



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieure

Et La de Recherche Scientifique

Université de Larbi Tébessi -Tebessa

Faculté des Sciences et Technologie

Département : Génie Mécanique



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Science et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Option : Energétique

Thème

**ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR L'ÉCOULEMENT D'UN
FLUIDE CONDUCTEUR D'ÉLECTRICITE**

Présenté Par :

Bouali Fathi

Encadre par :

Dr. A Belazizia

Devant le jury :

Dr. madouki Ramzi.

Université Larbi Tébessa

Président

Dr. Rodhouan Laouar

Université Larbi Tébessa

Examineur

Dr. A Belazizia

Université Larbi Tébessa

Encadreur

Année universitaire: 2020/2021

Dedicace

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et
la patience de terminer ce travail.

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur
tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A mes chers frères pour leur appui et leur encouragement,

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon
encadreur de mémoire Monsieur le Docteur **A Belazizia**

A mes chers amis et collègues de promo

A toute la famille (Bouali) pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Merci

Fathi Bouali

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire Monsieur le Docteur **A Belazizia**

qui m'ont encadré et soutenu tout au long de ce travail de mémoire. Leurs grandes qualités humaines, leurs conseils scientifiques, et leurs critiques constructives ont rendu ce travail particulièrement enrichissant. Je tiens à les remercier pour m'avoir communiqué leurs passions pour la recherche scientifique.

Mes remerciements s'adressent aux **membres du jury** pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger notre travail.

Mes sincères remerciements s'adressent à **mes parents, mes frères, mes sœurs** ainsi qu'à toute la famille pour leur soutien moral, leur encouragement inconditionnel et leurs aïdés financiers. Sans oublier de remercier tous les **enseignants et enseignantes** qui, pendant mon cursus universitaire, ont veillé pour ma formation et ma réussite.

Tous les mots restent faibles pour exprimer ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail, en particulier tous **mes amis** pour leur soutien moral et leur présence à mes côtés.

Fathi Bouafi

Résume

La convection naturelle dans une cavité fermée avec la présence d'un champ magnétique est étudiée numériquement par la méthode des volumes finies. Le phénomène physique dépend des nombres adimensionnels suivant : le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Hartmann Ha , le nombre de Prandtl Pr et l'angle d'inclinaison du champ magnétique ϕ . Les résultats montrent que la vitesse de l'écoulement et le transfert de chaleur augmentent ou réduits respectivement selon l'augmentation ou la réduction des nombre Ra et Ha . Un champ magnétique horizontal produit la plus grande réduction.

Mots clés : Convection naturelle, volumes finies, cavité carrée, champ magnétique.

Abstract

Natural convection in a square cavity with magnetic field effect is studied numerically with finite volume method. The problem depends on Rayleigh number Ra , Hartmann number Ha , Prandtl number Pr and inclination angle of magnetic field ϕ . Results show that both flow velocity and heat transfer increase or decrease respectively with increasing or decreasing the numbers Ra and Ha . A horizontal magnetic field brings the largest reduction.

Keywords: natural convection, finite volume, square cavity, magnetic field.

ملخص

نقوم بدراسة عددية بطريقة الحجوم المنتهية للحمل الطبيعي داخل وعاء مربع الشكل وبوجود حقل مغناطيسي. الظاهرة تتعلق بالاعداد اللا بعدية التالية: عدد رايلي Ra , عدد هارتمان Ha , عدد برانت Pr وزاوية ميلان الحقل ϕ . تبين النتائج ان كل من سرعة الجريان وانتشار الحرارة تزيد او تنقص على التوالي بزيادة وونقصان الاعداد Ra و Ha . الحقل المغناطيسي الافقي يجلب النقصان الاكبر.

الكلمات المفتاحية: الحمل الطبيعي، الحجوم المنتهية، وعاء مربع، حقل مغناطيسي

TABLE DES MATIERES

<i>Dedicace</i>	II
<i>Remerciements</i>	III
Résumé.....	IV
TABLE DES MATIERES	V
Liste des figures.....	VII
Liste des tableaux.....	VIII
Nomenclature	IX
Chapitre I : Introduction	2
I.1 Introduction.....	2
II.2 Revue bibliographique.....	2
I.3 Présentation du travail	6
Chapitre II : Geometrie et Modeles Mathematique	7
II.1 / Introduction:	8
II.2/ Géométrie du problème :	8
II.3/ Hypothèses simplificatrices :.....	9
II.4/ Modèle mathématique :	9
II.5/ Equation du magnétisme :	11
II.6/ Adimensionnelisation des équations :	11
II.7/ Modèle mathématique adimensionnelle :.....	12
Chapitre III : Méthode Numerique	14
III.1 /Introduction :	15
III.2/ Maillage :	15
III.3/ Discrétisation implicite de l'équation générale de transport :	17
III-4/Détails de discrétisation :	21
III-4-1/Equation de quantité de mouvement suivant OX :.....	21
III-4-2/ Equation de quantité de mouvement suivent OY :.....	21
III-4-3/ Equation d'énergie :	22
III.5/ Résolution du système :	24
III.6/ Algorithme SIMPLER :	24
III-6-1/ Equation de pression :	24

III-6-2/ Equation de correction de pression :.....	26
III-6-3/ séquences de l’algorithme SIMPLER :	28
III-7/ technique de balayage :	28
III-8/ Algorithmique de resolution TDMA :	30
III-9/ contrôle de convergence :	31
III-10/ Structure du code de calcule :	32
Chapitre IV :	34
RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	34
IV.1 Introduction	35
IV.2 Choix du maillage	35
IV.3 Validation du code de calcul	35
IV.4 Effet du nombre de Rayleigh	36
IV.4.1 Structure d’écoulement	36
IV.4.2 Profils des composantes vitesses horizontales et verticale	37
IV.4.3 Phénomène de transfert de chaleur	39
IV.5 Effet de l’intensité du champ magnétique	41
IV.6 Effet de l’angle d’inclinaison du champ magnétique	45
VI.7 CONCLUSION	47

Liste des figures

Figure II. 1: Géométrie du problème.....	8
Figure III. 1: Description du maillage et stockage des variables.....	16
Figure III. 2: Volume de contrôle typique.....	16
Figure III. 3: Maillage employé.....	17
Figure III. 4: volume de contrôle décalé suivant OX.....	22
Figure III. 5: volume de contrôle décalé suivant OY.....	23
Figure III. 6: volume de contrôle typique dans le plan X-Y.....	23
Figure IV. 1: Structure d'écoulement.....	37
Figure IV. 2: Profil de vitesse U à X=0.5.....	38
Figure IV. 3: Profil de vitesse V à Y=0.5.....	39
Figure IV. 4 : Lignes isothermes.....	40
Figure IV. 5: Profil de température θ à Y=0.5.....	40
Figure IV. 6: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.....	41
Figure IV. 7: Structure d'écoulement et lignes isothermes.....	43
Figure IV. 8: profil de vitesse U à X=0.5.....	43
Figure IV. 9: Profil de température θ à Y=0.5.....	44
Figure IV. 10: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.....	44
Figure IV. 11: Structure d'écoulement et ligne isothermes.....	47

Liste des tableaux

Tableau III. 1: Spécification des coefficients de	18
Tableau III. 2: variation de $A(\text{Pi})$ en fonction du schéma de discrétisation.....	20
Tableau IV. 1: L'effet du Maillage sur les nombres de Nusselt moyen ; $\text{Ra}_t = 10^5$	35
Tableau IV. 2: Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Hartmann.....	36
Tableau IV. 3: Variation de V_{max} et Nu en fonction de φ	45

Nomenclature

A : Rapport d'aspect géométrique =L/H

g : Accélération de la pesanteur

H : Hauteur de l'enceinte

L : Longueur de l'enceinte

I : Largeur de l'enceinte

P : Pression adimensionnelle

S : Source de l'équation de discretisation

T : Température

t : Temps adimensionnelle

U : Composante horizontale adimensionnelle de la vitesse

V : Composante verticale adimensionnelle de la vitesse

X : Coordonnée horizontale adimensionnelle

Y : Coordonnée verticale adimensionnelle

ϕ : variable dépendante

F_x : Composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant OX

F_y : Composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant OY

Symboles grecs

Θ : Température adimensionnelle ; $\Theta = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}}$

ρ : Masse volumique [kg/m³]

Δt : Increment de temps [s]

ΔX : Dimension d'un volume de contrôle dans la direction horizontale [m]

ΔY : Dimension d'un volume de contrôle dans la direction verticale [m]

ν : viscosité cinématique [1/m².s]

α : diffusivité thermique

Θ : rapport des forces de volumes

Grt : Grashof thermique = $g \beta \Delta T \frac{H^3}{\nu^2}$; $\Delta T = T_{max} - T_{min} [K]$

Pr : nombre de Prandtl = $\frac{\nu}{\alpha}$

Nu : nombre de Nusselt = $-\frac{\partial \theta}{\partial X} dy$

Ha : nombre de Hartmann = $B \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$

Sh : nombre de Sherwood

Indices

P : Point au centre du Volume fini

E : Point à l'est du point P

W : Point à l'ouest du point P

N : Point au nord du point P

S : Point au sud du point P

0 : Etat de référence à T_{min}

Min : Minimum des valeurs

Max : Maximum des valeurs

Chapitre I :

Introduction

I.1 Introduction

La convection naturelle désigne le processus de transfert thermique résultant du mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides qui échangent de l'énergie et de la quantité de mouvement entre elles.

Contrairement à la convection forcée, dont le mouvement du fluide est dû à un apport externe d'énergie, la convection naturelle a pour origine les variations de la masse volumique au sein même du fluide, liées aux variations de sa température. La structure et l'intensité de la convection naturelle sont en relation directe avec les conditions thermiques qui la déclenchent, la nature de fluide et la géométrie de l'espace où a lieu le processus [*].

II.2 Revue bibliographique

Cette partie est consacrée aux différentes investigations effectuées dans le passé sur l'effet d'un champ magnétique sur le phénomène de la convection naturelle d'un fluide, pur ou binaire et électriquement conducteur.

La première investigation sur l'interaction entre un champ magnétique externe et la convection naturelle d'un fluide pur semble avoir été faite par Sparrow et Cess (1961). L'étude considérait le cas d'un écoulement, en régime de type couche limite laminaire, sur une plaque verticale isotherme. Il a été trouvé que, pour des métaux liquides, le transfert de chaleur par convection naturelle pouvait être notablement affecté par la présence d'un champ magnétique ; alors qu'avec d'autres fluides ces effets étaient très petits [1].

Le même problème a été repris par Emery (1963) afin de déterminer l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide conducteur (mercure) confiné dans une cavité verticale, La plaque verticale est placée dans un canal rectangulaire vertical et étroit, Les résultats de l'expérimentation ont montré que la réduction du taux de transfert de chaleur à travers le mercure, due à l'application d'un champ magnétique transversal B , est fonction du paramètre $B^2 IVAT$, dans lequel AT est la différence de température entre les parois verticales de la cavité [2].

Chamkha (1997) a considéré la convection naturelle hydromagnétique sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé et thermiquement stratifié, Le fluide pur est supposé être électriquement conducteur et générateur de chaleur, Il a constaté que le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Hartmann, le paramètre de stratification ou quand le paramètre d'inertie de milieu augmentent, les même résultats ont été obtenus par Elbashbeshy (2000) quand il a étudié l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide incompressible, avec une viscosité et une diffusivité thermique variable avec la température, Ainsi, il a été observé que la vitesse adimensionnelle près de la plaque verticale diminue, à mesure que le champ magnétique augmente, alors que cela fait augmenter la distribution de température [3].

Pour ce type de configuration géométrique, un certain nombre de publications ont considéré le cas un fluide binaire (par exemple une solution aqueuse salée), Ainsi, Elbashbeshy (1997) a étudié le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale sous l'effet d'une force de flottaison résultant des effets combinés de gradients thermique et solutal, en présence d'un champ magnétique, Les équations de la couche limite sont résolues numériquement et les résultats montrent que la valeur maximale de la vitesse diminue avec l'augmentation de champ magnétique, B , Cependant, elle augmente avec le rapport de forces de volume, q , et le nombre de Prandtl, Pr , Il a été démontré que Nu et Sh diminuent avec l'augmentation de B et 0 ,

l'effort de cisaillement local exercé par l'écoulement sur la paroi diminue quand le champ magnétique B augmente tandis que celui-ci augmente quand le rapport de forces de volume ρg , et le nombre de Prandtl Pr augmentent [4].

Plus tard, une investigation analytique et numérique a été faite par Alchaar, Vasseur et Bilgen (1995) sur l'effet d'un champ magnétique transverse sur la convection naturelle d'un fluide pur dans une cavité rectangulaire horizontale, Cette dernière est chauffée par un coté et refroidie par l'autre et les parois horizontales sont considérées adiabatiques, Les résultats analytiques et numériques représentent les profils de vitesse et de température et de transfert de chaleur en termes de nombre de Hartmann. On observe que pour des nombres de Hartmann élevés, le gradient de vitesse dans le ceour de la cavité est constant en dehors des deux couches de Hartmann, à proximité des parois normales au champ magnétique [5].

Rudraiah et Al (1995) ont aussi fait une étude sur la convection naturelle dans une cavité rectangulaire verticale remplie d'un fluide pur électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique. Les deux parois verticales sont chauffées avec des températures constantes tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques. Ils ont conclu que l'effet principal de l'imposition d'un champ magnétique est de diminuer le taux global de transfert thermique entre les parois chaudes et froides. L'augmentation de l'intensité du champ magnétique aplatit la crête de la vitesse près de la paroi, pour un nombre élevé de nombre de Grashof. Le champ magnétique réduit légèrement le nombre de Nusselt [6].

Alchaar, Vasseur, Bilgen (1995) ont étudié l'effet d'un champ magnétique incliné sur la convection naturelle dans une cavité aplatie, chauffée par le bas et refroidi par le haut. Pour une convection supercritique, l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha , conduit à l'augmentation du nombre de cellules dans la cavité, quand le champ magnétique est appliqué normalement à cette dernière. L'imposition d'un champ

magnétique incliné, provoque de nouveaux modes d'écoulements des formes de cellules modifiées par la force de Lorentz induite. Pour un nombre de Hartmann donné, le taux de transfert de chaleur diminue quand le nombre de Prandtl, Pr , est réduit. Le nombre de Rayleigh critique augmente avec la diminution de Pr [5].

Bian et al (1996) ont repris cette configuration pour étudier la stabilité de l'écoulement d'un fluide conducteur dans une cavité horizontale soumise à l'influence d'un champ magnétique transversal. Les parois verticales de la cavité sont maintenues isothermes alors que les parois horizontales sont adiabatiques. Il a été démontré qu'en absence du champ magnétique, la structure de l'écoulement est parallèle dans le ceour de la cavité et tourne de 180, dans les bouts. Ils ont montré que lorsque le nombre Ha est augmenté, le nombre de Nusselt atteint un maximum pour un rapport de forme près de la situation d'une cavité carré [7].

Kaneda et al (2006) ont étudié expérimentalement et numériquement la convection naturelle d'un métal liquide dans une cavité cubique, sous un champ magnétique uniforme et un courant électrique externe. En appliquant uniquement le champ magnétique, la convection naturelle est amortie par la force de Lorentz qui est l'interaction entre le courant électrique induit et le champ magnétique externe. Par contre, l'écoulement et le taux de transfert thermique de la paroi chaude à la paroi froide sont très affectés, quand le champ magnétique et le courant électrique externe sont appliqués en même temps [8].

Uda et al (2000) ont mesuré expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle d'un métal liquide, le lithium, dans un canal cylindrique sous un champ magnétique. Les résultats ont montré qu'en l'absence du champ magnétique ; le profil de température augmente tout au long de l'écoulement convectif formant ainsi une couche à haute température au sommet et une région froide au fond du canal. Cependant, quand on applique le champ magnétique, la température du fond

augmente et le profil de température devient verticalement symétrique par rapport à la région chaude [9].

I.3 Présentation du travail

Dans ce présent travail on considère une étude bidimensionnelle par la méthode de volume finis d'un phénomène de convection naturelle sous l'action d'un champ magnétique constant. L'enceinte choisie à une forme rectangulaire dont les parois verticales sont maintenues à deux températures différentes ; alors que les autres parois sont imperméables et adiabatiques. Notre objectif consiste à étudier l'influence de l'augmentation du nombre de Grashof ainsi que l'intensité du champ magnétique sur la vitesse et la structure de l'écoulement ; l'influence sur les transferts de chaleur est également étudiée.

Chapitre II :
Geometrie et Modeles
Mathematique

II.1 / Introduction:

Dans ce chapitre, nous présentons la géométrie du problème avec ses conditions aux limites, et nous présentons les équations différentielles modélisant le phénomène de la convection naturelle sous l'action magnétique :

Equations qui expriment les lois de conservation de masse, ou de continuité, de quantité de mouvement, ou de Navier stokes et d'énergie.

II.2/ Géométrie du problème :

On considère une enceinte rectangulaire de longueur L , de hauteur H et rapport d'aspect $A=L/H$ ($L=4H$). La dimension dans la direction normale à la figure (I-1), est très grande devant les autres dimensions donc on suppose que le problème est bidimensionnel.

Le fluide utilisé est l'aluminium liquide. Les parois horizontales de l'enceinte sont thermiquement isolées, alors que les parois verticales gauche et droite sont maintenues respectivement à des températures différents T_{max} et T_{min} . L'enceinte est soumise à l'action d'un champ magnétique constant appliqué selon une direction formant un angle α avec l'axe horizontal.

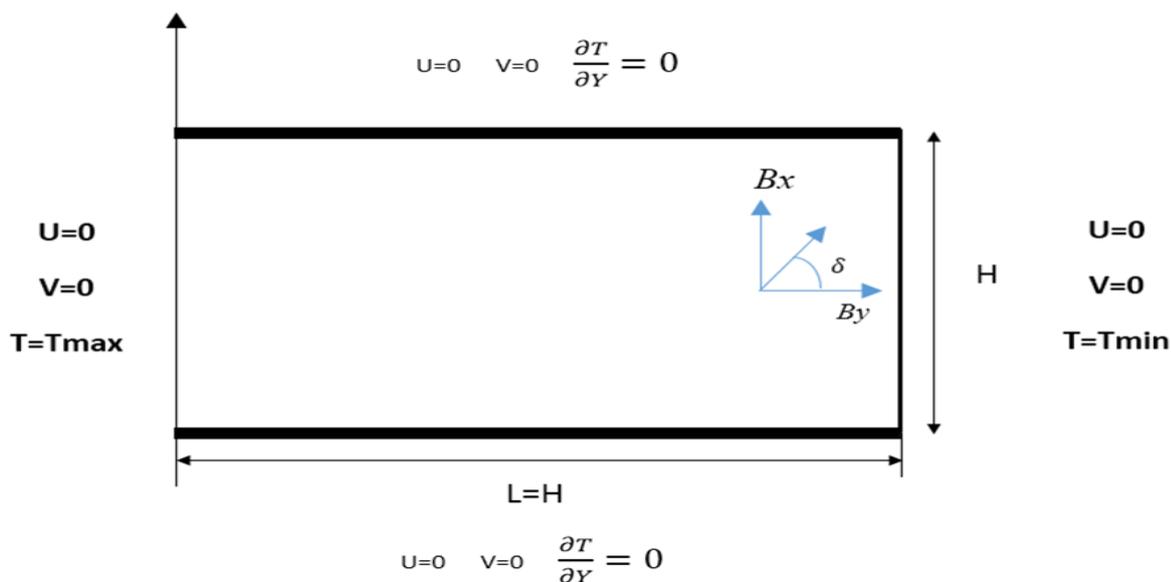


Figure II. 1: Géométrie du problème.

II.3/ Hypothèses simplificatrices :

L'écoulement étudié est simplifié en introduisant les hypothèses suivantes :

- Le fluide est incompressible.
- Le fluide est newtonien.
- L'écoulement est laminaire.
- Les propriétés physiques sont constantes.
- Domaine bidimensionnel (x,y).
- En ce qui concerne la densité du fluide, on adopte l'approximation de Boussinesq :

La masse volumique est constante (égale à sa valeur de référence) dans tous les termes ses équations de transfert sauf celui de la force de gravité. Dans ce dernier la masse volumique est fonction de la température :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_{ref})] \dots \dots \dots (II.1)$$

ρ_0 : Etant la masse volumique de référence.

β : Coefficient d'expansion thermique.

II.4/ Modèle mathématique :

Le système d'équation différentielle aux dérivées partielles décrivant notre problème s'écrit sous la forme suivante :

➤ À $t=0$:

$$\begin{aligned} u &= v = 0 \\ T &= T_0 \end{aligned}$$

➤ Pour $t > 0$:

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (II.2)$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant OX :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \dots \dots \dots (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant OY :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_0) + F_y \dots \dots \dots (\text{II.4})$$

- **Equation d'énergie :**

$$\rho_0 C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (\text{II.5})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$x = 0 \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ T = T_{max} \end{cases}$$

$$x = L \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ T = T_{max} \end{cases}$$

$$y = 0 \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$y = H \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

II.5/ Equation du magnétisme :

- La force de Lorentz :

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = \sigma(\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

- Le vecteur de champ magnétique :

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y$$

- Le vecteur de courant électrique :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{V} \times \vec{B})$$

$$\text{div} \vec{J} = 0$$

- Les composants de la force de Lorentz :

$$F_x = \frac{\sigma}{\rho} (v \cdot B_x \cdot B_y - u \cdot B_y^2)$$

$$F_y = \frac{\sigma}{\rho} (u \cdot B_x \cdot B_y - v \cdot B_x^2)$$

II.6/ Adimensionnelisation des équations :

Pour mettre le système d'équation précédent sous la forme adimensionnelle nous allons normaliser :

- Les coordonnées par H
- Les vitesses par v/H
- Le temps par H^2/v
- La pression (P-P₀) par $\rho_0(H^2/v)^2$
- La température relative (T-T_{min}) par ΔT

Les variables adimensionnelles introduites dans notre modèle mathématique sont :

- Le rapport d'aspect : $A=L/H$
- Les coordonnées $X=x/H$, $Y=y/H$

- Le temps $t^*/(H^2/v)$
- Les vitesses : $U=u/(v/H)$, $V=v/(v/H)$
- La pression : $P=p/(\rho((v/H)^2))$
- La température : $\theta=T-T_{\min}/\Delta T$

Les composants adimensionnels de la force de Lorentz sont :

$$F_x = Ha^2[V \cdot \cos \delta \sin \delta - U \cdot \sin^2 \delta]$$

$$F_y = Ha^2[U \cdot \cos \delta \sin \delta - V \cdot \cos^2 \delta]$$

II.7/ Modèle mathématique adimensionnelle :

En introduisant les variables adimensionnelles, le système d'équation différentielle aux dérivées partielles décrivant le problème s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

➤ À $t=0$

$$U=V=0$$

➤ pour $t>0$

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (II.6)$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant OX :**

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] + Ha^2[V \cdot \cos \delta \sin \delta - U \cdot \sin^2 \delta] \dots\dots\dots (II.7)$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant OY :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] + \theta Gr + Ha^2[U \cdot \cos \delta \sin \delta - V \cdot \cos^2 \delta] \dots\dots\dots (II.8)$$

- **Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots (II.9)$$

Les conditions aux limites adimensionnelles nécessaire à la résolution de notre système d'équation non adimensionnelle sont :

$$X = 0 \quad \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ \theta = 1 \end{cases}$$

$$X = 4 \quad \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$Y = 0 \quad \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$Y = 1 \quad \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La mise sous forme adimensionnelle a permis de mettre en évidence quatre nombre adimensionnel : le nombre de Prandtl P_r , le nombre de Grashof Gr , le rapport d'aspect géométrie (A) et le nombre de Hartman Ha .

Chapitre III : Méthode Numerique

III.1 /Introduction :

La méthode des volumes finis est employée pour discrétiser le domaine physique et les différentes équations différentielles aux dérivées partielles de notre modèle mathématique. Cette méthode intègre des équations de transport sur un ensemble discret de volumes finis jointifs couvrant le domaine physique. Le résultat de la valeur des variables des nœuds voisine. Le système d'équation algébrique obtenu peut être résolu par une méthode directe ou itérative. A méthode des volumes finis garantie la conservation de quantité de mouvement dans chaque volume et donc, dans tout le domaine de calcul. Aussi elle facilite la linéarisation des termes des sources s'ils ne le sont pas [10].

III.2/ Maillage :

Le domaine physique est divisé en certain nombre de volumes finis. Dans chaque volume on considère un point P situé en son centre. Les faces d'un volume de contrôle typique sont désignées par e, w, s. les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à L'Est, Ouest, Nord et Sud sont désignés par E, W, N, S (voir figure III-1 et III-2). Les quantités scalaires : température et pression sont stockées aux centres des volumes finis, par contre, les composants suivant X, Y de la vitesse (U, V) sont stockées aux faces des volumes finis (figures III-1). Un maillage non uniforme, affiné près des parois est utilisé dans les deux directions horizontale et verticale. (Voir figure III-3).

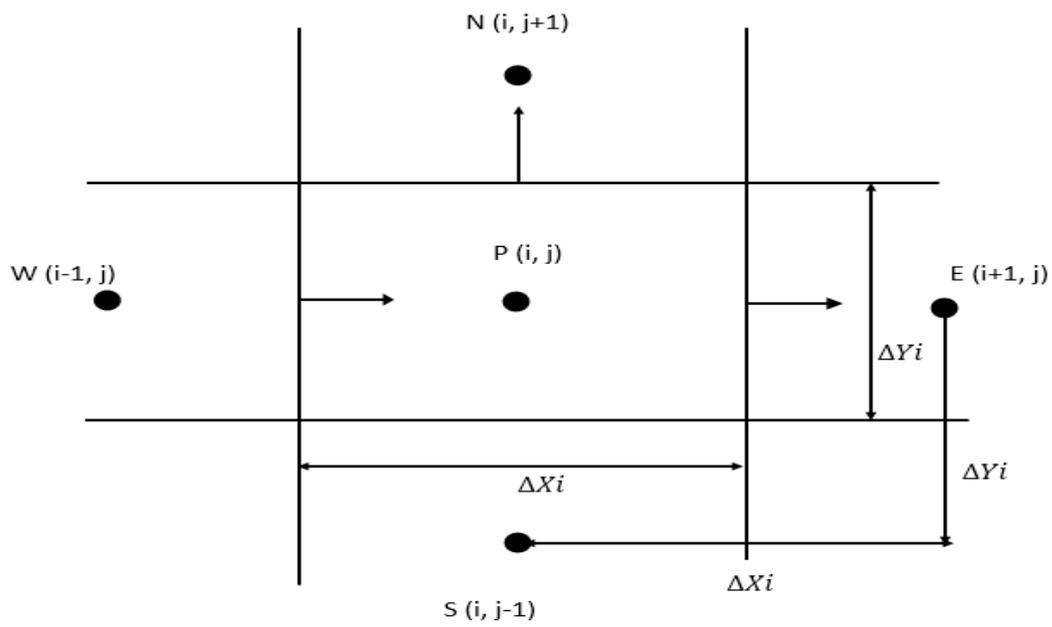


Figure III. 1:Description du maillage et stockage des variables.

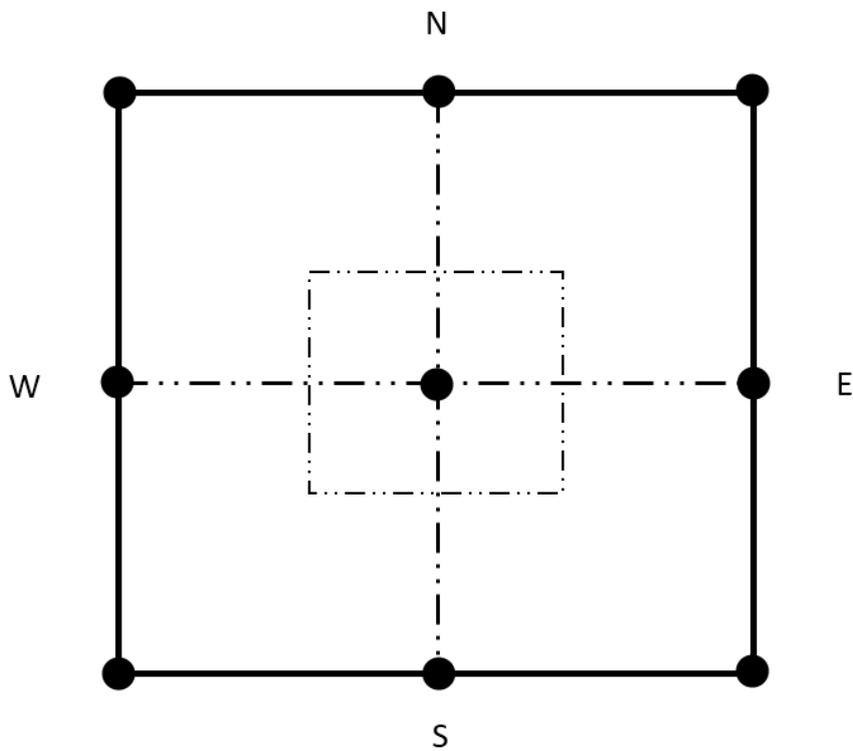


Figure III. 2:Volume de contrôle typique



Figure III. 3:Maillage employé

III.3/ Discrétisation implicite de l'équation générale de transport :

Pour faciliter sa manipulation, le système (III-1) est représenté par la forme générale de l'équation de transport :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{\partial (U_i \phi)}{\partial X_i}}_2 = \frac{1}{\underbrace{\partial X_i}} \left[\underbrace{\Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial X_i}}_3 \right] + \underbrace{S_\phi}_4 \dots \dots \dots \text{(III-1)}$$

Avec

- (i) : indice de somme (i=1,2, 3...)
- (1) : terme transitoire
- (2) : terme convectif
- (3) : terme diffusif
- (4) : terme source

L'équation (III-1) es une équation différentielle non linéaire régissant le transport de la quantité ϕ dans un écoulement 2D sa discrétisation consiste à la transformer en une équation algébrique résoluble numériquement. Le coefficient Γ_ϕ

ainsi que le terme de source S_ϕ , sont spécifiés pour chaque valeur de la fonction ϕ dans le tableau (III-1).

Quantités	Variable	Diff	Source
Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
QM :OX	U	1	$-\frac{\partial p}{\partial X} + F$
QM :OY	V	1	$-\frac{\partial p}{\partial Y} + \theta Gr_i + F$
Energie	Θ	1/Pr	0

Tableau III. 1:Spécification des coefficients de

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable ϕ on intègre l'équation (III-1) sur le volume de contrôle (ΔX , ΔY) associé en point P (nœud i, j) et sur un temps Δt . on obtient selon la référence [10] l'équation algébrique suivante :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_S \phi_S + S \dots \dots \dots \text{(III-2)}$$

Ou : U,V,P, θ sont les variables indépendants et A_e , A_w , A_n , A_s , A_p sont les coefficients correspondants respectivement aux nœuds : Est, Ouest, Nord, Sud, et au centre du volume de contrôle. S est le terme de source supposé être constant dans le volume de contrôle. Les expressions de ces coefficients sont expliquées en détail dans le chapitre cinq de la référence [10], et sont rappelés ci-dessous :

$$A_E = D_e \cdot A(|P_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \dots \dots \dots \text{(III.3-a)}$$

$$A_W = D_w \cdot A(|P_w|) + \text{Max}(-F_w, 0) \dots \dots \dots \text{(III.3-b)}$$

$$A_N = D_n \cdot A(|P_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \dots \dots \dots \text{(III.3-c)}$$

$$A_S = D_s \cdot A(|P_s|) + \text{Max}(-F_s, 0) \dots \dots \dots \text{(III.3-d)}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \dots \dots \dots \text{(III.3-e)}$$

$$S = \left(\bar{S}_\phi + \frac{\phi^0}{\Delta t} \right) \Delta X \Delta Y \dots \dots \dots \text{(III.3-f)}$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} \dots \dots \dots \text{(III.3-h)}$$

F_e, F_w, F_n, F_s et D_e, D_w, D_n, D_s sont respectivement les terme convectifs et diffusifs aux faces : Est, Ouest, Nord, Sud. Pe, Pw, Pn et Ps sont les nombres de Peclet aux différentes faces du volume de contrôle. Ces nombres désignent le rapport des flux convectifs aux flux diffusifs.

A_P^0 : est le coefficient de variable (Φ) calcule au point P à l'instant précédent.

Φ^0 : Est la variable dépendante calcule à l'instant précédent.

➤ **Les flux convectifs sur les faces du volume de contrôle :**

$$F_e U_e \cdot \Delta Y \dots \dots \dots \text{(III-4-a)}$$

$$F_w U_w \cdot \Delta Y \dots \dots \dots \text{(III-4-b)}$$

$$F_n = V_n \cdot \Delta X \dots \dots \dots \text{(III-4-a)}$$

$$F_s = V_s \cdot \Delta X \dots \dots \dots \text{(III-4-a)}$$

➤ **Les flux diffusifs sur les faces du volume de contrôle :**

$$D_e \Gamma \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x_e} \dots \dots \dots \text{(III-5-a)}$$

$$D_w \Gamma \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x_w} \dots \dots \dots \text{(III-5-b)}$$

$$D_n \Gamma \cdot \frac{\Delta X}{\Delta Y_n} \dots \dots \dots \text{(III-5-c)}$$

$$D_e \Gamma \cdot \frac{\Delta X}{\Delta Y_s} \dots \dots \dots (III-5-d)$$

➤ **Le nombre de Peclet :**

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \dots \dots \dots (III-5-a)$$

$$P_w = \frac{F_w}{D_w} \dots \dots \dots (III-5-b)$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n} \dots \dots \dots (III-5-b)$$

$$P_s = \frac{F_s}{D_s} \dots \dots \dots (III-5-b)$$

- La fonction $A(|P_i|)$ dépend du schéma numérique comme le montre le tableau (III.2).

Tableau III. 2: variation de $A(|P_i|)$ en fonction du schéma de discrétisation

Schéma	A(P)
Centré	$1-0.5 P $
	1
	$\text{Max}(1-0.5 P)$
Hybride	$\text{Max}((1-0.5 P)^5)$
Exponentiel	$ P /\exp P -1$

Nous avons choisi dans notre cas l'utilisation du schéma numérique hybride.

III-4/Détails de discrétisation :

Afin d'aboutir à une formulation détaillée des équations discrétisée, il est nécessaire de développer les termes de source et les expressions de vitesse sur les faces des volumes de contrôle associés à chaque variable d'écoulement en termes des paramètres donnés ou calculés aux nœuds du maillage.

L'intégration des équations de quantité de mouvement et celles champ magnétique suivant les discrétisations OX, OY, se fait sur un volume de contrôle décalé respectivement selon OX, OY, par contre les équations d'énergie sont intégrées sur un volume typique. Les composants de la vitesse sur les faces de chaque volume de contrôle décalé, sont exprimés comme une moyenne arithmétique des valeurs sur les nœuds adjacents.

III-4-1/Equation de quantité de mouvement suivant OX :

L'intégration de l'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant OX, sur un volume de contrôle décalé vers la droite (figure III-4) donne l'équation algébriques :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \dots\dots\dots(III-7)$$

$$S_U = (P_P - P_E)\Delta X + U_P^0 \frac{dXdY}{dt} + Ha^2[V \cdot \cos \delta \sin \delta - U \cdot \sin^2 \delta]dXdY \dots\dots\dots(III-8)$$

III-4-2/ Equation de quantité de mouvement suivent OY :

L'intégration de l'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivent Y, sur un volume de contrôle décalé vers le haut (figure III-5) donne l'équation algébrique :

$$A_P V_P = A_E V_E + A_W V_W + A_N V_N + A_S V_S + S_V \dots\dots\dots(III-9)$$

$$S_V = (P_P - P_N)\Delta X + \frac{dXdY}{dt} + Gri \left(\frac{\theta_P - \theta_N}{2} \right) dXdY + Ha^2 [V \cdot \cos \delta \sin \delta - U \cdot \sin^2 \delta] dXdY \dots (III-8)$$

III-4-3/ Equation d'énergie :

L'intégration de l'équation adimensionnelle de l'énergie sur un volume contrôle typique (figure 3.6) donne l'équation algébrique :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + S_\theta \dots (III.11)$$

$$S_\theta = \theta_P^0 \frac{dXdY}{dt} \dots (III.12)$$

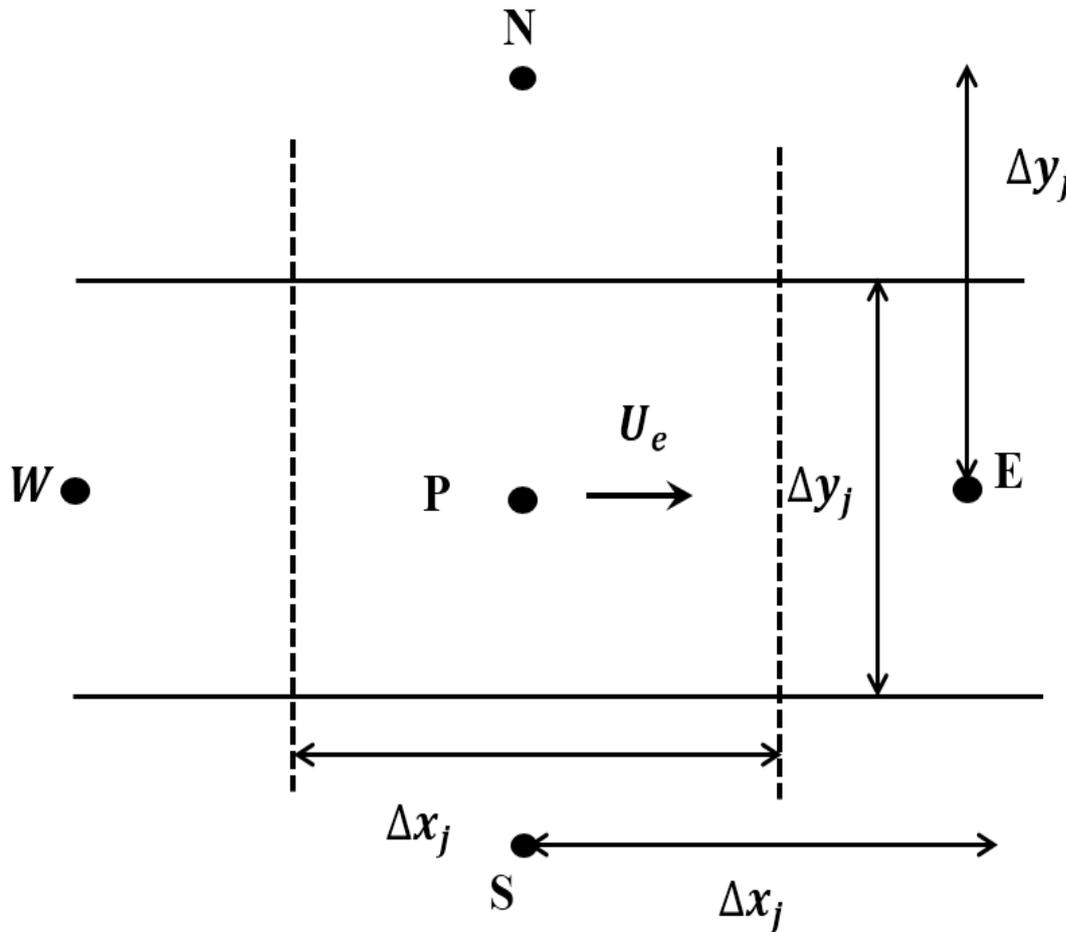


Figure III. 4: volume de contrôle décalé suivant OX

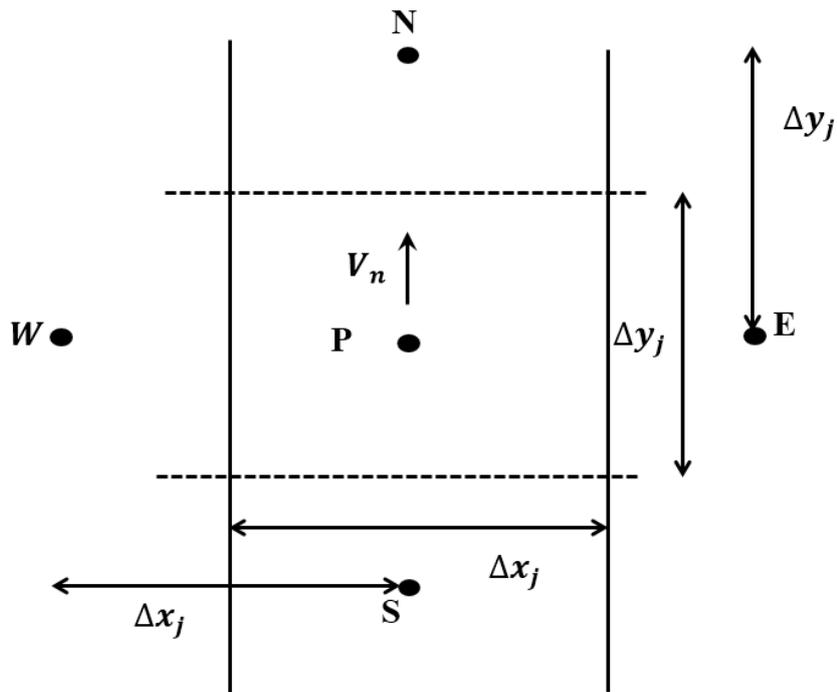


Figure III. 5: volume de contrôle décalé suivant l'axe OY

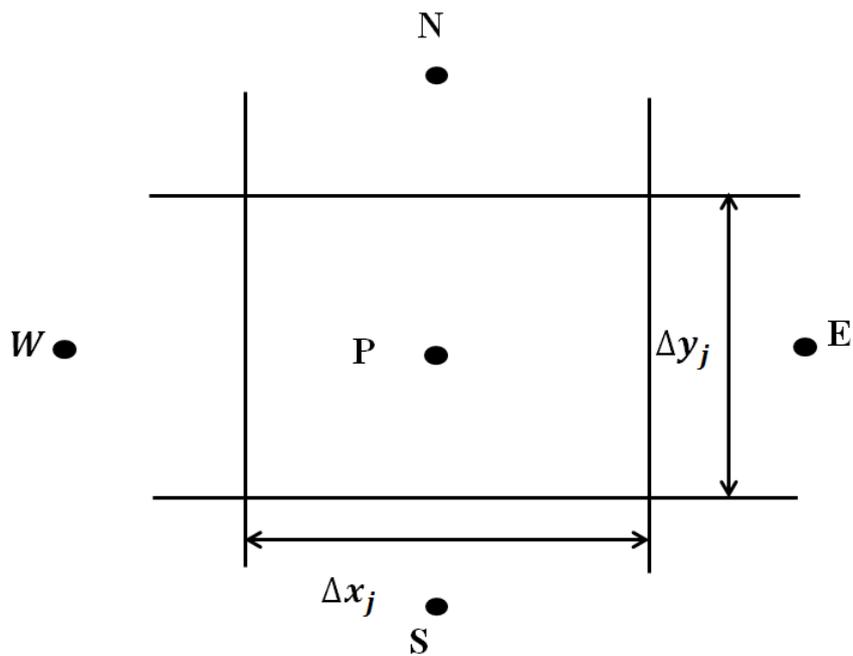


Figure III. 6: volume de contrôle typique dans le plan X-Y

III.5/ Résolution du système :

L'équation de discrétisation de chaque variable dépendante représente un système d'équation. Ces derniers sont résolus par méthode de double balayage pour les modèle bidimensionnelle (suivant X et Y), impliquant l'utilisation de l'algorithme de Thomas. L'algorithme SIMPLER est utilisée pour la solution séquentielle des systèmes des équations de discrétisation ses variables dépendants [10].

III.6/ Algorithme SIMPLER :

Le mot SIMPLER ES l'abréviation des premières lettres des mots (Semi-implicit Methode for Pressure Linked Equation Revised). Les termes de source dans les équations de quantité de mouvement tableau (III.1) dépendent des gradients de pression, cependant l'absence d'une équation régissant l'évolution du champ de pression rend la résolution directe de ces équations impossibles pour remédier à partir de l'équation de continuité. Lorsqu'un champ de pression correct est injecté dans les équations de quantité de mouvement, le champ de vitesse résultant satisfera l'équation de continuité. Cette information indirecte sur le champ de pression continuité dans l'équation de continuité est transformé e en une information directe par l'algorithme de résolution SIMPLER.

III-6-1/ Equation de pression :

Lorsque le champ de pression est connu, le champ de vitesse est obtenu directement par la résolution des équations de Navier-Stocks. Dans le cas contraire (champ de pression inconnu), l'établissement d'une équation de pression est nécessaire. Les équations de quantité de mouvement discrétisés selon les directions X,Y sont écrites sous la forme :

$$A_p U_p = \sum_{E,W,N,S} A_{nb} U_{nb} + b_U + (P_P - P_E) \Delta Y \dots \dots \dots (III.13-a)$$

$$A_p V_p = \sum_{E,W,N,S} A_{nb} V_{nb} + b_V + (P_P - P_N) \Delta X \dots \dots \dots (III.13-b)$$

Avec:

- $b_{U,V}$ Contient tous les termes de sources sauf ceux de pression.
- $(P_P - P_E) \Delta Y, (P_P - P_N) \Delta X$ sont respectivement les forces de pression appliquées sur les faces du volume de contrôle on définit les pseudo vitesses par les expressions suivantes :

$$U_P^* = \frac{\sum A_{nb} U_{nb} + b_U}{A_P} \dots \dots \dots (III.14-a)$$

$$V_P^* = \frac{\sum A_{nb} V_{nb} + b_V}{A_P} \dots \dots \dots (III.14-b)$$

Donc les équations (III.13-a,b) deviennent :

$$U_P = U_P^* + d_U (P_P - P_E) \dots \dots \dots (III.15-a)$$

$$V_P = V_P^* + d_V (P_P - P_N) \dots \dots \dots (III.15-b)$$

Avec:

$$d_U = \frac{\Delta Y}{A_P} \dots \dots \dots (III.16-a)$$

$$d_V = \frac{\Delta X}{A_P} \dots \dots \dots (III.16-b)$$

L'équation de pression peut être obtenir à partir de l'équation de continuité en remplaçant les expressions de vitesse :

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + S_P \dots \dots \dots (III.17)$$

Avec :

$$A_E = d_U \cdot \Delta Y \dots \dots \dots (III.18-a)$$

$$A_W = d_U \cdot \Delta Y \dots \dots \dots (III.18-b)$$

$$A_N = d_V \cdot \Delta X \dots \dots \dots (III.18-c)$$

$$A_S = d_V \cdot \Delta X \dots \dots \dots (III.18-d)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_S \dots \dots \dots (III.18-f)$$

III-6-2/ Equation de correction de pression :

Pour un champ de pression deviné P^* , on obtient le champ de vitesse U^*, V^* , par les équations :

$$A_P U_P^* = \sum_{nb} A_{nb} U_{nb}^* + b_U + (P_P^* - P_E^*) \Delta Y \dots \dots \dots (III.19-a)$$

$$A_P V_P^* = \sum_{nb} A_{nb} V_{nb}^* + b_V + (P_P^* - P_N^*) \Delta X \dots \dots \dots (III.19-b)$$

Un champ de pression correcte donne un champ de vitesse correcte satisfaisant l'équation de continuité. On suppose que les valeurs correctes de pression et de vitesse sont obtenues les expressions :

$$P_P = P_P^* + P_P' \dots \dots \dots (III.20-a)$$

$$U_P = U_P^* + U_P' \dots \dots \dots (III.20-b)$$

$$V_P = V_P^* + V_P' \dots \dots \dots (III.20-c)$$

Ou P_P', U_P', V_P' sont respectivement les corrections du champ de pression et du champ de vitesse, ces valeurs doivent satisfaire les équations de quantité de mouvement :

$$A_P (U_P^* + U_P') = \sum_{nb} A_{nb} (U_{nb}^* + U_{nb}') + b_U + (P_P^* + P_P' - P_E^* + P_E') \Delta X \dots \dots \dots (III.21-a)$$

$$A_P (V_P^* + V_P') = \sum_{nb} A_{nb} (V_{nb}^* + V_{nb}') + b_V + (P_P^* + P_P' - P_N^* + P_N') \Delta X \dots \dots \dots (III.21-b)$$

En soustrayant les équations III.18-a,b,c, des équations III.20-a,b,c on trouve :

$$A_P U_P' = \sum_{nb} A_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E') \Delta Y \dots \dots \dots (III.22-a)$$

$$A_P V_P' = \sum_{nb} A_{nb} V_{nb}' + (P_P' - P_N') \Delta X \dots \dots \dots (III.22-b)$$

En faisant une approximation en éliminant les termes de somation on obtient :

$$A_P U_P' = (P_P' - P_E') \Delta Y \dots \dots \dots (III.23-a)$$

$$A_P V_P' = (P_P' - P_N') \Delta X \dots \dots \dots (III.23-a)$$

Donc les vitesses corrigées en fonction de la pression corrigée sont :

$$U_P' = d_U (P_P' - P_E') \dots \dots \dots (III.24-a)$$

$$V_P' = d_V (P_P' - P_N') \dots \dots \dots (III.24-b)$$

Pour obtenu l'équation discrétisée de correction de pression, on remplace les expressions de vitesse dans l'équation de continuité discrétisée. On obtient :

$$P_P = P_P^* + P_P' \dots \dots \dots (III.25-a)$$

$$U_P = U_P^* + d_U (P_P' - P_E') \dots \dots \dots (III.25-b)$$

$$V_P = V_P^* + d_V (P_P' - P_N') \dots \dots \dots (III.25-c)$$

Pour obtenu l'équation discrétisée de correction de pression, on remplace les expressions de vitesse dans l'équation de continuité discrétisé ». on obtient :

$$A_P P_P' = A_E P_E' + A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + S_P \dots \dots \dots (III.25)$$

Avec :

$$A_E = d_U \cdot \Delta Y \dots \dots \dots (III.27-a)$$

$$A_W = d_U \cdot \Delta Y \dots \dots \dots (III.27-b)$$

$$A_N = d_V \cdot \Delta X \dots \dots \dots (III.27-c)$$

$$A_S = d_V \cdot \Delta X \dots \dots \dots (III.27-d)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P \dots \dots \dots (III.27-e)$$

$$S_P = (U_W^* - U_P^*) \cdot \Delta Y + (V_S^* - V_P^*) \cdot \Delta X \dots \dots \dots (III.27-f)$$

III-6-3/ séquences de l'algorithme SIMPLER :

L'algorithme SIMPLER est utilisé pour la résolution séquentielle des systèmes des équations de discrétisation des variables dépendants. Il consiste à résoudre l'équation de pression pour obtenir le champ correspondant, et résoudre l'équation de pression corrigées seulement pour corriger la vitesse, la séquence des opérations peut être donné :

- 1- Estimer un champ de vitesse.
- 2- Calculer les coefficients des équations discrétisées de quantité de mouvement (3,13) et par conséquent le calcul des pseudo vitesse U' et V' par les équations (III.14) en substituant les valeurs des vitesses adjacentes.
- 3- (3,18) et la résoudre pour obtenir le champ de pression.
- 4- Prendre le champ de pression obtenue dans l'étape 3 comme un champ estimé P^* , résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir U^* et V^* (III.19).
- 5- Calculer de la source S_p , dans l'équation de correction de pression (III.26) et résoudre cette dernière pour obtenir le champ de pression P' .
- 6- Corriger le champ de vitesse par l'équation (III.25) sans corrigé la pression.
- 7- Résoudre les équations discrétisées correspondant à l'autre variable dépendante (θ).
- 8- S'il ya convergence arrêter le calcule, si non retourner à l'étape 2.

III-7/ technique de balayage :

La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport (III-2) sous la forme indicielle est

$$A_P(i,j)\phi(i,j) = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + A_N(i,j)\phi(i,j+1) + A_S(i,j)\phi(i,j-1) + S(i,j) \dots \dots \dots \text{(III-28)}$$

Avec :

$$1 \leq i \leq il, 1 \leq j \leq jl$$

il, jl sont respectivement les nombres de nœuds suivant X et Y ?

Le système (III.28) est écrit sous la forme matricielle suivante : $[A][\Phi]=[S]$.

La matrice $[A]$ est une matrice à bande diagonale et la largeur de la la bande dépend de la dimension de l'espace. Dans le cas bidimensionnel, la matrice $[A]$ est hexa diagonale. Le système (III.28) est résolu par la méthode de double balayage suivant X et Y.

Cette technique permet de transformer le système (III.28) en un système bi diagonale, qui peut être résolu par l'algorithme TDMA.

Considérons par exemple le balayage (Ouest, Est) on attribue à la variable (Φ) sur les lignes $(i-1)$ et $(i+1)$ ses valeurs obtenues lors de l'itération précédente, on aboutit au système bi diagonale suivant :

$$a(j)\phi(i, j) = b(j)\phi_N(i, j + 1) + c(j)\phi_S(i, j - 1) + d(j) \dots \dots \dots (3-29)$$

Avec :

$$a(j) = A_P(i, j) \dots \dots \dots (III-30-a)$$

$$b(j) = A_N(i, j) \dots \dots \dots (III-30-b)$$

$$c(j) = A_S(i, j) \dots \dots \dots (III-30-c)$$

$$d(j) = A_E(i, j)\phi(i + 1, j) + A_W(i, j)\phi(i - 1, j) \dots \dots \dots (III-30-a)$$

III-8/ Algorithmique de resolution TDMA :

L'algorithme TDMA (tri-diagonale-matrix algorithm) est utilisé après chaque balayage pour résoudre le système d'équations correspondantes aux variables : U, V, P, P^*, θ .

Prenons le système bi diagonale de l'équation (3-29) :

- $j=1, N$

$$a_j \phi_j = b_j \phi_{j+1} + c_j \phi_{j+1} \dots \dots \dots (III-31)$$

En réécrivant cette équation pour $j=j+1$ et en combinant les deux formes, on peut écrire une relation liante uniquement (ϕ_j, ϕ_{j+1}) :

$$\phi_j = P_j \phi_{j+1} + Q_j \dots \dots \dots (III-32)$$

Où P_j et Q_j sont deux tableaux de forme :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \dots \dots \dots (III-32-a)$$

$$Q_j = \frac{d_j + c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \dots \dots \dots (III-32-b)$$

L'équation (III-30) pour:

- $j=1$:

$$a_j \phi_1 = b \phi_2 + d_i \dots \dots \dots (III-33)$$

Avec :

$$c_1 = 0$$

Naturellement il n'y a pas cette fois de point en $j+1$.

- $J=N$:

$$a_N \phi_N = C_N \phi_{N-1} + \phi_N \dots \dots \dots (III-34)$$

Idem que précédemment, il n'y a pas cette fois de point en j+1

Le calcul de P et Q au point j=1 et j=N est :

- J=1 :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \dots \dots \dots (III-34-a)$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \dots \dots \dots (III-34-b)$$

- j=N :

$$P_N = 0 \dots \dots \dots (III-35-a)$$

$$Q_N = \frac{d_N + c_N Q_{N-1}}{a_N + c_N P_{N-1}} \dots \dots \dots (III-35-b)$$

Etant donné la relation (III-32) liante P_j et Q_j à P_{j-1} la séquence de calcul es la suivant :

- 1- Calcul de P₁ et Q₁ équation (III-34).
- 2- Pour j=2 à N : calcul de P_j et Q_j avec les équations racurantes (III-32-a-b).
- 3- Au point N la relation (III-32) donne directement $\phi_N = Q_N$.

(car $b_N = 0$ conduit à $P_N = 0$).

- 4- Le calcul de ϕ_i , s'effectue en faisant une substitution inverse j=N-1 à l'utilisant l'équation (III-32).

III-9/ contrôle de convergence :

La convergence des calculs vers la solution exacte, est contrôlée par deux critères :

- 1- La variation des variables d'écoulement entre deux incréments consécutifs du temps (t et t+Δt) doit être nulle ou négligeable.

$$\text{Max} \left(\frac{|\phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \phi_{i,j}^t|}{|\phi_{i,j}^t|} \right) \leq 10^{-6}$$

ou (ϕ) est une variable dépendante. Les indices i,j indiquent un point du maillage et Δt étant l'incrément du temps.

2- Cependant la condition ci-dessus est insuffisante, car la différence entre deux valeurs successives d'une variable d'écoulement dépend du pas de temps choisi, donc l'équilibre thermique et massique doit être assuré entre les flux entrants et sortants. Cette condition est satisfaite lorsque le nombre de Nusselt à l'entrée est égale au nombre de Nusselt à la sortie.

III-10/ Structure du code de calcul :

Le code de calcul est constitué d'un programme principale utilisant les sous-routines suivantes :

- Zéro : pour initialiser les coefficients de l'équation discrétisée de chaque variable.
- Mesh : établir le maillage.
- Init : initialise les variables de l'écoulement.
- Blns : vérifie la balance thermique.
- Xmon : calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation d'impulsion suivant X.
- Ymons : calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation d'impulsion suivant Y.
- Energ : calcule les coefficient coefficients de l'équation discrétisée de l'équation d'énergie.
- Cont : calcule les coefficients de l'équation de pression.

- Bryu : détermine les conditions aux limites de U.
- Bryv : détermine les conditions aux limites de V.
- BryT : détermine les conditions aux limites de Θ .
- Xsweep : établit le balayage suivant X.
- Ysweep : établit le balayage suivant Y.
- Stream : calcule les valeurs des lignes de courant.
- Algo : cette subroutine est appelée après chaque balayage pour résoudre le système d'équation résultant par la méthode TDMA.
- Step : contrôle la convergence du code de calcul.

Chapitre IV :

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats obtenus concernant la convection naturelle sous l'action d'un champ magnétique dans une géométrie cartésienne bidimensionnelle. L'enceinte est soumise à un gradient de température horizontale. Les effets des paramètres : le nombre de Rayleigh Ra ($Ra=Gr.Pr$), le nombre de Hartmann Ha et l'angle d'inclinaison du champ magnétique φ sur l'écoulement du fluide et sur le transfert de chaleur seront discutés. Les paramètres utilisés sont pris dans la gamme des valeurs suivantes : $10^3 \leq Ra_t \leq 10^6$, $0 \leq Ha \leq 100$, $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ et $Pr = 0.02$.

IV.2 Choix du maillage

Le tableau IV.1 montre l'effet du maillage, sur le nombre de Nusselt moyen. Le nombre de Rayleigh thermique est pris égal à 10^5 . Le maillage (70x70) a été sélectionné et utilisé dans tous les calculs.

Tableau IV. 1: L'effet du Maillage sur les nombres de Nusselt moyen ; $Ra_t = 10^5$.

Maillage	30X30	40X40	50X50	60X60	70X70	80X80
\overline{Nu}	2.110	2.100	2.095	2.093	2.091	2.090

IV.3 Validation du code de calcul

Dans le but de valider nos résultats numériques, une comparaison a été faite avec les résultats antérieurs disponibles dans la littérature. La comparaison concerne les résultats obtenus par la référence [xx] avec les paramètres ($Ra_t=105$, $Pr=0.71$, $\varphi=0$ et $A=1$). On observe sur le tableau IV.2 un bon accord entre nos résultats et ceux de la référence [xx].

Tableau IV. 2: Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Hartmann

Ha	$\overline{Nu} [X]$	\overline{Nu}
0	2.518	2.534
10	2.223	2.241
50	1.085	1.076
100	1.011	1.006

IV.4 Effet du nombre de Rayleigh

A fin d'examiner l'influence de l'augmentation du nombre de Rayleigh sur le phénomène physique, nous avons exécuté le programme de calcul sans présence d'un champ magnétique. Les paramètres utilisés sont : $A=1$, $Pr=0.02$. Le nombre Ra varie de 10^3 jusqu'à 10^6 .

IV.4.1 Structure d'écoulement

La figure IV.1 montre la variation du contour de la fonction de courant Ψ en fonction du nombre de Rayleigh. Lorsque $Ra=10^3$ l'écoulement consiste en une cellule de faible intensité parfaitement symétrique tournant à faible vitesse dans le sens horaire. Le fluide au voisinage de la paroi gauche du fait qu'il est chaud, il se déplace vers le haut de l'enceinte et il sera donc remplacé par le fluide froid. En contactant la paroi froide droite, le fluide cède la chaleur et sa température diminue.

En augmentant le nombre de Rayleigh, les lignes de courant se concentrent de plus en plus. La convection naturelle est alors plus intense.

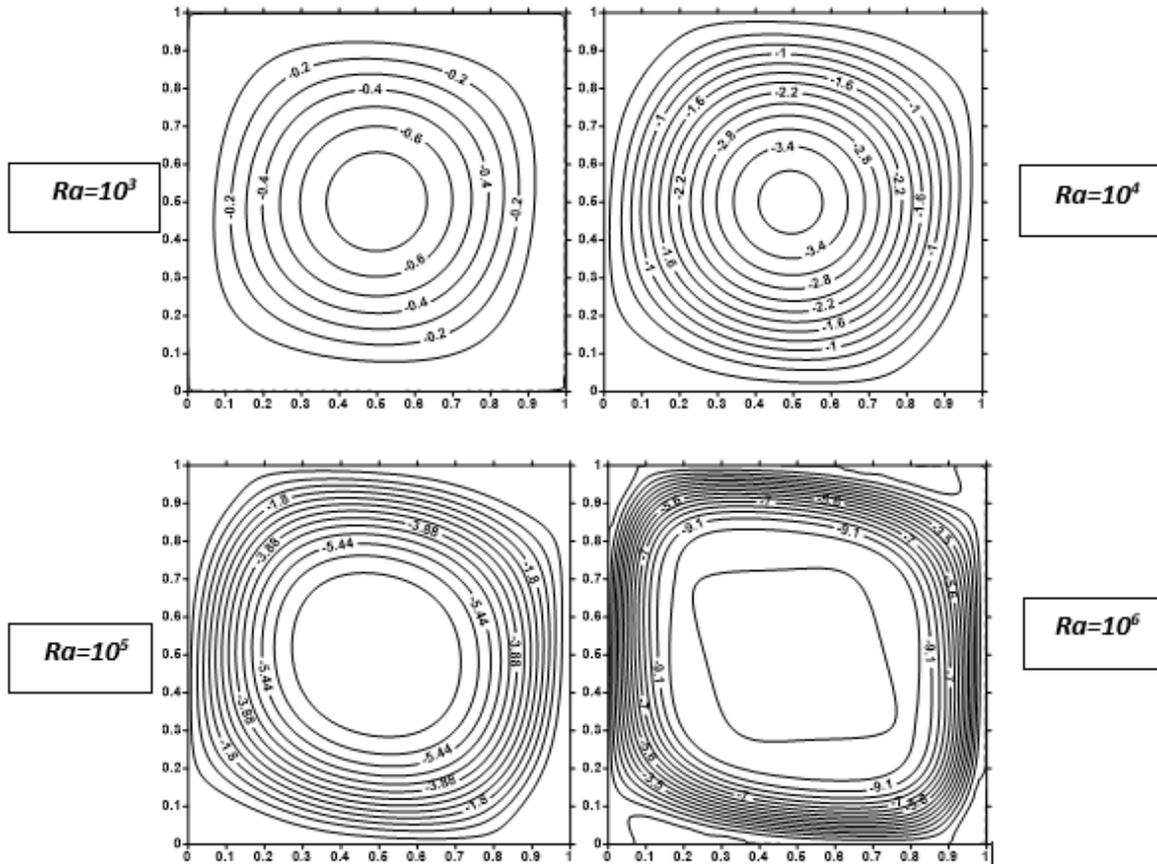


Figure IV. 1: Structure d'écoulement

IV.4.2 Profils des composantes vitesses horizontales et verticale

La figure IV.2, et IV.3 présentent les profils des composantes vitesses horizontale et verticale au milieu de l'enceinte pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Lorsque $Ra=10^3$, les profils sont représentés par des lignes presque droites parallèles à l'axe OY (OX). Les vitesses sont alors presque nulles et l'échange convectif est très faible.

Pour $Ra=10^4$, 10^5 et 10^6 les profils sont symétriques et les valeurs de la vitesse sont nulles au milieu de l'enceinte et sur ses limites supérieur et inférieur (gauche et droite). Les vitesses maximales près des parois horizontales (verticales) augmentent

avec le nombre de Rayleigh et elles sont de signes opposés. Cela indiquant respectivement le sens horaire de l'écoulement et l'intensification de l'écoulement convectif.

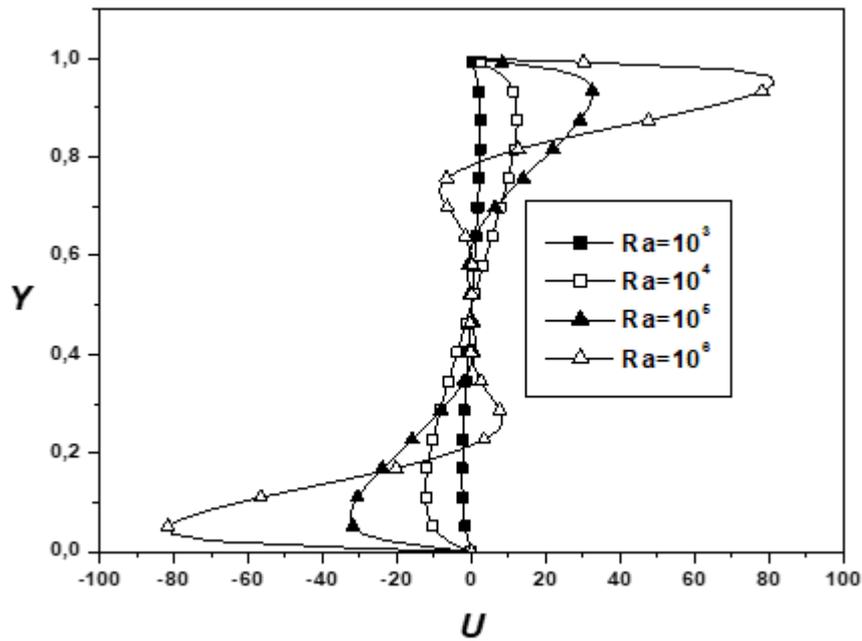


Figure IV. 2: Profil de vitesse U à $X=0.5$

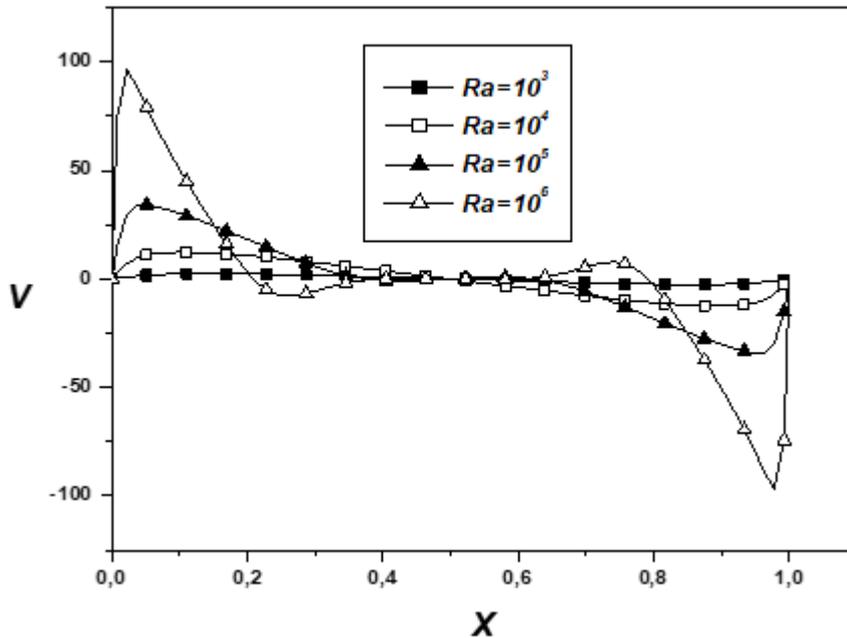


Figure IV. 3: Profil de vitesse V à $Y=0.5$.

IV.4.3 Phénomène de transfert de chaleur

La figure IV.4 illustre la distribution de la température au sein de la cavité pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh. Lorsque $Ra=10^3$, les lignes isothermes sont des lignes verticales parallèles à la paroi verticale. Le transfert de chaleur est donc purement conductif. Cela est observé aussi sur la Figure IV.5 illustrant la variation du profil de température au milieu de l'enceinte pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. La température varie progressivement de la paroi gauche jusqu'à la paroi droite froide. Lorsque Ra prend la valeur 10^4 , les lignes isothermes se déforment dans le sens de l'écoulement du fluide. Cette déformation est de plus en plus importante avec l'augmentation de Ra indiquant la dominance du régime convectif du transfert de chaleur. Les lignes de courant sont plus concentrées sur les parois verticales montrant un fort gradient de température dans ces régions. Le même comportement peut être observé sur la figure IV.6 qui illustre l'évolution du nombre de Nusselt

moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh. Le taux de transfert de chaleur est donc une fonction croissante du nombre Ra.

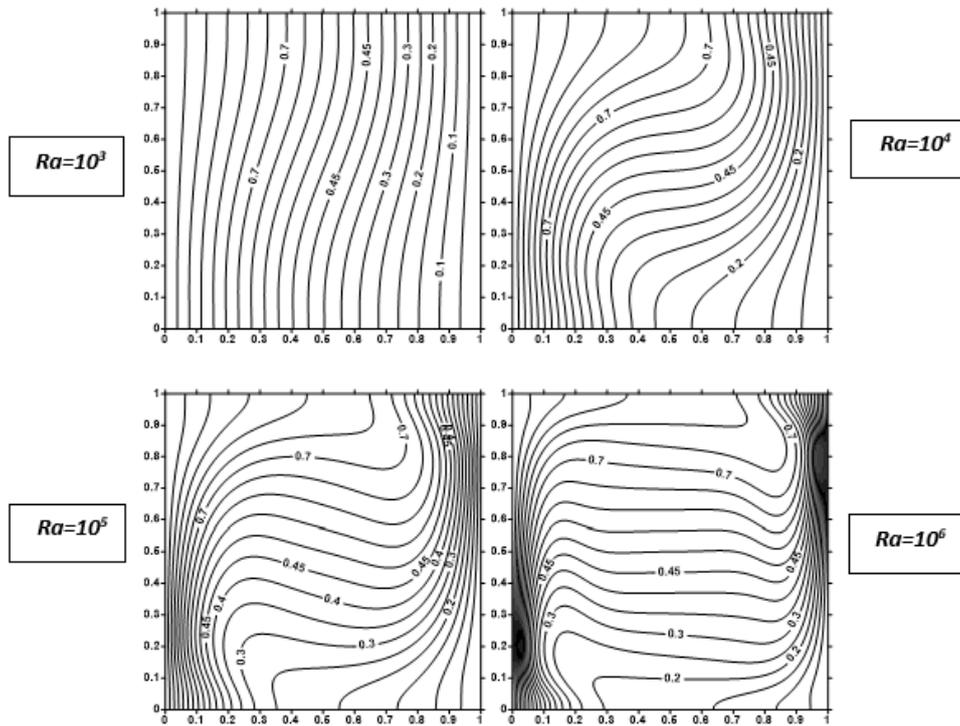


Figure IV4 .:Lignes isothermes

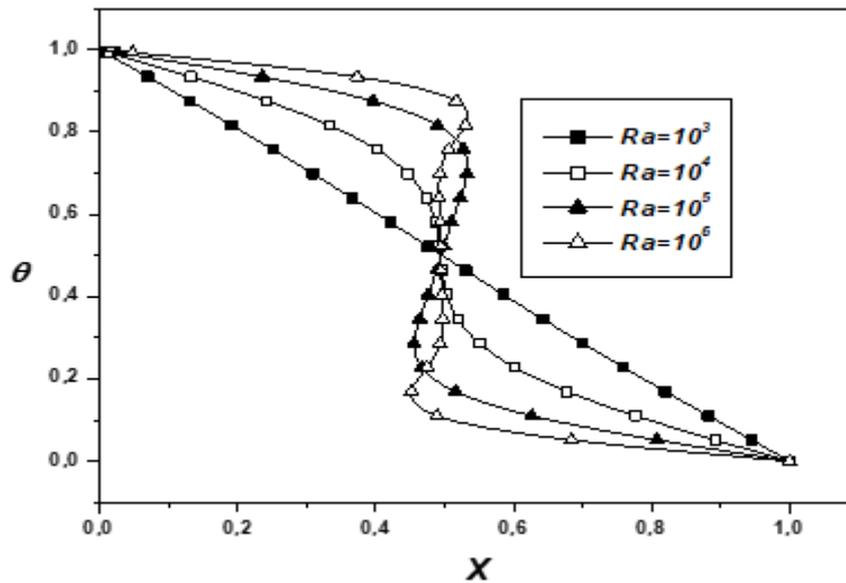


Figure IV. 5: Profil de température ϑ à $Y=0.5$.

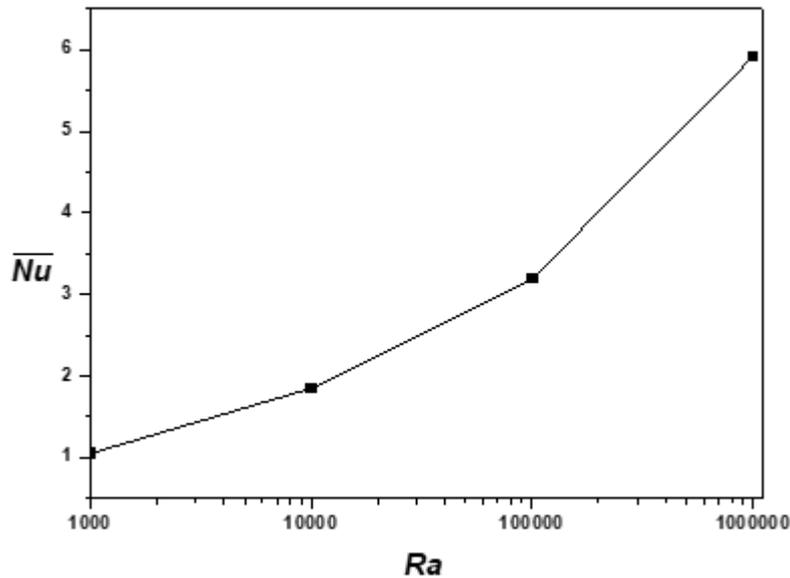
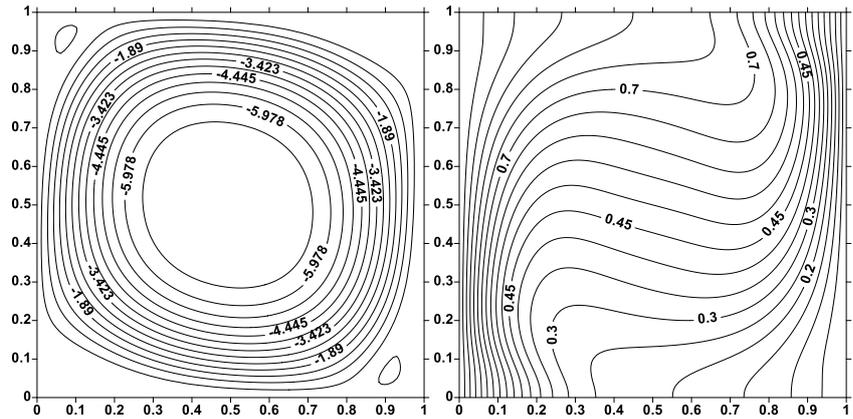


Figure IV. 6: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.

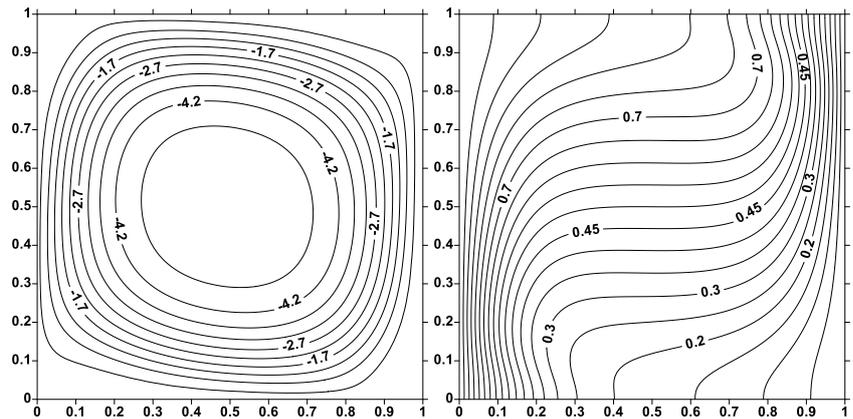
IV.5 Effet de l'intensité du champ magnétique

L'influence de l'intensité du champ magnétique est illustrée sur les figures IV.7,8,9,10 qui montrent respectivement la structure d'écoulement et les lignes isothermes, le profil de la composante vitesse horizontale, le profil de température et le nombre de Nusselt moyen. D'après ces figures, nous constatons que la présence du champ magnétique réduit : l'intensité et la vitesse de l'écoulement ainsi que le transfert de chaleur dans la cavité. Cette réduction est de plus en plus importante avec l'augmentation du nombre de Hartmann.

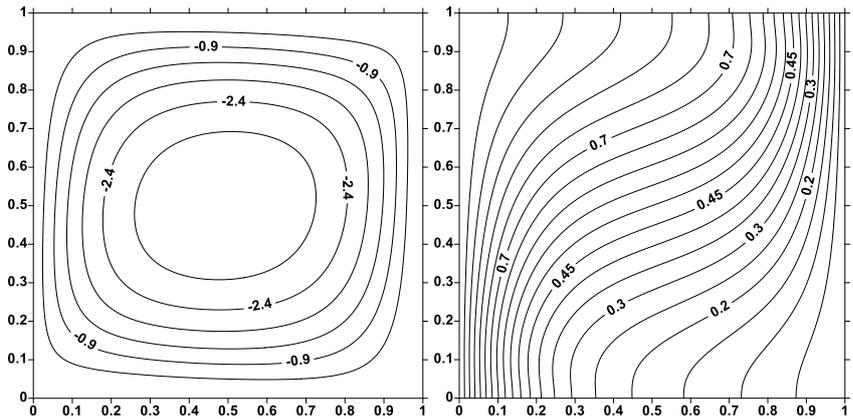
Ha=0



Ha=25



Ha=50



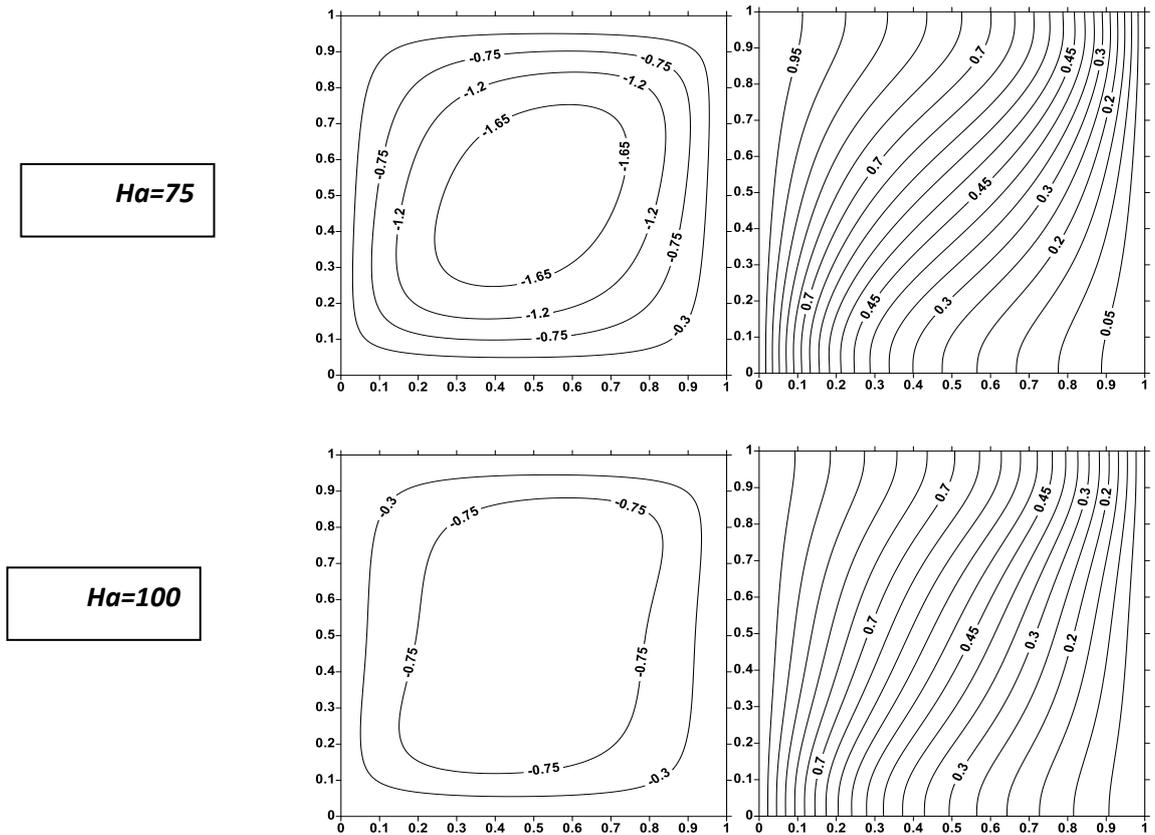


Figure IV. 7: Structure d'écoulement et lignes isothermes

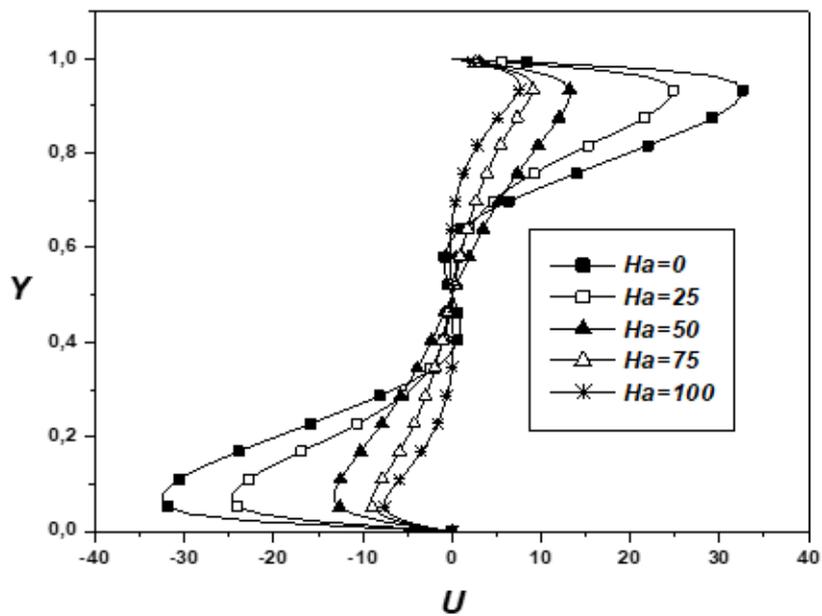


Figure IV. 8: profil de vitesse U à $X=0.5$.

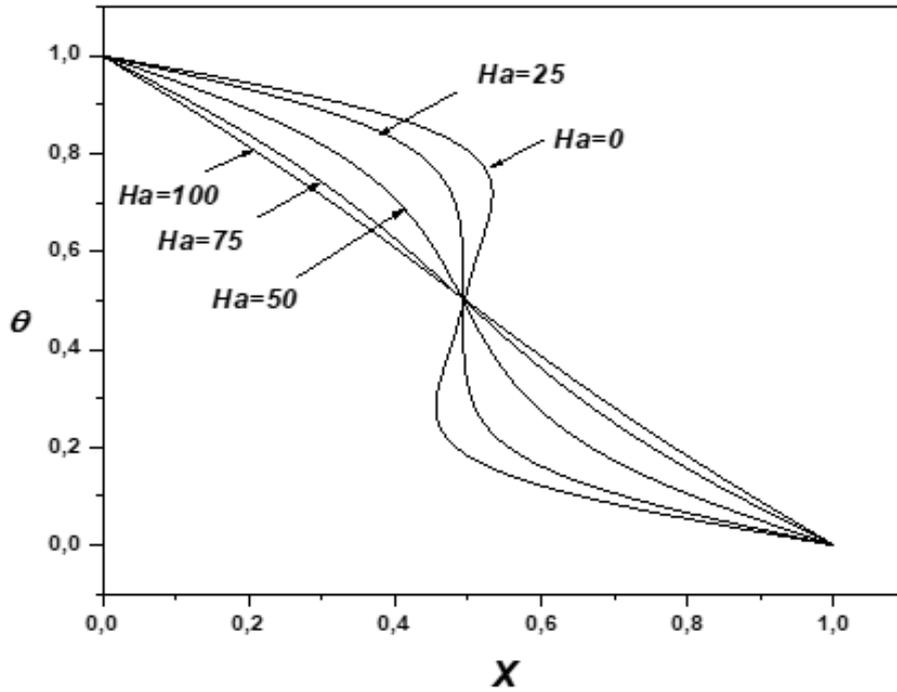


Figure IV. 9: Profil de température ϑ à $Y=0.5$.

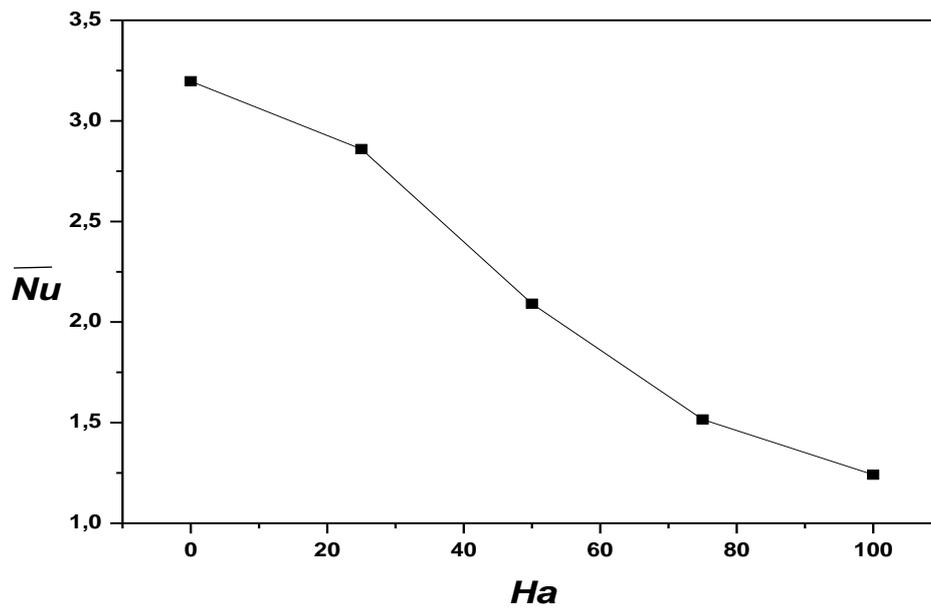


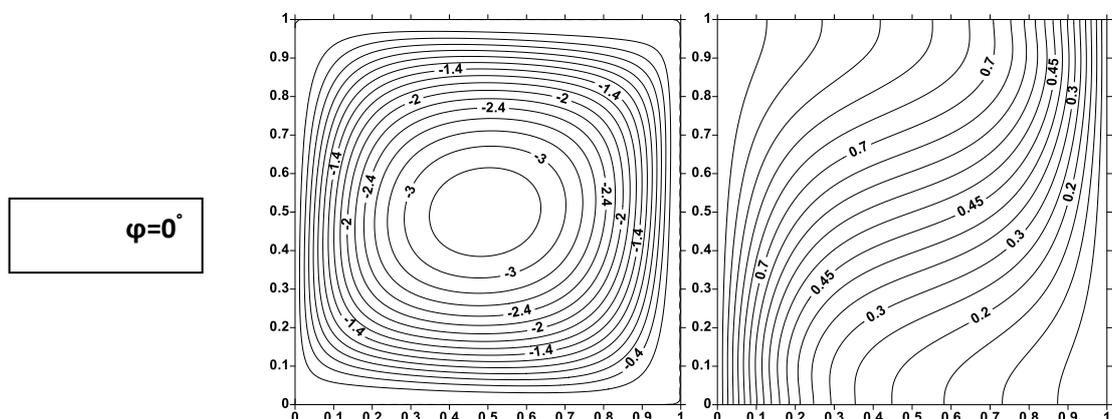
Figure IV. 10: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra .

IV.6 Effet de l'angle d'inclinaison du champ magnétique

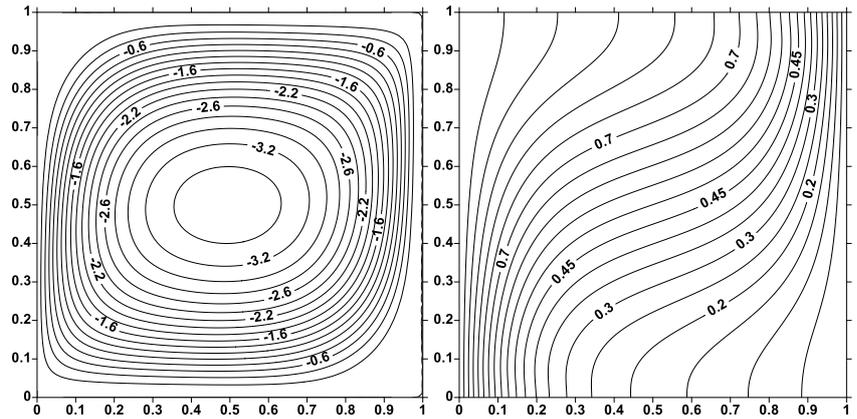
La figure IV.11 et le tableau IV.3 montrent l'effet de l'angle d'inclinaison du champ magnétique. Nous constatons d'une part une variation dans la structure d'écoulement (centre de rotation circulaire puis oval). D'autre part la vitesse maximale de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur sont minimales quand le champ magnétique est orienté horizontalement ($\phi=0$)

Tableau IV. 3: Variation de V_{max} et Nu en fonction de ϕ .

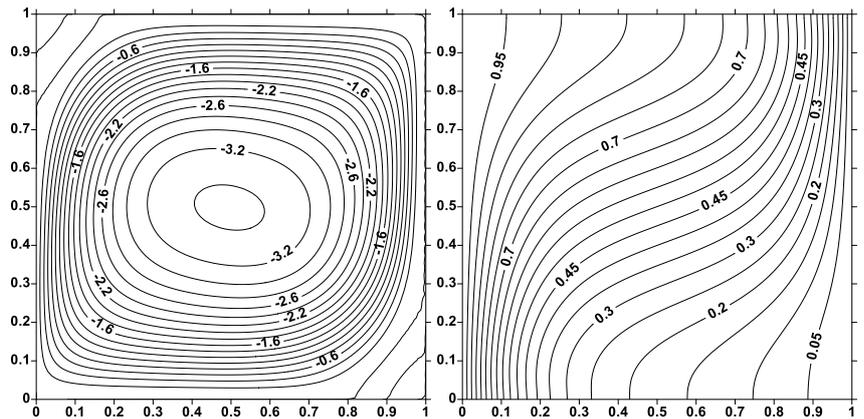
ϕ	0°	30°	45°	60°	90°
V_{max}	17.66	20.45	21.57	22.01	21.15
Nu	2.09	2.18	2.20	2.18	2.11



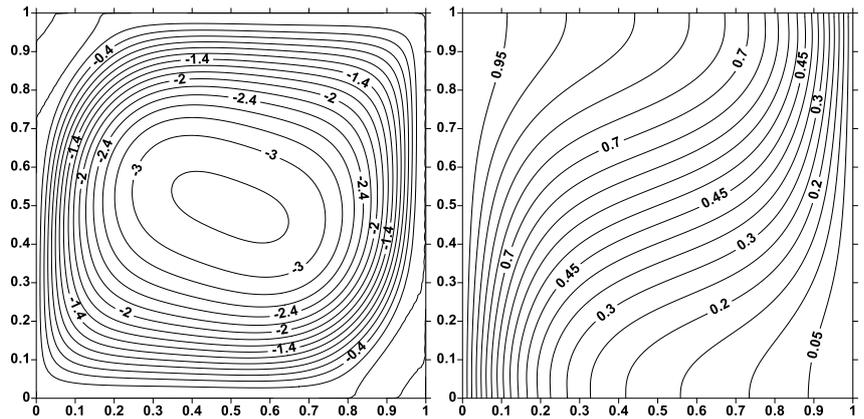
$\varphi=30^\circ$



$\varphi=45^\circ$



$\varphi=60^\circ$



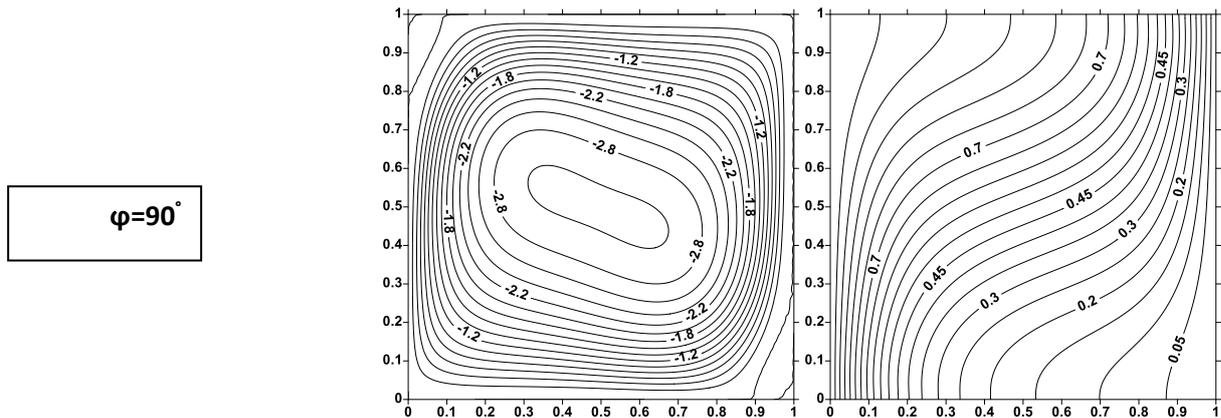


Figure IV. 11: Structure d'écoulement et ligne isothermes

VI.7 CONCLUSION

Les résultats obtenus ont montré que dans le cas de l'absence du champ magnétique le la convection naturelle dépend du nombre de Rayleigh. Ainsi le transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement au sein de la cavité sont plus importants avec l'augmentation du de Ra. La présence d'un champ magnétique réduit l'intensité de la convection naturelle. En effet la vitesse de l'écoulement et le taux du transfert de chaleur sont de plus en plus réduits avec l'augmentation du nombre de Hartmann. L'orientation horizontale du champ magnétique apporte la réduction la plus importante.

Bibliographie

Bibliographie :

[1]	Sparrow E, M, Cess R, D (1961). The effect of magnetic field on free convection heat and mass transfer, Int.J.heatTransfer 3,4,267-274
[2]	Emery A.F (1963) the effect of a magnetic field upon the free convection of a conducting fluid. J, heat Mass transfer
[3]	Elbashbeshy E,M,A (2000) .free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along along a vertical plate in the presence of the magnetic field,Int,J,Eng,Sci,38,207-213
[4]	Elbashbeshy E.M.A. (1997). heat and mass transfer along a vertical plate with variable surface tension and concentration in the presence of a magnetic field, Int.J.Eng Sci,34,515-522
[5]	Alchaar S, Vasseur P, Bilgen E (1995). Effect of a magnetic field on the onset of convection in a porous medium, Heat Mass Transfer,30,259-267
[6]	Rudraiah N, Barron R, M. Ventachalappa M, Subbaraya C, K (1995). Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure, Int,J, Eng,Sci,33,1075-1084.
[7]	Bian W, Vasseur P, Bilgen E, meng F (1996). Effect of an electromagnetic field on naturel convection in an inclined porous layer, Int,J,heat fluid Flow ,17,36-44
[8]	Kaneda M, Tagawa T, Ozoe H (2006) Naturel convection of liquid metal under a uniform magnetic field with an electric current supplied from outside, Exp.Thermal Fluid Sc,30,243-252
[9]	Uda N, Hayase M, Chikaoka T, Inoue S, Horllike H, Miyazaki K. (2000) Naturel convection heat transfer of lithium under magnetic field, Fusion Eng, Design,51-52,893-898
[10]	S.V .Patanakar, Numeriacal heat transfer and fluid flow , Hashington, Dc(1980).

[X]	N. Rudraiah, R. M. Barron, M. Venkatachalappa, C. K. Subbaraya, Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure. Int. J. Eng. Sci. 33(1995)1075-1084
-----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------