damascus University, Damascus, Syria*

Received 8 May 2023; received in revised form 26 June 2023; accepted 5 July 2023

Available online 13 July 2023

Editor: Stephan Stieberger

**Abstract**

This research focuses on exploring the relativistic quantum dynamics of spin-0 scalar massive charged particles within the framework of the relativistic Feshbach-Villars oscillator (FVO) in the context of the Kaluza-Klein Theory (KKT). Specifically, we investigate the behavior of these particles in the presence of a cosmic string space-time within the framework of the Kaluza-Klein theory. To begin, we solve the Feshbach-Villars equation in the background of a cosmic string space-time by considering the principles of the Kaluza-Klein theory. We obtain the eigenvalue solution, which provides valuable insights into the behavior of the system. Next, we re-examine this system by considering the Feshbach-Villars quantum oscillator, a specific mathematical representation of the Feshbach-Villars equation. By employing this oscillator, we are able to analytically determine the eigenvalues of the system. This analytical solution allows for a deeper understanding of the system's characteristics. In the subsequent stage, we investigate the interaction between the Feshbach-Villars equation and oscillator in the presence of a cosmic dislocation within the framework of the Kaluza-Klein Theory. We analytically solve the wave equation associated with this system, shedding light on the behavior of the wave function. Furthermore, we analyze the influence of the topological defect (cosmic dislocation) on the quantification of energy and the wave function of the Feshbach-Villars oscillator. We also explore the impact of external fields on the system. These analyses

---

\* Corresponding author.

*E-mail addresses:* [abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz](mailto:abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz), [abdelmalekbouzenada@gmail.com](mailto:abdelmalekbouzenada@gmail.com) (A. Bouzenada), [boumali.abdelmalek@gmail.com](mailto:boumali.abdelmalek@gmail.com) (A. Boumali), [ricardo.vitoria@pq.cnpq.br](mailto:ricardo.vitoria@pq.cnpq.br), [ricardo-luis91@hotmail.com](mailto:ricardo-luis91@hotmail.com) (R.L.L. Vitória), [faizuddinahmed15@gmail.com](mailto:faizuddinahmed15@gmail.com), [faizuddin@ustm.ac.in](mailto:faizuddin@ustm.ac.in) (F. Ahmed), [mhdm-ra@scs-net.org](mailto:mhdm-ra@scs-net.org), [mn41@liv.com](mailto:mn41@liv.com) (M. Al-Raei).

<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116288>

0550-3213/© 2023 The Author(s). Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

provide valuable insights into how these factors affect the behavior and properties of the Feshbach-Villars oscillator.

© 2023 The Author(s). Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

---

## 1. Introduction

Gaining insight into how the gravitational field impacts the behavior of quantum mechanical systems is a subject that is of interest to many. One perspective on gravity, as described by Einstein's theory of general relativity (GR) [1], views it as a geometric feature of space-time. This theory explains that the classical gravitational field [2] arises from the curvature of space-time. Einstein's theory of general relativity has been able to accurately predict the existence of phenomena such as gravitational waves and black holes [3]. In contrast, Quantum Mechanics (QM) is a widely-accepted framework for understanding the behavior of particles at the microscopic level [4], explaining the interactions between tiny particles and the emergence [5] of three fundamental forces: the weak, strong, and electromagnetic interactions. However, the development of a unified theory of quantum gravity, that reconciles general relativity and quantum mechanics, has been faced with significant obstacles and technical challenges that have yet to be overcome, at least until recently [6,7].

One approach to developing a theory that explores the relationship between gravity and relativistic quantum mechanics is to extend the concepts of relativistic particle dynamics in flat Minkowski space to a curved background geometry [8,9]. This generalization can be used to create a comprehensive understanding of how the gravitational field impacts the behavior of quantum particles [10–12], applicable to a range of models where the notion of curvature appears. Such an approach can provide predictions for macroscopic observables, enabling experimental verification of certain phenomenological consequences, particularly in astrophysics and cosmology. Furthermore, studying the thermodynamic properties of relativistic particles while accounting for gravitational effects can yield valuable insights into the fundamental statistical quantities that underlie the quantum behavior of gravity.

In recent decades, there has been extensive research on topological defects such as domain walls, cosmic strings, global monopoles, and textures. These defects are still a highly active field of research study in condensed matter physics, Cosmology, astrophysics, and elementary particle physics models. It is believed that these structures arise due to the Kibble mechanism [13–15] during symmetry-breaking phase transitions in the early universe's cooling process [16,17]. Among these topological defects, cosmic strings have garnered significant interest (for more information, see [18]) due to their ability to produce observable effects such as galaxy seeding and gravitational lensing. Additionally, studying cosmic strings can provide valuable insights into the particle physics at very high energies in various scenarios. Static or rotating cosmic strings can offer unique opportunities to investigate the properties of these structures and their implications. Moreover, recent research has suggested that cosmic strings may exhibit properties similar to superconducting wires, leading to intriguing consequences in modern physics. In the context of quantum systems, cosmic strings have widely been investigated including external scalar and vector potential in the presence or absence of magnetic and quantum flux fields. These investigations include Landau levels in the presence of disclinations [19], dynamics of a charged particle in the presence of magnetic field and scalar potential [20], spin-0 massive charged particles in four-dimensional curved space-time with cosmic string [21], bosonic oscillator field with

Cornell potential in cosmic string space-time [22], motion of a quantum particle in the spinning cosmic string space-time [23], non-central potentials in cosmic string space-time [24], Klein-Gordon field in spinning cosmic-string space-time with the Cornell potential [26], relativistic Landau levels in rotating cosmic string space-time [27], exact solutions of the Klein–Gordon equation in the presence of a dyon, magnetic flux and scalar potential in the spacetime of gravitational defects [28], Landau levels in the presence of topological defects [29], relativistic scalar particle with Cornell-type potential in cosmic string space-time with a spacelike dislocation [30], harmonic oscillator in conical singularities [31], bosonic oscillator under external fields in cosmic string space-time with a spacelike dislocation [32], Weyl-fermions in Gödel-type space-time with a topological defect [33], quantum influence of topological defect in Gödel-type space-time [34], Dirac oscillator interacting with a topological defect [35], geometric phase for a neutral particle in rotating frames of cosmic string space-time [36], integer quantum Hall effect on an interface with disclinations [37], rotating effects on the Dirac oscillator in cosmic string space-time [38], the Dirac oscillator in a spinning cosmic string spacetime [39], Landau quantization in the spinning cosmic string spacetime [40], PDM Klein-Gordon oscillators in cosmic string spacetime in magnetic and Aharonov–Bohm flux fields [41], interaction of the Dirac oscillator with the Aharonov–Casher system in topological defect space-time [42] and many more.

The harmonic oscillator (HO) has been recognized as an essential tool in theoretical physics for several years [46]. As a well-studied, exactly solvable model, it has proven useful for analyzing complex problems within the framework of quantum mechanics [47]. The relativistic generalization of the quantum harmonic oscillator has been effective in explaining diverse aspects of molecular, atomic, and nuclear interactions. The complete set of exact analytical solutions available when dealing with such models has led to significantly different explanations of mathematical and physical phenomena. As a result, a wide range of applications can be achieved through the underlying formulation. In quantum mechanical context, the harmonic oscillator problem has been investigated, such as in conical singularities background [31], in an environment with a point-like defect [48] with Mie-type potential in point-like global monopole [49], and in the background of a topologically charged Ellis-Bronnikov-type wormhole [50].

The Dirac oscillator (DO) is now recognized as playing a crucial role in the behavior of several relativistic quantum systems. Itô et al. [51] have pointed out that earlier developments of spin-1/2 particle dynamics with a linear trajectory showed that the non-relativistic limit of this system leads to the ordinary harmonic oscillator with a strong spin-orbit coupling term. The DO itself can be obtained from the free Dirac equation by introducing an external linear potential through a minimal substitution of the momentum operator  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - im\omega\beta\hat{r}$ , as described by Moshinsky and Szczepaniak [52]. In addition to the theoretical focus on studying the DO, valuable insights can be gained by considering the physical interpretation, which is essential for understanding many relevant applications. This DO has been investigated by many researchers in flat space background with external field, in curved space-time with external fields as well as topological defects background produced by cosmic string (see, Refs. [25,35–39,42–45] and related references there in).

The Klein-Gordon oscillator [53,54] is a quantum mechanical model that describes a particle that oscillates in a potential well [55] while obeying the relativistic Klein-Gordon equation. The model has been studied in various contexts [56], including in the presence of topological defects such as cosmic strings [57,58] and domain walls, as well as in the presence of uniform magnetic fields. One approach to studying the Klein-Gordon oscillator in general background spacetimes produced by topological defects is through Kaluza-Klein theory [59–64]. This theory involves the idea of compactifying extra dimensions of spacetime and has been applied to study the behav-

ior of particles in the presence of topological defects in condensed matter physics systems. The effects of topological defects such as cosmic strings, domain walls, and global monopoles have been shown to play an important role in condensed matter physics systems [65–68] due to their ability to compensate for the elastic contribution introduced by the defect through fine-tuning of the external magnetic field. Recent studies have investigated the Klein-Gordon oscillator in various spacetimes, including the Som-Raychaudhuri spacetime in the presence of uniform magnetic fields. These studies aim to provide a deeper understanding of the behavior of particles in the presence of topological defects and other gravitational sources [69–74]. Bouzenada et al. [75] investigate the Feshbach-Villars oscillator (FVO) case in spinning cosmic string space-time and discuss some findings (thermal properties and density of this system). Bouzenada et al. [76] investigate the Feshbach-Villars oscillator (FVO) case in cosmic dislocation space-time under coulomb-potential type.

The structure of this paper is as follows. In the next section, we derive the FV equations for scalar bosons in Minkowski and static Cosmic string space-time considering both the free and the interaction case. We introduce the KG oscillator in a Hamiltonian form, then we solve the obtained Free equations and FVO in cosmic dispiration background in a Kaluza–Klein theory. In the next section we solve the obtained Free equations and FVO in cosmic dislocation in Som–Raychaudhuri spacetime in Kaluza–Klein theory, and finally a conclusion. We shall always use natural units  $\hbar = c = 1$  throughout the article, and our metric convention is  $(+, -, -, -, -)$ .

## 2. An overview of the Feshbach-Villars formalism in flat and curved spacetime

### 2.1. In flat space-time

This section discusses the relativistic quantum description of a spin-0 particle propagating in Minkowski space-time using the metric tensor  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . The usual covariant KG equation for a scalar massive particle  $\Phi$  with mass  $m > 0$  is

$$\left(\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2\right) \Psi(x, t) = 0. \quad (1)$$

The minimally-coupled covariant derivative is denoted by  $D_\mu = (p_\mu - i e A_\mu)$ . The classical four momentum is  $p_\mu = (E, -p_i)$ , while the electromagnetic four potential is  $A_\mu = (A_0, -A_i)$ . The magnitude of the particle charge is given by  $e$ .

It is worth noting at this point that (1) may be expressed in Hamiltonian form with the time first derivative, i.e. as a Schrödinger-type equation [77]

$$\mathcal{H} \Phi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t). \quad (2)$$

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  may be defined using the FV linearization process, which involves converting (1) to a first order in time differential equation.

The two-component wave function is introduced,

$$\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{m} \mathcal{D} \\ 1 - \frac{i}{m} \mathcal{D} \end{pmatrix} \psi(x, t) \quad (3)$$

Here,  $\psi(x, t)$  obeys the KG wave equation, and  $\mathcal{D}$  is defined in such a way that

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i e A_0(x) \quad (4)$$

The aforementioned transformation (3) involves inserting wave functions that meet the requirements.

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\mathcal{D}\psi = m(\phi_1 - \phi_2). \quad (5)$$

It is more convenient to write for our subsequent review,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2m} \left[ m + i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] \psi \\ \phi_2 &= \frac{1}{2m} \left[ m - i \frac{\partial}{\partial t} + e A_0 \right] \psi, \end{aligned} \quad (6)$$

Eq. (1) becomes equivalent

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] (\phi_1 + \phi_2) &= m(\phi_1 - \phi_2) \\ \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - e A_0 \right] (\phi_1 - \phi_2) &= \left[ \frac{(p_i - e A_i)^2}{m} + m \right] (\phi_1 + \phi_2). \end{aligned} \quad (7)$$

The addition and subtraction of these two equations yield a system of first-order coupled differential equations

$$\begin{aligned} \frac{(p_i - A_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) + (m + e A_0) \phi_1 &= i \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ -\frac{(p_i - e A_i)^2}{2m} (\phi_1 + \phi_2) - (m - e A_0) \phi_2 &= i \frac{\partial \phi_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

The FV Hamiltonian of a scalar particle in the presence of electromagnetic the interaction may be expressed using Eqs. (8) as

$$\mathcal{H}_{\text{FV}} = (\tau_3 + i \tau_2) \frac{(p_i - e A_i)^2}{2m} + m \tau_3 + e A_0(x), \quad (9)$$

where  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are the conventional  $2 \times 2$  Pauli matrices are given by

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

It's worth noting that the Hamiltonian (9) meets the generalized hermicity requirement<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{\text{FV}} = \tau_3 \mathcal{H}_{\text{FV}}^\dagger \tau_3, \quad \mathcal{H}_{\text{FV}}^\dagger = \tau_3 \mathcal{H}_{\text{FV}} \tau_3. \quad (11)$$

The one-dimensional FV Hamiltonian reduces to for free particle propagation, i.e., no interaction is assumed left ( $A_\mu = 0$ ).

$$\mathcal{H}_0 = (\tau_3 + i \tau_2) \frac{p_x^2}{2m} + m \tau_3. \quad (12)$$

The solutions to the time-independent free Hamiltonian are simply stationary states. Assuming the solution,

<sup>1</sup> The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is said to be pseudo-Hermitian If there is an invertible, Hermitian, linear operator  $\beta$  such that  $\mathcal{H}^\dagger = \beta \mathcal{H} \beta^{-1}$  [78,79].

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad (13)$$

with  $E$  denoting the system's energy. As a result, Eq. (2) may be represented as

$$\mathcal{H}_0 \Phi(x) = E \Phi(x). \quad (14)$$

This is the one-dimensional FV equation of the free relativistic spin-0 particle, and it is performed in order to have an alternate Schrödinger-type to KG equation. Recently, this formalism has been used in the case of the one-dimensional Dirac oscillator, and the results were in good agreement with those obtained in the literature.

In what follows, we review the FV formalism in the curved spacetime.

## 2.2. In curved space-time

It is widely known that the generally covariant relativistic wave equations of a scalar particle in a Riemannian space-time characterized by the metric tensor  $g_{\mu\nu}$  may be found by reformulating the KG equation so that [57]

$$\left( \square + m^2 - \xi R \right) \Phi(x, t) = 0, \quad (15)$$

where  $\square$  is the Laplace-Beltrami operator denoted by

$$\square = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (16)$$

$\xi$  denotes a real dimensionless coupling constant, and  $R$  is the Ricci scalar curvature given by  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , where  $R_{\mu\nu}$  is the Ricci curvature tensor. The inverse metric tensor is  $g^{\mu\nu}$ , and  $g = \det(g_{\mu\nu})$  [75–77,80–82].

Now, according the works of Silenko [83,84], the case of flat spacetime can be extended to the case of cured space time as follows: The detail form of (15) is

$$\left( \partial_0^2 + \frac{1}{g_{00}\sqrt{-g}} \left\{ \partial_i \sqrt{-g} g^{0i} \right\} \partial_0 + \frac{1}{g_{00}\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j) + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} \right) \Phi(x, t) = 0 \quad (17)$$

The anti-commutator is denoted by the curly bracket in Eq. (17). Using the following transformation in the components of the wave function [83]

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y} \right) \psi = \mathcal{N} (\phi_1 - \phi_2), \quad (18)$$

where  $\mathcal{N}$  is an arbitrary nonzero real parameter and

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \sqrt{-g} \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}, \quad (19)$$

we obtain the Hamiltonian form of the KG equation as follows [83,84]

$$\mathcal{H}_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \quad (20)$$

with [83,84]

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \partial_i \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j + \frac{m^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i \left( \sqrt{-g} G^{ij} \right) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) \\ & + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} \left[ \nabla_i \left( \mathcal{U}^i \right) \right]^2 - \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j \left( \mathcal{U}^i \right) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j \left( \mathcal{U}^i \right), \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \quad (22)$$

We notice that the initial FV transformations are fulfilled for  $\mathcal{N} = m$ .

### 3. The FV oscillator of spin-0 particle in cosmic Kaluza-Klein theory

#### 3.1. Free Feshbach-Villars equation in the background of a cosmic string space-time in Kaluza-Klein theory

In this part, we will discuss the topological defect that serves as the foundation for our study. Inspired by the description of an edge dislocation in crystalline solids, we build a generalization of this topological defect in gravity. We can observe that an edge dislocation is a spiral dislocation, which is a deformation of a circle into a spiral. The line element describing the space-time backdrop with this the topological defect is (using the units  $\hbar = c = 1$ ) [85–91]

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ = & dt^2 - d\rho^2 - (\alpha\rho)^2 d\varphi^2 - (dz + Jd\varphi)^2 - \left( dx + \frac{\Phi}{2\pi} d\varphi \right)^2, \end{aligned} \quad (23)$$

where  $\chi$  is a constant value relating to the defect’s distortion. By  $J = \frac{|\vec{b}|}{2\pi}$ , the parameter is also connected to the Burgers vector  $\vec{b}$ . Here  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , and  $\alpha \in [0, 1[$ : is the angular parameter that defines the angular deficit  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ , which is connected to the string’s linear mass density  $\mu$  by  $\alpha = 1 - 4\mu$  (It should be noted that this metric provides an accurate solution to Einstein’s field equations for  $0 \leq \mu < 1/4$ , and that by setting  $\varphi' = \alpha\varphi$ , it represents a flat conical outer space with angle deficit  $\delta\phi = 8\pi\mu$ ).

When the metric and inverse metric tensor components are, respectively,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left\{ (\alpha\rho)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2 + J^2 \right\} & -J & -\frac{\Phi}{2\pi} \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Phi}{2\pi} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

and

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} \\ 0 & 0 & \frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} & -\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2}\right) \end{pmatrix} \quad (25)$$



In our case, it is simple to see that  $R = 0$ , implying that space-time is locally flat (no local gravity), and so the coupling component is vanishing. The condition  $\xi = 0$  is known as minimum coupling. However, in massless theory,  $\xi$  equals  $1/6$ . (in 4 dimensions). The equations of motion are then conformally invariant in this later instance.

A simple computation yields  $\mathcal{Y} = 0$ , and we then obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{\mathcal{F}} \left( -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} - \left( 1 + \frac{J^2}{\alpha^2 \rho^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} - \left( 1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{1}{\mathcal{F}} \\ & + \frac{1}{\mathcal{F}} \left( \frac{2J}{\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dz} \right) + \frac{\Phi}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dx} \right) - \frac{\Phi J}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \right) \right) \frac{1}{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

where

$$\Phi(t, \rho, \varphi, z, x) = \Phi(\rho) e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)}, \quad (26)$$

where  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  are the eigenvalues of the  $z$ -component of the angular momentum operator. The KG equation (15) may be written equivalently to the following two coupled equations

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 + (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 &= 2\mathcal{N}E\phi_1 \\ -(\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_2 - (-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}) \phi_1 &= 2\mathcal{N}E\phi_2. \end{aligned} \quad (27)$$

The sum and difference of the two previous equations yield a second order differential equation for the field  $\psi$ . As a result, the radial equation is as follows:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \kappa \right] \psi(r) = 0, \quad (28)$$

where we have set

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \\ \kappa &= \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

We can observe that Eq. (28) is a Bessel equation and its general solution is defined by [92]

$$\psi(r) = A J_{|\zeta|}(\kappa\rho) + B Y_{|\zeta|}(\kappa\rho), \quad (29)$$

where  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  and  $Y_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  are the Bessel functions of order  $\zeta$  and of the first and the second kind, respectively. Here  $A$  and  $B$  are arbitrary constants. We notice that at the origin when  $\zeta = 0$ , the function  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho) \neq 0$ . However,  $Y_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  is always divergent at the origin. In this case, we will consider only  $J_{|\zeta|}(\kappa\rho)$  when  $\zeta \neq 0$ . Hence, we write the solution to Eq. (28) as follows

$$\psi(\rho) = A J_{\left| \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right|} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right). \quad (30)$$

We can now express the whole two-component wavefunction of the spinless heavy KG particle in the space-time of a cosmic dislocation using this solution.

$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) =$

$$|C_1| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} J_{\left| \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right|} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right),$$

(31)

The constant  $|C_1|$  can be obtained by applying the appropriate normalization condition to the KG equation (e.g., see Ref. [89,90]), but it is fortunate that failing to determine the normalization constants throughout this manuscript has no effect on the final results. The wave function that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].

### 3.2. Effects of a hard-wall potential

From now on, we consider that the scalar particle analyzed in the previous section is interacting with a hard-wall potential. This type of potential is characterized by the following boundary condition

$$\psi(\rho_0) = 0, \tag{32}$$

which, in the field of mathematics, is known in the literature as the Dirichlet boundary condition, and  $\rho_0$  is a fixed point.

This potential type has been investigated in several systems of quantum mechanics. For example, on the nonrelativistic oscillator [93], on Dirac and Klein-Gordon oscillator in global monopole spacetime [94], on relativistic Landau quantization in spacetime with torsion [95], in possible scenarios of Lorentz symmetry violation [96,97] and induced by the noninertial effects in spacetime with axial symmetry [98–100]. Therefore, to complete our analysis, let us consider the particular case  $\sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2}\rho_0 \gg 0$ . In this particular case, the Bessel function is rewritten as follows

$$J_{\frac{\sqrt{(l-JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha}} \rightarrow \cos \left[ \begin{aligned} &\sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2}\rho_0 - \frac{\pi}{4} \\ &- \frac{\sqrt{(l-JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} \end{aligned} \right] \tag{33}$$

By substituting Eq. (33) into Eq. (31), we obtain from the boundary condition given in Eq. (32) the expression

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l-JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{34}$$

Eq. (34) represents the relativistic energy levels of scalar particle subjected to the hard-wall potential in nontrivial spacetime composed of curvature and torsion, both characterized by the parameters  $\alpha$  and  $J$ , which has an extra dimension Kaluza-Klein-type. By making  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $J \rightarrow 0$  and  $\alpha \rightarrow 1$  we obtain the relativistic energy profile of a scalar particle by interacting with a hard-wall potential in Minkowski spacetime, the same particular result obtained in Ref. [101].

### 3.3. Feshbach-Villars oscillator in the background of a cosmic string space-time in Kaluza–Klein theory

Now we'll look at the specific instance where we wish to extend the GFVT for the KGO. In general, we must substitute the momentum operator in Eq. (15). As a result, Eq. (29) may be rewritten as follows.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{\mathcal{F}} \left[ - \left( \frac{d}{d\rho} - m\omega\rho \right) (\sqrt{-g}) \left( \frac{d}{d\rho} + m\omega\rho \right) \right. \\ & - (\sqrt{-g}) \left( \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left( 1 + \frac{J^2}{\alpha^2 \rho^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \left( 1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} \\ & + (\sqrt{-g}) \frac{1}{\mathcal{F}} \left( \frac{2J}{\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dz} \right) + \frac{\Phi}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{dx} \right) - \frac{\Phi J}{\pi\alpha^2 \rho^2} \left( \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} \right) \right) \frac{1}{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (35)$$

Similarly, the following differential equation may be obtained using a simple calculation based on the approach described above.

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + m^2 \omega^2 \rho^2 - \frac{\sigma^2}{\rho^2} + \delta \right] \psi(r) = 0, \quad (36)$$

with

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2 \\ \delta = & E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + 2m\omega. \end{aligned} \quad (37)$$

The FVO for a spin-0 particle in the (1+4) space-time of KKT is given by Eq. (35). To derive the solution to this problem, we first, suggest a radial coordinate transformation.

$$Q = m\omega r^2, \quad (38)$$

substituting the expression for  $\chi$  into Eq. (35), we obtain

$$\left[ \frac{d^2}{dQ^2} + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{dQ} - \frac{\sigma^2}{4Q^2} + \frac{\delta}{4m\omega Q} - \frac{1}{4} \right] \psi(Q) = 0. \quad (39)$$

So, if we look at the asymptotic behavior of the wave function at the origin and infinity, and we're looking for regular solutions, we may assume a solution of the type

$$\psi(Q) = Q^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{Q}{2}} F(Q). \quad (40)$$

As previously, we can plug this back into Eq. (38), and we get

$$Q \frac{d^2 F(Q)}{dQ^2} + (|\sigma| + 1 - Q) \frac{dF(Q)}{dQ} - \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} \right) F(Q) = 0. \quad (41)$$

This is the confluent hypergeometric equation [91], the solutions which are defined in terms of the kind of confluent hypergeometric function.

$$F(Q) = {}_1F_1 \left( \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, Q \right). \quad (42)$$

We should note that the solution (41) must be a polynomial the function of degree  $n$ . However, taking  $n \rightarrow \infty$  imposes a divergence issue. We can have a finite polynomial only if the factor of the last term in Eq. (40) is a negative integer, meaning,

$$\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2} = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{43}$$

With this result and the parameters (37), we may derive the quantized energy spectrum of FVO in the cosmic dislocation space-time, and hence,

$$E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega}{\alpha} \left| (l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right] \right| + m^2 + K^2 + \lambda^2}. \tag{44}$$

At this stage, some remarks can be make

- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].
- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0, \lambda = 0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [57].
- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$ , and in absence of topological defect is fully compatible with the energy  $E^\pm(n) = \pm\sqrt{4m\omega n + m^2}$ . We may notice that the energy relies clearly on the angular deficit  $\alpha$ . In other words, because of the presence of the wedge angle, the curvature of space-time that is impacted by the topological defect, i.e., the cosmic string would affect the relativistic dynamics of the scalar particle by creating a gravitational field. The corresponding wave function is given by

$$\psi(\rho) = |\mathcal{C}_2| \left(m\omega\rho^2\right)^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, m\omega\rho^2\right). \tag{45}$$

Thereafter, the general eigenfunctions are written as

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |\mathcal{C}_2| \left(\frac{1 + \frac{E}{\mathcal{N}}}{1 - \frac{E}{\mathcal{N}}}\right) \left(m\omega\rho^2\right)^{\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} e^{-i(Et-l\varphi-Kz-\lambda x)} {}_1F_1\left(\frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\sigma| + 1, m\omega\rho^2\right), \tag{46}$$

where  $|\mathcal{C}_2|$  is the normalization constant and  $(\sigma, \delta)$  are given in (36).

- The wave function that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].

### 3.4. Feshbach-Villars oscillator plus hard-wall potential in the background of a cosmic string space-time in Kaluza–Klein theory

From now on, let us consider the relativistic quantum oscillator interacting with a rigid wall potential defined by the boundary condition given in Eq. (32). In order to obtain the relativistic energy profile of this system, let us consider the particular case  $\delta/4m\omega \gg 1$ . In addition, the quantum number  $l$  and  $\rho_0$  are fixed. In this particular case, the confluent hypergeometric function can be written in the form [92]:

$${}_1F_1(A, B; Q_0) \rightarrow \cos\left(\sqrt{2BQ_0 - 4AQ_0}\right) - \frac{B\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \tag{47}$$

where we have defined

$$A = \frac{|\sigma|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}; \quad B = |\sigma| + 1. \tag{48}$$

Therefore, by substituting Eqs. (47) and (42) into Eq. (34) we obtain

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 - 2m\omega + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{49}$$

Eq. (49) represents the relativistic energy levels of FV oscillator by interacting with a hard-wall potential in a Kaluza-Klein-type spacetime with torsion and curvature. By comparing Eqs. (44) and (49), we can note that the presence of the hard-wall potential changes the relativistic energy profile of FV oscillator. In addition, by comparing Eqs. (34) and (49), we can observe that the presence of FV oscillator modifies the relativistic energy levels of hard-wall potential in spacetime defined by the line element (23). This modification is explicit by the term  $-2m\omega$ .

#### 4. FV oscillator in cosmic dislocation in Som-Raychaudhuri spacetime in Kaluza-Klein theory

New observational data suggest that the universe is both expanding and rotating, which has led to increased interest in developing theories to explain these phenomena. One such theory was proposed by Gödel in the 1950s for a universe with rigid rotation, characterized by a term in the metric and a curvature source is known as a Weyssenhoff-Raabe fluid [102,103]. Researchers have studied the quantum dynamics of this theory in (3+1)-dimensional spacetimes [87,104]. The authors of this paper focus on cosmic dispiration in a flat Gödel or Som-Raychaudhuri solution in Kaluza-Klein theory. They assume that a charged scalar particle is exposed to a uniform magnetic field, which is introduced using Kaluza-Klein theory through the geometry of spacetime. Because rotation is important in current scenarios, the authors use Kaluza-Klein theory to describe the quantum dynamics of a Klein-Gordon particle in this spinning background. They present a new solution for the Som-Raychaudhuri spacetime that includes a topological defect of cosmic dispiration, which is localized parallel to the rotation axis. The authors consider the influence of introducing a cosmic string in a Gödel-type universe, in contrast to their previous section where they studied quantum dynamics in a topological defect background. Specifically, they consider the Som-Raychaudhuri solution of the Einstein field equation [103] with a cosmic dispiration, described in a Kaluza-Klein theory with a spinning torsion source along the symmetry axis of the background spacetimes.

$$ds^2 = \left(dt + \alpha\Omega\rho^2 d\varphi\right)^2 - d\rho^2 - (\alpha\rho)^2 d\varphi^2 - (dz + Jd\varphi)^2 - \left(dx + \left(\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right) d\varphi\right)^2$$

(50)

where the components of the metric and the inverse metric tensors are, respectively,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\Omega\rho^2 & 0 & -\left[(\alpha\Omega\rho^2)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right)^2 + J^2\right] & -J & -\left[\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right] \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2}\right] & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

and

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\Omega\rho)^2 & 0 & \frac{\Omega}{\alpha} & -\frac{\Omega J}{\alpha} & -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha} + \frac{eB\Omega}{2\alpha}\rho^2\right] \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eB}{2\alpha^2}\right] \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eJB}{2\alpha^2}\right] \\ -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha} + \frac{eB\Omega}{2\alpha}\rho^2\right] & 0 & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eB}{2\alpha^2}\right] & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2} + \frac{eJB}{2\alpha^2}\right] & -\left[1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2} + \frac{e\Phi B}{2\pi\alpha^2} + \left(\frac{eB}{2\alpha}\rho\right)^2\right] \end{pmatrix} \quad (52)$$

#### 4.1. Free FV equation in cosmic dislocation in Som-Raychaudhuri spacetime in Kaluza–Klein theory

In the next part of the mathematical calculations we consider the magnetic field to be non-existent ( $B=0$ ), where

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\Omega\rho^2 & 0 & -\left[(\alpha\Omega\rho^2)^2 + \left(\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2 + J^2\right] & -J & -\left[\frac{\Phi}{2\pi}\right] \\ 0 & 0 & -J & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{\Phi}{2\pi}\right] & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

and

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\Omega\rho)^2 & 0 & \frac{\Omega}{\alpha} & -\frac{\Omega J}{\alpha} & -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha}\right] \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{(\alpha\rho)^2} & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] \\ 0 & 0 & \frac{J}{(\alpha\rho)^2} & -\left(1 + \frac{J^2}{(\alpha\rho)^2}\right) & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] \\ -\left[\frac{\Omega\Phi}{2\pi\alpha}\right] & 0 & \left[\frac{\Phi}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] & -\left[\frac{\Phi J}{2\pi(\alpha\rho)^2}\right] & -\left[1 + \frac{\Phi^2}{(2\pi\alpha\rho)^2}\right] \end{pmatrix} \quad (54)$$

Similarly, the following differential equation may be obtained using a simple calculation based on the approach described above.

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\xi^2}{\rho^2} + \kappa' \right] \psi(r) = 0 \quad (55)$$

with

$$\xi^2 = \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2$$

$$\kappa' = E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 \tag{56}$$

We can observe that the solution of the Equation is a Bessel equation and its general solution is defined by

$$\psi(r) = A' J_{|\xi|}(\kappa' \rho) + B' Y_{|\xi|}(\kappa' \rho) \tag{57}$$

where  $J_{|\xi|}(\kappa' \rho)$  and  $Y_{|\xi|}(\kappa' \rho)$  are the Bessel functions of order  $\xi$  and of the first and the second kind, respectively. Here  $A'$  and  $B'$  are arbitrary constants. We notice that at the origin when  $\xi = 0$ , the function  $J_{|\xi|}(\kappa \rho) \neq 0$ . However,  $Y_{|\xi|}(\kappa' \rho)$  is always divergent at the origin. In this case, we will consider only  $J_{|\xi|}(\kappa' \rho)$  when  $\xi \neq 0$ . Hence, we write the solution as follows

$$\psi(\rho) = A' J_{\left[ \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\pi\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right]} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2} \rho \right) \tag{58}$$

We can now express the whole two-component wavefunction of the spinless heavy KG particle in the cosmic dislocation in Som–Raychaudhuri spacetime in Kaluza–Klein theory as

$$\psi(t, \rho, \varphi, z, x) = |C_3| \left( \frac{1 + \frac{E}{N}}{1 - \frac{E}{N}} \right) e^{-i(Et - l\varphi - Kz - \lambda x)} J_{\left[ \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{\alpha} \right]} \left( \sqrt{E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2} \rho \right), \tag{59}$$

The wave function that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].

#### 4.2. Effects of a hard-wall potential

With the results obtained in the previous subsection, we can go further in order to obtain the relativistic energy levels through the presence of a rigid wall potential, given in Eq. (32). Therefore, following the same steps between Eqs. (32) and (34), we obtain the following expression:

$$E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 - \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left( l - Jk - \frac{\Phi\lambda}{2\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{60}$$

which represents the relativistic energy levels of a scalar particle subjected to a hard-wall potential in Som-Raychaudhuri spacetime with a Kaluza-Klein-type extra dimension. We can note that the system is influenced by the non trivial spacetime topology. By comparing the results given Eq. (34) and (60), we can note that the intrinsic gravitational effects of the Som-Raychaudhuri metric modify the energy levels of the scalar particle interacting with the hard-wall potential through the term  $\frac{\Omega}{\alpha}$ ; by taking  $\Omega \rightarrow 0$ , we recover the result obtained in Eq. (34).

### 4.3. FV oscillator in cosmic dislocation in Som-Raychaudhuri spacetime in Kaluza-Klein theory

Similarly, the following differential equation may be obtained using a simple calculation based on the approach described above.

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + m^2\omega^2\rho^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2} + \eta \right] \psi(r) = 0 \tag{61}$$

with

$$\mu^2 = \left( \frac{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right]}{\alpha} \right)^2$$

$$\eta = E^2 - m^2 - K^2 - \lambda^2 + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 + 2m\omega \tag{62}$$

With this result and the parameters (37), we may derive the quantized energy spectrum of FVO in the cosmic dislocation space-time, and hence,

$$E^\pm(n) = \pm \sqrt{4m\omega n + \frac{2m\omega}{\alpha} \left| (l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda\pi}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi} \right] \right| + \left( \frac{\Omega}{\alpha} \right)^2 \left[ l - JK - \frac{\Phi}{2\pi} \lambda \right]^2 + m^2 + K^2 + \lambda^2} \tag{63}$$

Some remarks can be made here

- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].
- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0, \lambda = 0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [57].



- The energy that represents the system for values of  $(\ell = 0, K = 0, \lambda = 0)$ , and in absence of topological defect is fully compatible with the energy  $E^\pm(n) = \pm\sqrt{4m\omega n + m^2}$ . We may notice that the energy relies clearly on the angular deficit  $\alpha$ . In other words, because of the presence of the wedge angle, the curvature of space-time that is impacted by the topological defect, i.e., the cosmic string would affect the relativistic dynamics of the scalar particle by creating a gravitational field.

The corresponding wave function is given by

$$\psi(\rho) = |\mathcal{C}_4| \left(m\omega\rho^2\right)^{\frac{|\mu|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{|\mu|}{2} - \frac{\eta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\mu| + 1, m\omega\rho^2\right) \tag{64}$$

Thereafter, the general eigenfunctions are written as

$$\begin{aligned} \psi(t, \rho, \varphi, z, x) \\ = |\mathcal{C}_4| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \left(m\omega\rho^2\right)^{\frac{|\mu|}{2}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} e^{-i(Et-l\varphi-Kz-\lambda x)} {}_1F_1\left(\frac{|\mu|}{2} - \frac{\eta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\mu| + 1, m\omega\rho^2\right) \end{aligned} \tag{65}$$

where  $|\mathcal{C}_4|$  is the normalization constant and  $(\mu, \eta)$  are given in (61).

- The wave function that represents the system for values of  $(\ell = 0, K=0)$ , is fully compatible with the energy of all systems if study in [75,76].

#### 4.4. FV oscillator plus a hard-wall potential in cosmic dislocation in Som-Raychaudhuri spacetime in Kaluza-Klein theory

Let us consider the FV oscillator by interacting with a hard-wall potential defined by the boundary condition given in Eq. (32). By analogy, let us follow the same steps given in Eqs. (32) to (34), such that we have

$$\begin{aligned} E_{K,\lambda,l,n} = \pm \left[ m^2 + K^2 + \lambda^2 - 2m\omega - \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2 \left(l - Jk - \frac{\Phi\lambda}{2\pi}\right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \left( n + \frac{\sqrt{(l - JK)^2 + \frac{\Phi^2}{\pi^2} \left[\frac{\lambda^2}{4} - \frac{l\lambda}{\Phi} + \frac{JK\lambda\pi}{\Phi}\right]}}{2\alpha} + \frac{3}{4} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{66}$$

Eq. (66) give us the relativistic energy levels of FV oscillator by interacting with a hard-wall potential in Som-Raychaudhuri spacetime with a Kaluza-Klein-type extra dimension. By comparing Eqs. (60) and (66), we can note that the presence of FV oscillator modifies the relativistic energy spectrum of this quantum system. This modification comes through of the term  $-2m\omega$ . By making  $\omega \rightarrow 0$  in Eq. (66) we recover the result into Eq. (60); by making  $\Omega \rightarrow 0$  into Eq. (60) we recover Eq. (34).

## 5. Conclusions and summary

We are currently investigating the quantum dynamics of a relativistic quantum oscillator called the FV oscillator in a space-time that exhibits both torsion and curvature. In this space-time, there is a presence of a screw dislocation and a cosmic string, and we have introduced a quantum flux through an additional Kaluza-Klein-type extra dimension. Initially, we proposed to study a simpler scenario by considering a scalar particle in this non-trivial space-time. We have successfully determined the general solutions for this scalar particle in terms of the first type Bessel function. These solutions are influenced by the background geometry, specifically the torsion, curvature, and extra dimension. The dependence on these background parameters is observed through the eigenfunctions of the system.

In addition to studying the scalar particle in the non-trivial space-time with torsion, curvature, and an extra dimension, we have introduced a hard-wall potential by imposing a boundary condition. By considering a particular case, we have successfully determined the relativistic energy levels of this system. These energy levels are defined in terms of the parameters associated with the background, such as the torsion, curvature, and the extra dimension. The profile of the system's energy levels depends on these background parameters, and an interesting phenomenon similar to the Aharonov-Bohm effect for bound states emerges. Specifically, the parameters associated with the screw displacement, cosmic string, and extra dimension give rise to an effective angular momentum. This effective angular momentum influences the energy levels of the system and contributes to their dependence on the background parameters.

In our investigation, we extend the analysis by incorporating the FV-oscillator into the wave equation through a non-minimal coupling. This allows us to explore the gravitational effects on this relativistic quantum oscillator model. By performing analytical analysis, we determine the energy levels of the system, which are influenced by the presence of torsion, curvature, and the extra dimension. The dependency of the energy levels on the background parameters, namely the torsion, curvature, and the extra dimension, is explicitly expressed in our findings. Specifically, the energy profile of the system is affected by the parameters associated with the screw dislocation, cosmic string, and the quantum flux originating from the extra dimension.

Continuing our investigation, we incorporate the presence of a hard-wall potential that interacts with the FV oscillator, characterized by a specific boundary condition. Through our analysis, we observe that this interaction leads to significant modifications in the energy levels of the system. However, these energy levels still retain their dependence on the parameters associated with torsion, curvature, and the extra dimension. Despite the substantial modifications caused by the interaction with the hard-wall potential, the underlying influence of the background parameters, including torsion, curvature, and the extra dimension, remains evident in the energy profile of the system.

We extend our analysis to investigate the FV-oscillator in a Gödel-type space-time, specifically the Som-Raychaudhuri space-time in the Kaluza-Klein theory. This space-time possesses an intrinsic curvature, a cosmic string, a screw dislocation, and a Kaluza-Klein-type extra dimension. By considering this background, we repeat all the previous analyses conducted. Remarkably, we observed a generalization of the obtained results, which is evident in the dependence of the energy levels on the vorticity parameter associated with the Gödel-type space-time. This vorticity parameter encapsulates the unique characteristics of the particular Gödel-type background. Thus, we find that the energy levels are influenced by the vorticity, indicating the broader applicability of our findings. To further validate this generalization, we demonstrate that as we approach a vanishing vorticity parameter, our results converge to those obtained in the background featur-

ing only torsion, curvature, and the extra dimension. It is noteworthy that this type of relativistic quantum oscillator can also investigate in other possible scenarios, such as rotational frame [98], Lorentz symmetry violation [105], central potential [106], and external fields [95] effects. The results obtained in this study can serve for a future thermodynamic analysis.

In summary, this research contributes to the understanding of the relativistic quantum dynamics of spin-0 scalar massive charged particles by investigating their behavior in the context of the Kaluza-Klein Theory. Through the study of the Feshbach-Villars equation and oscillator, as well as their interactions with cosmic string space-time and cosmic dislocations, we gained valuable insights into the quantification of energy, wave function, and the influence of external fields on these systems.

### CRediT authorship contribution statement

**Abdelmalek Bouzenada:** Software, Writing – original draft. **Abdelmalek Boumali:** Project administration, Supervision, Writing – review & editing. **R.L.L. Vitória:** Writing – review & editing. **Faizuddin Ahmed:** Writing – review & editing. **Marwan Al-Raei:** Writing – review & editing.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Data availability

No data was used for the research described in the article.

### Acknowledgements

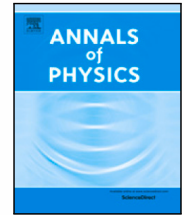
No funds received for this manuscript.

### References

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys.* 49 (1916) 769.
- [2] B.P. Abbott, et al., *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- [3] K. Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019) L1.
- [4] A.R. Hibbs, R.P. Feynman, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover Publications Inc., 1965.
- [5] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [6] A. Ashtekar, J.J. Stachel, *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, Birkhäuser, Boston, MA, 1991.
- [7] L. Smolin, *The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*, Penguin Books Ltd, 2006.
- [8] N.D. Birrell, P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [9] L. Parker, D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time: Quantized Fields and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [10] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* 43 (1975) 199.
- [11] W.G. Unruh, R.M. Wald, *Phys. Rev. D* 25 (1982) 942.
- [12] G.L. Sewell, *Ann. Phys.* 141 (1982) 201.
- [13] T.W.B. Kibble, *J. Phys. A, Math. Gen.* 9 (1976) 1387.
- [14] Y.B. Zel'dovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 192 (1980) 663.
- [15] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* 121 (1985) 263.

- [16] T.W.B. Kibble, *Phys. Rep.* 67 (1980) 183.
- [17] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* 133 (1983) 177.
- [18] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings, and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [19] C. Furtado, B.G.C. da Cunha, F. Moraes, E.R.B. de Mello, V.B. Bezerra, *Phys. Lett. A* 195 (1994) 90.
- [20] E.R.F. Medeiros, E.R.B. de Mello, *Eur. Phys. J. C* 72 (2012) 2051.
- [21] F. Ahmed, *Eur. Phys. J. Plus* 135 (2020) 108.
- [22] M. Hosseini, H. Hassanabadi, S. Hassanabadi, P. Sedaghatnia, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 16 (2019) 1950054.
- [23] H. Hassanabadi, A. Afshardoost, S. Zarrinkamar, *Ann. Phys.* 356 (2015) 346.
- [24] A. Afshardoost, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys.* 94 (2016) 71.
- [25] A. Boumali, L. chetouani, *Phys. Lett. A* 346 (2005) 261–268.
- [26] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, M. de Montigny, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 15 (2018) 1850165.
- [27] M.S. Cunha, C.R. Muniz, H.R. Christiansen, V.B. Bezerra, *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) 512.
- [28] A.L.C. de Oliveira, E.R.B. de Mello, *Class. Quantum Gravity* 23 (2006) 5249.
- [29] G.d.A. Marques, C. Furtado, V.B. Bezerra, F. Moraes, *J. Phys. A, Math. Gen.* 34 (2001) 5945.
- [30] F. Ahmed, *Adv. High Energy Phys.* 2020 (2020) 4832010.
- [31] C. Furtado, F. Moraes, *J. Phys. A, Math. Gen.* 33 (2000) 5513.
- [32] F. Ahmed, *Adv. High Energy Phys.* 2020 (2020) 5691025.
- [33] G.Q. Garcia, J.R. de, S. Oliveira, C. Furtado, *Int. J. Mod. Phys. D* 27 (2018) 1850027.
- [34] J. Carvalho, A.M. de, M. Carvalho, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* 74 (2014) 2935.
- [35] J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 032109.
- [36] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. D* 80 (2009) 024033.
- [37] A.A. de Lima, C. Filgueiras, *Eur. Phys. J. B* 85 (2012) 401.
- [38] K. Bakke, *Gen. Relativ. Gravit.* 45 (2013) 1847.
- [39] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, Marc de Montigny, *Eur. Phys. J. C* 79 (2019) 311.
- [40] C.R. Muniz, V.B. Bezerra, M.S. Cunha, *Ann. Phys.* 350 (2014) 105.
- [41] O. Mustafa, *Ann. Phys.* 440 (2022) 168857.
- [42] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys.* 336 (2013) 489.
- [43] A. Boumali, H. Aounallah, *Adv. High Energy Phys.* 2018 (2018).
- [44] H. Aounallah, A. Boumali, *Phys. Part. Nucl. Lett.* 16 (2019) 195–205.
- [45] A. Boumali, H. Aounallah, *Rev. Mex. Fis.* 66 (2020) 192–208.
- [46] M. Moshinsky, Y.F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers, 1996.
- [47] A.G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*, Institute of Physics Publishing, 1994.
- [48] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Phys. Scr.* 94 (2019) 125301.
- [49] F. Ahmed, *Proc. R. Soc. A* 479 (2023) 20220624.
- [50] F. Ahmed, *Europhys. Lett.* 141 (2023) 54001.
- [51] D. Itô, K. Mori, E.W. Carriere, *Nuovo Cimento A* 51 (1967) 1119.
- [52] M. Moshinsky, A.P. Szczepaniak, *J. Phys. A, Math. Gen.* 22 (1989) L817.
- [53] S. Bruce, P. Minning, *Nuovo Cimento A* 106 (1993) 711.
- [54] V.V. Dvoeglazov, *Nuovo Cimento A* 107 (1994) 1413.
- [55] M. Moshinsky, *J. Phys. A, Math. Gen.* 22 (1989) L817.
- [56] N.A. Rao, B.A. Kagali, *Phys. Scr.* 77 (2008) 015003.
- [57] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys.* 92 (2014) 1460.
- [58] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys.* 355 (2015) 48.
- [59] C. Furtado, F. Moraes, V.B. Bezerra, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 107504.
- [60] Th. Kaluza, *Sitz.ber. Preuss. Akad. Wiss.* 1 (1921) 966.
- [61] O.Z. Klein, *Z. Phys.* 37 (1926) 895.
- [62] M. Azreg-Ainouy, G. Clement, *Class. Quantum Gravity* 13 (1996) 2635.
- [63] C. Furtado, V.B. Bezerra, F. Moraes, *Mod. Phys. Lett. A* 15 (2000) 253.
- [64] E.V.B. Leite, H. Belich, K. Bakke, *Adv. High Energy Phys.* 2015 (2015) 925846.
- [65] C. Satiro, F. Moraes, *Eur. Phys. J. E* 20 (2006) 173.
- [66] A.M. de, M. Carvalho, C. Satiro, F. Moraes, *Europhys. Lett.* 80 (2007) 46002.
- [67] C. Satiro, F. Moraes, *Mod. Phys. Lett. A* 20 (2005) 2561.
- [68] C. Satiro, F. Moraes, *Eur. Phys. J. E* 173 (2006) 154.
- [69] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* 133 (1983) 177.

- [70] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* 121 (1985) 263.
- [71] M. Barriola, A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 341.
- [72] H. Mukai, P.R.G. Fernandes, B.F. de Oliveira, G.S. Dias, *Phys. Rev. E* 75 (2007) 061704.
- [73] F. Moraes, *Braz. J. Phys.* 30 (2000) 304.
- [74] Z. Wang, Z. Long, C. Long, M. Wu, *Eur. Phys. J. Plus* 130 (2015) 36.
- [75] A. Bouzenada, A. Boumali, *Ann. Phys.* 452 (2023) 169302.
- [76] A. Bouzenada, A. Boumali, M. Al-Raei, arXiv:2302.13805 [quant-ph].
- [77] H. Feshbach, F.M.H. Villars, *Rev. Mod. Phys.* 30 (1958) 24.
- [78] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A, Math. Gen.* 31 (1998) 7829.
- [79] A. Mostafazadeh, *Ann. Phys.* 309 (2004) 1.
- [80] M. Merad, L. Chetouani, A. Bounames, *Phys. Lett. A* 267 (2000) 225.
- [81] A. Bounames, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* 279 (2001) 139.
- [82] S. Haouat, L. Chetouani, *Eur. Phys. J. C* 41 (2005) 297.
- [83] A.J. Silenko, *Theor. Math. Phys.* 156 (2008) 1308.
- [84] A.J. Silenko, *Phys. Rev. D* 88 (2013) 045004.
- [85] J. Carvalho, A.M. de, M. Carvalho, E. Cavalcante, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) 365.
- [86] F. Ahmed, *Eur. Phys. J. C* 80 (2020) 211.
- [87] F. Ahmed, *Adv. High Energy Phys.* 2020 (2020) 8107025.
- [88] F. Ahmed, *Sci. Rep.* 11 (2021) 1742.
- [89] F. Ahmed, *Mod. Phys. Lett. A* 36 (2021) 2150004.
- [90] F. Ahmed, *Int. J. Mod. Phys. A* 36 (08 & 09) (08-09) (2021) 2150053.
- [91] F. Ahmed, *Int. J. Mod. Phys. A* 36 (2021) 2150204.
- [92] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1970.
- [93] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Phys. Scr.* 94 (2019) 125301.
- [94] E.A.F. Bragança, R.L.L. Vitória, H. Belich, E.R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C* 80 (2020) 206.
- [95] R.L.L. Vitória, K. Bakke, *Int. J. Mod. Phys. D* 27 (2018) 1850005.
- [96] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Eur. Phys. J. Plus* 135 (2020) 123.
- [97] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Adv. High Energy Phys.* 2020 (2020) 4208161.
- [98] R.L.L. Vitória, *Eur. Phys. J. C* 79 (2019) 844.
- [99] R.L.L. Vitória, K. Bakke, *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 175.
- [100] K. Bakke, *Ann. Phys.* 346 (2014) 51.
- [101] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Adv. High Energy Phys.* 2019 (2019) 1248393.
- [102] K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 447.
- [103] M.M. Som, A.K. Raychaudhuri, *Proc. R. Soc. A* 4 (1987) 1633.
- [104] B.D. Figueiredo, I.D. Soares, J. Tiomno, *Class. Quantum Gravity* 9 (1992) 1593.
- [105] R.L.L. Vitória, H. Belich, *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 999.
- [106] R.L.L. Vitória, Kleber Anderson T. da Silva, *Europhys. Lett.* 142 (2023) 22002.



# Applications of the Klein–Gordon equation in the Feshbach–Villars representation in the non-inertial cosmic string space–time

Abdelmalek Bouzenada<sup>a</sup>, Abdelmalek Boumali<sup>a,\*</sup>, Edilberto O. Silva<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratory of Theoretical and Applied Physics, Echahid Cheikh Larbi Tebessi University, Algeria*

<sup>b</sup> *Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65085-580 São Luís, Maranhão, Brazil*

## ARTICLE INFO

### Keywords:

Feshbach–Villars representation  
Cosmic string  
Rotating frame  
Klein–Gordon equation

## ABSTRACT

We study the relativistic quantum motion of a spinless particle using the Feshbach–Villars (FV) formalism in the spinning cosmic string spacetime. The equations of motion are derived using the first-order FV formulation of the Klein–Gordon (KG) equation. We apply the equation of motion (a) to study the motion of the particle confined to a rigid-wall potential, (b) motion in the presence of a Coulomb-type potential, and (c) particle interacting with the Feshbach–Villars oscillator (FVO). The energy levels and wave functions are obtained for the three cases. Our study focused on the impact of rotation and curvature on the energy levels of the particle.

## 1. Introduction

The study of how the gravitational field affects the dynamics of quantum mechanical systems holds significant importance. On the one hand, the theory of general relativity (GR), proposed by Einstein [1], provides a compelling explanation of gravity as a geometric property of space–time. It establishes that the classical gravitational field manifests space–time curvature and has successfully predicted phenomena such as gravitational waves [2] and black holes [3]. On the other hand, quantum mechanics (QM) serves as the framework for comprehending the behavior of particles at the microscopic level [4]. Quantum mechanics, often manifested through quantum field theory, has proven highly successful in elucidating the interactions among small particles and the emergence of three fundamental forces: weak, strong, and electromagnetic interactions [5]. However, the endeavor to construct a unified theory that reconciles general relativity with quantum mechanics, known as quantum gravity, has encountered numerous obstacles and unresolved technical challenges [6,7].

A key approach to developing a theory that bridges the gap between gravity and relativistic quantum mechanics is by generalizing certain aspects of particle dynamics in flat Minkowski space to curved geometries [8,9]. This allows for the extension of this formulation, providing a comprehensive understanding of how the gravitational field influences the quantum behavior of relativistic particles. By incorporating arbitrarily curved backdrops, a broader framework can be constructed, shedding light on the intricate interplay between gravity and quantum mechanics at the relativistic level.

The versatility of this technique allows for its adaptation to address a wide array of models involving the concept of curvature, enabling the integration of a broader set of predictions concerning the values of macroscopic observables. These predictions play a crucial role in facilitating meaningful experimental verification of various phenomenological consequences, particularly in the domains of astrophysics and cosmology. Additionally, gaining a comprehensive understanding of the thermodynamic behavior of relativistic particles, with due consideration of gravitational effects [10,11], presents a promising avenue for exploration. Moreover,

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz](mailto:abdelmalek.bouzenada@univ-tebessa.dz) (A. Bouzenada), [boumali.abdelmalek@gmail.com](mailto:boumali.abdelmalek@gmail.com) (A. Boumali), [edilberto.silva@ufma.br](mailto:edilberto.silva@ufma.br) (E.O. Silva).

<https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169479>

Received 14 July 2023; Accepted 3 October 2023

Available online 7 October 2023

0003-4916/© 2023 Elsevier Inc. All rights reserved.

studying related characteristics, such as fundamental statistical variables, further enhances the potential to draw important and necessary conclusions within the context of unraveling the enigmatic quantum behavior of gravity.

Topological defects (domain walls, cosmic strings, monopoles, and textures) have been a focus of intense research over the last few decades, and they continue to be one of the most active disciplines in condensed matter physics, cosmology, astrophysics, and elementary particle models. These structures are thought to have originated due to the Kibble mechanism [12–14], in which defects occur in symmetry-breaking phase transitions during the early universe's cooling [15,16]. The particular flaw in question is cosmic strings (for more reviews, we refer the reader to [17]). These items (whether static or revolving) can have discernible impacts. These, for example, offer a viable method for seeding galaxy formation and the gravitational lensing effects. Furthermore, by investigating cosmic strings and their characteristics, we may learn a lot about particle physics at very high energies in many settings. Moreover, the potential that cosmic strings may act like superconducting wires has been proposed in current physics, with fascinating implications.

The harmonic oscillator (HO) has long been recognized as an essential instrument in many fields of theoretical physics [18]. It is a well-studied, absolutely solvable model that may be used to examine numerous complicated issues within the context of quantum mechanics [19]. addition relativistic extension of the quantum harmonic oscillator gives a useful model for understanding a wide range of molecular, atomic, and nuclear interactions. Moreover, having a complete set of exact analytical solutions when working with such a model can give birth to radically different interpretations of many mathematical and physical events. Hence, related applications can be realized via the underlying formulation.

The behavior of various relativistic quantum systems is now acknowledged to be critically dependent on the so-called Dirac oscillator (DO) as Itô et al. [20] specified in previous developments of spin-1/2 particle dynamics with a linear trajectory. They demonstrated that the non-relativistic limit of this system leads to an ordinary harmonic oscillator with a substantial spin-orbit coupling term. Subsequently, Moshinsky and Szczepaniak [21] demonstrated that the DO might be derived from the free Dirac equation by introducing an external linear potential through a minimum replacement of the momentum operator  $\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - iM\omega\beta x_\mu$ , with  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ . It is worth noting that, in addition to the theoretical focus on researching the DO, useful insights may be achieved by examining physical interpretation, which is undoubtedly necessary for comprehending many relevant applications [22–28].

Inspired by the DO, a similar formalism for the case of bosonic particles was presented, and it was dubbed a Klein–Gordon oscillator (KGO) [29,30]. Several researchers have lately been working on the covariant version of this model in curved spacetimes and various configurations. There are various contributions to the issue of relativistic quantum movements of scalar and vector particles under gravitational influences caused by different curved space–time geometries. For example, the problem of the interaction between KGO coupled harmonically with topological defects in Kaluza–Klein theory is examined in Ref. [30]. Reference [31] investigates the relativistic quantum dynamics of spin-0 particles in a spinning cosmic string space–time with Coulomb-type scalar and vector potentials. Additionally, rotating effects on the scalar field in cosmic string space–time, space–time with space-like dislocation, and space–time with spiral dislocation have been examined in Ref. [32]. The authors of Ref. [33] recently examined the KGO in cosmic string space–time and investigated the effects of the rotating frame and non-commutativity in momentum space. Additionally, Ref. [34] investigated the Relativistic scalar charged particle in a rotating cosmic string space–time with Cornell-type potential and Aharonov-Bohm effect. Efforts have been made by several writers [35–40] to explore the relativistic spin-0, spin-1 bosons, and spin-1/2 fermions wave functions and their time evolution using the Hamiltonian form, i.e., possessing Schrodinger-type equations. In this regard, the so-called FV equations [41,42] are of special relevance. These equations were originally designed to allow for a relativistic single-particle interpretation of the second-order KG equation. In the latter scenario, FV equations result from dividing the KG wave function into two components to produce an equation with a first-order time derivative. Several investigations have been made in recent decades to examine the relativistic dynamical features of single particles and solve their wave equations using the FV technique (e.g., Refs. [43–52] and other related references cited therein).

In 1958, a solution was proposed by Herman Feshbach and Felix Villars that effectively linearized the time derivative of the KG equation while maintaining the second-order dependence in coordinate space. This was achieved by dividing the wave function into two components, allowing the KG equation to represent two interconnected, Schrödinger-like equations with first-order time derivatives. Consequently, the KG equation could be transformed into the familiar Schrödinger form with a matrix Hamiltonian, leading to accurate energy solutions. These equations are referred to as the FV equations. This formalism helped justify the inconsistencies of the KG equation, such as the reason for negative energies, and it allowed for a probabilistic interpretation of the theory as long as the particle in question has an anti-particle counterpart. These were the main problems that led to the abandonment of the KG theory, and the formalism presented by Feshbach and Villars allowed for it to be revisited.

The KG equation, which involves second and first-time derivatives, does not have a positive definite density  $\rho$  and, therefore, cannot represent a particle probability current density. Moreover, the presence of the second time derivative suggests that the wave function has two degrees of freedom. In field theory interpretation, these two degrees of freedom correspond to two different charge states. As such, the particle current is interpreted as a charge current, and the charge density measures the difference between the number of positive and negative particles. A particle interpretation of the KG equation is feasible if the separation of these two degrees of freedom is clearly defined. This clarification allows for a probabilistic interpretation of the KG equation. Furthermore, unlike the KG theory, the FV formalism provides an understanding of negative energies and can naturally adapt a probabilistic interpretation. The interpretation for charge conservation is that it consists of two charge densities: one for the particle and another for its corresponding anti-particle component, represented by  $\phi_1$  and  $\phi_2$  respectively [53–58].

Also, although both FV and KG give the same solutions, the FV formalism offers several advantages over directly using the KG equation:

- In the KG equation, positive and negative energy solutions are mixed together. This can lead to mathematical complications and interpretation issues. The FV formalism introduces auxiliary fields that separate the positive and negative energy components of the wave function, making the mathematical treatment cleaner and physically more intuitive.
- The FV formalism effectively eliminates the negative energy solutions from the equations of motion. This is particularly useful because negative energy solutions in the KG equation can lead to unphysical predictions. By working with positive energy solutions only, one can avoid these issues.
- The FV formalism is often used in the presence of electromagnetic interactions, where it helps maintain gauge invariance and simplifies the treatment of particles with spin [53,54,57].
- The FV formalism offers a probabilistic interpretation and provides a rationale for negative energies in quantum mechanics of relativistic particles without spin.

In summary, the FV formalism simplifies the treatment of relativistic particles and fields, particularly in the context of quantum field theory. It separates positive and negative energy solutions, eliminates unphysical negative energy states, and maintains Lorentz covariance, making it a valuable tool for addressing various challenges in relativistic quantum physics.

As mentioned in Ref. [52], the technique for introducing a scalar potential into the KG equation is as follows. In the same way, the electromagnetic 4-vector potential is introduced. This is achieved by modifying the momentum operator  $p_\alpha = i\partial_\alpha$  to  $p_i \rightarrow p_i - qA_i(x)$ . Another method was described in Ref. [59], which included a modification in the mass of the particle as  $M \rightarrow M + S(\mathbf{r}, t)$ , where  $S(\mathbf{r}, t)$  indicates the scalar potential. In recent decades, researchers have investigated the behavior of a Dirac particle in the presence of a static scalar potential and a Coulomb potential [59] as well as a relativistic scalar particle in cosmic string spacetime [60]. Bouzenada and Boumali [61] investigate the FVO case in spinning cosmic string space–time and discuss some findings (thermal properties and density of this system). This same model has also been studied in the cosmic string space–time with a screw dislocation in the presence of Coulomb-type potential [62] and in the case of Kaluza–Klein theory [63].

The structure of this paper is as follows. In Section 2, we present a brief review of the FV formalism emphasizing the relevant properties that are used in our work. In Section 3, in the spinning cosmic string spacetime. In Section 4, we apply the KG equation in the FV representation to three physical models: (a) we study the case where the particle is confined to a hard-wall potential, (b) motion in the presence of a Coulomb-type potential, and (c) particle interacting with the KG oscillator. Our conclusions are presented in Section 5. Throughout the paper, we use natural units  $\hbar = c = G = K_B = 1$ , and our metric convention is  $(+, -, -, -)$ .

## 2. An overview of the Feshbach–Villars representation

This section focuses on the relativistic quantum depiction of a spin-0 particle moving through Minkowski space–time with the metric tensor  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . We begin with the conventional covariant KG equation to a scalar massive particle given by [51,52]

$$(\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + M^2) \Psi(x, t) = 0, \quad (1)$$

where  $M$  is the mass of the particle, and the minimally-coupled covariant derivative is represented as  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu = -i(p_\mu - eA_\mu)$ . Here,  $p_\mu = i\partial_\mu = (E, -\mathbf{p})$  denotes the canonical four-momentum,  $A_\mu = (A_0, -\mathbf{A})$  represents the electromagnetic four-potential, and  $e$  the electric charge.

It is important to note that at this juncture, it can be emphasized that Eq. (1) can be restated in the form of a Hamiltonian equation, involving the first derivative concerning time, akin to a Schrödinger-type equation

$$\mathcal{H}\Phi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t). \quad (2)$$

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  can be achieved using the FV linearization technique, which involves transforming Eq. (1) into a first-order differential equation concerning time. To achieve this, we introduce the two-component wave function [51,52]

$$\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{M} D_0 \\ 1 - \frac{i}{M} D_0 \end{pmatrix} \psi(x, t), \quad (3)$$

where  $\psi(x, t)$  satisfies the KG wave equation, and  $D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + ieA_0(x)$ . The transformation given in Eq. (3) involves introducing wave functions that fulfill the specified conditions

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + \phi_2), \quad iD_0\psi = \frac{M}{\sqrt{2}} (\phi_1 - \phi_2). \quad (4)$$

To facilitate our subsequent examination, it is advantageous to express  $\phi_1$  and  $\phi_2$  as

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}M} \left[ M + i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] \psi, \quad (5)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}M} \left[ M - i \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right] \psi. \quad (6)$$

Substituting the equations of both  $\phi_1$  and  $\phi_2$  in Eqs. (3) and (1), we get

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\phi_1 + \phi_2) = M (\phi_1 - \phi_2), \quad (7)$$



$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\phi_1 - \phi_2) = \left[ \frac{(p_i - eA_i)^2}{M} + M \right] (\phi_1 + \phi_2). \quad (8)$$

By adding and subtracting these two equations, we arrive at a system of interconnected first-order differential equations concerning the time

$$\frac{(p_i - eA_i)^2}{2M} (\phi_1 + \phi_2) + (M + eA_0) \phi_1 = i \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \quad (9)$$

$$-\frac{(p_i - eA_i)^2}{2M} (\phi_1 + \phi_2) - (M - eA_0) \phi_2 = i \frac{\partial \phi_2}{\partial t}. \quad (10)$$

By employing Eqs. (9) and (10), the Hamiltonian for a scalar particle under the influence of electromagnetic interaction in the FV formalism can be expressed as

$$\mathcal{H}_{FV} = (\tau_z + i\tau_y) \frac{(p_i - eA_i)^2}{2M} + M\tau_z + eA_0(x). \quad (11)$$

The Pauli matrices in the conventional  $2 \times 2$  form, denoted by  $\tau_i, (i = x, y, z)$ , are defined as

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

It is important to highlight that the Hamiltonian (11) satisfies the condition of generalized Hermiticity. In other words, the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is considered pseudo-Hermitian if there exists an invertible, Hermitian, linear operator  $\beta$  such that the following condition is met:  $\mathcal{H}^\dagger = \beta\mathcal{H}\beta^{-1}$  [52]. Thus, we write

$$\mathcal{H}_{FV} = \tau_z \mathcal{H}_{FV}^\dagger \tau_z, \quad \mathcal{H}_{FV}^\dagger = \tau_z \mathcal{H}_{FV} \tau_z. \quad (13)$$

In the case of free particle propagation, where no interaction is considered (i.e.,  $A_\mu = 0$ ), the one-dimensional FV Hamiltonian can be simplified to the following form:

$$\mathcal{H}_0 = (\tau_z + i\tau_y) \frac{p_x^2}{2M} + M\tau_z. \quad (14)$$

The solutions to the free Hamiltonian, which do not depend on time, correspond to stationary states. Assuming a solution in the form mentioned in Ref. [43], we write

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad (15)$$

with  $E$  being the energy of the particle. Thus, Eq. (2) can then be written as

$$\mathcal{H}_0 \Phi(x) = E\Phi(x). \quad (16)$$

The one-dimensional FV equation for a free relativistic spin-0 particle is an alternative Schrödinger-type equation to the KG equation. Its purpose is to provide a different perspective on the dynamics of the particle. In the subsequent analysis, this approach will be employed to derive solutions for wave equations in curved space–time, specifically focusing on the Non-inertial cosmic string. By utilizing this framework, a deeper understanding of the behavior of particles in the presence of curved space–time can be achieved.

### 3. Quantum dynamics of Spin-0 particle in non-inertial cosmic string space–time: The FV representation

The equations governing the behavior of a scalar particle in a Riemannian spacetime, defined by the metric tensor  $g_{\mu\nu}$ , can be obtained by reformulating the KG equation. This approach, extensively discussed in various textbooks [9,10,48,49,61,64,65], allows for a deeper understanding of the dynamics of particles in curved spacetime. The KG equation is given by

$$\left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + M^2 - \xi R \right) \Phi(x, t) = 0. \quad (17)$$

Here, the Laplace–Beltrami operator  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$  plays a crucial role. It represents the differential operator used in the KG equation in the curved space–time of the cosmic string, whose line element is defined later. Additionally,  $\xi$  denotes a real dimensionless coupling constant, and  $R$  corresponds to the Ricci scalar curvature defined by  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , with  $R_{\mu\nu}$  representing the Ricci curvature tensor. The inverse metric tensor is denoted by  $g^{\mu\nu}$ , and  $g = \det(g_{\mu\nu})$  is the determinant of the metric tensor. These quantities collectively contribute to formulating the KG equation in the cosmic string space–time.

In the pursuit of understanding the quantum dynamics of spin-0 particles in space–time influenced by the non-inertial effects of a cosmic string, our current objective is to determine the equation of motion governing their motion. To accomplish this, we will employ the FV representation. However, before delving into specific physical models, we first derive the KG wave equation for a free relativistic scalar particle propagating in a cosmic string space–time that is static and cylindrically symmetric. This serves as the foundation for further investigations into the behavior of particles in the presence of cosmic strings.

The line element that defines the metric of a cosmic string in a (3+1)-dimensional spacetime can be expressed in a general form as [48,49,61,64,65]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2, \tag{18}$$

with  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , and  $\alpha \in [0, 1[$  is the parameter which determines the angular deficit  $\delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha)$ , and it also is related to the linear mass density  $\mu$  of the string by  $\alpha = 1 - 4\mu$ . Furthermore, by setting  $\varphi' = \alpha\varphi$ , it represents a flat conical exterior space with an angle deficit  $\delta\phi = 8\pi\mu$ . The line element (18) provides a mathematical representation of the spacetime geometry associated with the cosmic string, capturing the relationships between distances and intervals within this particular curved space-time. By considering the specific structure of this line element, one can examine the properties and characteristics of the cosmic string metric in a (3+1)-dimensional setting.

Alternatively, we can consider a string with a linear mass density equal to along the  $z$  axis, with the Lorentz metric  $ds^2 = dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$  and the coordinate changes  $x' = R \cos(\alpha\Phi)$ ,  $y' = R \sin(\alpha\Phi)$ ,  $z = Z$ , and  $t = T$ , which leads to the line element of a cosmic string space-time with cylindrical coordinates [66-72]

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - (\alpha R)^2 d\Phi^2 - dZ^2. \tag{19}$$

In addition to the presence of non-inertial effects, we analyze a frame that rotates evenly with a constant angular velocity  $\Omega$ . The line element that describes this system is written as [66-72]

$$ds^2 = (1 - \alpha^2 \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega \alpha^2 r^2 d\varphi dt - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2. \tag{20}$$

Since we do not want the term  $g^{00}$  to become positive, we shall require that

$$0 < r < \frac{1}{\alpha\Omega}. \tag{21}$$

This ensures that the line element's radial coordinate (20) is defined in the physically acceptable range. In other words, when KG particles are in the region with  $r \geq \alpha\Omega$ , they are placed outside the light cone because their velocities are greater than the speed of light. Therefore, the line element (20) is not well defined for  $r \geq \alpha\Omega$ , and the wave function of the particle must be located only in the range (21). Due to this restriction, the KG particle wave function must vanish at  $r = \alpha\Omega$  (see Ref. [73]). We will use this condition later in the Applications Section.

The metric and inverse metric tensor components are given, respectively, by [66-72]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - (\alpha\Omega r)^2 & 0 & -\Omega(\alpha r)^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega(\alpha r)^2 & 0 & -(\alpha r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & \Omega^2 - \frac{1}{(\alpha r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

It is worth noting that the problem of spinless heavy particles in the geometry formed by a non-inertial cosmic string background has been studied in various studies (see, for example, [66-72]). To obtain the FV form of the KG wave equation in curved manifolds, we will use the approach described in references [52]. We shall employ the generalized Feshbach-Villars transformation (GFVT) to describe both massive and massless particles (an equivalent transformation was presented earlier in Ref. [74,75]). The components of the wave function  $\Phi$  in the GFVT are provided by [52]

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\tilde{D}\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \tag{23}$$

where  $\mathcal{N}$  is an arbitrary nonzero real parameter, and we have defined  $\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}$ , with

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2g^{00}\sqrt{-g}} \{ \partial_i, \sqrt{-g}g^{0i} \}. \tag{24}$$

The curly bracket in Eq. (24) denotes the anti-commutator. With the transformations mentioned above, the Hamiltonian can be expressed in a more compact form as

$$H_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}, \tag{25}$$

where we have defined

$$\mathcal{T} = \frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g}g^{ij} \partial_j + \frac{M^2 - \xi R}{g^{00}} - \mathcal{Y}^2, \quad \text{with } (i, j = 1, 2, 3). \tag{26}$$

Here, the parameter  $\mathcal{T}$  has the sense of the squared kinetic energy. It becomes equal to  $p^2 + m^2$  in the Minkowski space.

At this stage, it is worth examining the situation involving massless particles ( $m = 0$ ) more closely. Since the original FV transformation corresponds to  $\mathcal{N} = m$ , it becomes unapplicable for a massless particle. So, if we employ the original method, the scenario concerning massless particles could not be considered as the limit case (as  $m \rightarrow 0$ ) of massive particles. It is important to notice that the massless case cannot be obtained through the limit  $m \rightarrow 0$  of the massive case (see Ref. [76]). To address this limitation, we employ the GFVT, developed by Silenko [74,77]. This transformation, which utilizes a general parameter denoted as  $\mathcal{N}$ , enables us to formulate the Hamiltonian framework encompassing massive and massless particles. For more details, please

refer to Ref. [74]. It is worth mentioning that when  $\mathcal{N} = M$ , the original FV transformations are satisfied. Now, using the metric (20), we can verify that the space–time is locally flat because the Riemann tensor is null, and so the coupling term is vanishing.<sup>1</sup> If  $\mathcal{Y} \neq 0$ , then, we obtain

$$\psi = \phi_1 + \phi_2, \quad iD'\psi = \mathcal{N}(\phi_1 - \phi_2), \quad (27)$$

with  $D' = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Y}'$ , where

$$\mathcal{Y}' = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i, \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right\}. \quad (28)$$

The next step is to extend the method employed in Section 2 to the situation of spinning cosmic strings. The GFVT is used to construct the equations of motion for this issue, which are then solved to give the wave functions and energy spectra. According to the Refs. [65,74], identifying the Hamiltonian leads to the concept of using a two-component formulation of the KG-type fields. To recast Eq. (30) in the Hamiltonian form, additional definitions for the quantities described in Eqs. (22) must be introduced Eqs. (24) to (33) [77]. In this way, we write

$$\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z \left( \frac{\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) + i\tau_y \left( \frac{-\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}'}{2\mathcal{N}} \right) - i\mathcal{Y}', \quad (29)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & \partial_i \frac{G^{ij}}{g^{00}} \partial_j + \frac{M^2 - \xi R}{g^{00}} + \frac{1}{\mathcal{F}} \nabla_i (\sqrt{-g} G^{ij}) \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{-g}}{g^{00}}} G^{ij} \nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \right) + \frac{1}{4\mathcal{F}^4} [\nabla_i (\mathcal{U}^i)]^2 \\ & - \frac{1}{2\mathcal{F}^2} \nabla_i \left( \frac{g^{0i}}{g^{00}} \right) \nabla_j (\mathcal{U}^i) - \frac{g^{0i}}{2g^{00}\mathcal{F}^2} \nabla_i \nabla_j (\mathcal{U}^i), \end{aligned} \quad (30)$$

where

$$G^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{g^{00}\sqrt{-g}}, \quad \mathcal{U}^i = \sqrt{-g}g^{0i}. \quad (31)$$

Reference [77] demonstrates that the transformations (29) and (30) with the definitions in Eq. (31) are precise and encompass all inertial and gravitational fields. It should be emphasized that using these precise transformations guarantees that the block-diagonal form of the Hamiltonian  $\mathcal{H}'_{GFVT}$  is obtained, which is independent of the parameter  $\mathcal{N}$ . The eigenvalues of the operator  $\mathcal{Y}'$  in Eq. (28) for the line element in Eq. (20) are given by

$$\mathcal{Y}'\Psi(t, r, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_2, \frac{g^{02}}{g^{00}} \right\} \Psi(t, r, \varphi) = \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi(t, r, \varphi), \quad (32)$$

where the field  $\Psi$  obeys the non-unitary transformation  $\Psi \equiv \Phi' = \mathcal{F}\Phi$ , which permits to obtain pseudo-Hermitian Hamiltonian  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \mathcal{F}\mathcal{H}_{GFVT}\mathcal{F}^{-1}$ , with  $\mathcal{H}'_{GFVT} = \tau_z (\mathcal{H}'_{GFVT})^\dagger \tau_z$ . After some algebraic manipulations, Eq. (30) takes the form

$$\mathcal{T}' = -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \sqrt{-g} \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sqrt{-g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{M^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \quad (33)$$

where for the metric (20) the Ricci scalar vanishes i.e.,  $R = 0$ . Now, we are ready to solve the following equation

$$\mathcal{H}'_{GFVT}\Psi'(\mathbf{x}) = i \frac{d}{dt} \Psi'(\mathbf{x}), \quad \text{with } \mathbf{x} \equiv (t, r, \varphi, z), \quad (34)$$

where  $\mathcal{H}'_{GFVT}$  is calculate using both Eqs. (32) and (33).

So, consider the ansatz below for the wave function to solve this eigenvalue problem

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{r}) \\ \phi_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} e^{-(iEt - j\varphi - k_z z)}, \quad (35)$$

where  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  is the angular momentum quantum number, and  $k_z \in [-\infty, \infty]$ . By replacing Eq. (35) into Eq. (34), we obtain the differential equations

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + \mathcal{T}' \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_1 &= 2\mathcal{N} E \mathcal{F} \phi_1, \\ \mathcal{N}^2 \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) - \mathcal{T}' \mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) + 2\mathcal{N} \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F} \phi_2 &= 2\mathcal{N} E \mathcal{F} \phi_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Adding and subtracting these equations leads, after simplification, to sets of coupled equations for  $\phi_1$  and  $\phi_2$

$$\mathcal{N} \mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) + \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} j \right) \mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) = E \mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2), \quad (37)$$

<sup>1</sup> The condition  $\xi = 0$  is known as minimum coupling. In massless theory,  $\xi$  equals 1/6 (in four dimensions). The equations of motion are then conformally invariant in this latter instance.

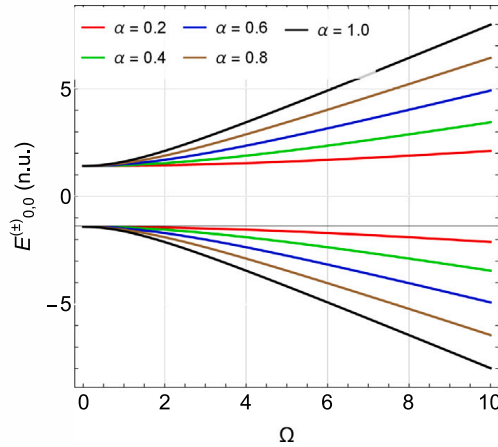


Fig. 1. Sketch of the energies (46) as a function of  $\Omega$  for  $n = 0, j = 0$  and different values of  $\alpha$ . When  $\alpha$  is decreased,  $|E_{n,j}^{(\pm)}|$  increases.

$$-\mathcal{T}'\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2) + \mathcal{N}'\left(\frac{g^{02}}{g^{00}}j\right)\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2) = \mathcal{N}E\mathcal{F}(\phi_1 - \phi_2), \tag{38}$$

where we have used the result

$$\phi_1 = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(E - \frac{g^{02}}{g^{00}}j\right)\phi_2 = \frac{1}{\mathcal{N}}(E + \Omega j)\phi_2. \tag{39}$$

After some simple algebraic manipulations, we arrive at the following second-order differential equation for the radial function  $\psi(r)$ :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \gamma^2\right]\psi(r) = 0, \tag{40}$$

where we have defined the parameters  $\zeta^2 = j^2/\alpha^2$  and  $\gamma^2 = (E + \Omega j)^2 - M^2 - k_z^2$ . It can be shown that Eq. (40) is a Bessel-type differential equation, and its general solution is given by

$$\psi(r) = A'J_\zeta(\gamma r) + B'N_\zeta(\gamma r), \tag{41}$$

where  $J_\zeta(\gamma r)$  and  $N_\zeta(\gamma r)$  are the Bessel function of the first and second kind, and  $A'$  and  $B'$  are arbitrary constants. In the next sections, we make some applications of the above formalism. We shall consider models already consolidated in the literature to make clear the physical implications due to the non-inertial effects and the curvature parameter of the cosmic string.

### 4. Applications

#### 4.1. Motion with hard wall boundary condition

Studying the relativistic motion of a spin-0 particle confined to a hard-wall potential is important in theoretical physics and provides us with very interesting results. By exploring this scenario, we gain valuable insights into the behavior of particles under extreme conditions and the interplay between relativity and quantum mechanics. This study lets us deepen our understanding of fundamental principles, refine theoretical frameworks, and develop computational techniques. Moreover, it serves as a stepping stone for comprehending more complex systems, guiding us toward a more complete understanding of the universe. Through this investigation, we unveil the intricate dynamics of spin-0 particles and contribute to the broader advancement of physics as a whole. For the simple model described by the solution of Eq. (40), we must consider the physically acceptable solution in the region of interest. In this case, since solution (41) must be regular at the origin and function  $N_\zeta(\gamma r)$  is not well behaved in this region, we must make  $B = 0$  in the solution (41). The relevant solution is

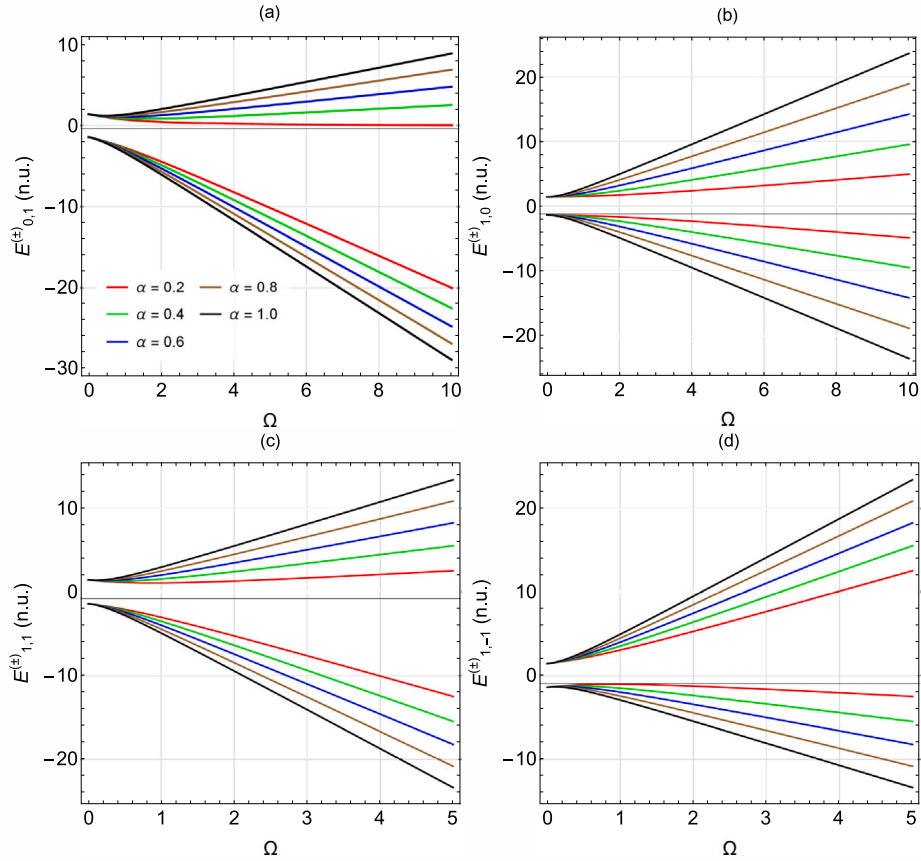
$$\psi(r) = A'J_\zeta(\gamma r). \tag{42}$$

To have a normalized wave function in the region established by the range (21), we must require that

$$\psi\left(r \rightarrow r_0 = \frac{1}{\alpha\Omega}\right) = 0. \tag{43}$$

Note that we can assume sufficiently large, fixed values of  $r_0$  so that we can consider  $\gamma r_0 \gg 1$ , and fixed values of  $\zeta$  and  $\gamma$  [78]. In this limit, we can write the solution (42) in the form

$$\psi(r) = |C_1|\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r_0}}\left(\frac{1 + \frac{E}{\mathcal{N}}}{1 - \frac{E}{\mathcal{N}}}\right)e^{-i(Et - j\varphi - k_z z)}\cos\left(\gamma r_0 - \frac{\zeta\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{44}$$



**Fig. 2.** Sketch of the energies (46) as a function of  $\Omega$  for different values of  $n$  and  $\alpha$ . In (a), the profile for  $n=0$  and  $j=1$ , (b)  $n=1$  and  $j=0$ , (c)  $n=1$  and  $j=1$ , and (d)  $n=1$  and  $j=-1$ . We use  $M=1$ ,  $k_z=1$ , and  $\kappa=2.5$ . A manifestation due to curvature effects is observed when  $\alpha$  is decreased, which implies  $|E_{n,j}^{(\pm)}|$  increasing.

By applying condition (43) to the solution (44), we obtain the relation

$$\gamma r_0 - \frac{\zeta\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{n\pi}{2}, \text{ with } n \in \mathbb{Z}^*, \tag{45}$$

which solved for  $E$  provides

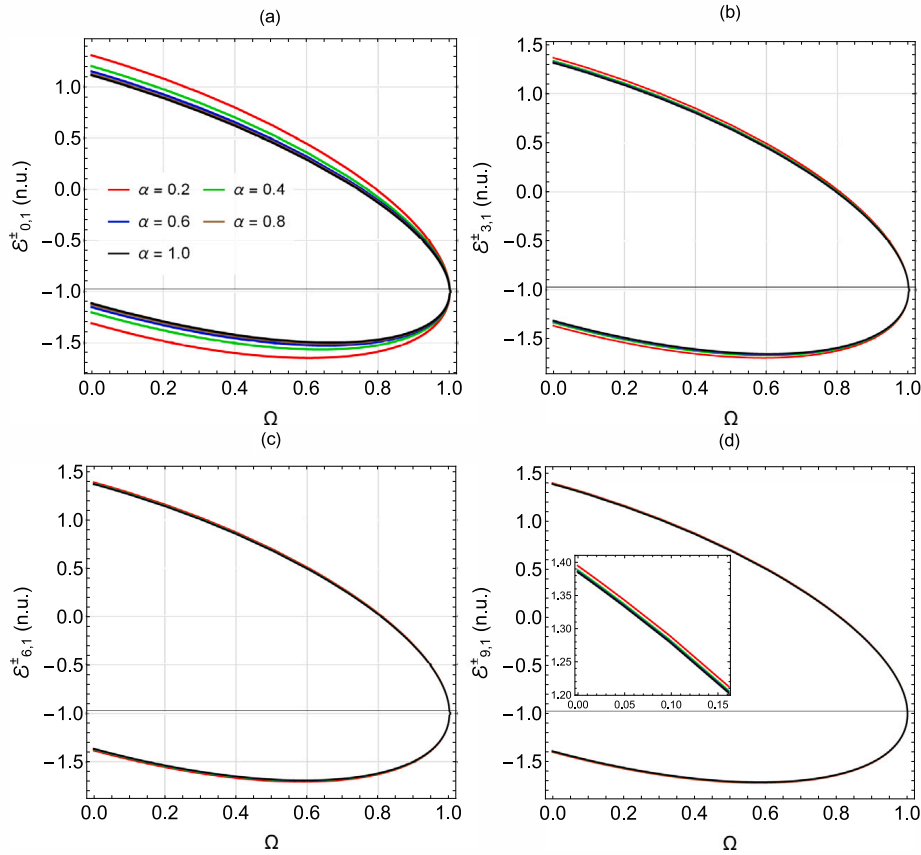
$$E_{n,j}^{(\pm)} = -j\Omega \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\pi\Omega|j| + \frac{1}{4}\pi\Omega\alpha + \frac{1}{2}n\pi\Omega\alpha\right)^2 + k_z^2 + M^2}, \tag{46}$$

which represents the particle’s energy. By studying these energies, we can report some inherent characteristics of the model. We evaluate some particular states of the energy (46) as a function of  $\Omega$ . For all graphical analyses in our article, we use  $M=1$ ,  $k_z=1$ , and  $\kappa=2.5$ . We can see that  $E_{n,j}^{(\pm)}$  exhibits different profiles when  $\alpha$  changes, for example, when  $\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ , and  $j=0$ ,  $|E_{0,0}^{(\pm)}|$  is symmetric about  $\Omega=0$ , and increases when  $\Omega$  is increased (Fig. 1). Other interesting features can be observed when we compare the energy profiles for different values of  $n$  and  $j$  (Fig. 2). For example, when we compare the profiles between  $|E_{0,1}^{(\pm)}|$  and  $|E_{1,0}^{(\pm)}|$ , we find that  $|E_{0,1}^{(+)}| < |E_{1,0}^{(+)}|$  while  $|E_{0,1}^{(-)}| > |E_{1,0}^{(-)}|$  (Figs. 2(a)–(b)). Similarly, when we plot the energies for  $n=1, j=1$  (Fig. 2(c)) and  $n=1, j=-1$  (Fig. 2(d)), we observe that  $|E_{1,1}^{(\pm)}|$  and  $|E_{1,-1}^{(\pm)}|$  increase with  $\Omega$ ; also,  $|E_{1,1}^{(+)}| < |E_{1,-1}^{(+)}|$  while  $|E_{1,1}^{(-)}| > |E_{1,-1}^{(-)}|$ . This manifestation is due to the combined effects of rotation and the parameter  $\alpha$ .

#### 4.2. The coulomb-type potential

In this section, we solve the KG equation with a Coulomb-like potential in the FV formalism. Including this potential in the KG equation allows the investigation of long-range electromagnetic interactions and describes the interaction between charged particles. This investigation is crucial for understanding various physical phenomena, from atomic structure to elementary particle physics. We must consider an attractive Coulomb-type potential to solve the equation and analyze fundamental properties such as bound states. We include the potential in the equation of motion by substituting  $E \rightarrow E - V(r)$  into Eq. (40). The potential  $V(r)$  is specified by

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \tag{47}$$



**Fig. 3.** Sketch of the energies (Eq. (50)) as a function of  $\Omega$  for different values of  $n$  and  $\alpha$ . In (a), the profile for  $n=0$  and  $j=1$ , (b)  $n=3$  and  $j=1$ , (c)  $n=6$  and  $j=1$ , and (d)  $n=9$  and  $j=1$ . We use  $M=1$ ,  $k_z=1$ , and  $\kappa=2.5$ . The states with increasing  $n$  reveal an approximation between the energy curves. When  $\alpha$  is decreased,  $|E_{n,j}^{\pm}|$  increases.

where  $\kappa$  is a positive arbitrary parameter. The radial equation to be solved is

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\zeta^2}{r^2} + \frac{2\lambda}{r} - \gamma^2 \right] \psi_C(r) = 0, \tag{48}$$

where  $\zeta^2 = \zeta^2 + \kappa^2$ ,  $\gamma^2 = M^2 + k_z^2 - (\mathcal{E} + \Omega j)^2$ ,  $\lambda = \kappa (\mathcal{E} + \Omega j)$ , and  $\psi_C(r)$  represents the radial solution to the Coulomb-type problem. The radial Eq. (48) is of the confluent hypergeometric type, and a solution satisfying the asymptotic limits for both  $r \rightarrow 0$  and  $r \rightarrow \infty$  can be found. Furthermore, this equation appears in several problems solved in the literature, so we do not find it necessary to present a detailed solution. Thus, using the results above, it can be shown that the eigenfunctions and energy eigenvalues of Eq. (48) in the FV representation are respectively given by

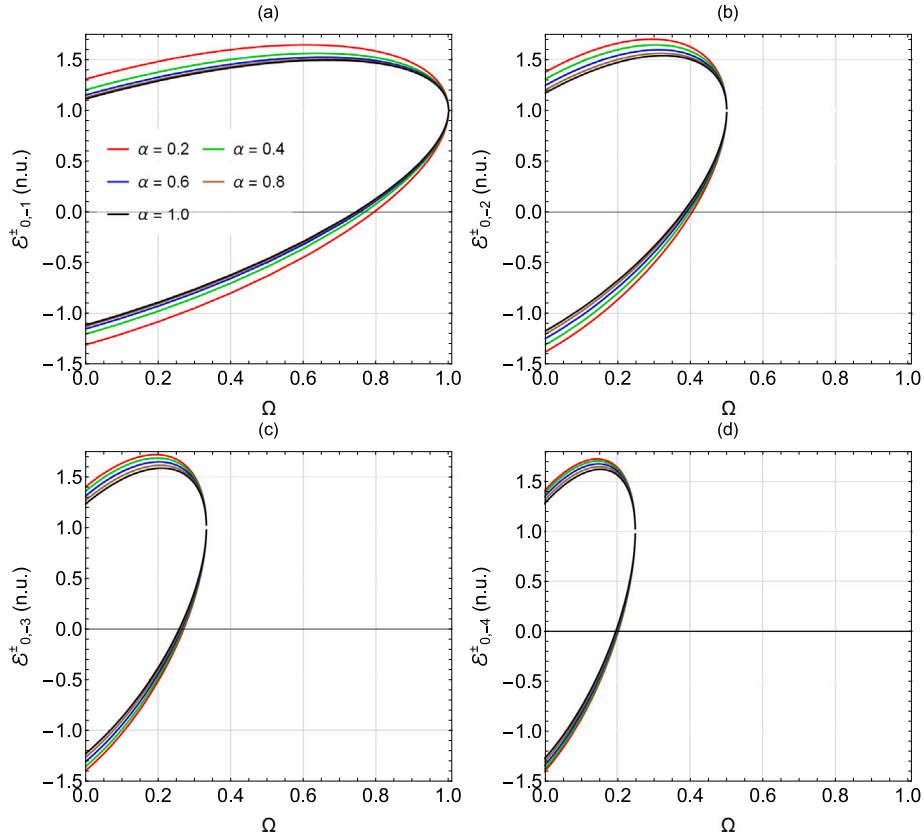
$$\psi_C(\mathbf{r}) = C_n \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{-i(Et - j\zeta - k_z z)} (2\gamma)^{\zeta + \frac{1}{2}} e^{-\gamma r} r^\zeta {}_1F_1(-n, 2\zeta + 1, 2\gamma r), \tag{49}$$

$$\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)} = -j\Omega \pm \frac{(2\zeta + 2n + 1)^2 (k_z^2 + M^2)}{\sqrt{(2\zeta + 2n + 1)^2 (4\kappa^2 + (2\zeta + 2n + 1)^2) (k_z^2 + M^2)}}. \tag{50}$$

It can be verified that possible choices for the parameters in (50) can display different profiles. For example, analyzing the states with  $j=1$  and  $n=0, 3, 6, 9$ , the positive and negative values of  $\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}$  are shown in Fig. 3. The curvature effects on the energies directly impact the spacing between the energy curves, making this spacing somewhat smaller for increasingly larger values of  $n$  (Figs. 3(a)–(d)). The inset in Fig. 3(d) shows that such spacings are maintained, and the energy has an approximately linear change over small rotation intervals. For this particular configuration,  $|\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}|$  decreases when  $\Omega$  increases, and it exists only in the interval  $0 < \Omega < 1$ . A second configuration is displayed in Fig. 4 for  $n=0$  and  $j=-1, -2, -3, -4$ . For this particular configuration,  $|\mathcal{E}_{n,j}^{(\pm)}|$  increases when  $\alpha$  is reduced. However, when  $m$  takes on larger values, the range of  $\Omega$  that defines the allowed energies is reduced. This effect becomes clear when we look at the energy profiles in Figs. 4(a)–4(d).

### 4.3. The Feshbach–Villars oscillator

The final application of our study involves including the FVO in the equation of motion. The FVO is a well-known, exactly solvable model in relativistic quantum mechanics that has been constructed in both flat and curved spacetime [61]. This model



**Fig. 4.** Sketch of the energies (Eq. (50)) as a function of  $\Omega$  for different values of  $n$  and  $\alpha$ . In (a), the profile for  $n = 0$  and  $j = -1$ , (b)  $n = 0$  and  $j = -3$ , (c)  $n = 0$  and  $j = -5$ ; and (d)  $n = 0$  and  $j = -7$ . We use  $M = 1$ ,  $k_z = 1$ , and  $\kappa = 2.5$ . In addition to the features present in Fig. 3, when we set  $n$  and consider different negative values of  $m$ , the energies are defined in a rotation range that tends to decrease with negative  $m$ .

combines the principles of special relativity with quantum mechanics, providing insights into the dynamics of spin-0 particles in a harmonic potential. By exploring the FVO, we gain a deeper understanding of wave equations, energy spectra, and the quantization of fields. Moreover, this study opens doors to investigating phenomena like particle creation and annihilation, vacuum fluctuations, and the manifestation of symmetries. As an extension, it is important to study the FVO in other physical contexts because it helps us to expand our knowledge of fundamental physics, improve our analytical capabilities to solve new equations of motion, and prepare a model for future advances in quantum field theory. It is worth noting that previous research exploring similar topics has been done in the literature (for instance, refer to the following Refs. [79–83]).

The FVO is introduced into Eqs. (28) and (30) by substituting  $\partial_r \rightarrow \partial_r + M\omega r$ . So, we write

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = & -\frac{1}{\mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + M\omega r \right) \left( \sqrt{-g} \left( \frac{\partial}{\partial r} - M\omega r \right) \right) + \sqrt{-g} \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sqrt{-g} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{\mathcal{F}} \\ & + \frac{M^2}{g^{00}} - \left( \frac{g^{02}}{g^{00}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2, \end{aligned} \tag{51}$$

and

$$\mathcal{Y}' = 0. \tag{52}$$

Eq. (51) can be solved by following the same steps as before. We shall insert Eqs. (32) and (51) into the Hamiltonian (29). Subsequently, we assume the solution (35) gives two coupled differential equations similar to those of Eq. (36), but with different expression for  $\mathcal{T}'$ . We obtain the radial equation

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - M^2 \omega^2 r^2 - \frac{\vartheta^2}{r^2} + \delta \right] \psi_{osc}(r) = 0, \tag{53}$$

where we have defined the parameters

$$\vartheta^2 = \frac{j^2}{\alpha^2}, \quad \delta = (E + \Omega j)^2 - M^2 - k_z^2 + M\omega, \tag{54}$$

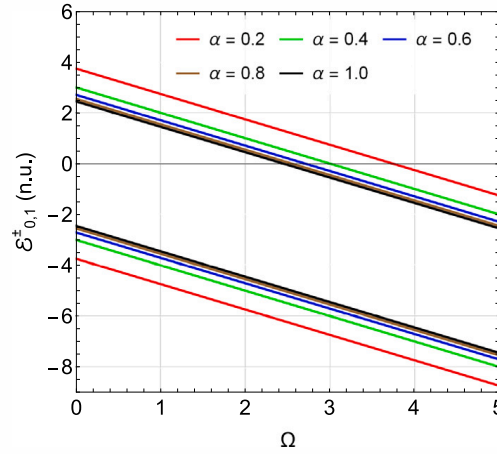


Fig. 5. Sketch of the energies (Eq. (60)) as a function of  $\Omega$  for  $n=0, j=1$  and different values of  $\alpha$ . We use  $M=1, k_z=1$ , and  $\omega=1$ .

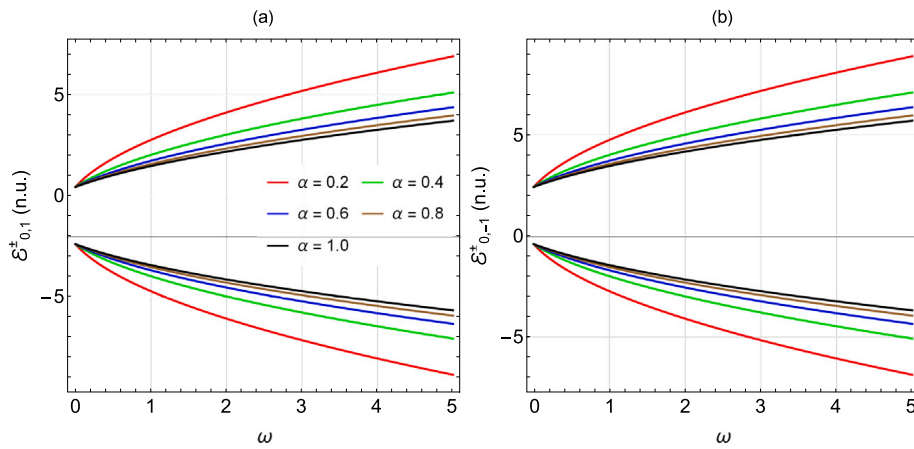


Fig. 6. Sketch of the energies (Eq. (60)) as a function of  $\omega$  for different values of  $\alpha$ . In (a), we plot for  $n=0, j=1$  and, in (b), for  $n=0, j=-1$ . We use  $M=1, k_z=1$ , and  $\Omega=1$ .

and  $\psi_{osc}(r)$  denotes the radial wave function for the FVO problem. To solve Eq. (53), we introduce the new dimensionless variable  $\mathcal{U} = M\omega r^2$ , and replace it in Eq. (53). The resulting equation reads

$$\left[ \frac{d^2}{d\mathcal{U}^2} + \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{d}{d\mathcal{U}} - \frac{\vartheta^2}{4\mathcal{U}^2} - \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4M\omega\mathcal{U}} \right] \psi_{osc}(\mathcal{U}) = 0. \tag{55}$$

Now, we introduce the new function

$$\psi_{osc}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{J}(\mathcal{U}). \tag{56}$$

With this substitution, Eq. (55) becomes

$$\frac{d^2 \mathcal{J}(\mathcal{U})}{d\mathcal{U}^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4M\omega\mathcal{U}} + \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\mathcal{U}^2} \right] \mathcal{J}(\mathcal{U}) = 0. \tag{57}$$

It can be shown that Eq. (57) is of the confluent hypergeometric type, whose solution is given in terms of Kummer functions. Thus, using the definition (35), the solution of Eq. (57) can be written as

$$\psi_{osc}(r) = |C_3| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{N} \\ 1 - \frac{E}{N} \end{pmatrix} (M\omega r^2)^{\frac{|\vartheta|}{2}} e^{-\frac{M\omega r^2}{2}} e^{-i(Et-j\varphi-ik_z z)} {}_1F_1 \left( \frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4m\omega} + \frac{1}{2}, |\vartheta| + 1, M\omega r^2 \right), \tag{58}$$

where the parameters  $\vartheta$  and  $\delta$  are defined in Eq. (54). The energy levels of the KGO are found using the relation

$$\frac{|\vartheta|}{2} - \frac{\delta}{4M\omega} + \frac{1}{2} = -n. \tag{59}$$



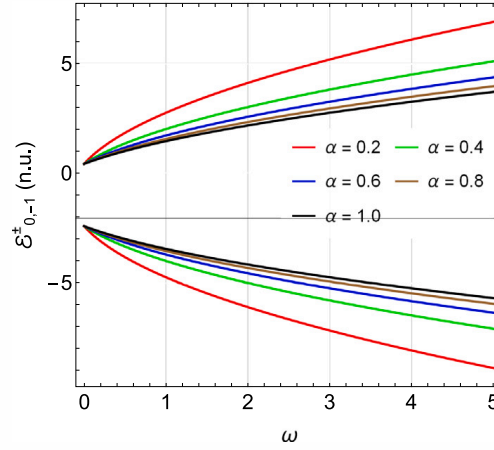


Fig. 7. Sketch of the energies (Eq. (60)) as a function of  $\omega$  for  $n=0, j=-1, \Omega=-1$  and different values of  $\alpha$ . We use  $M=1, k_z=1$ .

Substituting back the parameters  $\vartheta$  and  $\delta$  in Eq. (59) and solving the resulting equation for  $E$ , we obtain the energy levels

$$\mathcal{E}_{n,j}^{\pm} = -\Omega j \pm \sqrt{2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) + M^2 + k_z^2}, \quad (60)$$

and the corresponding wave functions are

$$\psi_{osc}(\mathbf{r}) = |C_3| \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{\mathcal{N}} \\ 1 - \frac{E}{\mathcal{N}} \end{pmatrix} (M\omega r^2)^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{M\omega}{2} r^2} e^{-i(Et - j\varphi - ik_z z)} {}_1F_1(-n, |j| + 1, M\omega r^2). \quad (61)$$

It is immediate to see that the plot of (60) as a function of  $\Omega$  is linear. For the particular state  $\mathcal{E}_{0,1}^{(\pm)}$  with  $\omega=1$ , we find that  $|\mathcal{E}_{0,1}^{(\pm)}|$  increases when  $\alpha$  decreases. On the other hand, when we analyze the profile of (60) as a function of the oscillator frequency  $\omega$ , we find that  $|\mathcal{E}_{0,1}^{(\pm)}|$  e  $|\mathcal{E}_{0,-1}^{(\pm)}|$  increase with  $\alpha$  decreasing (Fig. 6). Furthermore,  $|\mathcal{E}_{0,1}^{(+)}| < |\mathcal{E}_{0,-1}^{(+)}|$  while  $|\mathcal{E}_{0,1}^{(-)}| > |\mathcal{E}_{0,-1}^{(-)}|$  (see Figs. 6(a)–(b) for comparison). When we assume negative values of  $\Omega$  in Fig. 6(b), for example,  $\Omega=-1$ , the oscillator energies for  $\alpha=0.2$  are or all negative (see the red solid line in Fig. 7). The energies of the FVO are affected by the curvature, specifically by the term  $|j|/\alpha$  (see Fig. 5).

At this stage, a remark about the difference of our results with those obtained by Bastos [79] can be made here :

- In the conventional relativistic approach, the interaction of S=0 and S=1 hadrons with different nuclei has been described by the second-order KG equation for S=0 and the Proca equation for S=1 particles.
- The Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation [84–87] represents a generalization of both the KG and Proca equations. This formalism unifies scalar and vector particles, analogous to how the Dirac equation does for fermions. However, the DKP equation has seen a decline in interest due to its equivalence to the KG description in on-shell scenarios, as well as its increased algebraic complexity compared to the KG formulation.
- Conversely, as discussed in the introduction section, the FV formalism linearizes the time derivative of the KG equation while preserving its second-order dependence in coordinate space. This transformation effectively transforms the KG equation into a Schrödinger-like equation.
- Taking into account the previous points, it becomes evident that the FVO and DKP oscillators for scalar particles are not directly connected, even though their solutions may appear similar.

Finally, we would like to report that spacetime (20) has been used to study other models in high-energy physics. In these studies, we can find different values of  $\Omega$ . For example, the existence of the electric current along the axis of the matter rotation is predicted when we study electroweakly interacting particles in rotating matter<sup>2</sup> [88]. This effect is known as Galvano-rotational, which is caused by the parity-violating interaction between massless charged particles in the rotating matter. In this study, is presented the possibility of the appearance of the Galvano-rotational effect in dense matter of compact astrophysical objects. In the case of a pulsar, the Galvano-rotational effect is used to generate a toroidal magnetic field inside it of the order  $B \approx 4.9 \times 10^8$  G ( $\approx 49.0$  K Tesla) for  $\Omega = 10^3$  Hz. Other studies, including  $\Omega$  of the order of KHz, have also been developed in the context of rotating stars in relativity [89]. Rotating relativistic stars have been studied extensively in recent years, both theoretically and observationally, because of the information they might yield about the equation of state of matter at extremely high densities and because they are considered to be promising sources of gravitational waves (see Ref. [90] to access more topics on this issue). For purely theoretical investigations, depending on the model being studied, we can certainly use higher rotation values ( $10^9 - 10^{20}$  Hz) [91].

<sup>2</sup> For a direct comparison between the metrics (20) and (3.1) of Ref. [88], we shall make  $\alpha=1$  and  $\Omega \leftrightarrow \omega$ .

## 5. Conclusion

We have investigated the relativistic quantum motion of a spinless particle by solving the KG equation in the FV representation. We have considered the particle under spin effects in the space–time cosmic string. We briefly reviewed the FV formalism and subsequently used the results to find the KG equation in the space–time of the spinning cosmic string. To illustrate the importance of the model studied, we have performed three applications. First, we study the KG equation for the particular case where the particle is confined to a hard-wall potential. Next, we study the particle’s motion in the presence of a Coulomb-type potential, and we finish by studying the KG equation with the inclusion of the KGO. Wave functions and energies for the three models were determined. We have shown through graphical sketches of the energies that for certain values of rotation and curvature (through the  $\alpha$  parameter), the particle’s energy shows limited profiles, especially with the presence of rotation. We have argued that curvature strongly impacts the magnitude of the energy levels. With these results, we would like to point out that other physical properties can be studied, such as optical and thermodynamic properties and possible connections to other physical systems in condensed matter.

### Funding statement

No funds have been received for this manuscript.

### CRediT authorship contribution statement

**Abdelmalek Bouzenada:** Software, Writing – original draft. **Abdelmalek Boumali:** Supervision, Software, Writing – review & editing. **Edilberto O. Silva:** Supervision, Writing – review & editing.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Data availability

No data was used for the research described in the article.

### Acknowledgments

E. O. Silva acknowledges Brazilian agencies Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - (CNPq) Grant 306308/2022-3, Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - (FAPEMA) Grant UNIVERSAL-06395/22, and Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brazil (CAPES) - Finance Code 001. The authors would like to thank the referees for their careful review of our manuscript and valuable suggestions.

### References

- [1] A. Einstein, *Ann. Physics* 49 (1916) 769.
- [2] B.P. Abbott, et al., *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- [3] K. Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019) L1.
- [4] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Courier Corporation, 1965.
- [5] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2013.
- [6] A. Ashtekar, J.J. Stachel, *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, Birkhäuser, 1991.
- [7] L. Smolin, *The trouble with physics: The rise of string theory, the fall of a science, and what comes next*, 2007.
- [8] N.D. Birrell, P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, in: *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, 1980.
- [9] L. Parker, D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, Cambridge University Press, 2009.
- [10] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* 43 (1975) 199.
- [11] W.G. Unruh, R.M. Wald, *Phys. Rev. D* 25 (1982) 942.
- [12] G.L. Sewell, *Ann. Phys.* 141 (1982) 201.
- [13] T.W.B. Kibble, *J. Phys. A* 9 (1976) 1387.
- [14] Y.B. Zel’dovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 192 (1980) 663.
- [15] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* 121 (1985) 263.
- [16] T.W.B. Kibble, *Phys. Rep.* 67 (1980) 183.
- [17] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* 133 (1983) 177.
- [18] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 1985.
- [19] M. Moshinsky, Y.F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Editions Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.
- [20] D. Itô, K. Mori, E.W. Carriere, *Il Nuovo Cimento A* 51 (1967) 1119.
- [21] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A, Math. Gen.* 22 (1989) L817.
- [22] Márcio M. Cunha, Henrique S. Dias, Edilberto O. Silva, *Phys. Rev. D* 102 (2020) 105020.
- [23] Daniel F. Lima, Fabiano M. Andrade, Luis B. Castro, Cleverson Filgueiras, Edilberto O. Silva, *Eur. Phys. J. C* 79 (2019) 596.
- [24] Fabiano M. Andrade, Edilberto O. Silva, *Europhys. Lett.* 108 (2014) 30003.
- [25] Fabiano M. Andrade, Edilberto O. Silva, *Phys. Lett. B* 738 (2014) 44–47.
- [26] F.M. Andrade, E.O. Silva, M.M. Ferreira Jr., E.C. Rodrigues, *Phys. Lett. B* 731 (2014) 327–330.

- [27] A. Boumali, EJTP 32 (2015) 121–130.
- [28] A. Boumali, L. chetouani, Phys. Lett. A 346 (2005) 261–268.
- [29] V.V. Dvoeglazov, Il Nuovo Cimento A 107 (1994) 1785.
- [30] J. Carvalho, A.M. de M. Carvalho, E. Cavalcante, C. Furtado, Eur. Phys. J. C 76 (2016) 1.
- [31] L.C. dos Santos, C. de Camargo Barros, Eur. Phys. J. C 78 (2017) 1.
- [32] R.L.L. Vitória, K. Bakke, Eur. Phys. J. C 78 (2018) 1.
- [33] R.R. Cuzinato, M. de Montigny, P. Pompeia, Class. Quan. Grav. 39 (2022) 075006.
- [34] F. Ahmed, Europhys. Lett. 131 (2020) 30002.
- [35] L.L. Foldy, Phys. Rev. 102 (1956) 568.
- [36] L.L. Foldy, S.A. Wouthuysen, Phys. Rev. 78 (1950) 29.
- [37] H. Feshbach, F.M.H. Villars, Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 24.
- [38] A. Boumali, H. Aounallah, Adv. High Energy Phys. (2018) 2018.
- [39] H. Aounallah, A. Boumali, Phys. Part. Nuclei Lett. 16 (2019) 195–205.
- [40] A. Boumali, H. Aounallah, Rev. Mexicana Fís. 66 (2020) 192–208.
- [41] B.A. Robson, D.S. Staudte, J. Phys. A: Math. Gen. 29 (1996) 157.
- [42] D.S. Staudte, J. Phys. A 29 (1996) 169.
- [43] M. Merad, L. Chetouani, A. Bounames, Phys. Lett. A 267 (2000) 225.
- [44] A. Bounames, L. Chetouani, Phys. Lett. A 279 (2001) 139.
- [45] S. Haouat, L. Chetouani, Eur. Phys. J. C 41 (2005) 297.
- [46] N. Brown, Z. Papp, R.M. Woodhouse, Few-Body Syst. 57 (2015) 103.
- [47] B. Motamedi, T. Shannon, Z. Papp, Few-Body Syst. (2019) 1–7.
- [48] O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895.
- [49] W. Gordon, Z. Phys. 40 (1926) 117.
- [50] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations, 2000.
- [51] F.L. Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, John Wiley and Sons, 1993.
- [52] A.J. Silenko, Phys. Rev. A 77 (2008) 012116.
- [53] K. Khounfais, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Czech. J. Phys. 54 (2004) 697–710.
- [54] B. Guettou, L. Chetouani, Phys. Scr. 74 (2006) 12–18.
- [55] Natalie. Brown, (B.S. Mathematics and Physics), 2010, University of Missouri, Columbia, 2015.
- [56] Robert M. WoodhouseL, (Ph.D. Biology), 1979, Arizona State University, 2012.
- [57] Antonio Garcia Vallejo, (B.S. 2018), California State University, San Bernardino, 2020.
- [58] Y. Chargui, A. Dhabbi, A.R. Karam, Heliyon 8 (2022) e11215.
- [59] B. Mirza, M. Mohadesi, Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 664.
- [60] I. Gott, J. R, Astrophys. J. 288 (1985) 422.
- [61] A. Bouzenada, A. Boumali, Ann. Phys. 452 (2023) 169302.
- [62] Gal'tsov, Letelier, Phys. Rev. D 47 (1993) 4273.
- [63] A. Bouzenada, A. Boumali, R.L.L. Vitoria, F. Ahmed, M. Al-Raei, Nuclear Phys. B 994 (2023) 116288.
- [64] A. Bouzenada, A. Boumali, M. Al-Raei, 2023, preprint arXiv:2302.13805.
- [65] A. Boumali, N. Messai, Can. J. Phys. 92 (2014) 1460.
- [66] A. Vilenkin, Phys. Rep. 121 (1985) 263.
- [67] K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus 127 (2012) 82.
- [68] K. Bakke, C. Furtado, Eur. Phys. J. C 69 (2010) 531.
- [69] K. Bakke, C. Furtado, Phys. Rev. D 80 (2009) 024033.
- [70] K. Bakke, C. Furtado, Phys. Rev. D 82 (2010) 084025.
- [71] T.W.B. Kibble, J. Phys. A 9 (1976) 1387.
- [72] P.O. Mazur, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 929.
- [73] K. Bakke, Modern Phys. Lett. B 27 (3) (2013) 1350018.
- [74] A.J. Silenko, Theoret. Math. Phys. 156 (2008) 1308.
- [75] A. Mostafazadeh, J. Phys. A 31 (1998) 7829.
- [76] R. Casana, M. Pazetti, B.M. Pimentel, J.S. Valverde, Il Nuovo Cimento (2009) 485–498.
- [77] A.J. Silenko, Phys. Rev. D 88 (2013) 045004.
- [78] J. Gonzales, F. Guinea, M.A.H. Vozmediano, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 172;  
M.A. Hasan, C.L. Kane, Rev. Mod. Phys. 82 (2010) 3045.
- [79] Luis B. Bastos, Eur. Phys. J. C 76 (2016) 61.
- [80] L.C.N. Santos, C.C. Barros Jr., Eur. Phys. J. C 77 (2017) 186.
- [81] F.A.C. Neto, F.M. da Silva, L.C.N. Santos, Luis B. Bastos, Eur. Phys. J. Plus 135 (2020) 25.
- [82] F. Ahmed, Chinese J. Phys. 66 (2020) 587–595.
- [83] A. Bouzenada, A. Boumali, F. Serdouk, Theoret. Math. Phys. 216 (2023) 1055–1067.
- [84] Petiau, Acad. Roy. de Belg. Classe Sci. Mem in 8o 16 (1936) 2.
- [85] N. Kemmer, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 166 (1938) 127.
- [86] R.J. Duffin, Phys. Rev. 54 (1114) (1938) N.
- [87] Kemmer, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 173 (1939) 91.
- [88] Maxim Dvornikov, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2015) 037.
- [89] Vasileios Paschalidis, Nikolaos Stergioulas, Living Rev. Relativ. 20 (2017) 7.
- [90] (Undergraduate Lecture Notes in Physics) Jorge Ernesto Horvath - High-Energy Astrophysics - A Primer, Springer, 2022.
- [91] H. Torres-Silva, Revista Chilena de Ingeniería 16 (2008) 72–77.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys.* **1916**, 49, 769–822.
- [2] B. Abbott, *Phys. Rev. Lett.* **2016**, 116, 061102.
- [3] K. Akiyama, *Astrophys J Lett.* **2019**, 875, L1.
- [4] R. P. Feynman, *Rev. Modern Phys.* **1948**, 20, 367–387.
- [5] R. P. Feynman, R. H. Albert, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, **1965**.
- [6] D. S. Matthew, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, **2013**.
- [7] N. Rosen, *Phys Rev.* **1940**, 57, 147.
- [8] A. Einstein, N. Rosen, *Phys Rev.* **1935**, 48, 73.
- [9] A. Ashtekar, J. J. Stachel **1991**.
- [10] L. Smolin, *The Trouble With Physics : The Rise of String Theory, The Fall of a Science, and What Comes Next*, **2006**.
- [11] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, CRC press, **2018**.
- [12] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, **1984**.
- [13] L. Parker, D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime : Quantized Fields and Gravity*, **2009**.
- [14] N. D. Birrell, P. Davies, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1980**, 13, 2109.
- [15] S. W. Hawking, *Nature.* **1974**, 248, 30.

- [16] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **1975**, *43*, 199–220.
- [17] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D.* **1976**, *13*, 191.
- [18] W. G. Unruh, M. W. Wald, *Phys. Rev. D.* **1982**, *25*, 942–958.
- [19] G. L. Sewell, *Ann. Phys.* **1982**, *141*, 201–224.
- [20] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1976**, *9*, 1387.
- [21] T. W. B. Kibble, *Phys. Rep.* **1980**, *67*, 183–199.
- [22] R. H. Brandenberger, *Int. J. Modern Phys. A.* **1994**, *9*, 2117–2189.
- [23] K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus.* **2012**, *127*, 1–8.
- [24] K. Bakke, *Gen. Rel. Grav.* **2013**, *45*, 1847–1859.
- [25] K. Bakke, *Ann. Physics.* **2014**, *341*, 86–93.
- [26] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Physics.* **2015**, *355*, 48–54.
- [27] K. Bakke, H. Mota, *Eur. Phys. J. Plus.* **2018**, *133*, 1–9.
- [28] I. C. Fonseca, K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus.* **2016**, *131*, 1–6.
- [29] I. C. Fonseca, K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus.* **2016**, *131*, 67.
- [30] R. L. L. Vitória, K. Bakke, *Int. J. Mod. Phys. D* **2018**, *27*, 1850005.
- [31] R. L. L. Vitória, K. Bakke, *Eur. Phys. J. C.* **2018**, *78*, 1–6.
- [32] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus.* **2015**, *130*, 1–10.
- [33] H. H. M. Hosseinpour, M. D. Montigny, *Eur. Phys. J. C.* **2019**, *79*, 1–7.
- [34] J. R. Gott, M. Alpert, *Gen. Rel. Grav.* **1984**, *16*, 243–247.
- [35] J. R. Gott, *Astrophys J.* **1985**, *288*, 422–427.
- [36] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B.* **1983**, *133*, 177–179.
- [37] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **1985**, *121*, 263–315.
- [38] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1989**, *22*, L817.

- [39] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publishers, **1996**.
- [40] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, *23*, 2263–2272.
- [41] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A : Math. Gen.* **2005**, *41*, 1747.
- [42] D. Itô, *Nuovo Ciment A.* **1967**, *51*, 1119.
- [43] R. P. Martinez-Romero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys.* **1992**, *33*, 1831.
- [44] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys* **1995**, *16*, 135–141.
- [45] A. Boumali, *Z. Naturf. a* **2015**, *70*, 867–874.
- [46] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys.* **2014**, *92*, 1460–1463.
- [47] A. Boumali, L. Chetouani, *Physics Letters A* **2005**, *346*, 261–268.
- [48] A. Boumali, *Solutions de l'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour certaines formes d'interactions*, U. of Annaba (Ed.), Department of physics, **2006**.
- [49] A. Boumali, *Turk. J. Phys.* **2007**, *31*, 307–316.
- [50] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2009**, *42*, 235301.
- [51] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys.Scr* **2011**, *84*, 1–2.
- [52] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus.* **2013**, *128*, 124.
- [53] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys.* **2014**, *92*, 1460–1463.
- [54] A. Boumali, *EJTP.* **2015**, *12*, 121–130.
- [55] A. Boumali, *Phys.Scr.* **2015**, *90*, 045702.
- [56] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2015**, *90*, 109501.
- [57] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys.* **2017**, *95*, 999–1004.
- [58] A. Boumali, H. Aounallah, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, *2018*.
- [59] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Phys. A.* **2020**, *533*, 124207.
- [60] A. Boumali, T. I. Rouabhia, *Phys. Lett. A.* **2021**, *385*, 126985.
- [61] A. Bouzenada, A. Boumali, *Ann. Physics* **2023**, *452*, 169302.

- [62] A. B. A. Bouzenada, A.-R. Marwan, *arXiv preprint arXiv :2302.13805* **2023**.
- [63] A. Boumali, L. Malika, *Modern Phys. Lett. A* **2018**, *33*, 1850033.
- [64] Z. Selama, A. Boumali, *Rev. Mex. Fis.* **2021**, *67*, 226–237.
- [65] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen* **1994**, *27*, 4301.
- [66] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math.Gen.* **1998**, *31*, 6717–6724.
- [67] S. Bruce, P. Minning, *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*. **1993**, *106*, 711–713.
- [68] V. V. Dvoeglazov, *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*. **1994**, *107*, 1785–1788.
- [69] H. Feshbach, F. M. H. Villars, *Rev. Modern Phys.* **1958**, *30*, 24–45.
- [70] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, N. Y. McGraw-Hill (Ed.), **1953**.
- [71] S. Norbert, *General relativity*, Springer Science & Business Media, **2012**.
- [72] M. Thomas, G. Frank, *arXiv preprint arXiv :0904.4184* **2009**.
- [73] M. P. Hobson, *General relativity : an introduction for physicists*, Cambridge University Press, **2006**.
- [74] N. L. Gregory, *The geometry of Minkowski spacetime : An introduction to the mathematics of the special theory of relativity, Vol. 92*, Springer Science & Business Media, **2012**.
- [75] R. C. C. Francesco, D. Boccaletti, V. Catoni, *Geometry of Minkowski space-time*, Springer Science & Business Media, **2011**.
- [76] J. F. Thomas, *American journal of physics.* **2005**, *73*, 653–662.
- [77] A. Gangui, *arXiv preprint astro-ph/0110285*. **2001**.
- [78] G. Andrews, *Special Functions*, Cambridge : Cambridge University Press, **1999**.
- [79] G. Andrews, *Special Functions.*, Cambridge University Press, **2001**.
- [80] G. Andrews, *Special Functions*, Cambridge University Press, **2001**.
- [81] M. H. Pacheco, *Phys. Lett. A.* **2003**, *93*, 2003.
- [82] M. H. Pacheco, *EPL.* **2014**, *108*, 10005.
- [83] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. Almeida, R. R. Landim, *Eur. Phys. Lett* **2014**, *108*, 10005.
- [84] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2007**, *76*, 669.

- [85] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch.* **2015**, *70*, 619–627.
- [86] K. Chabi, A. Boumali, *Rev Mex Fis.* **2020**, *66*, 110–120.
- [87] A. B. H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, S. Zarrinkamar, *J. Math. Phys.* **2014**, *55*, 033502.
- [88] T. J. Stait-Gardner, *Thermodynamics in curved space*, University of Western Sydney, **2005**.
- [89] A. Boumali, *EJTP.* **2015**, *12*.
- [90] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr.* **2011**, *84*, 037001.
- [91] A. S. Werner, H. Kaiser, *Quantum Mechanics in Curved Space-Time*, Springer US, **1990**.
- [92] S. A. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved space-time*, Cambridge University Press, **1989**.
- [93] M. M. Cunha, E. O. Silva, *Phys. Rev. D.* **2020**, *102*, 105020.
- [94] N. Messai, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus.* **2015**, *130*, 1–8.
- [95] M. L. Strekalov, *Chem. Phys. Lett.* **2004**, *393*, 192–196.
- [96] M. L. Strekalov, *Chem. Phys. Lett.* **2007**, *439*, 209–212.
- [97] M. L. Strekalov, *Chem. Phys. Lett.* **2009**, *362*, 75–81.
- [98] M. L. Strekalov, *Chem. Phys. Lett.* **2009**, *355*, 62–66.
- [99] M. L. Strekalov, *Chem. Phys. Lett.* **2021**, *764*, 138262.
- [100] M. L. Strekalov, A. L. Burshtein, *Chem. Phys. Lett.* **1982**, *86*, 295–298.
- [101] J. D. Beckenstein, *Phys. Rev. D.* **1972**, *9*, 3292.
- [102] D. Lynden-Bell, R. M. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **1977**, *181*, 405–419.
- [103] H. G. S. Zaim, Y. Delenda, *Int J Geom Methods M Phys.* **2017**, *14*, 1750141.
- [104] W. Hiscock, *Phys. Rev. D.* **1985**, *31* 12, 3288–3290.
- [105] D. V. Galtsov, P. S. Letelier, *Phys. Rev. D.* **1993**, *47* 10, 4273–4276.
- [106] E. C. J. Carvalho, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C.* **2016**, *76*, 365.
- [107] A. J. Silenko, *Phys. Rev. D.* **2013**, *88*, 045004.



- [108] A. J. Silenko, *Phys. Rev. A* **2008**, 77, 012116.
- [109] A. J. Silenko, *Theoret. Math. Phys.* **2008**, 156, 1308–1318.
- [110] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [111] F. Bragança, et al., *Int J Mod Phys D*. **2015**, 24, 1550055.
- [112] A. Faizuddin, *Europhys. Lett.* **2020**, 131.
- [113] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier (Ed.), Academic Press., **1995**.
- [114] G. B. Arfken, W. J. Hans **1999**.
- [115] H. J. W. G. B. Arfken, F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists : A Comprehensive Guide*, Elsevier Science, **2012**.
- [116] H. Feshbach, F.M.H.Villars, *Rev. Modern Phys.* **1958**, 30, 24–45.
- [117] P. Mazur, *Phys. Rev. Lett.* **1986**, 57 8, 929–932.
- [118] P. S. Gerbert, R. Jackiw, *Comm. Math. Phys.* **1989**, 124, 229–260.
- [119] V. Lorecni, E. Moreira, *Phys. Rev. D*. **2000**, 63, 027501.
- [120] V. Lorenci, E. Moreira, *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.* **2004**, 127, 150–151.
- [121] V. Lorecni, E. Moreira, *Phys. Rev. D*. **2004**, 70, 047502.
- [122] V. Lorecni, E. Moreira, *Phys. Lett. B*. **2009**, 679, 510–514.
- [123] V. Lorecni, E. Moreira, *Phys. Rev. D*. **2000**, 63, 027501.
- [124] M. S. Cunha, C. R. Muniz, H. R. Christiansen, V. B. Bezerra, *Eur. Phys. J. C*. **2016**, 76, 1–7.
- [125] M. M. Cunha, E. O. Silva, *Universe*. **2020**, 6, 203.
- [126] M. M. Cunha, E. O. Silva, *Adv. High Energy Phys.* **2021**.
- [127] C. R. Muniz, V. B. Bezerra, M. S. Cunha, *Ann. Physics.* **2014**, 350, 105–111.
- [128] Z. W. Bing-Qian, C.-Y. Long, S. Wu, *Modern Phys. Lett. A*. **2018**, 33, 1850025.
- [129] Z. Wang, Z. W. Long, L. Chao-Yun, W. Bing-Qian, *Can. J. Phys.* **2017**, 95, 331–335.
- [130] D. S. J. Roman, G. Hooft, *Ann. Physics.* **1984**, 152, 220–235.

- [131] A. J. Silenko, *Theoret. Math. Phys.* **2008**, *156*, 1308–1318.
- [132] W. Bing-Qian, L. Zheng-Wen, Chao-Yun, S. Wu, *Int. J. Mod. Phys. A.* **2018**, *33*, 1850158.
- [133] A. Accioly, H. Blas, *Phys. Rev. D* **2002**, *66*, 067501.
- [134] H. Nielsen, M. Ninomiya, *Progr. Theoret. Phys* **2005**, *113*, 603.
- [135] H. Nielsen, M. Ninomiya, *Progr. Theoret. Phys* **2005**, *113*, 625.
- [136] N. M. Myers, *New J. Phys*, **2021**, *23*, 105001.
- [137] P. Richard, D. Kaminski, *Asymptotics and mellin-barnes integrals, Vol. 85*, Cambridge University Press, **2001**.
- [138] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1995**.
- [139] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions, Vol. 855*, Springer, **2012**.
- [140] A. M. Frassino, M. Dimitri, O. Panella, R. Pinaki, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2020**, *53*.
- [141] R. Patthria, *Statistical Mechanics, Pergamon Press, Oxford* **1972**.
- [142] F. Villafane, *Phys. Rev. Lett.* **2013**, *111*, 170405.
- [143] A. Bermudez, *Phys. Rev. A*, **2007**, *76*, 041801.
- [144] A. Bermudez, *Phys. Rev. A*, **2008**, *77*, 033832.
- [145] R. Gerritsma, *Nature*, **2010**, *463*, 68–71.
- [146] L. Lamata, J. Casanova, R. Gerritsma, C. F. Roos, J. J. Garcia-Ripoll, E. Solana, *New Journal. of Physics* **2011**, *13*, 095003.
- [147] R. Blatt, R.F.Christian, *Nature Physics*, **2012**, *8*, 277–284.
- [148] D.L.Miller, *First.J. A. Stroschio, Science*, **2009**, *324*, 925–927.
- [149] A. Hashimoto, *Nature*, **2004**, *430*, 870–873.
- [150] J. Meyer, *Nature*, **2007**, *446*, 60–63.
- [151] M. Ishigami, *Williams Nano Lett*, **2007**, *7*, 1643.–1648.
- [152] A. Cortijo, M. A. H. Vozmediano, *Nucl. Phys. B*, **2007**, *763*, 293–308.

- [153] C. Bauerle, *Nature* **1996**, 382, 332.–334.
- [154] A. Gallerati, *Eur. Phys. J. Plus*, **2019**, 134, 202.
- [155] T. Kaluza, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* **1921**, K1, 966–972.
- [156] O. Klein, *Zeitschrift f .ur Physik* **1926**, 37, 895–906.
- [157] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Phys. Rep.* **1997**, 283, 303–380.
- [158] A. Faizuddin, *Modern Phys. Lett. A.* **2020**, 35, 2050220.
- [159] F. D. Omer, J. Ahmed, *J. Math. Phys* **2002**, 43, 4592.
- [160] E. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitoria, *Braz. J. Phys.* **2020**, 50, 744–749.
- [161] R. L. L. Vitoria, *Eur. Phys. J. C.* **2019**, 79, 1–7.
- [162] E. Leite, H. Belich, R. L. L. Vitoria, *Braz J Phys.* **2020**, 50, 744–749.
- [163] R. L. L. Vitoria, H. Belich, *Phys. Scr.* **2019**, 94, 125301.
- [164] F. Bragança, et al., *Eur. Phys. J. C* **2020**, 80, 206.
- [165] R. L. L. Vitoria, H. Belich, *Adv. High Energy Phys* **2019**, 2019, 1248393.
- [166] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Vol. 55, Dover Publications, New York, **1970**.
- [167] K. Godel, *Rev. Mod. Phys.* **1949**, 21, 447.
- [168] M. M. Som, A. K. Raychaudhuri, *Proc. R. Soc. A* **1987**, 4, 1633.
- [169] B. D. Figueiredo, I. D. Soares, *Class. Quantum Gravity* **1992**, 9, 1593.
- [170] M. W. Robert, *Green's function solution to relativistic Feshbach-Villars wave equations for spin zero particles*, California State University, Long Beach, **2012**.
- [171] R. R. Cuzinatto, *Class. Quan. Grav* **2022**, 39, 075006.
- [172] H. Aounallah, A. Boumali, *Physics of Particles and Nuclei Letters.* **2019**, 16, 195–205.
- [173] A. Boumali, H. Aounallah, *Rev. Mex. Fis.* **2020**, 66, 192–208.
- [174] A. Bounames, L. Chetouani, *Phys. Lett. A.* **2001**, 279, 139–150.
- [175] R. R. Cuzinatto, *Class. Quan. Grav.* **2022**, 39.

- [176] H. Aounallah, A. Boumali, *Phys. Part. Nuclei Lett.* **2019**, *16*, 195–205.
- [177] S. Haouat, L. Chetouani, *Eur. Phys. J. C.* **2005**, *41*, 297–303.
- [178] N. Brown, Z. Papp, R. M. Woodhouse, *Few-Body Systems.* **2015**, *57*, 103–108.
- [179] B. Motamedi, T. Shannon, Z. Papp, *Few-Body Systems.* **2019**.
- [180] W. Gordon, *Z. Phys.* **1926**, *40*, 117–133.
- [181] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*, **2000**.
- [182] F. Gross, *Relativistic quantum mechanics and field theory*, **1993**.
- [183] S. Zare, H. Hassanabadi, M. Montigny, *Gen. Relativity Gravitation.* **2020**, *52*, 1–20.
- [184] K. Bakke, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* **2010**, *69*, 531.
- [185] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2009**, *80*, 024033.
- [186] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2010**, *82*, 084025.
- [187] L. Foldy, S. Wouthuysen, *Phys Rev.* **1950**, *78*, 29–36.
- [188] R. Casana, J. T. Lunardi, B. M. Pimen, R. G. Teixeira, *Class. Quant. Grav* **2005**, *22*, 3083.
- [189] L. Santos, C. C. Barros, *Eur. Phys. J. C.* **2017**, *78*, 1–8.
- [190] L. S. F. Neto, F. Silva, L. B. Bastos, *Eur. Phys. J. Plus* **2020**, *135*, 25.
- [191] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. London.* **1939**, *173*, 91–116.
- [192] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **1938**, *54*, 1114.
- [193] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. Lond. A* **1938**, *166*, 127.
- [194] M. Dvornikov, *JCAP* **2015**, *05*, 37.
- [195] V. Paschalidis, N. Stergioulas, *Living Rev Relativ* **2017**, *20*, 1–169.
- [196] J. E. Horvath in *High-Energy Astrophysics : A Primer*, Springer, **2022**, pp. 45–56.
- [197] H. Torres-Silva, *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería* **2008**, *16*, 72–77.
- [198] G.A.Korn, T.M.Korn, *MATHEMATICAL Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, **2000**.

- [199] A. B. A. Bouzenada, S. Fadila, *Theoret. Math. Phys.* **2023**, *216*, 1055–1067.
- [200] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A.* **1998**, *31*, 7829–7845.
- [201] A. Oliveira, E. Mello, *Class. Quantum Grav.* **2006**, *23*, 5249–5263.
- [202] A. J. Silenko, *Phys. Rev. A.* **2008**, *77*, 012116.
- [203] S. A. Khan, *Optik* **2006**, *117*, 481–488.
- [204] J. A. Silenko, *J. Math. Phys.* **2003**, *44*, 2952–2966.