

الجمهورية الجزائرية

قراطية الشعب

Republique Algerienne Democratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث  
العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي  
التبسي - تبسي -

Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie civile

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique En :**

**GENIE CIVIL**

**Spécialité : Structures**

**Par :** Aouaichia Hana. Kerkoub Mohamed Amine

**Sujet :**

***Dynamique des structures composites  
Sandwich***

**Présenté et soutenu publiquement, le 12 /06/2024, devant le jury composé de :**

Dr. LABED Abd Errahime .....	MCB.....	Président
Dr. AYEB Belkhir .....	MAA.....	Co-Encadreur
Dr. ATHAMNIA Ibrahim .....	MCB.....	Rapporteur
Prof. HARKATI El-Haddi .....	Prof.....	Encadreur

Promotion : 2023/2024

# Dédicaces

وَأَنْ لَيْسَ لِلإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَى ○ وَأَنْ سَعْيُهُ سَوْفَ يُرَى ○

*Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.*

- *À celui qui est parti, qui a été l'exemple parfait de père de famille et qui n'a jamais manqué de me donner un chemin empreint de bonté et de joie : mon père khalil*
- *A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère DifAllah Ghazella*
- *A mes chères sœurs et mes frères qui n'ont pas cessé de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.*
- *A mon adorable petite sœur Safaa, qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.*
- *A Tous mes amis et Mes collègues de promotion avec lesquels, j'ai passé mes meilleures années d'études.*
- *A Mon encadreur Harket El Haddi*

# *Dédicace*

*A mes chers parents qui m'ont soutenu,  
Encouragé et sacrifié pour moi durant ces années d'études,*

*A mes frères et mes sœurs pour leurs encouragements  
Permanents, et leur soutien moral,*

*A toute ma famille,*

*A mes chers amis et mes frères pour leurs messages  
Motivants, leur soutien et leurs encouragements,*

*Je vous dédie le fruit de mes 17 années d'études,  
Merci d'être toujours là pour moi.  
... Que Dieu te bénisse ...*

## **Remerciement :**

*La première et la dernière chose est pour Allah qui nous a donné la capacité suffisante pour terminer ce travail.*

*Nous voulons remercier notre superviseur monsieur HARKATI ELHADI, pour ses conseils, ses encouragements et ses conseils qu'il a prodigués tout au long de notre séjour en tant qu'étudiants. Nous avons de la chance d'avoir un superviseur qui se souciait tellement de notre travail et qui a répondu à nos questions et nos requêtes si rapidement. Nous tenons également à remercier les membres du jury qui ont bien voulu lire et examiner notre travail.*

*Un merci spécial à tous ceux qui nous a soutenus pour terminer ce travail.*

## Liste des symboles

$c$ ;	indice correspond aux caractéristiques de l'âme (cœur)
$f$ ;	indice correspond aux caractéristiques des peaux (faces).
$t_f$ :	épaisseur de peau
$t_c$ :	épaisseur de l'âme d distance entre l'axe neutre de deux peaux
$b$ :	largeur du sandwich
$h$ :	épaisseur du sandwich
$P$ :	charge appliquée
$L$ :	distance entres les appuis (flexion 3 points)
$E_c$ :	module d'élasticité de l'âme
$E_f$ :	module d'élasticité du matériau de peau
$E_{f1}, t_{f1}$ :	module d'élasticité et épaisseur de la peau supérieure
$E_{f2}, t_{f2}$ :	module d'élasticité et épaisseur de la peau inférieure
$G$ :	modules de cisaillement
$M$ :	moment fléchissant
$T$ :	L'effort tranchant
$D$ :	rigidité en flexion
$S$ :	rigidité en cisaillement
$\delta$ :	contrainte de traction dans les matériaux peaux
$\sigma$ :	contrainte de cisaillement dans le matériau d'âme
$w_1$ :	déplacement due à la flexion des peaux
$w_2$ :	déplacement due au cisaillement du matériau d'âme
$w_t$ :	déplacement totale
$\Delta F$ :	variation de la force sur la partie rectiligne de la courbe charge –déplacement
$\Delta f$ :	variation de la flèche, correspondante à la variation de la force
$a$ :	La longueur d'un panneau sandwich ou la portée d'une poutre sandwich
$b$ :	largeur du panneau sandwich ou de la poutre
$t$ :	épaisseur de la peau de parement
$\rho_c$ :	Densité du matériau de base en nid d'abeille
$E_{eq}$ :	module d'élasticité équivalent
$\rho_f$ :	Densité du matériau de parement
$H$ :	hauteur du panneau sandwich incluant les peaux de parement

$h$ :	hauteur du noyau en nid d'abeille ou épaisseur de la plaque
$l$ :	taille de la cellule
$t_{cell}$ :	épaisseur de paroi de la cellule en nid d'abeille
$t_{eq}$ :	épaisseur équivalente
$\rho_{eq}$ :	Densité équivalente
$\rho$ :	Densité de la plaque
$\nu$ :	Coefficient de Poisson
$E$ :	module de Young
$f$ :	fréquence fondamentale

## Liste des tableaux

<i>Tableau 2.1: Exemple de matériaux composite, pris au sens large.</i>	40
<i>Tableau 2.2: Caractéristiques spécifiques des matériaux usuels, élaborés sous forme massive</i>	40
<i>Tableau 2.3: Caractéristiques mécaniques spécifiques des matériaux élaborés sous forme de fibres</i>	40
<i>Tableau 2.4: Les caractéristiques de ces matériaux</i>	43
<i>Tableau 2.5: Le déplacement et le contrainte max</i>	44
<i>Tableau 3.1 : Paramètre géométrie de la cellule</i>	48
<i>Tableau 3.2: Les Modules de Gibson dans le plan X1-X2</i>	53
<i>Tableau 3.3 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour h=8.8</i>	57
<i>Tableau 3.4 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour h=12.8</i>	57
<i>Tableau 3.5 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour h=14.8</i>	57
<i>Tableau 3.6 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour h=18.8</i>	58
<i>Tableau 3.7 Dimensions des éprouvettes</i>	59
<i>Tableau 3.8 : Les charge et déplacement de rupture pour les différents types d'éprouvette</i>	60
<i>Tableau 3.9 : Les déplacements pour différent d'hauteur avec P=200 N</i>	65
<i>Tableau 3.10 : Les déplacements pour différent d'hauteur et charge</i>	65
<i>Tableau 4.1 : Les différentes valeurs de (analytique/exact/homogène) pour les trois premières modes</i>	82
<i>Tableau 4.2 : Propriétés des noyaux en nid d'abeilles pour changement de la hauteur</i>	84
<i>Tableau 4.3 : Comparaison des fréquences pour la variation d'hauteur</i>	84
<i>Tableau 4.4 : Comparaison des fréquences pour la variation d'hauteur</i>	86
<i>Tableau 4.5 : Les facteurs de perte <math>\eta</math> et l'amortissement pour les deux modèles</i>	90

# Liste des figures

Figure 1.1: Schématisation D'une Structure	20
Figure 1.2; Matériaux Pour Les Peaux	21
Figure 1.3 : Structures Sandwiches Avec Les Différents Noyaux	21
Figure 1.4 : Différentes Configurations De Nids D'abeille	22
Figure 1.5: Train A Grande Vitesse	23
Figure 1.6 : Différentes Sollicitations (M, N, T) Appliquées A Un Sandwich	26
Figure 1.7; Panneau Sandwich Chargé En Flexion	28
Figure 1. 8 : Répartition Des Chargements Dans Une Poutre Sandwich Dans Le Plan	28
Figure 1.9 : Distributions De Contrainte Normale Et Du Cisaillement Dues La Flexion : (A), $E_c \ll E_f$ (B), Et $E_f \ll E_c$ Et $T_f \ll T_c$ (C).	31
Figure 1. 10: Principe De L'essai De Flexion Trois Points Sur Un Sandwich	32
Figure 1.11 : Répartition Des Contraintes De Flexion Planes Dans Le Cœur Et Les Peaux Du Sandwich	33
Figure 1.12 : Répartition Des Contraintes De Cisaillement Dans Le Cœur Et Les Peaux Du Sandwich	34
Figure 1.12 : Déformée D'une Poutre En Flexion Et En Cisaillement.	34
Figure 1.14: Méthode Graphique Pour L'évaluation Du Module De Cisaillement $G_{eq}$ De L'âme Du Sandwich	35
Figure 2.1 : Matériau Composite.	38
Figure 2.2 : Les Constituants D'un Composite Stratifié	42
Figure 2.3 : Convention De Signe Pour La Désignation Des Stratifiés	44
Figure 2.4 : La Géométrie De Déformation	44
Figure 2.5 : Effet Des Différents Matériaux Composites Sur Le Déplacement Et La Contrainte	45
Figure 3.1 : Géométrie D'une Cellule Nida, Vue De Dessus	51
Figure 3.2 : Vue En Perspective Du Nid D'abeilles	52
Figure 3.3 : Des Parois De Cellule Par Flexion Des Clinquants Sous Une Charge Dirigée Suivant $XI[50]$	53
Figure 3.4 : Déformations Des Parois De Cellule Par Flexion Des Clinquants Sous Une Charge Dirigée Suivant $XI$	54
Figure 3.5 : Déformations En Flexion Et Rotation Des Parois	55
Figure 3.6 : Géométrie D'une Cellule En Nid D'abeille	56
Figure 3.7 : Variation De $G_{xz}$ En Fonction De $R$ . Pour $0-30^\circ$	60
Figure 3.8 : Courbes Charge Flèche Flexion 3 Points Des Sandwiches Alu -Alu (82) Et Alu-Fibre (144)	64
Figure 3.9 : Essai Statique 3 Point Model Homogène Et Exact	64
Figure 3.10 : comparaison de la variation de déplacement pour les différents modèles -direction $w$	65
Figure 3.11 : Comparaison De La Variation De Déplacement Pour Les Différents Modèles -Direction $L$	66
Figure 3.12 : Modélisation De La Flexion 3 Points	67
Figure 3.13 : modèle M2 Maillage de la moitié de la plaque sur Abaqus	67
Figure 3.14 : Modèle M2 Maillage De La Moitié De La Plaque Sur Abaqus	68
Figure 3.15 : Courbe Charge Flèche -Flexion 3 Point Des Sandwichs Homogène _Sans $L$	68
Figure 3.16 : courbe charge hauteur -flexion 3 point	
Figure 3.17 : La Comparaison Entre Le Model Alum Exact Et Le Model PVC	70
Figure 4.1: Une Structure Hexagonale	71
Figure 4.2: Élément De Plaque	72
Figure 4.3 : Panneau Sandwich En Nid D'abeille	73
Figure 4.4: Honeycomb Sandwich Structure. 1. External Aluminum Skin, 2. Adhésive, 3. Aluminium Honeycomb Core, 4. Internal Aluminium Skin	73
Figure 4.5 : Une Comparaison Entre Les Valeurs De La Fréquence Pour Les Deux Modèles Et Calcul Analytique	74
Figure 4.6: Paramètres Equivalents D'une Assiette De Sandwich	78
Figure 4.7 : La Fréquence Pour Les Dix Premiers Modes De Modèle Exact	79
Figure 4.8: La Fréquence Pour Les Dix Premiers Modes De Modèle Homogène	83
Figure 4.9 : Variation De La Fréquence Pour Les Dix Premiers Modes	91
Figure 4.10: Courbe De Réponse En Fréquence Pour Un Système Faiblement Amorti	92
Figure 4.11 : Comparésent De Variation Du Frequence Avec Deplacement Entre Le Modele Exact Et Homogene	98



# Résumé

*L'étude concerne le potentiel remarquable des structures sandwich dans l'industrie, en raison de leurs propriétés exceptionnelles. Elle propose d'étendre leur application à une gamme plus large de structures, en s'appuyant sur une comparaison de différents modèles numériques pour analyser le comportement mécanique des plaques nid d'abeilles.*

*L'étude souligne l'importance d'une approche combinant modèles analytiques et numériques pour une compréhension complète du comportement des structures sandwich. Les résultats obtenus confirment la performance des plaques sandwich en statique et en dynamique, ouvrant la voie à leur utilisation comme alternative viable aux sandwiches classiques. L'étude explore également l'influence des matériaux composites sur le comportement en flexion des plaques sandwich, en utilisant un modèle d'homogénéisation analytique et en comparant les résultats expérimentaux et numériques. Enfin, elle analyse la capacité vibratoire et d'amortissement des plaques nid d'abeilles. Ce travail apporte une contribution significative à la compréhension et à l'application des structures sandwiches à nids d'abeilles, en offrant des perspectives prometteuses pour leur développement et leur utilisation dans divers domaines industriels.*

**Mots clés :** *matériaux sandwiches, homogénéisation, modélisation numérique, flexion 3 point, nid d'abeille*

## **Abstract**

*The study highlights the remarkable potential of sandwich structures in industry, due to their exceptional properties. It proposes to extend their application to a wider range of structures, using an in-depth comparison of different numerical models to analyse the mechanical behavior of honeycomb plates. The study highlights the importance of an approach combining analytical and numerical models for a complete understanding of the behavior of sandwich structures. The results confirm the static and dynamic performance of sandwich plates, paving the way for their use as a viable alternative to conventional sandwiches. The study also explores the influence of composite materials on the flexural behavior of sandwich plates, using an analytical homogenization model and comparing experimental and numerical results. Finally, it analyses the vibration and damping capacity of honeycomb plates. This work makes a significant contribution to the understanding and application of honeycomb core sandwich structures, offering promising prospects for their development and use in various industrial fields.*

**Keywords:** *sandwich materials, homogenization, numerical modelling, mechanical behavior 3 point bending honeycomb.*

## المخلص

تسلط الدراسة الضوء على الإمكانيات الرائعة لهياكل الساندويتش في الصناعة، نظرًا لخصائصها الاستثنائية. ويقترح توسيع نطاق تطبيقها ليشمل نطاقًا أوسع من الهياكل، بالاعتماد على مقارنة لنماذج رقمية مختلفة لتحليل السلوك الميكانيكي لألواح خلية النحل .

وتركز ايضا على أهمية اتباع نهج يجمع بين النماذج التحليلية والعددية لفهم كامل لسلوك هياكل الساندويتش. تؤكد النتائج التي تم الحصول عليها أداء ألواح الساندويتش في الثبات والديناميكية، مما يمهد الطريق لاستخدامها كبديل عملي للسندويشات الكلاسيكية. كما استكشفت الدراسة تأثير المواد المركبة على سلوك الانحناء للألواح الساندوتش، وذلك باستخدام نموذج التجانس التحليلي ومقارنة النتائج التجريبية والعددية. وأخيرًا، يقوم بتحليل قدرة الاهتزاز والتخميد لألواح قرص العسل. يقدم هذا العمل مساهمة كبيرة في فهم وتطبيق هياكل الساندويتش الأساسية على شكل قرص العسل، مما يوفر آفاقًا واعدة لتطويرها واستخدامها في مختلف المجالات الصناعية.

**الكلمات المفتاحية:** المواد الساندويتشية، التجانس، النمذجة العددية، السلوك الميكانيكي . إنحناء 3 نقاط. خلية النحل

# Table des matières

Liste des symboles.....	I
Liste des tableaux.....	II
Liste des figures.....	III
Introduction générale.....	IV
<b>Chapitre I : Etude bibliographique .....</b>	<b>20</b>
1.1 Historique des composites sandwichs.....	21
Les peaux.....	23
L'âme.....	24
L'interface.....	26
1.2 Domaine d'application des sandwichs .....	26
1.3 La modélisation du comportement des panneaux sandwich nid d'abeille : .....	27
Introduction : .....	27
1.4 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs .....	28
1.5 Sollicitations et ruine des matériaux sandwichs .....	28
1.6 Mécanique Des Sandwiches .....	30
1.6.1. Théorie adaptée aux poutres sandwichs .....	30
1.6.2. COMPORTEMENT DES SANDWICHES EN FLEXION TROIS POINTS.....	35
<b>Chapitre II : comportement des plaques composites .....</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction .....	40
2.2 Matériaux Composite .....	40
2.2.1 Définition.....	40
2.2.2 Caractéristiques générales .....	40
2.2.3. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES .....	42
2.2.4 Caractéristiques mécaniques des matériaux.....	43
2.3 Fractions Volumiques et Massiques .....	43
2.3.1 Introduction.....	43
2.3.2 Fractions volumiques .....	44
2.3.3 Fractions massiques.....	45
2.4 Les stratifiants composite .....	45
2.4.1 Introduction .....	45
2.4.2 stratifiés .....	45
2.4.3 Angles positifs et négatifs .....	47

2.4.4 Hypothèses de la théorie des stratifiés .....	47
2.5 Etude de l'impact des matériaux composite sur le comportement des panneaux sandwichs composites en flexion .....	48
2.5.1 Effet de Type de matériau de composite sur le comportement des poutres en flexion 3 Points ...	48
2.6 Conclusion .....	50
<b>Chapitre III : homogénéisation Analytique et Modélisation Numérique de nid d'abeilles .....</b>	<b>51</b>
3.1 Introduction .....	52
3.1.1 Approche existant dans la littérature .....	52
3.2 La structure composite sandwich en nid d'abeilles .....	53
3.2.1 Historique du nid d'abeille.....	53
3.2.1 Caractérisation du nid-d'abeilles.....	53
3.2.3 Géométrie et notations .....	54
3.3 Approches analytiques .....	54
3.4.1 Propriété dans le plan (X1,X2).....	55
3.4.2 Propriétés hors du plan (X1, X2) .....	61
3.5 Application au nid-d'abeilles étudié ECM :.....	64
3.5.1 Analyse expérimentale de comportement mécanique des sandwich nid d'abeille en flexion 3 Point .....	66
3.6 L'essai de flexion .....	67
3.6.1 L'essai de flexion trois points .....	67
3.6.2 Essai statique :.....	68
3.6.3 Modélisation numérique : .....	69
3.9 Conclusions.....	78
<b>Chapitre IV : Etude de comportement dynamique des structures sandwichs .....</b>	<b>80</b>
4.1 Introduction .....	81
4.1.1 Forme hexagonale et vibration .....	81
4.2 Théorie des plaques en flexion .....	83
4.2.1. Définition d'une plaque .....	83
4.2.2 Théorie des plaques minces (ou théorie classique de Kirchhoff).....	84
4.2.3 Théorie des plaques épaisses (ou théorie de Mindlin-Reissner).....	85
4.2.4 Théorie classique des stratifiés dans les plaques (CLT).....	86
4.3 Vibration des plaques sandwichs.....	86
4.3.1 Vibration des plaques orthotropes rectangulaires simplement appuyée .....	87
4.3.2 Poutre encastree à une extrémité libre à l'autre.....	92
4.4 La théorie des nids d'abeille en plaques .....	94
4.4.2 Comportement équivalent des plaques sandwich nid d'abeille 95	
4.4.3 Analyse modale du panneau en nid d'abeille .....	96
4.5 Vibrations libres - fréquences naturelles.....	97

4.5.1 Résultats du modèle dans le plan.....	98
4.6 Vibrations forcées et Calcul de l'amortissement .....	100
4.6.1 Analyse dynamique direct en régime permanent .....	100
4.7 Conclusion :.....	103
<b>Conclusion Général.....</b>	<b>105</b>

---

## ***INTRODUCTION GENERALE***

---

### **Introduction générale :**

Les technologies contemporaines nécessitent l'utilisation de matériaux ayant des propriétés mécaniques élevées à leur utilisation, mais dont les masses volumiques sont faibles. Il s'agit principalement de diminuer la masse des structures. Les matériaux composites correspondent aux critères mentionnés précédemment. Les matériaux composites ont d'abord été employés dans de nombreuses composantes structurales en raison de leur faible densité, de leur grande résistance, de leur rigidité élevée et de leur durabilité exceptionnelle, en particulier dans le secteur de l'aéronautique. Leurs coûts de production réduits aujourd'hui permettent l'emploi de ces matériaux dans des domaines de plus en plus divers (automobile, navigation, construction, etc.). Un matériau composite le plus couramment employés., on notera les matériaux sandwichs, Les structures en forme de sandwich se démarquent des autres matériaux tels que les métaux, les céramiques et les polymères en étant composées :

- De deux semelles ou de peaux, d'épaisseurs réduites. Ces peaux sont fabriquées à partir de matériaux ayant une résistance relativement élevée.
- D'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité. Les corps et les esprits sont mécaniquement séparés.

Il est donc possible de changer les caractéristiques de ces matériaux en modifiant les proportions de leurs composants ou les caractéristiques des composants eux-mêmes. Ainsi, ces modifications permettent d'obtenir les caractéristiques désirées afin de répondre à des applications bien définies. Les structures en sandwich présentent ainsi de vastes opportunités pour les concepteurs dans des domaines très variés.

Dans un premier temps, on peut songer à des applications structurales classiques pour lesquelles il faut allier légèreté et rigidité comme l'industrie aérospatiale, ou plus généralement les transports (TGV). Leur résistance à la corrosion, quand les divers constituants ne sont pas métalliques, en fait également un matériau de choix pour la construction navale. L'usage des sandwichs se répand aussi dans l'industrie du bâtiment, et cette fois, ce sont leurs excellentes caractéristiques d'isolation thermique qui sont prises en compte. Ces matériaux sandwichs peuvent être réalisés en éléments très divers :

---

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

- aluminium, acier, bois, plastique, résines renforcées de fibres organiques ou inorganiques (matériaux composites), ...pour les peaux ;

- pour l'âme, le balsa, les nids d'abeilles (NIDA) [confectionnés en polypropylène, en aluminium, en Nomex (papier aramide enduit de résine phénolique)], les mousses alvéolaires...

De nombreux paramètres structuraux influent sur le comportement mécanique de ces systèmes complexes :

- la nature des matériaux constitutifs (densité, propriétés mécaniques, propriétés physiques, propriétés chimiques) ;

- les séquences d'empilement ;

- les épaisseurs relatives des différentes couches. Parmi les diverses familles de composites, on citera les matériaux composites qui résultent généralement de l'association de deux peaux et d'une âme (figure 1).

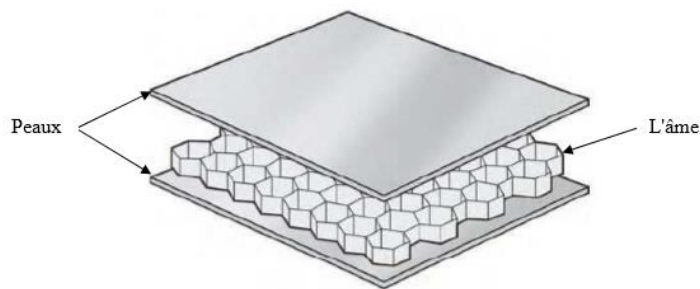


Figure 1 : Les constituants d'un sandwich [3]

L'âme se présente sous différentes formes (figure 2, 3) :

**a) âme pleine**, en mousses, bois...

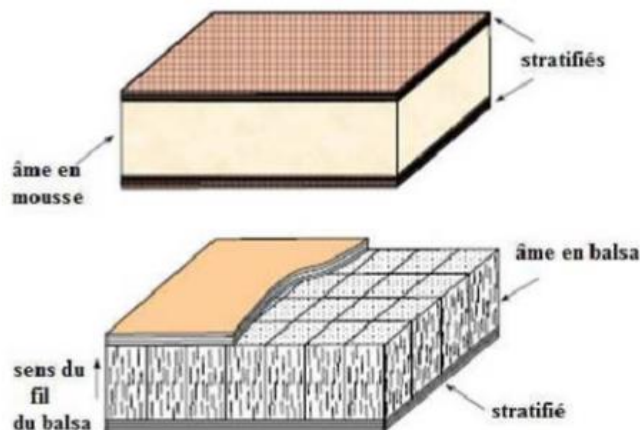


Figure 2 : Eléments constitutifs d'un sandwich à âme pleine [3]



---

## INTRODUCTION GENERALE

---

### b) âme creuse

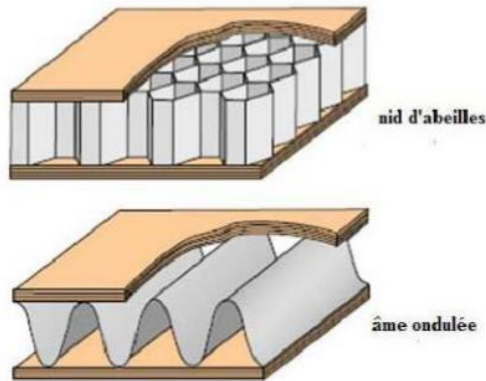


Figure 2 : Eléments constitutifs d'un sandwich à âme creuse

Le principal désavantage des matériaux sandwichs réside dans leur caractère « récent ». Il est effectivement essentiel de mener des études sur le comportement à long terme, y compris leur fatigue, ainsi que de définir des procédures d'essais mécaniques et de contrôle fiables, ainsi que de standardiser les méthodes de production. Cette innovation demande également la création de nouveaux domaines d'applications et l'amélioration de l'automatisation de la production. De nos jours, les ingénieurs et les concepteurs ne sont pas assez familiers avec les bénéfices et les utilisations des matériaux sandwichs, malgré leur grande diversité d'applications, mais toujours en tant qu'éléments non essentiels. Les structures en forme de sandwich présentent donc de vastes opportunités pour les créateurs dans des domaines très variés. L'objectif principal est alors d'accroître la rigidité/poids en remplissant l'âme de la structure de matériaux légers comme la mousse, le bois et le nid d'abeille. Il est possible de prendre en compte des applications structurales traditionnelles nécessitant une combinaison de légèreté et de rigidité, telles que l'industrie aérospatiale ou plus largement les transports (TGV). Lorsque les différents composants ne sont pas métalliques, leur capacité à résister à la corrosion en fait également un matériau privilégié pour la construction navale. Par exemple, on peut mentionner quelques secteurs d'application des matériaux en sandwich :

- Dans le secteur ferroviaire, les nouveaux modes de transport demandent des matériaux

Révolutionnaires. La construction du train à sustentation magnétique allemand Transrapid utilise le matériau sandwich Airex R82 avec un noyau structural en mousse à haut rendement, qui peut atteindre des vitesses de 550 km/h. Les bus et les cars de tourisme sont parmi les premiers à

---

## ***INTRODUCTION GENERALE***

---

Avoir remplacé les panneaux métalliques par des panneaux en matériaux composites dans le domaine du transport par route. Même si les panneaux en aluminium sont privilégiés pour les parties planes, les structures tridimensionnelles sont fabriquées à partir de matériaux composites. On peut obtenir un gain de poids important sur certains éléments en utilisant des panneaux sandwichs.

Dans cette étude , nous avons étudié le comportement en flexion trois points sous chargement statique de deux types de composites sandwichs en nids d'abeilles (type homogène et type exacte)

Le matériau d'âme retenu dans cette étude est : un nid d'abeille en Aluminium.

Le travail de mémoire présente les principaux résultats obtenus lors de l'étude expérimentale du comportement en flexion statique des structures sandwichs par Monsieur Elhaddi HARKATI le 18 mai 2006 au Laboratoire de Fiabilité Mécanique LFM

Le déroulement de ce travail se décompose en quatre parties principales. Après une brève introduction,

- Le premier chapitre consacré à l'historique du concept sandwich, à la présentation succincte de la théorie des poutres sandwich et la description des modes de dégradation et de ruine des matériaux sandwichs. Un aperçu est donné quant aux méthodes expérimentales utilisées en flexion pour la caractérisation de ces structures. Une large partie de ce chapitre est consacrée à l'étude bibliographique des aspects liés à l'endommagement.
- Le deuxième chapitre, présente les matériaux composites et un aperçu sur les composites stratifiés, ces matériaux constituant le stratifié sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite. Cette structure sous forme d'empilement permet de maximiser certaines propriétés mécaniques dans les directions voulues. Ainsi, le taux rigidité/poids de la structure peut être fortement amélioré, ce qui fait des stratifiés, un type de matériau composite de plus en plus utiliser dans différents domaines.
- Le troisième chapitre il implique l'homogénéisation analytique et la simulation numérique de l'âme du nid d'abeille

L'intérêt de cette étude réside dans la possibilité d'homogénéiser le nid d'abeille, indépendamment de ses peaux. Cela signifie remplacer le nid d'abeille, de géométrie complexe, par un matériau homogène aux propriétés mécaniques équivalentes dans les modèles analytiques et numériques.

L'objectif principal de quatrième chapitre est d'analyser la capacité de vibration et d'amortissement des plaques de sandwich en nid-d'abeilles, en prenant en considération l'impact de la géométrie sur la vibration structurale des plaques sandwich. Ce travail était en continuité des travaux déjà réalisés dans le laboratoire.

## ***Chapitre I : Etude bibliographique***

### 1.1 Historique des composites sandwichs

De nos jours, l'utilisation des matériaux composites connaît une croissance significative dans des secteurs aussi variés que l'aéronautique, l'automobile. Les matériaux sandwichs sont parmi les matériaux composites les plus couramment utilisés. Les structures en sandwich sont largement utilisées dans la fabrication de pièces composites. Les composites structurés en sandwich sont une catégorie particulière de matériaux composites, élaborés en combinant deux peaux fines, solides et rigides avec un noyau léger et assez épais. Le noyau est fixé avec un adhésif à la peau. On utilise différents matériaux de base dans des structures sandwich. La structure en sandwich présente un rapport rigidité-poids très élevé et un rapport flexion-poids très élevé. En conséquence, les composants en sandwich d'atteindre les mêmes performances que les matériaux classiques de construction avec beaucoup moins de poids. [26]

Les peaux d'un sandwich composite typique sont minces, solide et rigide, et le noyau est léger et structurellement assez fort pour garder les peaux dans leurs positions relatives sous chargement.

Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes. L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwichs en nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres. Le premier à avoir discuté de l'intérêt et ayant travaillé sur les matériaux composites a été le Français Duleau en 1820 [61]. Mais les premières applications n'ont débuté qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique. La conception des structures d'aéronefs étant soumise à des impératifs de performances toujours accrues en termes de rigidité, de résistance et de légèreté, la recherche de nouveaux matériaux est permanente. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction en bois et toile, la solution par des peaux minces métalliques a été adoptée dès les années 20. Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués par les matériaux de l'époque. Un brevet à ce sujet a été déposé par Von Karman en 1924 [62]. Le procédé Brodeau (1934), consiste en " deux épaisseurs de contreplaqué qui enserrant en sandwich une certaine épaisseur de matière légère, du liège ou de l'aggloméré de liège ». Ce type de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique avant la 2ème guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de certains éléments de structure (Avion Lignel (1938, F), Schneider (1938, F), De Havilland Albatros (1938, GB), Skydine (1939, U.S.A.). L'application la plus connue qui marqua le réel début de la construction sandwich fut le bombardier De Havilland Mosquito (1943, 7741 exemplaires). L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux contreplaqué, cœur balsa alors que l'intrados était construit de simples panneaux de contreplaqué. Toutefois, avec le développement des qualités intrinsèques de la construction sandwich, la disponibilité des matériaux, la facilité de leur mise en œuvre, la tolérance aux impacts et la réparation,

le choix de la conception a été largement amélioré pour les éléments de structure. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, a permis la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et cœur nid d'abeille. Ils furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953) : Carénage d'arête dorsale, contre-dérive, radôme [63].

Actuellement, le pourcentage en masse de composites utilisés dans la structure plafonne à 20% environ dans les avions civils et leur utilisation se limite aux structures secondaires. Très peu d'appareils voient leur structure primaire réalisée entièrement ou partiellement en composites. L'appareil civil le plus avancé de ce point de vue et qui fait largement appel à la construction sandwich est certainement le Beechcraft Starship (1983, U.S.A. 6-10 passagers) dont 70% de la masse de la structure est en matériaux composites. En Europe, le caisson d'extrémité de voilure de l'ATR 42 est en carbone. Le nouvel Airbus A340-500/600 (1er vol : 2001) adoptera pour la première fois un élément de structure travaillante en carbone, à savoir une poutre ventrale d'une longueur de 16 mètres (Air et Cosmos, N°1680). Dans le domaine militaire, on parle de plus de 90% de la structure en composite pour les avions du Lockheed Skunk Works : les bombardiers furtifs B2 et F117. En ce qui concerne la conception des hélicoptères, l'état de l'art publié [Aérospatiale 1986] est bien représenté par le Dauphin 2. Pour cet hélicoptère, 25% de la masse de la structure est réalisée en matériaux composites. Toutefois, des éléments de structure primaire sont réalisés en sandwich NIDA Nomex/peau métallique ultra fine. Le récent convertible V22-Osprey n'intègre pour sa part que des structures secondaires en sandwich composite [64].

Le fait de pouvoir construire léger et rigide intéresse de nombreux autres domaines. Les premières coques de bateau en fibre de verre/balsa datent du début des années 60 et l'utilisation dans ce domaine prend de l'ampleur avec l'arrivée de frégates militaires furtives et de bateaux à grande vitesse [65]. Par ailleurs, les impératifs de diminution de l'émission de CO<sub>2</sub> ont conduit les constructeurs automobiles à changer de technologie et à rechercher des solutions sandwichs pour construire des structures plus légères [66]. Toutefois, jusqu'à présent, leur introduction se heurte aux problèmes de la fabrication en grande série et seules des applications ponctuelles ont été réalisées : boucliers anti-crash prototypes [67], containers frigorifiques [68]. En compétition automobile, des sandwichs NIDA et peau en aluminium sont utilisés pour le châssis en remplacement de treillis soudés. Les mêmes contraintes conduisent à l'apparition de constructions hybrides sandwichs/aluminium dans le matériel ferroviaire [69]. Le génie civil utilise aussi des sandwichs pour réaliser des voûtes de grandes portées. Le gain en densité surfacique est spectaculaire : de 2600kg/m<sup>2</sup> pour une voûte en pierre à 33kg/m<sup>2</sup> pour une solution sandwich acier/mousse [70]. Récemment des portes d'écluses, un tablier de pont et un balcon pour habitat collectif ont été réalisés [71]. Egalement

des structures sandwichs possédant âme en élastomère chargé par des particules peuvent être incorporées dans la matrice des polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc par diminution de la sensibilité à la fissuration [72]. Le bref historique cité dans ce paragraphe suffit à démontrer les avantages intrinsèques des solutions sandwichs. 1.2 Architecture de structure sandwich

Un matériau sandwich est constitué de trois couches, elle se compose de deux peaux fines, liées à un cœur léger et épais (Figure I.1). Les deux peaux sont rigides et le cœur est relativement faible et souple, mais lorsqu' ils sont combinés sous forme de structure sandwich, ils produisent une structure rigide, solide et très légère [5]. Les trois parties du sandwich sont liées par un film d'adhésif, la liaison entre deux couches successives est appelée l'interface. Ces couches peuvent être de nature différente, d'où la complexité de ces structures à cause de grands nombres des matériaux susceptibles d'être employés [65], [66].

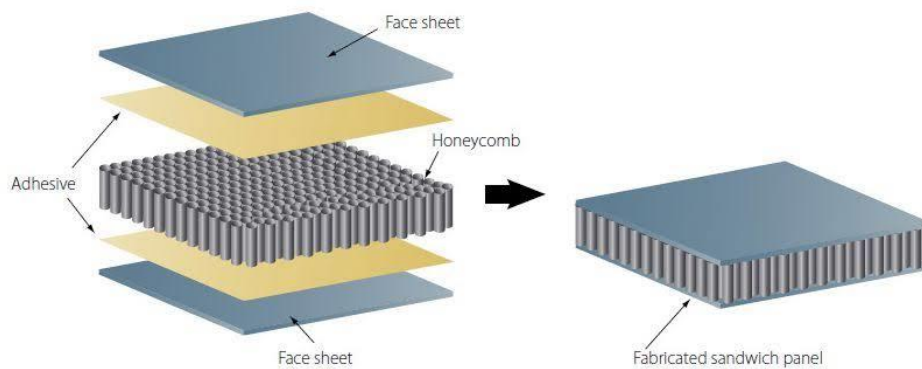


Figure 1.1: schématisation d'une sandwich [5]

### Les peaux

Les peaux des sandwichs peuvent être constituées d'un matériau isotrope (tel que l'aluminium) ou stratifié (figure 1.2). Le stratifié est formé par l'empilement d'un certain nombre de tissus ou plis unidirectionnel (UD) aux épaisseurs et orientations de fibres différentes. Le pli unidirectionnel est composé de fibres longues identiques, parallèles entre elles, liées par une résine(matrice). Ce matériau présente d'excellentes propriétés en traction dans le sens des fibres, mais dans cette même direction, la résistance en compression est plus faible, car le scénario de rupture est piloté par la résine. [19].[13]

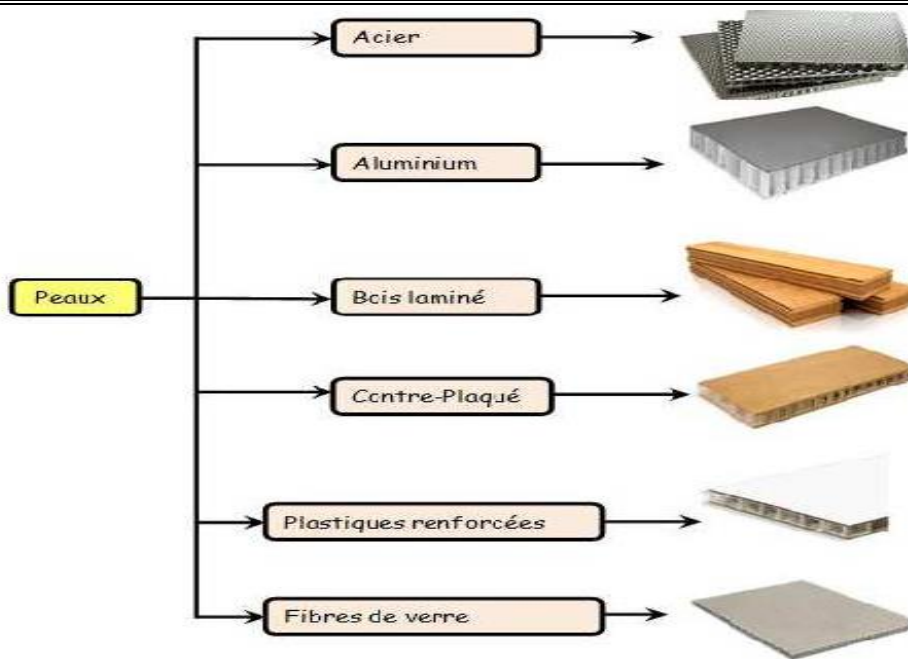


Figure 1.2 :Matériaux pour les peaux

### L'âme

L'âme de certaines structures sandwiches est construite selon une architecture méso scopique régulière comme nid d'abeille ou irrégulière comme la mousse (Figure I.3). En général l'âme doit être suffisamment rigide dans la direction perpendiculaire aux peaux afin d'assurer qu'il reste une distance constante entre les deux peaux, et également assez rigide en cisaillement pour assurer que lorsque le panneau sandwich est plié les peaux ne glissent pas une par rapport à l'autre. Notons que dans ce mémoire on se focalise uniquement sur une architecture d'âme périodique.

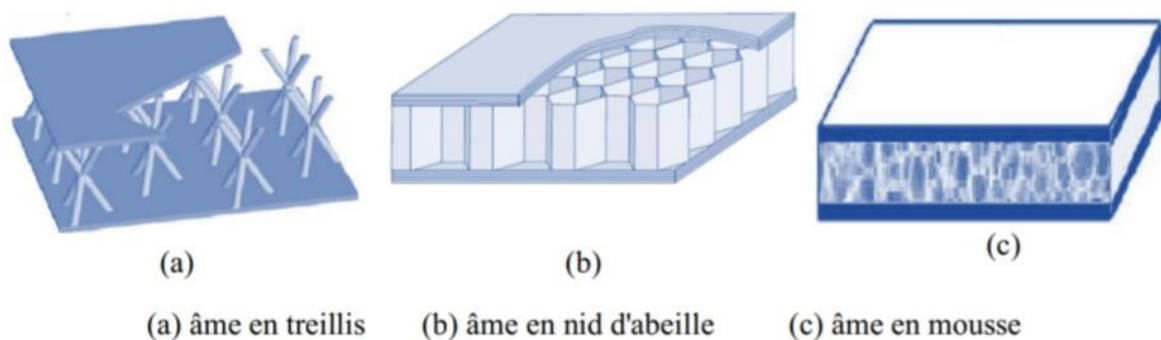


Figure 1.3 : Structures sandwiches avec les différents noyaux [3]

Dans le domaine aéronautique et spatial, trois grandes classes de matériaux ont été utilisées les matériaux alvéolaires de type nid d'abeille ou ondulé, les mousses et le balsa. D'un point de vue pratique, les alvéolaires de type nid d'abeille ou ondulé sont les plus répandues dans le domaine aéronautique et spatial, malgré les problèmes de reprise hydrique. Le nid d'abeille est fabriqué à partir



de la déformation des plaques minces en alliage d'aluminium, acier, des fibres de verre pré-imprégnées ou des fibres d'aramide (Nomex), de même l'âme ondulée est fabriquée à partir des tôles cannelées attachées alternativement sur les peaux (supérieure et inférieure).

La figure I.4 illustre différentes configurations alvéolaires en nid-d'abeilles disponible dans la littérature. Les trois configurations cellulaires de base (hexagonal, flexible, sur-expansé) sont les plus utilisées.

En général, les propriétés caractéristiques de nids d'abeille dépendent de la taille et la forme de la cellule, ainsi que de l'épaisseur et de la constitution des parois. Les peaux en association avec les âmes nids d'abeille sont en composite ou constituées d'un matériau homogène. [3]

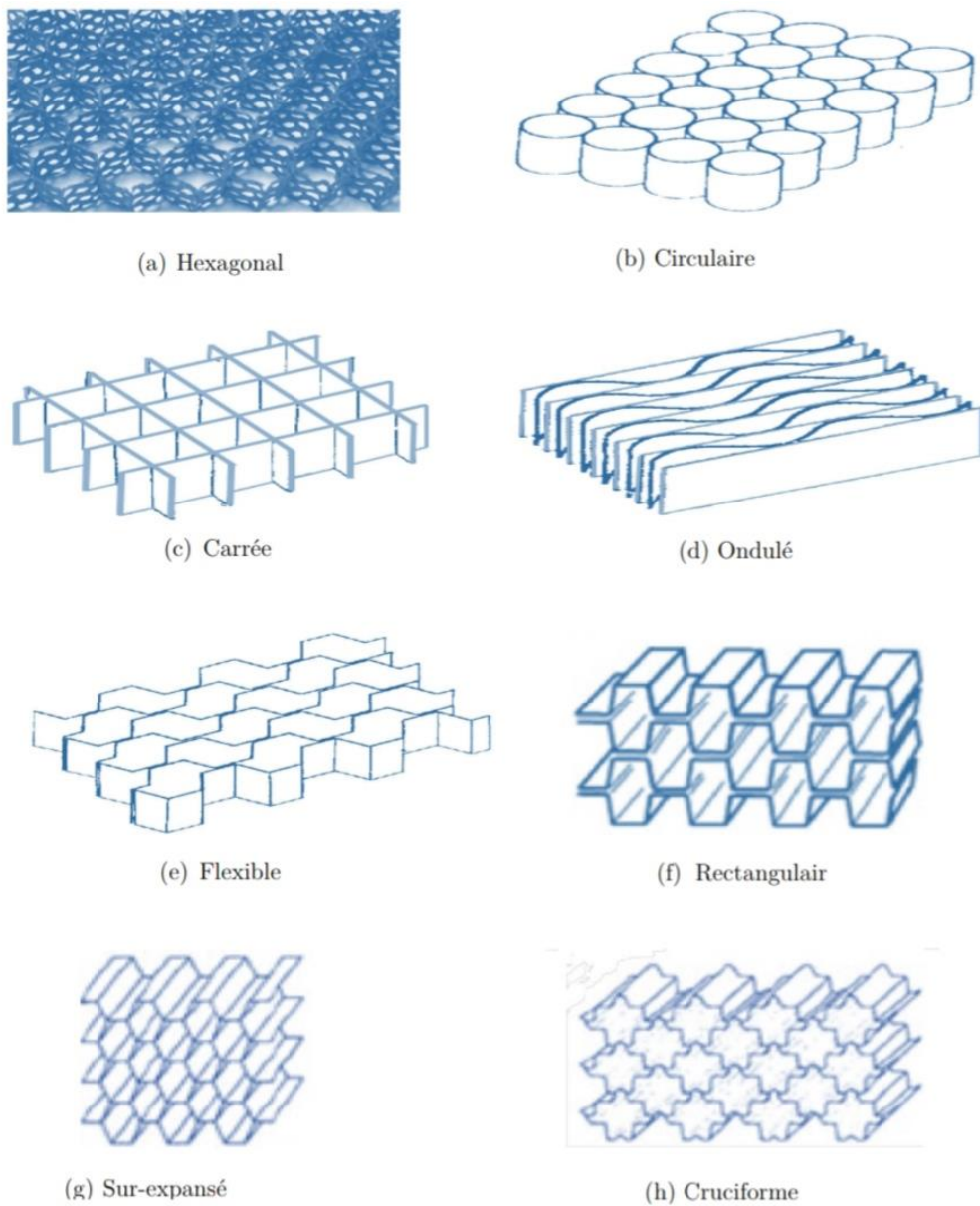


Figure I.4 : Différentes configurations de nids d'abeille [3]

**L'interface**

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

**1.2 Domaine d'application des sandwichs**

Les structures sandwichs ont été inventées au début du 19<sup>ème</sup> siècle [11]. Ces structures accordent de grandes possibilités dans plusieurs domaines très différents. Le but principal est d'augmenter le rapport rigidité/poids, en utilisant des matériaux légers dans le cœur des structures sandwichs. Il existe plusieurs domaines d'application, ainsi on peut citer quelques secteurs d'utilisation des structures sandwichs.

Les structures sandwichs sont utilisées dans l'industrie du bâtiment, pour leurs excellentes caractéristiques d'isolation thermique qui sont prises en compte. Il existe aussi d'autres raisons tels que le coût, la stabilité, la résistance au choc, la durée de vie,

La résistance à la fatigue, maintenance réduite, facilité de réparation et capacité d'atténuation des vibrations.[9].

Dans le domaine ferroviaire, on utilise les structures sandwichs pour la fabrication des cabines de trains à grande vitesse (TGV) pour leurs caractéristiques intéressantes et leurs bonnes résistances au feu. Grâce à ces structures, la vitesse de ces trains peut atteindre 550 Km/h. [9,11]. On utilise les structures sandwichs en mousse et fibre de verre pour la fabrication du bouclier avant du train à grande vitesse. Le besoin principal dans la conception du bouclier est le comportement à l'impact. Dans le cas d'un choc frontal, le bouclier avant doit absorber le maximum de quantité d'énergie possible.[12].



Figure 1.5 : Train à grande vitesse [12]

Dans le domaine du transport par route, les bus sont parmi les premiers à remplacer les panneaux en métal par des panneaux sandwichs. Malgré que dans le cas des structures planes les panneaux en aluminium sont préférés, les structures tridimensionnelles sont réalisées en matériaux composites [9].

Dans le domaine aéronautique, les propriétés anti-feu des panneaux sandwichs sont primordiales pour leurs utilisations intérieures des cabines. La norme anti-feu est très stricte et parfois

Difficile à atteindre, ce qui limite l'utilisation de ces matériaux. Ces dernières années, la plupart des avions civils ont également adopté cette construction pour de nombreux composants. Comme les planchers de l'avion Boeing 747 sont fabriqués à partir d'un panneau sandwich de balsa et de feuille d'aluminium [11].

En ce qui concerne la conception des hélicoptères, 25% de la masse de la structure est réalisée en matériaux composites. Toutefois, des éléments de structure primaire sont réalisés en sandwich. [13].

### **1.3 La modélisation du comportement des panneaux sandwich nid d'abeille :**

#### **Introduction :**

Il est difficile de modéliser le comportement des panneaux sandwich nid abeille en raison de la structure complexe du matériau. Le comportement du nid d'abeille est défini par trois constantes élastiques principales : le module d'élasticité dans la direction perpendiculaire au plan 1-2 et les deux modules de cisaillement en dehors du plan. En général, les coefficients de Poisson et les autres modules de cisaillement sont faibles ou inconnus.

Approches existantes :

1. Bitzer (1994):[51]

- Modules d'élasticité dans le plan = 1% du module dans la 3ème direction.
- Module de cisaillement = 1% de la moyenne des modules de cisaillement hors du plan.
- Coefficients de Poisson = 0.1.

2. Chamis (1988):[52]

- Modèle éléments finis (EF) 3D détaillé pour déterminer les propriétés équivalentes du cœur sous chargements spécifiques.

3. Grédiac et Mistou (1993, 2000):[53],[55]

- Analyse EF sur une seule cellule de base pour obtenir les modules de cisaillement transverses équivalents.

4. Gibson (1988):[54]

- Calcul des modules dans le plan à partir des paramètres géométriques et mécaniques en utilisant les équations de la théorie de l'élasticité.

➤ **Approches explorées dans le chapitre :**

- 1) Homogénéisation des structures périodiques basée sur les travaux de Gibson et Master.
- 2) Analyse par éléments finis basée sur les travaux de Chamis, Bourgeois, Grédiac et Al Bachi.

**Choix de l'approche :**

Le choix de l'approche la plus adaptée dépend de la complexité souhaitée du modèle, de la précision requise et des ressources disponibles. L'homogénéisation offre une solution simplifiée, tandis que l'analyse par éléments finis permet une modélisation plus précise mais plus complexe.

- Il est essentiel de prendre en compte la structure complexe du matériau et les interactions entre les différents composants lors de la modélisation du comportement des panneaux sandwich nid d'abeille. Les diverses méthodes exposées proposent des solutions diversifiées en ce qui concerne la complexité et la précision. La sélection de l'approche la plus appropriée varie en fonction des exigences particulières de chaque application.

**1.4 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs**

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ( $h_c \gg h_1; h_2$ )
- Les déplacements du cœur  $V_c$  et  $c V_c$  suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée Z.
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable Z : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transversales  $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ , les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse  $\delta_{xz}$  et  $\delta_{yz}$  sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformation.[6].[5]

**1.5 Sollicitations et ruine des matériaux sandwichs**

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.

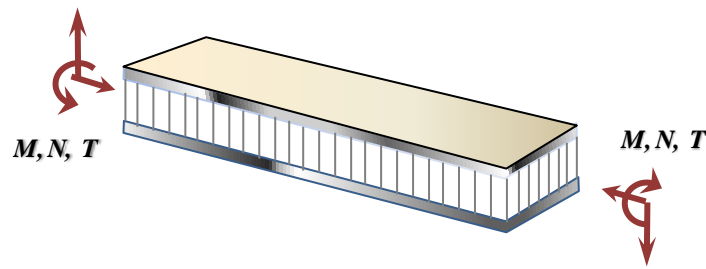
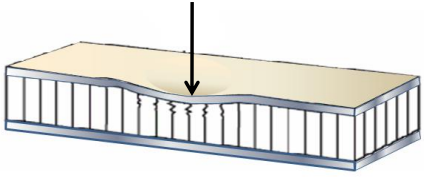
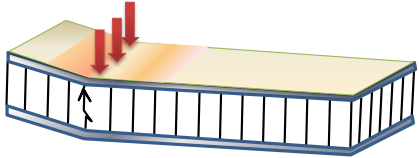
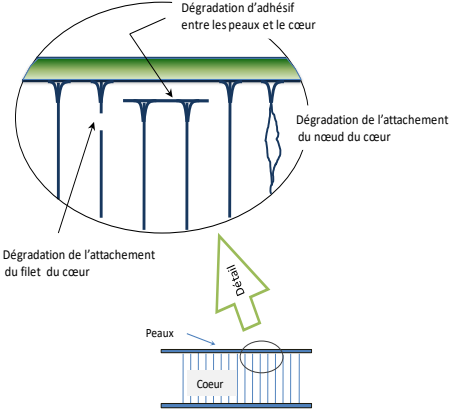


Figure 1.6 : différentes sollicitations ( $M, N, T$ ) appliquées à un sandwich [21]

Les différents modes de ruine résultants de ces sollicitations [ALB-02] sont récapitulé dans le tableau suivant :

<p><b>Flambement généralisé des peaux</b></p> <p>Le flambement généralisé peut survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures aux résistances à la rupture. La charge de flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions dans le plan de la poutre et les conditions aux limites, qui ne peuvent être modifiées que partiellement lors de conception. D'autres grandeurs également importantes dans la définition de la charge de flambement dépendent directement, du type de sandwich comme la rigidité de flexion du sandwich, l'épaisseur des peaux, les propriétés élastiques des peaux, l'épaisseur de l'âme ou le module de cisaillement de l'âme.</p>	
<p><b>Flambement généralisé de l'âme "crimping"</b></p> <p>Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme d'un flambement de l'âme (figure ci-contre). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux, par contre il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement dans l'âme.</p>	

<p style="text-align: center;"><b>Mode local de rupture par indentation</b></p> <p>L'indentation locale est un mode de rupture due à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique.</p>	
<p style="text-align: center;"><b>Rupture de l'âme par cisaillement</b></p> <p>Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme. Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau pour l'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevé, soit augmenter l'épaisseur de l'âme.</p>	
<p style="text-align: center;"><b>Dégradation de l'adhésive</b></p> <p>La dégradation de l'adhésif entre les peaux et le cœur se fait généralement selon trois types :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dégradation de l'adhésif entre les peaux et le cœur,</li> <li>▪ Dégradation de l'attachement des cellules du cœur,</li> <li>▪ Dégradation de l'attachement du nœud des cellules du cœur.</li> </ul> <p>La Figure ci-contre illustre les modes de dégradation de l'adhésif cité ci-dessus. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif du sandwich qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich</p>	

## 1.6 Mécanique Des Sandwiches

### 1.6.1. Théorie adaptée aux poutres sandwiches

#### 1.6.1.1 Sollicitation d'une poutre sandwich en flexion

Les structures sandwichs sont généralement sollicitées en flexion (trois points ou quatre points). Afin d'optimiser les caractéristiques des matériaux de l'âme et de la peau pour une application donnée, il convient de connaître leur comportement pour ces deux types de sollicitation. Considérons une poutre encastree avec une charge appliquée à la fin libre (Fig.I.7). La charge appliquée crée un moment de flexion qui est au maximum à l'encastrement, et une force de cisaillement sur la longueur de la poutre. Dans un panneau sandwich, ces forces créent une tension dans la peau supérieure et une compression dans la peau inférieure. Le cœur espace entre les peaux est chargé par des contraintes de cisaillement.

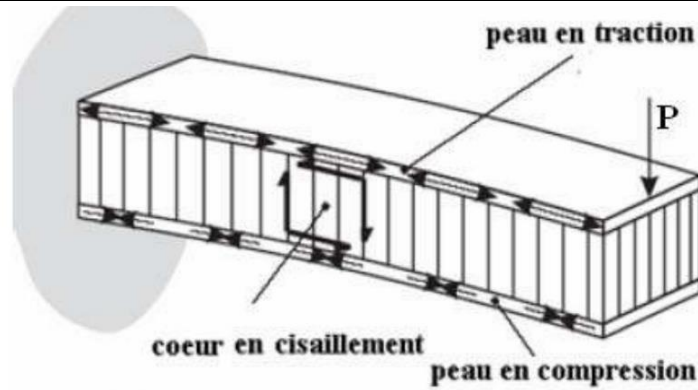


Figure 1.7; Panneau sandwich chargé en flexion [6]

La théorie des poutres simples est adaptée au poutre sandwich avec quelques modification L'utilisation de cette théorie permet de trouver une méthode simple pour la détermination des caractéristiques mécaniques principale de la structure sandwich : la rigidité en flexion, la rigidité en cisaillement, les contraintes planes dans les peaux et la contrainte de cisaillement dans l'âme. Dans le cas général, la répartition des chargements dans une structure sandwich, est décrite sur la figure (1.8). Pour simplifier l'étude, la poutre sandwich sera soumise un moment de flexion  $M_x$ , un effort normal  $N_x$  et une force transversale  $T_z$ .

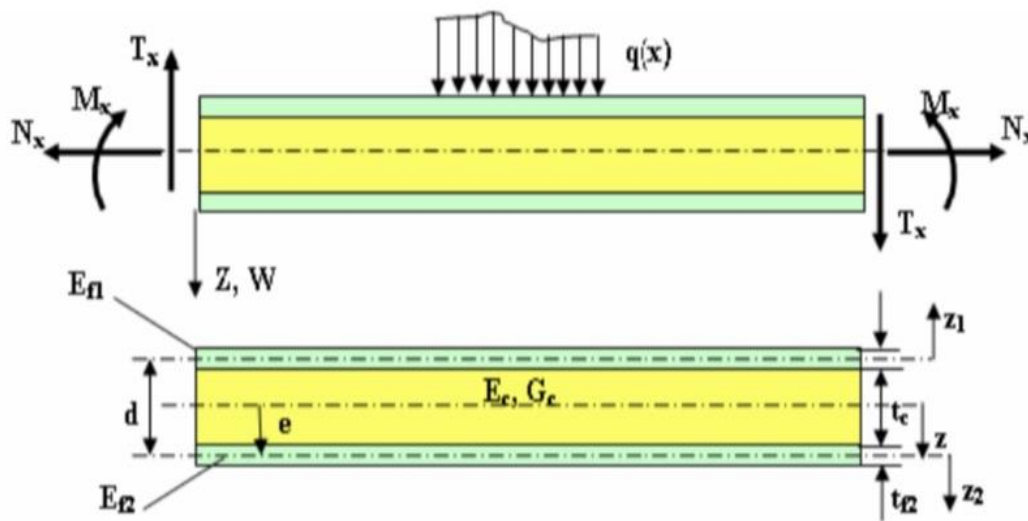


Figure 1. 8 : Répartition des chargements dans une poutre sandwich dans le plan [3]

Les indices « c » et « f » correspondent respectivement aux caractéristiques de l'âme (cœur) et des peaux (faces)

**1-Déformation longitudinale du sandwich  $\epsilon_x$**

Supposons d'abord que la poutre est seulement soumise un moment de flexion  $M_x$ . La déformation longitudinale un distance  $z$  par rapport l'axe neutre du sandwich, est donne par :

$$\varepsilon_x = \frac{M_x Z}{D} \quad (1.32)$$

D désigne la rigidité en flexion du sandwich

### 2-Rigidité en flexion du sandwich D :

La caractéristique principale d'un matériau sandwich est sa rigidité en flexion D

$$D = \int E Z^2 dz = \frac{E_{f1} b t_{f1}^3}{12} + \frac{E_{f2} b t_{f2}^3}{12} + \frac{E_c b t_c^3}{12} + E_{f1} b t_{f1} (d - e)^2 + E_{f2} b t_{f2} e^2 + E_c b t_c \left( \frac{t_c + t_{f2}}{2} - e \right)^2 \quad (1.33)$$

Où  $E_f$ ,  $E_c$ ,  $t_c$  et  $t_f$  sont respectivement les modules d'Young en contrainte plane et les épaisseurs des peaux et du cœur.  $D$  est la distance séparant les plans moyens des peaux et  $b$  la largeur du panneau sandwich, figure (1.9). Dans le cas d'un sandwich à peaux fines, les deux premiers termes du second membre peuvent être négligés, et même le troisième et le sixième terme, pour une âme à module d'élasticité faible. Pour un sandwich symétrique (même épaisseur et matériau), dont les deux conditions citées sont satisfaites, l'équation (2) devient :

$$D = \frac{E_f b t_f^3}{6} + \frac{E_f b d^2}{2} + \frac{E_c b t_c^3}{12} \quad (1.34)$$

Le premier terme du second membre correspond la rigidité des peaux par rapport leur propre axe neutre. Le deuxième terme représente la contribution la rigidité en flexion de ces mêmes peaux par rapport l'axe neutre (au centre du cœur pour un sandwich symétrique) du sandwich. Le dernier terme est la rigidité apporte par le cœur par rapport son axe neutre.

$$- \text{ Si } \left( \frac{d}{t_f} \right)^2 \geq 100 \text{ on néglige le premier terme} \quad (1.35)$$

$$- \text{ Si } \left( \frac{6E_f t d^2}{G_c t_f^3} \right) \geq 100 \text{ on néglige le troisième terme} \quad (1.36)$$

Alors le calcul de la rigidité en flexion est souvent limite :

$$D = \frac{E_f b d^2}{2} \quad (1.37)$$

### 3- Contraintes de traction et de compression dans les peaux du sandwich

Pour un sandwich symétrique (même peau pour un module d'élasticité élevé et faible Epaisseur), la position de l'axe neutre est au milieu du cœur. Les contraintes de traction ou de compression dans les peaux peuvent être calculés en utilisant l'équation (1) :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{M_x Z}{D} \quad (1.38)$$

La contrainte dans la peau supérieure est donnée par :

$$\sigma_1 = \sigma_x = E_1 \frac{M_x (d-e)}{D} \approx - \frac{M_x}{t_f b d} \quad (1.39)$$



La contrainte dans les peaux inférieure est donnée par :

$$\sigma_2 = E_2 \frac{M_x e}{D} \approx + \frac{M_x}{t_f b d} \quad (1.40)$$

#### 4- Contraintes de cisaillement dans les peaux et l'âme du sandwich

La contrainte de cisaillement est calculée en utilisant une définition plus générale de l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{tj,j} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma}{dx} + \frac{\tau_{xz}}{dz} = 0 \rightarrow \tau_{xz}(z) = \int_z^{(d+t/2)} \frac{d\sigma_x}{dx} dz \quad (1.41)$$

Sachant que pour  $\tau_{xz}$  est égale à zéro pour  $z = (d + t_f/2)$  En utilisant,  $dM_x/dx = T_x$  l'équation (10) devient :

$$\tau = \frac{T_z}{D} \int_z^{(d+t/2)} E z dz \frac{T_x B(z)}{D} \quad (1.42)$$

Avec B(z) est le moment surfacique d'ordre 1, calculé par :

$$B(z) = \int_z^{(d+t/2)} E z dz \quad (1.43)$$

Les contraintes de cisaillement dans les peaux et l'âme sont calculées par :

- Dans la peau supérieure pour :  $-d + e - \frac{t_{f1}}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{t_{f1}}{2}$

$$\tau_1(z) = \frac{T_z E_1}{d} \left[ \left( d - e + \frac{t_{f1}}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (1.44)$$

- Dans la peau inférieure pour :  $e - \frac{t_{f2}}{2} \leq z \leq e + \frac{t_{f2}}{2}$

$$\tau_2(z) = \frac{T_z E_2}{d} \left[ \left( d - e + \frac{t_{f2}}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (1.45)$$

- Dans l'âme pour :  $-d + e - \frac{t_{f1}}{2} \leq z \leq 0$

$$\tau_1(z) = \frac{T_z}{d} \left[ E_1 t_{f1} (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( d - e - \frac{t_{f1}}{2} \right) - z^2 \right\} \right] \quad (1.46)$$

- Dans l'âme pour :  $0 \leq z \leq e + \frac{t_{f2}}{2}$

$$\tau_2(z) = \frac{T_z}{d} \left[ E_2 t_{f2} (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( d - e - \frac{t_{f2}}{2} \right) - z^2 \right\} \right] \quad (1.47)$$

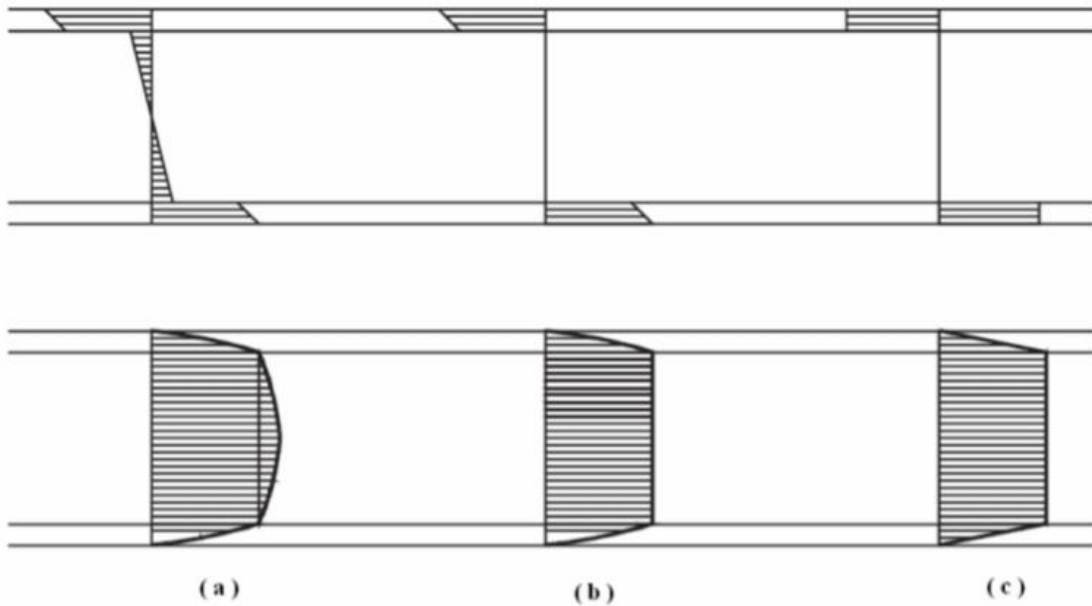


Figure 1.9 : Distributions de contrainte normale et du cisaillement dues la flexion : (a),  $E_c \ll E_f$  (b), et  $E_f \ll E_c$  et  $t_f \ll t_c$  (c). [3]

Les distributions de la contrainte normale dans les peaux et du cisaillement dans lme sont illustrées par la figure I.24 (a). Si  $E_c \ll E_f$  et  $t_f \ll t_c$ , les distributions de contrainte s'approchent de la forme idéale,

Pour un sandwich symétrique de même peau fine avec  $E_{f1} = E_{f2}$ ,  $t_{f1} = t_{f1}$ ,  $e = d/2$  et une me de faible module d'élasticité, la contrainte de cisaillement reste constante dans l'âme et s'écrit :

$$\tau_c = \frac{T_z}{bd} \quad (1.48)$$

La faible densité du matériau sandwich composant le noyau et une contrainte de cisaillement plus ou moins constante dans la section transversale, fait que, dans toute analyse mécanique de ce type de structure, la prise en compte des déformations de cisaillement est primordiale.

On peut admettre que la déformation est composée d'une contribution classique due la flexion, notée  $w_f$ , et d'une autre due au cisaillement notée  $w_c$ .

Pour une poutre sandwich de peaux fines, l'analyse mécanique est plus simple, et on peut définir la courbure totale comme étant la contribution d'une flexion et d'un cisaillement :

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S} \frac{dT_z}{dx} \quad (1.49)$$

La rigidité en cisaillement S est donnée par la relation :

$$S = \frac{Gd^2}{k} \quad (1.50)$$

Avec :

G : le module de cisaillement du cœur

h : la hauteur de la poutre

k : un facteur de cisaillement Égal 1,2 pour une section transversale rectangulaire homogène.

Pour un sandwich de peaux fine  $t_f < t_c$  et de cœur de faible module élastique  $E_c < E_f$ , cette rigidité est donnée par :

$$s = \frac{G_c b d^2}{t_c} \quad (1.51)$$

## 1.6.2. COMPORTEMENT DES SANDWICHES EN FLEXION TROIS POINTS

### 1.6.2.1. Introduction

Les essais de flexion jouent un rôle beaucoup plus important dans les matériaux composites stratifiés et sandwiches que dans les métaux. L'essai de flexion est préférable l'essai de traction. Il est beaucoup moins sensible aux amorces de ruptures provoqués par l'usinage des Eprouvettes. L'essai de flexion trois points offre la possibilité d'étudier le comportement d'un matériau, soit en flexion (priviliégiant une rupture par contrainte normale  $\sigma_x$  due au moment de flexion  $M_x$ , avec  $T_{xz}$  presque négligeable) ou en cisaillement (priviliégiant une rupture par contrainte de cisaillement  $\tau$  due effort  $T_{xz}$ ). Ceci est réalisé par l'adoption des conditions d'appuis fixées par la norme des rapports  $L/h$ .

Ici nous aborderons le cas de la flexion 3 points car le dispositif expérimental utilise et les essais effectués dans le cadre de notre Etude reposent sur cette sollicitation (fig : 1.11).

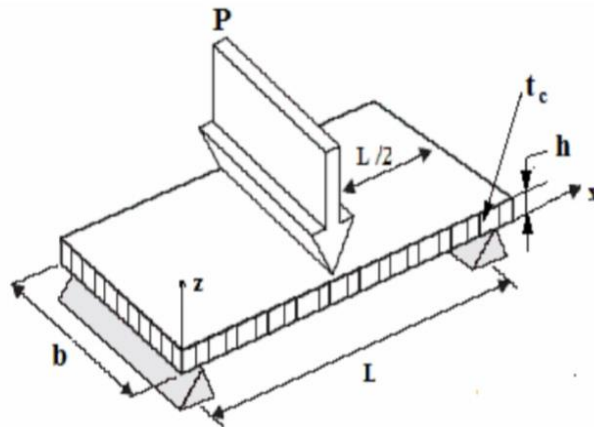


Figure1. 10: Principe de l'essai de flexion trois points sur un sandwich

Dans le cas d'un chargement central d'une poutre, le moment fléchissant vaut :

$$M = \frac{P_x}{2} \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \text{ et } M = \frac{P(l-x)}{2} \text{ pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L ;$$

P Etant la charge appliquée, et x la distance par rapport l'origine.

### 1.6.2.2. Contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux et de l'âme du sandwich

Les contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux d'après l'équation (8) et (9), sont

$$\sigma_p = \mp \frac{M_x}{t_f d b} \quad (1.52)$$

Le maximum étant obtenu pour  $x = \frac{L}{2}$  et  $z = \mp \left( \frac{t_c}{2} + t_f \right)$  ce qui donne :

$$\sigma_{p.max} = \mp \frac{PL}{4t_f db} \quad (1.53)$$

Pour l'âme nous obtenons pour  $x = \frac{L}{2}$  et  $z = \mp \left( \frac{t_c}{2} \right)$  :

$$\sigma_c = \frac{2M_x}{E_f b t_f d} E_c \quad (1.54)$$

Les contraintes planes maximales dans l'âme sont :

$$\sigma_c = \frac{PL}{2bt_f d} \frac{E_c}{E_f} \quad (1.55)$$

Pour une me de faible module d'élasticité  $E_c \ll E_f$ , les contraintes planes dans le cœur sont presque négligeables devant celles des peaux. La figure 1.12 montre la répartition des contraintes planes dans une poutre sandwich soumise une flexion 3 points

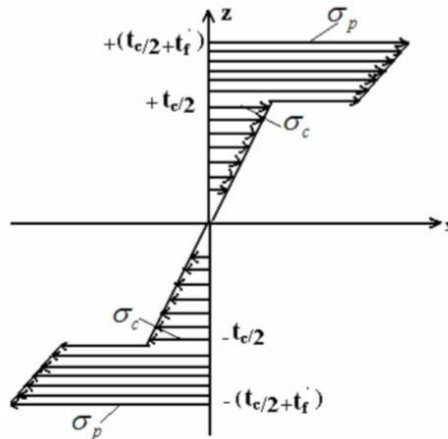


Figure 1.11 : Répartition des contraintes de flexion planes dans le cœur et les peaux du sandwich [3]

### 1.6.2.3 Contraintes de cisaillement dans le cœur du sandwich

Les contraintes de cisaillement dans la poutre soumise la flexion trois points, d'après les Équations (12a), (12b), (13) et pour un sandwich symétrique de peaux fines  $t_f$  et de cœur de faible module Elastique  $E_c E_f$ , (Fig.28) sont donnés par :

- Le maximum de  $\tau$  dans l'âme est obtenu pour  $z = \pm t_c / 2$

$$\tau_{c.ma} = \mp \frac{P}{4D} (E_f t_f d) \quad (1.56)$$

Précédemment nous avons vu que l'expression de la rigidité en flexion D pouvait être réduite au second membre de son expression globale, ce qui nous donne pour la contrainte maximale de cisaillement dans l'âme :

$$\tau_{c.max} = \mp \frac{P}{2bd} \quad (1.57)$$

Nous constatons que la répartition de  $\tau_{c.max}$  est constante dans l'épaisseur de l'âme (Fig.1.13).

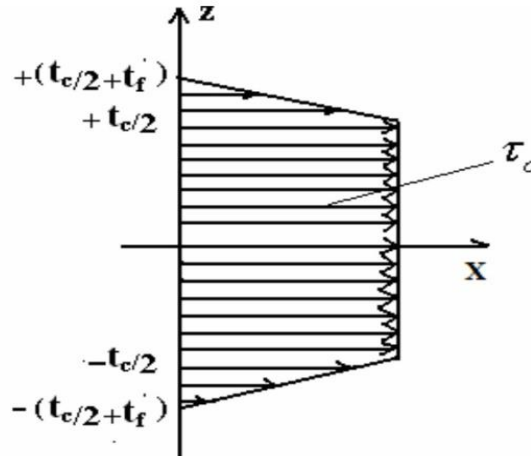


Figure 1.12 : Répartition des contraintes de cisaillement dans le cœur et les peaux du sandwich [3]

#### 1.6.2.4. Déformation en flexion et en cisaillement

Si on observe une portion de la poutre soumise la flexion (Fig.1.14), nous constatons que les points a, b, c et d, qui étaient alignés avant le chargement (Fig.1.14a) ne le restent pas : les sections droites des peaux, par rapport leur propre axe neutre restent droites, ce qui n'est pas le cas pour l'âme, qui subit une forte déformation en cisaillement.

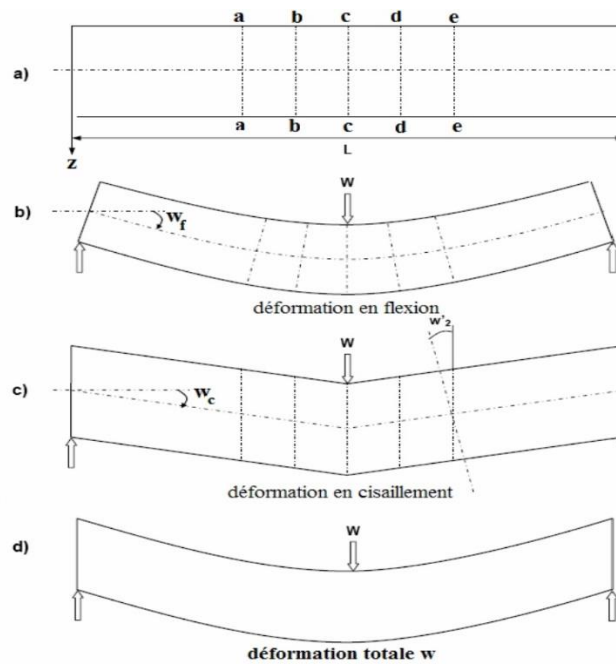


Figure 1.13 : Déformée d'une poutre en flexion et en cisaillement.[3]

L'équation de la flèche  $w$  pour une poutre sandwich au point de chargement est la somme d'une contribution classique due la flexion, et d'une autre, au cisaillement de l'âme. Elle est donnée par l'expression :

$$w = w_f + w_c \quad (1.58)$$

Avec :

$$w_f = \frac{PL^3}{48D} \text{ et } w_c = \frac{PL}{4S} \quad (1.59)$$

D'où la flèche totale est :

$$W = W_f + W_c = \frac{PL^3}{48D} + \frac{PL}{4S} \quad (1.60)$$

**1.6.2.5. Méthode de détermination du module de cisaillement  $G_{eq}$  équivalent de l'âme du sandwich**

La méthode graphique pour l'évaluation du module de cisaillement Équivalent  $G_{eq}$  du matériau de l'âme du sandwich par des essais de flexion trois points est d'écrite comme suit :

L'équation de la flèche  $w$  (27) pour une poutre sandwich au point de chargement est :

$$w = w_f + w_c = \frac{PL^3}{48D} + \frac{PL}{4S} \quad \text{avec} \quad A = \frac{bd^2}{t_c}$$

On constate que la relation de la flèche  $w$ , d'une Éprouvette sandwich de longueur  $L$ , est liée la charge applique  $P$ , et la rigidité en flexion  $D$  de la poutre.

La relation (27) s'écrit sous la forme suivante  $y = aL^2 + b$

On a: 
$$\frac{W}{PL} = \frac{L^2}{48D} + \frac{1}{4AG} \quad (1.61)$$

Avec : 
$$y = \left(\frac{\Delta W}{\Delta P}\right) \frac{1}{L}, \quad a = \frac{1}{48D} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4AG}$$

Pour déterminer les paramètres (a) et (c), on effectue des essais de flexion trois points sur plusieurs Éprouvettes, différentes distances entre appuis  $L$  ( $L_1, L_2, L_3, \dots$ ). Les points de ( $y$ ) calculés partir de l'inverse la pente ( $P/w$ ) des courbes d'essai sont traces en fonction de  $L^2$ . Ensuite après le lissage de la courbe tracé, on détermine les paramètres (a) et (b) d'après la figure (I.29). Enfin, Le module de cisaillement  $G_{eq}$  est calculé d'après la relation du paramètre (b). Un exemple est illustré par le graphe, figure (1.15).

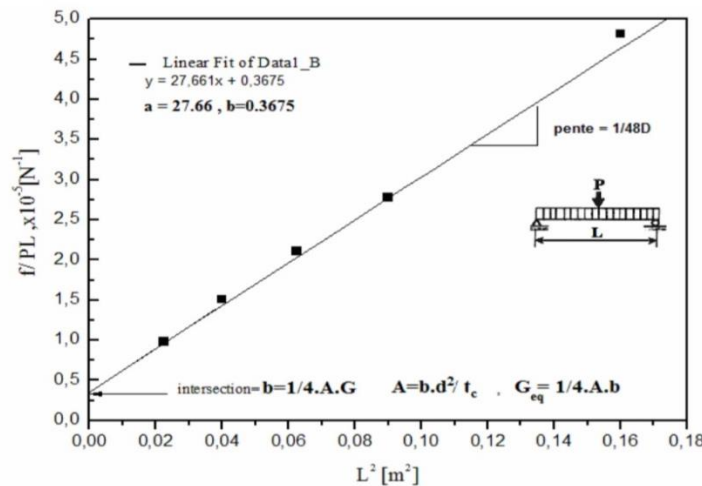


Figure 1.14 : Méthode graphique pour l'évaluation du module de cisaillement  $G_{eq}$  de l'âme du sandwich [3]

***Chapitre II : comportement des plaques  
composites***

## **2.1 Introduction**

L'utilisation des plaques stratifiées composites a connu un grand développement durant ces dernières années, surtout dans les domaines civils là où l'on recherche à améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.). Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de sollicitation telle que traction ou compression. Nous allons présenter ici une bibliographie générale non détaillée concernant l'étude du comportement des plaques isotropes et composites.

Ce chapitre présente les matériaux composites et un aperçu sur les composites stratifiés, ces matériaux constituant le stratifié sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite. Cette structure sous forme d'empilement permet de maximiser certaines propriétés mécaniques dans les directions voulues. Ainsi, le taux rigidité/poids de la structure peut être fortement amélioré, ce qui fait des stratifiés, un type de matériau composite de plus en plus utilisé dans différents domaines.

## **2.2 Matériaux Composite**

### **2.2.1 Définition**

En général, le terme « composite » désigne « être composé de deux ou plusieurs parties distinctes ». En réalité, l'utilisation du terme "matériau composite" ou "composite" est beaucoup plus limitée. Nous en proposons pour le moment la définition générale suivante. Un matériau composite est formé en combinant deux matériaux de différentes natures, ce qui permet d'obtenir un matériau dont les performances globales sont supérieures à celles des composants pris individuellement [2].

### **2.2.2 Caractéristiques générales**

Dans la plupart des cas, un matériau composite est composé d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Lorsqu'il y a plusieurs phases discontinues de natures différentes, on parle d'hybride pour le composite. Habituellement, la phase discontinue présente une dureté accrue et des caractéristiques mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La matrice est une phase continue. L'étape qui se termine est connue sous le nom de renfort ou de matériau renforçant (figure 2.1). Le cas de polymères modifiés par des élastomères est une exception significative à la description précédente, où une matrice polymère rigide est chargée de particules élastomères, L'ajout de particules élastomères ne modifie presque pas les caractéristiques statiques du polymère (modules d'Young, contrainte à la rupture, etc.), tandis que les caractéristiques au choc sont améliorées. Les caractéristiques des matériaux composites sont les suivantes :

Des propriétés des matériaux constituants,



- De leur distribution géométrique,
- De leurs interactions, etc.

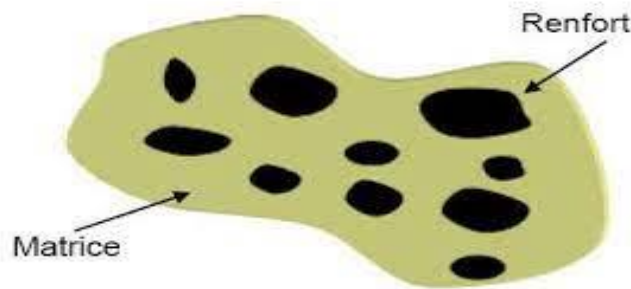


Figure 2.1 : Matériau composite.[2]

**Tableau 2.1: Exemple de matériaux composite, pris au sens large.[2]**

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés renforcés Plastiques	Résine/charges/fibres cellulose- siques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc.  Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces thermomécaniques
3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches Peaux Ames	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

### **2.2.3. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES**

La classification des matériaux composites se fait selon la forme et la nature des constituants de ces matériaux [2].

#### **1 Classification suivant la forme des constituants**

Suivant la forme des constituants, les composites sont classés en deux classes

- Les matériaux composites à fibres:
- Les matériaux composites à particules.

##### **A. Composites à fibres**

Un matériau composite à fibre est un matériau renforcé de fibres (longues, courtes ou coupées), l'orientation et l'arrangement de ces fibres permettent de modéliser les propriétés mécaniques de ce composite, ces dernières sont modifiables et modulables selon la variation.de:

- a) La nature des constituants:
- b) La proposition des constituants;
- c) L'orientation des fibres.

##### **B. Composites à particules**

Un matériau composite à renfort de particules est un composite chargé de particules ne possédant ni dimensions ni formes bien précises. L'utilisation de ce type de matériau composite est limitée, les particules sont utilisées pour réduire le coût du matériau, tout en conservant leurs propriétés mécaniques.

#### **2 Classification suivant la nature des constituants**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés, en matériaux composites à matrice organique, métallique ou minérale.

##### **-2.1. Composites à matrice organique avec résine chargée:**

- Fibres minérales verre, carbone, etc.;
- Fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.
- Fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

##### **-2.2. Composites à matrice métallique avec résine chargée:**

- Fibres minérales carbone, carbure de silicium (sic);
- Fibres métalliques : bore:
- Fibres métallo- minérale ; fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSic).

##### **-2.3. Composites à matrice minérale renforcée de**

- Fibres métalliques ; bore ;
- Particules métalliques cermets:

### **2.2.4 Caractéristiques mécaniques des matériaux**

Partant des considérations précédentes, il reste à rechercher les matériaux les plus performants : module élevé, masse volumique faible. Il est évident également que l'élaboration de ces matériaux ne doit pas aboutir à un coût prohibitif, qui dépend d'ailleurs du domaine d'utilisation. Par exemple, dans le domaine de l'espace, de l'aviation, de hautes performances sont recherchées, et le coût matériau a une incidence faible. Par contre, dans le domaine de l'automobile,

L'amélioration des performances ne peut pas se faire au détriment du coût du produit fini. L'incidence du coût matériau est élevée. Le tableau 2.2 donne les performances spécifiques de matériaux usuels élaborés sous forme massive. Les matériaux traditionnels tels l'acier, les alliages d'aluminium, le bois, le verre ont des modules spécifiques comparables. Par contre, on constate que la contrainte spécifique du verre est nettement supérieure à celle de l'acier et des alliages d'aluminium. D'autre part, il est un fait établi que les contraintes à la rupture mesurées sur les matériaux sont bien plus faibles que les contraintes théoriques.

Cette différence est attribuée à la présence de défauts ou de microfissures dans les matériaux. Pour augmenter les valeurs des contraintes à la rupture, il est alors nécessaire de rechercher des processus d'élaboration qui conduisent à une diminution des défauts. Cet objectif est atteint en élaborant les matériaux sous forme de fibres de très faibles diamètres de quelques dizaines de micromètres.

Il est évident qu'il est nécessaire de partir de matériaux qui ont déjà des caractéristiques spécifiques élevées, lorsqu'ils sont élaborés sous forme massive. Les caractéristiques mécaniques de matériaux élaborés sous forme de fibres sont reportées dans le tableau 2.3. Ces valeurs montrent nettement l'intérêt de l'élaboration des matériaux sous forme de fibres, relativement à la contrainte spécifique à la rupture.

Du fait de leur faible coût, les fibres de verre sont les plus utilisées, avec une rigidité toutefois limitée. Les autres fibres présentent par contre un module spécifique élevé, d'où leur intérêt [2].

## **2.3 Fractions Volumiques et Massiques**

### **2.3.1 Introduction**

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée soit en fraction volumique (ou fraction en volume), soit en fraction massique (ou fraction en masse). Les fractions massiques sont plus faciles à mesurer lors de l'élaboration des matériaux. Par contre, [3] et [2] les fractions volumiques interviennent directement dans les modèles théoriques

## Chapitre II: comportement des plaques composite

Décrivant le comportement mécanique des matériaux. Il est donc nécessaire de savoir passer de l'une à l'autre de ces fractions. Ces expressions seront établies pour un matériau à deux phases, puis étendues à un matériau à plus de deux phases [2].

**Tableau 2.1: Caractéristiques spécifiques des matériaux usuels, élaborés sous forme massive [2].**

	Module E (GPa)	Contrainte à La rupture $\sigma_u$ (MPa)	Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Module spécifique E / $\rho$ (MN m/kg)	Contrainte spécifique $\sigma_u/\rho$ (KN m/kg)
Acier	210	340–2 100	7 800	26,9	43-270
Alliages d'aluminium	70	620-140	2700	25.9	52–230
Bois	30		390	33.3	
Verre	70	700-2100	2500	28	280-840
Tungstène	350	1100-4100	19300	18.1	57-210
Béryllium	300	700	1830	164	380

**Tableau 2.2: Caractéristiques mécaniques spécifiques des matériaux élaborés sous forme de fibres [2].**

	Module E (GPa)	Contrainte à La rupture $\sigma_u$ (MPa)	Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Module spécifique E / $\rho$ (MN m/kg)	Contrainte spécifique $\sigma_u/\rho$ (KN m/kg)
Verre-E	72.4	3500	2450	28.5	1380
Verre-S	85.5	4600	2480	34.5	1850
Carbone à haut module contrainte élevée	– 390 240	– 2100 3500	– 1800 1850	– 205 130	– 1100 1890
Kevlar (aramide)	130	2800	1500	87	1870
Bore	385	2800	2630	146	1100

### 2.3.2 Fractions volumiques

Considérons un volume  $v_c$  de matériau composite, composé d'un volume  $v_f$  de fibres et d'un volume  $v_m$  de matrice. Par la suite, les indices c, f et m seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice. La fraction volumique de fibres est :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad (2.1)$$

La fraction volumique de matrice est :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (2.2)$$

$$\text{Avec} \quad V_m = 1 - V_f \quad (2.3)$$

$$\text{Puisque} \quad v_c = v_f + v_m \quad (2.4)$$

### 2.3.3 Fractions massiques

Les fractions massiques sont définies de la même manière à partir des masses  $\rho_c$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_m$  respectives de matériau composite, de fibres, de matrice. Les fractions massiques ou fractions en masse de fibres et de matrice s'écrivent respectivement :

$$P_f = \frac{\rho_f}{\rho_c}, \quad (2.5)$$

$$P_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad (2.6)$$

Avec

$$P_m = 1 - P_f \quad (2.7)$$

## 2.4 Les stratifiés composite

### 2.4.1 Introduction

L'utilisation des plaques stratifiées composites a connu un grand développement durant ces dernières années, surtout dans les domaines civils là où l'on recherche à améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.). Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de sollicitation telle que traction ou compression. Nous allons présenter ici une bibliographie générale non détaillée concernant l'étude du comportement des plaques isotropes et composites.

Ce chapitre présente un aperçu sur les composites stratifiés, ces matériaux constituant le stratifié sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite. Cette structure sous forme d'empilement permet de maximiser certaines propriétés mécaniques dans les directions voulues. Ainsi, le taux rigidité/poids de la structure peut être fortement amélioré, ce qui fait des stratifiés, un type de matériau composite de plus en plus utilisé dans différents domaines

### 2.4.2 stratifiés

Les stratifiés résultent de la superposition de plusieurs couches ou plis, qui peuvent être des nappes unidirectionnelles, de tissus ou des mats, imprégnés de résine. Chaque couche peut avoir une orientation propre. Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception.

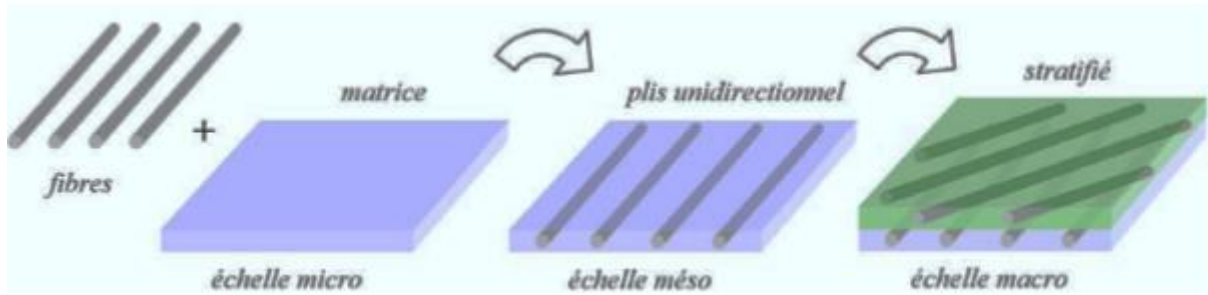


Figure 2.2 : Les constituants d'un composite stratifié

Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre, afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible. Chaque couche est formée de fibres de faible section (d'environ 10 à 20  $\mu\text{m}$  de diamètre), imprégnées de résine.

L'interface entre les couches est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier

Toutefois, Le décollement de deux plis, nommé délaminage, constitue le point faible majeur de ce type de matériaux et explique leur faible tenue à l'impact et plus généralement aux sollicitations hors-plan (directes ou induites) [12][13].

La rigidité d'un stratifié est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

La séquence d'empilement du stratifié, désigne le nombre et l'orientation des couches successives en parcourant le stratifié d'une face à l'autre. Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si, l'angle entre deux couches consécutives est nul, c'est-à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction.

Les stratifiés unidirectionnels caractérisent par une rigidité très élevée (nombre maximum des fibres dans une direction). Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couches successives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que  $0^\circ$  [14].

Le choix de la nature et de la séquence d'empilement dépend de l'utilisation, en l'adoptant au mieux au champ de contraintes imposées, à savoir :

- Les couches unidirectionnelles présentent une grande rigidité. Elles constituent un type de stratifié de base au quel peut se ramener, en principe, tout autre type de stratifié.
- Les mats sont peu résistants en traction.
- Une stratification croisée est sensible au délaminage inter-laminaire.

- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié [10].

### 2.4.3 Angles positifs et négatifs

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou – sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure 2.3).

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.

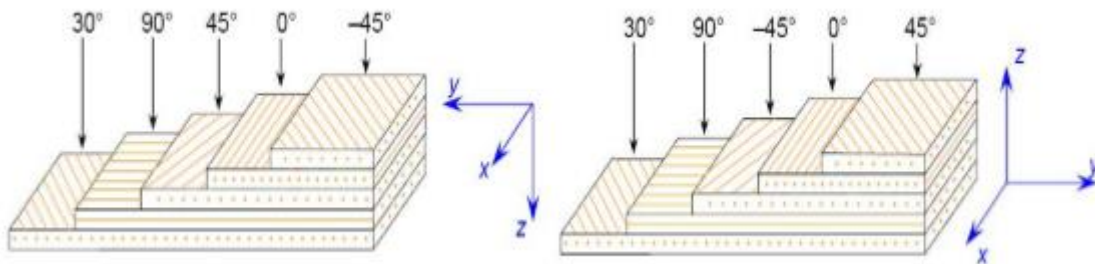


Figure 2.3 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés

### 2.4.4 Hypothèses de la théorie des stratifiés

Les hypothèses suivantes sont fondamentales pour la théorie des plaques stratifiées :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations)  
Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes ;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaques minces :
  - La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation
  - Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

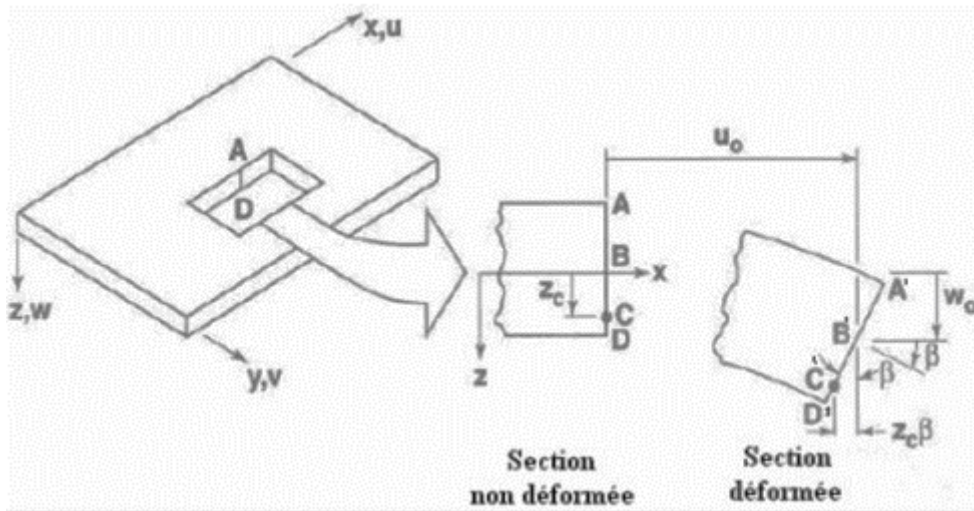


Figure 2.4 : La géométrie de déformation [17]

## 2.5 Etude de l'impact des matériaux composite sur le comportement des panneaux sandwichs composites en flexion

### Objectif de l'étude:

Cette étude vise à analyser l'effet de l'utilisation de divers matériaux composites sur le comportement des panneaux sandwichs composites à l'aide de la technique des éléments finis développé sur le logiciel Abaqus.

Le modèle présente une simulation du modèle réel réalisée à l'aide du logiciel Abaqus afin d'étudier l'impact de différents matériaux composites sur le comportement du sandwich composite. Les propriétés des matériaux composites présentées dans le tableau 2.3 ont été intégrées dans le logiciel Abaqus comme le matériau constituant le modèle. Pour chaque matériau composite, les propriétés de la peau ont été introduites. La peau est composée de quatre couches, chacune d'une épaisseur de 0,15 mm Deux couches sont disposées dans le sens  $0^\circ$ , les deux autres à  $90^\circ$ . La même force de 140 kN a été appliquée à tous les modèles. Le déplacement maximal et la contrainte maximale ont été extraits pour chaque modèle, aboutissant aux résultats suivants :

### 2.5.1 Effet de Type de matériau de composite sur le comportement des poutres en flexion 3 Points

Tableau 2.3 : Les caractéristiques de ces matériaux

	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{23}$
E-GLASS/EPOXY	44.83	12.41	5.517	0.28	0.28	0.3602
GY70	294.6	6.35	4.9	0.23	0.23	0.35
T300/914	131.9	9.51	5.27	0.326	0.341	0.485
T300/5208	192	15.6	8.2	0.24	0.24	0.49
HM GRAPHIT	220.7	6.897	4.828	0.25	0.25	0.41
UM Graphit	289.7	6.207	4.828	0.25	0.25	0.42



Désignation des plaques [0/90] et la charge P=140N

**Tableau 2.4 : le déplacement et la contrainte max**

	$U_{max}$	$\sigma_{max}$
E-GLASS/EPOXY	6.26	178
GY70	2.54	199
T300/914	3.26	191
T300/5208	2.83	186
HM GRAPHIT	2.74	197
UM Graphit	2.54	198.5

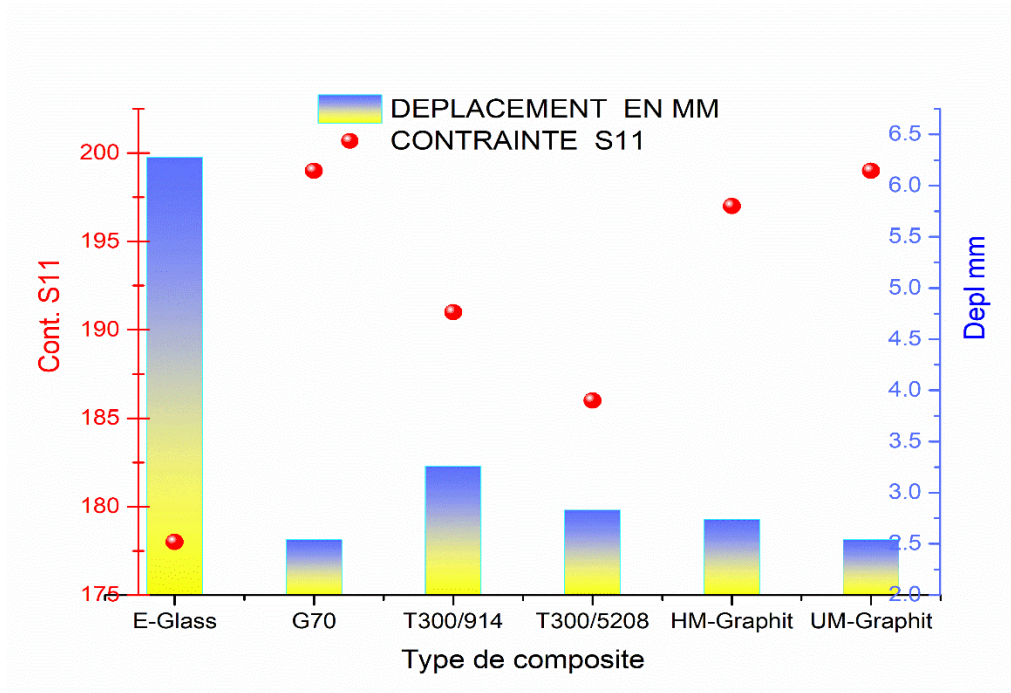


Figure 2.5 : Effet des différents matériaux composites sur le déplacement et la contrainte

### 2.5.1.1 Résultats et discussions

La courbe représente le comportement de différents matériaux composites sous l'application d'une force identique, en comparant le déplacement et la contrainte extraits de chaque matériau

#### Discussion :

- Le déplacement du matériau augmente progressivement avec la contrainte pour toutes les configurations étudiées. Cette augmentation est monotone jusqu'au limite d'élasticité pour des niveaux de contrainte plus élevés.
- On observe des différents de comportement selon le matériau composite constituant le modèle.

### Résultats :

- La contrainte diminue pour le composite le plus rigide G70.
- On observe que le déplacement augmente et la contrainte diminue après la phase élastique.

## 2.6 Conclusion

Le comportement des plaques composites sous contrainte est un domaine d'étude complexe et crucial pour la conception de structures optimales. D'après les résultats trouvés on peut signaler les points clés à suivant :

- Contrairement aux matériaux isotropes, les composites présentent une relation complexe entre le déplacement et la contrainte. Cela est dû aux interactions complexes entre les couches de fibres et la matrice d'une part et aux couches adjacentes d'autre part.

-Les observations montrent des différences de comportement entre différentes configurations de composites, influencées par des facteurs tels que la fraction volumique, le type et la rigidité de fibres et la matrice utilisée.

-La sélection des constituants (fibres et matrice) joue un rôle crucial dans la détermination des propriétés mécaniques du composite final.

-Des analyses approfondies (Micro homogénéisation). Par des simulations numériques et des essais mécaniques, sont nécessaires pour comprendre pleinement le comportement de ces matériaux.

-La prédiction de la performance sous charge nécessite une compréhension précise du comportement des constituants formant le composite.

***Chapitre III : homogénéisation  
Analytique et Modélisation Numérique  
de nid d'abeilles***

### **3.1 Introduction**

La connaissance du comportement mécanique des âmes, en particulier en cisaillement, est évidemment indispensable lors de la phase de conception des structures sandwichs en nids d'abeilles. La méthode d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques Equivalentes [17.19.20]. Dans cette partie, le nida est homogénéisé indépendamment des peaux, Pour que l'homogénéisation soit possible, il faut pouvoir définir un volume élémentaire représentatif Volume Elémentaire Représentatif du matériau. Le résultat de l'homogénéisation, sur ce volume, sera le comportement du matériau homogène équivalent [20].

L'intérêt de l'étude est de pouvoir homogénéiser le nida indépendamment des peaux, c'est-à-dire remplacer le nida de géométrie compliquée par un matériau homogène de propriétés mécaniques similaires dans les modèles analytiques et numériques

#### **3.1.1 Approche existant dans la littérature**

Le comportement du nid-d'abeilles est principalement caractérisé par trois constantes élastiques. Il s'agit du module de résistance. Dans la direction opposée au plan 1-2, ainsi que les deux. Modules de cisaillement en dehors de la conception  $G$ ,  $G$ . En général, les autres modules de cisaillement sont de faible qualité. En outre, les nids-d'abeilles ne présentent pas de coefficients de Poisson connus [50]. Parmi les méthodes aujourd'hui étudiées dans la littérature, nous mentionnons :

Le comportement du nid-d'abeilles est principalement caractérisé par trois constantes élastiques. Il s'agit du module de résistance. Dans la direction opposée au plan 1-2, ainsi que les deux. Modules de cisaillement en dehors de la conception  $G$ ,  $G$ . En général, les autres modules de cisaillement sont de faible qualité. En outre, les nids-d'abeilles ne présentent pas de coefficients de Poisson connus [50]. Parmi les méthodes aujourd'hui étudiées dans la littérature, nous mentionnons :

1. Selon Bitzer [51], une solution initiale consiste à intégrer les deux modules d'élasticité dans le plan E. E, qui représentent un pour cent (1%) du module de la troisième direction. La valeur du module de cisaillement  $G_{12}$  est de 1 % de la moyenne de  $G$  et  $G$ , ainsi que tous les coefficients de poisson égaux à 0.1
2. Chamis [52] suggère une autre option en créant un modèle E.F tridimensionnel détaillé de la structure des nids d'abeilles, dans le but de déterminer les propriétés équivalentes du cœur avec des charges spécifiques.
3. Selon Grédiac [53] et Mistou [55], une troisième option consiste à réaliser la même analyse que celle suggérée par Chamis [52], mais sur une seule cellule de base, et à en déduire les modules transverses de cisaillement équivalents.

4. La solution Gibson [54] propose une quatrième solution qui repose sur l'application des équations de la théorie de l'élasticité, permettant ainsi le calcul des divers modules du plan en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

Dans ce chapitre nous allons explorer les solutions suivantes :

- a. Une solution basée sur l'homogénéisation des structures périodiques sur la base des travaux de Gibson, Master.
- b. Une analyse par élément fini basée sur les travaux de Chamis [CH Bourgeois [57]. Grédiac [53] et Al bachi [58]

## **3.2 La structure composite sandwich en nid d'abeilles**

### **3.2.1 Historique du nid d'abeille**

Tom Bitzer [83] a présenté l'historique du nid d'abeilles. Un procédé de fabrication de papier kraft en nid d'abeilles a été conçu pour la première fois par Budwig en 1905 en Allemagne. Le premier panneau sandwich a été fabriqué à l'aide des parements minces en acajou avec une âme en balsa. A la fin des années 1930, la fabrication de nids d'abeilles modernes a commencé. Pendant la seconde guerre mondiale, le papier en nid d'abeilles a été utilisé par la Société Martin pour l'emballage des antennes de radar. Plus tard, la société a développé un nid d'abeilles en tissu de toile de coton. Ensuite, elle a développé les âmes alvéolaires en tissu de coton, de verre et en papier d'aluminium.

Dans la même époque, la Société Havilland Air-plane a conçu et construit le bombardier Mosquito en utilisant des panneaux sandwichs dans certaines parties. L'avion a montré des performances plus efficaces et plus avancées qui ont conduit à l'utilisation de la structure en sandwich par de nombreux concepteurs du domaine aéronautique. En conséquence, le développement des structures sandwichs, notamment le matériau et la forme de l'âme a commencé. Le premier panneau sandwich en aluminium a été produit en 1945. La véritable innovation est observée avec le développement des adhésifs pour avoir de bonnes propriétés rhéologiques sur les nids d'abeilles.

- ✚ Les structures en nid d'abeilles sont largement utilisées comme des âmes pour les composites sandwichs. Le mot « nid d'abeilles » est utilisé pour désigner tous les types des cellules de section hexagonale, triangulaire, carrée ou même losange. La structure est caractérisée par une répétition périodique de cellules élémentaires. Le nid d'abeilles utilisé dans cette étude est un nid d'abeilles hexagonal réentrant

### **3.2.1 Caractérisation du nid-d'abeilles**

Pour caractériser le Nida assimilé à un matériau orthotrope, il faut déterminer les neuf constants élastiques indépendants suivants :

- Les modules d'élasticité  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ .

- Les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{yz}$
- Les modules de cisaillement  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$ ,

Les calculs d'homogénéisation du nida s'appuient sur sa structure répétitive. La caractérisation peut se faire grâce à la modélisation analytique et numérique.

La modélisation analytique s'appuie sur des modèles mathématiques en faisant des hypothèses simplificatrices. Elle permet cependant de décrire le comportement élastique du Nida et de montrer leur rôle puis l'influence des paramètres géométriques ( $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $t$ ,  $\theta$ )

### 3.2.3 Géométrie et notations

Un nid d'abeille peut être caractérisé par un angle de cellule et quatre paramètres définis à partir des caractéristiques données dans le tableau 41

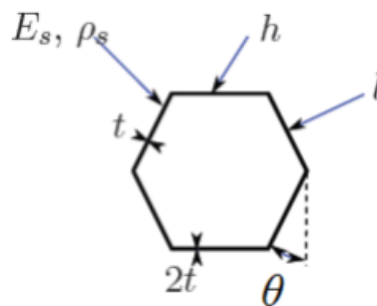


Figure 3.1 : géométrie d'une cellule nida, vue de dessus.

**Tableau 3.1 : paramètre géométrie de la cellule**

Paramètres	Définition
$\theta$	Angle de cellule
$\phi$	Diamètre de cellule
$b$	Longueur d'une paroi centrale
$a$	Longueur d'une paroi inclinée
$t'$	Épaisseur d'une paroi centrale
$t$	Épaisseur d'une paroi inclinée
$h$	Hauteur du nid d'abeilles

Les différents modules élastiques sont calculés dans le repère ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ) de la cellule où  $X_3$  désigne le troisième axe perpendiculaire au plan ( $X_1$ ,  $X_2$ ). Les propriétés élastiques seront définies dans le plan ( $X_1$ ,  $X_2$ ) puis en dehors de ce plan.

### 3.3 Approches analytiques

Les principes de la théorie de l'élasticité sont utilisés pour analyser les cellules de nid d'abeille, en prenant en considération des hypothèses sur les formes de déformation des parois cellulaires. Les cellules de nid d'abeilles peuvent se déformer en flexion et en étirement de leurs parois ou en rotation de celles-ci au niveau de leurs jonctions.

Des modèles mathématiques ont été développés par plusieurs chercheurs en se basant sur un ou plusieurs de ces mécanismes. Les modules dans le plan ont été modélisés par Gibson [54]et[56] en supposant que les parois cellulaires se fléchissent comme des poutres. Selon des recherches plus récentes, comme celles menées par Nkansah [60], il a été démontré que les modèles qui se concentrent exclusivement sur la flexion surestimaient les modules élastiques par rapport aux résultats de la modélisation moléculaire. Dans le but de perfectionner

Les modèles de Gibson, Masters et Evans [59] ont intégré les effets de l'étirement et de la rotation des parois cellulaires dans leurs analyses

### 3.4.1 Propriété dans le plan (X1,X2)

#### 3.4.1.1 Modèle de Gibson et Ashb

Sous l'effet d'une charge appliquée dans les directions X1 ou X2, on considère que les déformations du nid d'abeille résultent uniquement de la flexion élastique des parois cellulaires, en négligeant les effets axiaux. Les propriétés mécaniques caractéristiques dans le plan sont les modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$ , le module de cisaillement  $G_{12}$  et les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$ .

Fondés sur la théorie de l'élasticité, ces modèles permettent de déterminer les différents modules et coefficients des cellules de nid d'abeille en fonction de leurs paramètres géométriques. Ces propriétés peuvent être définies dans le plan (X1, X2) et hors du plan.[50]et [51]

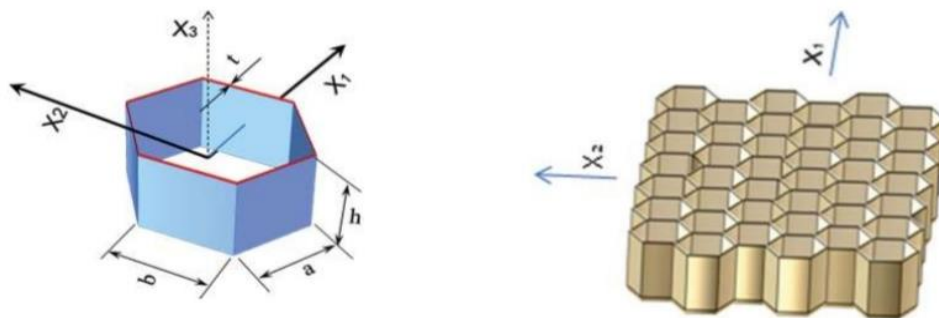


Figure 3.2 : Vue en perspective du nid d'abeilles [54]

#### a) Module d'élasticité $E_1$

Le module d'Young  $E_1$  est calculé en exerçant une pression suivant X, qui induit un effort P suivant l'axe X, et donc un moment de flexion M.

On considère le cliquant comme une poutre de longueur « a » d'épaisseur « t » de profondeur « h » et de module d'Young  $E_0$

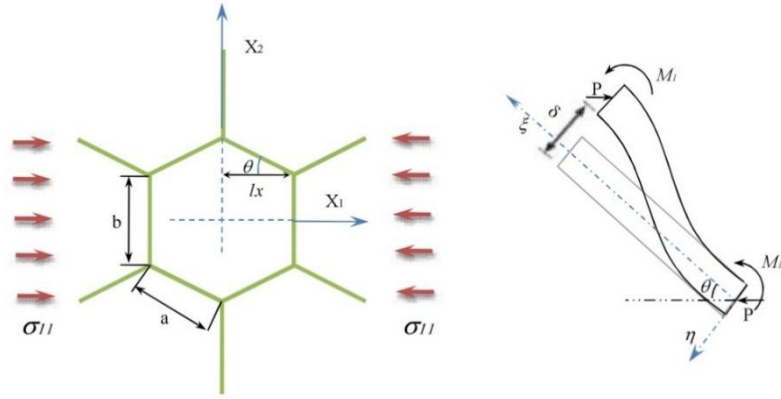


Figure 3.3 : des parois de cellule par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivant  $X_1$  [50]

L'équation du moment de flexion dans le repère local  $((\eta, \xi))$  tel que :

$$M = -P \left( \frac{a}{2} - \xi \right) \sin\theta, 0 \leq \xi \leq a \quad (3.1)$$

La déformée peut être obtenue par intégration de la relation :

$$M = -P \left( \frac{a}{2} - \xi \right) \sin\theta, 0 \leq \xi \leq a \quad (3.2)$$

La déformée peut être obtenue par intégration de la relation :

$$E_0 I \left( \frac{d^2 \eta(\xi)}{d\xi^2} \right) = P \left( \frac{a}{2} - \xi \right) \sin\theta \quad (3.3)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites suivantes

$$\frac{d\eta(0)}{d\xi} = 0, \quad \eta(0) = 0 \quad (3.4)$$

L'équation finale de la déformée :

$$E_0 I \eta(\xi) = P \left( \frac{a}{4} \xi^2 - \frac{\xi^3}{6} \right) \sin\theta \quad (3.5)$$

La relation entre la contrainte et la déformation permet de définir le module d'Young  $E_1$

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (3.6)$$

Avec 
$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l x_1}{l x_1} = \frac{\delta \sin \theta}{a \sin \theta} \text{ et } \delta = \eta(a) = \frac{P a^3 \sin \theta}{12 E_0 I}$$

On déduit l'expression de la déformation



$$\varepsilon_{11} = \frac{Pa^2}{12E_0l} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad (3.7)$$

$$I = \frac{ht^3}{12} etP = \sigma_{11}(b + a\sin\theta)h \quad (3.8)$$

Le module d'Young devient :

$$E_1 = E_0 \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\cos\theta}{(b/a + \sin\theta)\sin^2\theta} \quad (3.9)$$

**b) Module d'élasticité  $E_2$**

Le module d'Young  $E_2$  est calculé de la même méthode exposée précédemment en exerçant une pression suivant la direction  $X_2$  qui induit un effort  $W$  suivant l'axe  $X_2$  et donc un moment de flexion  $M_2$ .

Soit le clinquant Figure 4.4 comme une poutre de longueur «  $a$  » d'épaisseur «  $t$  », de profondeur «  $h$  » et de module d'Young «  $E_0$  »,

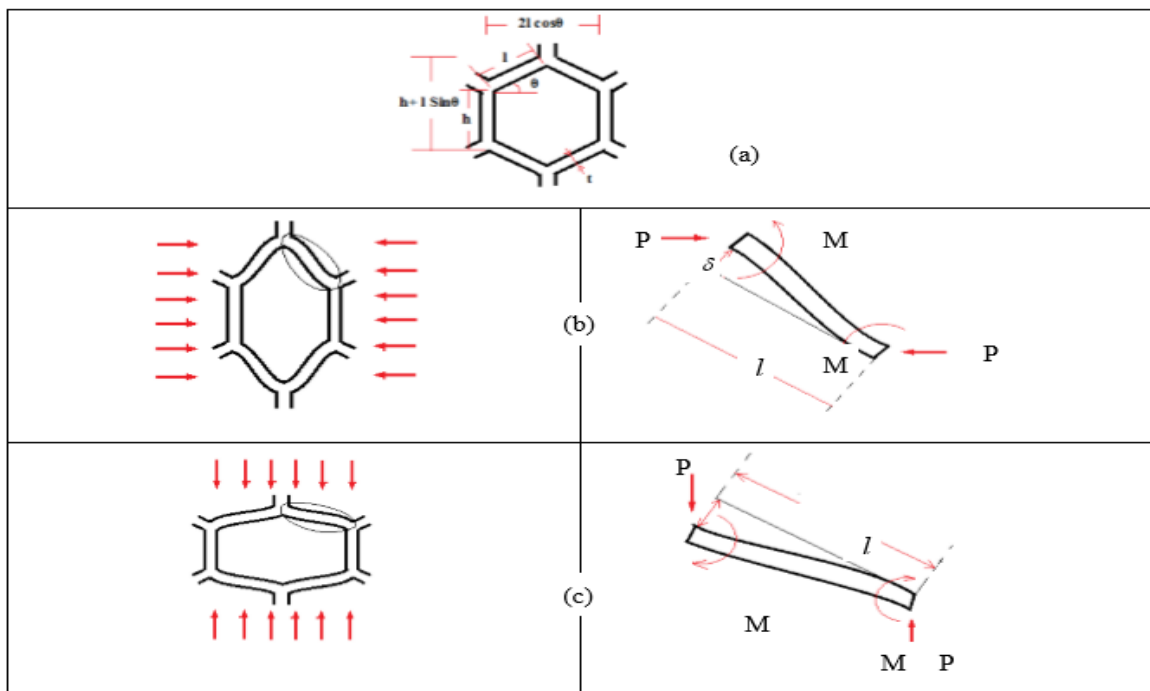


Figure 3.4 : déformations des parois de cellule par flexion des clinquants sous une charge dirigée suivant  $X_1$  [20]

Le module d'Young suivant la direction 2 :

$$E_2 = E_0 \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{(b/a + \sin\theta)}{\cos^3\theta} \quad (3.10)$$

Les coefficients de Poisson :

$$V_{12} = \frac{(b/a + \sin \theta) \cdot \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (3.11)$$

Et

$$V_{21} = \frac{\cos^2 \theta}{(b/a + \sin \theta) \cdot \sin \theta} \quad (3.12)$$

**c) Modules de cisaillement dans le plan**

Le module de cisaillement dans le plan (X1, X2) est calculé à partir du schéma de la figure 3.5. Les points A, B et C n'ont aucun mouvement relatif quand on exerce un état de cisaillement sur le nida. Vu la symétrie, la déviation  $u$ , est uniquement due à la flexion et à la rotation de la paroi (rotation d'angle) autour de B.] 20].[21].

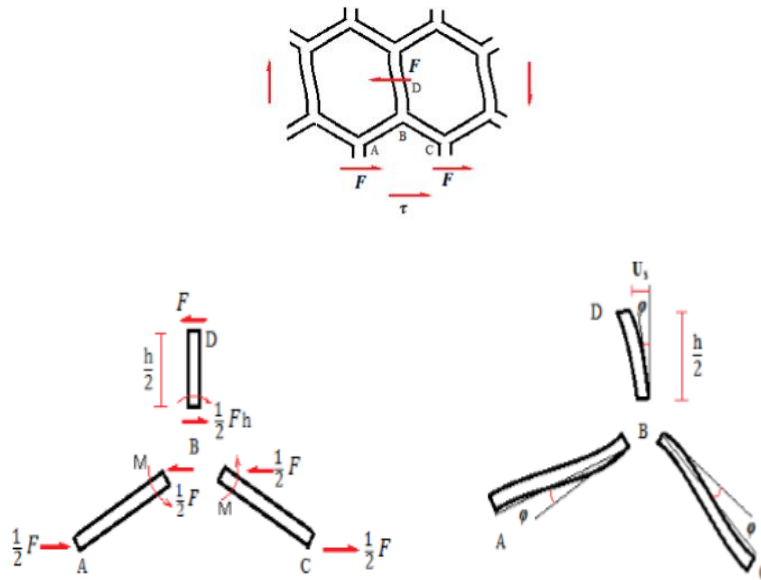


Figure 3.5 : Déformations en flexion et rotation des parois [20]

La déviation  $u$ , est alors de la forme :

$$u_s = \frac{1}{2} \varphi b + \frac{F(b/2)^3}{3E_0 I} \quad (3.13)$$

En écrivant que la somme des moments au point B est nulle, on déduit le moment  $M$  au niveau de AB et BC

$$M = \frac{F b}{4} \quad (3.14)$$

Ensuite on peut déduire l'angle  $\varphi$  :

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\delta}{a} \quad \text{Avec} \quad \delta = \frac{M a^2}{6E_0 I'} \quad (3.15)$$

$I'$  : est le moment d'inertie des clinquants inclinés AB et BC.

L'expression de  $u_s$  Devient :

$$u_s = \frac{Fb^2}{48E_0} \left( \frac{a}{I'} + \frac{2b}{I} \right) \quad (3.16)$$

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (3.17)$$

Avec

$$\tau = \frac{F}{2 a h \cos \theta} \quad (3.18)$$

Et

$$\gamma = \frac{2u_s}{b+a \sin \theta} \quad (3.19)$$

Enfin, le module de cisaillement est donné par l'expression :

$$G_{12} = E_0 \left( \frac{t}{a} \right)^3 \frac{(b/a + \sin \theta)}{(b/a)^2 (1 + 2b/a) \cos \theta} \quad (3.20)$$

Les propriétés dans le plan jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des plaques sandwiches en nids d'abeilles.

**d) Récapitulatif des modules dans le plan**

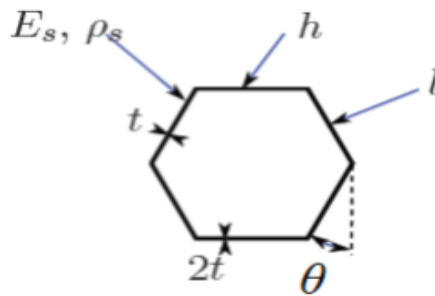


Figure 3.6 : Géométrie d'une cellule en nid d'abeille [11]

**Tableau 3.2: les Modules de Gibson dans le plan  $X_1$ - $X_2$**

Module	Gibson
Module d'élasticité dans la direction $X_1$	$E_1 = E_0 \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{(b/a + \sin \theta)}{\cos^3 \theta}$
Module de Young dans la direction $X_2$	$E_2 = E_0 \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\cos \theta}{(b/a + \sin \theta) \sin^2 \theta}$
Module de cisaillement dans le plan ( $X_2$ - $X_2$ )	$G_{12} = E_0 \left(\frac{t}{a}\right)^3 \frac{(b/a + \sin \theta)}{(b/a)^2 (1 + 2b/a) \cos \theta}$
Coefficient de Poisson dans le plan ( $X_1$ - $X_2$ )	$V_{12} = \frac{(b/a + \sin \theta) \cdot \sin \theta}{\cos^2 \theta}$
Coefficient de Poisson dans le plan ( $X_2$ - $X_1$ )	$V_{21} = \frac{\cos^2 \theta}{(b/a + \sin \theta) \cdot \sin \theta}$

### 3.4.1.2 Modèle de Masters

En considérant les trois mécanismes de déformation, des parois (flexion, étirement et pivotement), Masters et Evans [52].[53] ont établi un modèle général. Le modèle d'étirement suppose que les parois se déforment par étirement suivant leurs axes sans variation d'angle. Par contre, le modèle de pivotement suppose que les parois se déforment uniquement par les variations de l'angle de cellule. En combinant les trois hypothèses, des relations ont été établies par Masters [59] :

#### a. Module de Young $E_1$ :

$$E_1 = \frac{1}{\frac{h \cos \theta}{(b/a + \sin \theta)} \left[ \frac{\cos^2 \theta}{K_f} + \frac{\cos^2 \theta}{K_p} + \frac{(2b/a + \sin^2 \theta)}{k_e} \right]} \quad (3.21)$$

#### b. Module de Young $E_2$ :

$$E_2 = \frac{1}{h(b/a + \sin \theta) \left[ \frac{\sin^2 \theta}{K_f \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{K_p \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{k_e} \right]} \quad (3.22)$$

#### c. Coefficient de Poisson $v_{12}$ :

$$V_{12} = \sin \theta (b/a + \sin \theta) \left[ \frac{1/k_f + 1/k_p + 1/k_e}{\frac{\cos^2 \theta}{K_f} + \frac{\cos^2 \theta}{K_p} + \frac{(2b/a + \sin^2 \theta)}{k_e}} \right] \quad (3.23)$$

#### d. Module de cisaillement $G_{12}$ :

$$G_{12} = \frac{1}{\left[ \frac{h}{K_f} r_1 + \frac{1}{K_p} r_2 + \frac{h(a \cos^2 \theta + (b+a \sin \theta) \sin \theta)}{K_e} r_3 \right]} \quad (3.24)$$

Avec :

$$- r_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{(a+2b)\cos\theta}{(b+a\sin\theta)}$$

$$- r_2 = \frac{b\cos\theta(Cb^2+2a^2)}{C a (b+a\sin\theta)}$$

$$- r_3 = \frac{\cos\theta}{(b+a\sin\theta)} + \frac{\sin\theta}{a\cos\theta}$$

$$- C = (a/b)^2$$

Les  $K_i$  représentant les constantes de forces reliant le déplacement des parois de cellules à la force appliquée, ils sont définis par les relations :

$$- \text{Cas de flexion} \quad K_f = E_0 h \left(\frac{t}{a}\right)^3 \quad (3.25)$$

$$- \text{Cas d'étirement} \quad K_e = E_0 h \left(\frac{t}{a}\right), \quad (3.26)$$

$$- \text{Cas de pivotement} \quad K_p = \frac{E_0 h t^3}{6a^2 l}, \quad (3.27)$$

Avec  $l \approx a/10$  (résultat expérimental) [59] est la longueur axiale de la partie courbée du clinquant lors de la rotation.

### 3.4.2 Propriétés hors du plan (X1, X2)

Ces propriétés jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des panneaux sandwichs une fois le nida et les peaux assemblées. Les cinq constants ( $E_3, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{13}, G_{23}$ ) sont nécessaires pour décrire les déformations hors du plan.

#### a) Modules d'Young $E_3$

Le module  $E_3$ , est déterminé en multipliant le module  $E_s$  du clinquant par le rapport de la section de la cellule et de la surface totale de l'hexagone, Gibson [GIB-91]

$$E_3 = E_0 \frac{\text{section de la cellule}}{2 \text{ surface hexagone}}$$

$$\text{section de la cellule} = 2at + 2bt$$

$$\text{surface hexagone} = 2a\cos\theta(b + a\sin\theta)$$

$$E_3 = E_0 \left(\frac{t}{a}\right) \frac{b/a+2}{2(b/a+\sin\theta)\cos\theta} \quad (3.28)$$

**b) Coefficients de Poisson**

Les coefficients de Poisson dans la direction verticale ( $v_{31}, v_{32}$ ) sont supposés égaux au coefficient de Poisson du matériau constituant le feillard Gibson [54][56]. Les autres coefficients sont obtenus grâce aux relations de réciprocité : ( $E_2 v_{32} = E_3 v_{23}$ ).

$$E_1 v_{31} = E_3 v_{13} \quad (3.29)$$

$$v_{32} = v_{31} = \nu \quad (3.30)$$

**c) Modules de cisaillement transverse**

L'étude des modules de cisaillement est essentielle pour comprendre le comportement des structures en nid d'abeille.

Deux modules spécifiques,  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , régissent les caractéristiques de cisaillement transversal des cellules de nid d'abeille en raison de leur structure périodique. Dans une direction perpendiculaire à  $X$ , les deux faces du panneau sont déplacées, ce qui crée un champ de cisaillement hétérogène au sein des parois [21]. Chaque paroi présente une tendance à tourner, ce mouvement étant freiné par la présence des semelles. Le modèle de Gibson ne permet pas de calculer les valeurs des modules de cisaillement de manière directe.

Kelsey [20] a proposé des bornes pour le module de cisaillement transversal. Le cas particulier de la direction  $X_2$  présente un intérêt particulier, car le cisaillement s'annule dans les parois centrales et devient constant dans les parois inclinées. Dans ce cas, les bornes coïncident avec la valeur du module dans le plan ( $X_2, X_3$ ). En revanche, les bornes se distinguent dans le plan ( $X_1, X_3$ ).

Selon Kelsey [20], des bornes pour le module de cisaillement transversal ont été suggérées. Le cisaillement dans la direction  $X_2$  est particulièrement intéressant, car il s'annule dans les parois centrales et devient constant dans les parois inclinées. Pour cette situation, les bornes sont en accord avec la valeur du module dans le plan ( $X_2, X_3$ ). D'autre part, les bornes se différencient dans le plan ( $X_1, X_3$ ).

Rappelons ici les théorèmes des bornes :

- Borne supérieure : Pour déterminer la borne supérieure, on utilise le principe du travail maximal. Il indique que l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de déplacement

Virtuel compatible avec les conditions aux limites est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.

Théorème de la borne supérieure :

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_i G \gamma_i^2 v_i, j=1,2, i : \text{nombre de Paroi}$$

Avec  $v = sh$

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_i G \gamma_i^2 S_i h, j=1,2, i : \text{nombre de Paroi}$$

S : Projection dans le plan  $X_1 X_2$  de l'hexagone,

$S_i$  : Projection dans le plan  $X_1 X_2$  de la paroi  $i$ .

- **Borne inférieure** : L'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de contraintes statiquement admissible (continu et vérifiant les conditions de bords) est inférieure à l'énergie de déformation obtenue par un champ de contraintes réelles.

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j3}^2}{G_{j3}} V \leq \frac{1}{2} \sum_i \frac{\tau_i^2}{G_0} V_i, \quad (3.31)$$

Le principe des bornes est basé sur le concept de l'énergie minimale.

Ces deux théorèmes ont permis d'obtenir les formulations suivantes :

$$G_{23} = G_0 \left( \frac{t}{a} \right) \frac{\cos \theta}{b/a + \sin \theta} \quad (3.32)$$

Et

$$G_0 = \left( \frac{t}{a} \right) \frac{b/a + \sin \theta}{(1 + 2b/a)} \leq G_{12} \leq G_0 \left( \frac{t}{a} \right) \frac{b/a + 2 \sin^2 \theta}{2(b/a + \sin \theta) \cos \theta}$$

$G_0$  est le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

### 3.4.2.1 Modèle de Grédiac

L'analyse par éléments finis a été abordée par Grédiac [53]. L'auteur y présente la démarche à suivre pour déterminer le module de cisaillement élastique homogénéisé  $G_{xz}$ . Il s'est inspiré du modèle de Gibson [53] en prenant en compte la double épaisseur des clinquants centraux.

On définit alors le nida par quatre grandeurs adimensionnelles :

$$R_1 = \frac{t}{a}, R_2 = \frac{b}{a}, R_3 = \frac{h}{a}, R_4 = \frac{t'}{t}$$

Le lissage de la courbe permet d'obtenir la relation empirique suivante pour calculer  $G_{xz}$ , en fonction de  $R_3$  :

$$G_{xz} = G_{xz}^{min i} + \frac{k}{R_3} (G_{xz}^{max i} - G_{xz}^{min i})$$

Ou  $k=0.757$  (selon Grédiac)

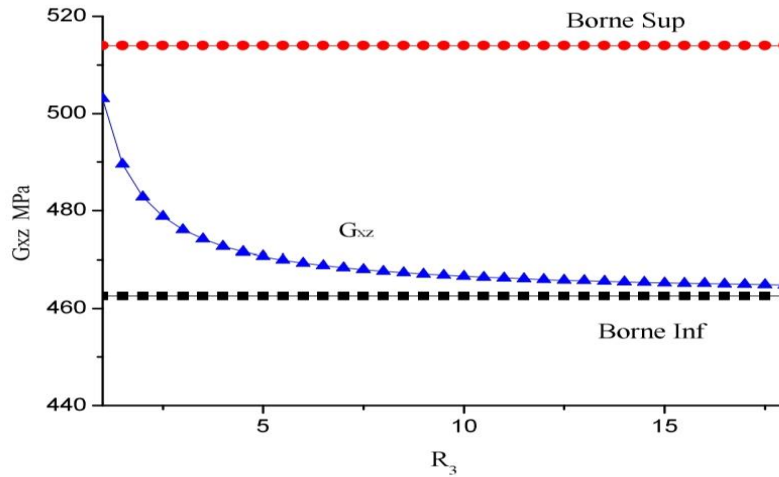


Figure 3.7 : Variation de  $G_{xz}$  en fonction de  $R_3$  pour  $0-30^\circ$  [6]

### 3.5 Application au nid-d'abeilles étudié ECM :

L'étude se concentre sur le nid d'abeilles en Aluminium dont les propriétés mécaniques sont :

$$E_0 = 70000 \text{ Mpa}$$

$$V_0 = 0,33$$

Les caractéristiques géométriques sont :

$$\varnothing = 6,4 \text{ mm} ; a = b = \varnothing/\sqrt{3} = 3,695 \text{ mm} ; t = 75 \text{ }\mu\text{m} ; \theta = 30^\circ ; R_3 = 2,382$$

Ces propriétés mécaniques et les paramètres géométriques associés à chaque nida permettent d'évaluer leurs modules élastiques homogénéisés. Les tableaux II3\_II4 regroupe et compare les différents modules selon les modèles appliqués.

**Tableau 3.3 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour  $h=8.8$  [21]**

	Gibson	Masters	Grédiac K=0.787	
$E_1(\text{MPa})$	1.35180	0.67552		
$E_2(\text{MPa})$	1.35180	0.67552		
$E_3(\text{MPa})$	2187.52	-		
$\nu_{12}$	1	0.99959		
$\nu_{13}$	0.00020			
$\nu_{23}$	0.00020			
$G_{12}(\text{MPa})$	0.81113	0.40380		
$G_{23}(\text{MPa})$	308.394			
$G_{13}(\text{MPa})$	462.59			472.719
	513.99			



**Tableau 3.4 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour  $h=12.8$**

	Gibson	Masters	Grédiac K=0.787
$E_1$ (MPa)	1.35180	0.14400	
$E_2$ (MPa)	1.35180	0.13500	
$E_3$ (MPa)	2187.52	-	
$\nu_{12}$	1	0.99917	
$\nu_{13}$	0.00020		
$\nu_{23}$	0.00020		
$G_{12}$ (MPa)	0.81113	0.0338	
$G_{23}$ (MPa)	308.394		
$G_{13}$ (MPa)	Max :462.59 Min :513.99		474.284

**Tableau 3.5 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour  $h=14.8$**

	Gibson	Masters	Grédiac K=0.787
$E_1$ (MPa)	1.35180	0.84438	
$E_2$ (MPa)	1.35180	1.35020	
$E_3$ (MPa)	2187.52		
$\nu_{12}$	1	0.99945	
$\nu_{13}$	0.00020		
$\nu_{23}$	0.00020		
$G_{12}$ (MPa)	0.81113	0.65000	
$G_{23}$ (MPa)	308.394		
$G_{13}$ (MPa)	Max :462.59 Min :513.99		474.268

**Tableau 3.6 : Modules élastiques homogénéisés du nida ECM pour  $h=18.8$**

	Gibson	Masters	Grédiac K=0.787
$E_1$ (MPa)	1.35180	0.42000	
$E_2$ (MPa)	1.35180	0.94511	
$E_3$ (MPa)	2187.52		
$\nu_{12}$	1	0.09878	
$\nu_{13}$	0.00020		
$\nu_{23}$	0.00020		
$G_{12}$ (MPa)	0.81113	0.14686	
$G_{23}$ (MPa)	308.394	0.6250	
$G_{13}$ (MPa)	Max ;462.59 Min ;513.99		470.479

**➤ Conclusion**

Les approches analytiques précédemment exposées revêtent un intérêt majeur pour évaluer l'impact des paramètres géométriques et mécaniques. Cependant, en ce qui concerne les paramètres de Cisaillement, elles ne fournissent que des informations limitées. Le modèle Gibson se concentre uniquement sur la flexion de la paroi en tant que mécanisme de déformation principal, tandis qu'il prend également en compte d'autres modes tels que l'allongement et la rotation. La rotation est utilisée pour les parois rigides, où le mouvement se concentre au niveau des connexions entre elles, tandis que l'allongement déplace les charges dans le plan du panneau. Ces méthodes de déformation permettent

Une représentation complète des comportements des modules d'ingénierie, en utilisant le principe de superposition (comme approche linéaire) afin de déterminer la structure des différents modules.

**3.5.1 Analyse expérimentale de comportement mécanique des sandwich nid d'abeille en flexion 3 Point****3.5.1.1 Description du nid d'abeilles Alu-Alu ECM :**

ECM est un nid-d'abeilles métallique ultra léger utilisé principalement comme noyau dans les structures sandwiches, il est fabriqué à partir de feuilles en aluminium d'une épaisseur de 80 ou de 60 micromètres.

Le nid-d'abeilles ECM combine de façon idéale un poids très faible à une haute résistance mécanique. En plus, il possède une excellente conductibilité thermique et électrique et résiste parfaitement à la corrosion et à la chaleur.

Grâce à ces propriétés, le nid-d'abeilles ECM constitue un matériel idéal pour les constructions légères et comme surface d'appui pour les machines de découpe au jet d'eau. Applications typiques :

- Carrosseries pour camions -conteneurs
- Bateaux - trains
- Mécanique -machines de découpe au jet d'eau
- Façades légères -matériels de sport.

**3.5.1.2 Description Le nid d'abeilles Alu-Fibre aramide ECA**

Le nid-d'abeilles ECA est un matériau de construction non métallique et ultra - Léger utilisé essentiellement comme noyau dans les structures sandwiches. Pour la production du nida ECA Euro composite, utilise des fibres aramides calandrées en feuilles et recouvertes de résine phénolique. Le nida ECA I offre des propriétés mécaniques très élevées pour un poids très faible.

Le nid-d'abeilles ECA possède une haute résistance électrique, thermique et chimique de même qu'une excellente résistance à la corrosion aux chocs et à la fatigue. Il est auto-extinctif et permet une

mise en forme facile. Toutes ces propriétés font du nid-d'abeilles ECA un matériau idéal pour la construction légère.

**Tableau 3.7 Dimensions des éprouvettes**

L(mm)	b(mm)	h(mm)	h <sub>c</sub> (mm)	h <sub>f</sub> (mm)	L (mm)	d(mm)
500	40	10	8.8	0.6	300	9.4

### 3.6 L'essai de flexion

Les essais de flexion trois points sont des essais mécaniques permettant de caractériser le comportement mécanique de matériau étudié. Le principe des essais de flexion est de déterminer l'aptitude à la déformation d'un matériau sur deux appuis avec une application de l'effort à mi-distance des appuis. Il est alors possible de mesurer en fonction de la charge appliquée [21]

#### 3.6.1 L'essai de flexion trois points

Les Fig. 4.14 et 4.15 représentent l'évolution de la flèche  $\delta$  en fonction de la charge appliquée P pour des structures en nid d'abeille ont des cellules orientent suivant les deux axes X, Y, sollicitées en flexion 3-points pour L = 300 mm et b= 40 mm. Une analyse de la Fig.4.14 nous a permis de se décomposer le comportement en flexion en 3 phases principales, à savoir :

- Une première phase qui correspond à une augmentation linéaire de la charge appliquée P avec la flèche  $\delta$  ;
- Une phase de comportement non linéaire dans laquelle la charge maximale est atteinte ;
- Dans une dernière phase, on observe une diminution de la charge appliquée jusqu'à la rupture totale de l'éprouvette. [20]et [21]

Le comportement linéaire correspond essentiellement au travail des peaux en traction et en compression. Le comportement non linéaire dépend principalement des propriétés de l'âme sous l'effet des efforts de cisaillement. L'orientation des cellules d'une âme en nid d'abeille change la rigidité et la charge aux ruptures. Les figures montrent aussi que les structures en nid d'abeille ont des cellules orientent vers le sens X (SL) sont les plus rigides par rapport à ceux des Nida orientent vers Y (SW). D'autre part, les structures en nid d'abeille (SW) peuvent supporter une charge supérieure de 787 N (Fig.3.8). Par contre, une âme en Nida (SL) peut supporter une charge de 681.6 N. Nous constatons évidemment que l'orientation des cellules d'une âme en nid d'abeille du sens X au sens Y augmente la charge de rupture.

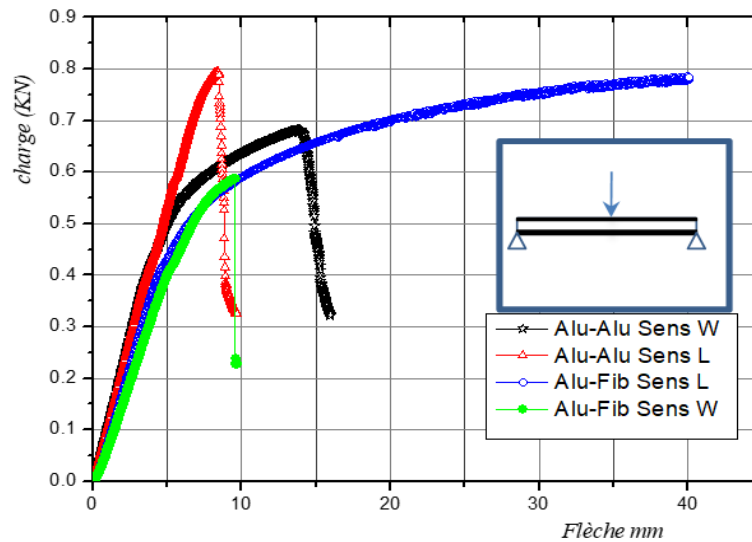


Figure 3.8 : courbes charge flèche flexion 3 points des sandwiches Alu -Alu (82) et Alu-Fibre (144) [21]

Tableau 3.8 : les charge et déplacement de rupture pour les différents types d'éprouvette

	Essai 3 point	$P_{max}$ (N)	$w_{max}$ (mm)
Alu-Alu	SANS L	771.13	7.86
	SANS w	681.	13.70

### 3.6.2 Essai statique :

- Une poutre sandwich en nid d'abeille réelle a été soumise à un essai de flexion 3 points.
- Les données de charge et de déformation ont été enregistrées pendant l'essai.

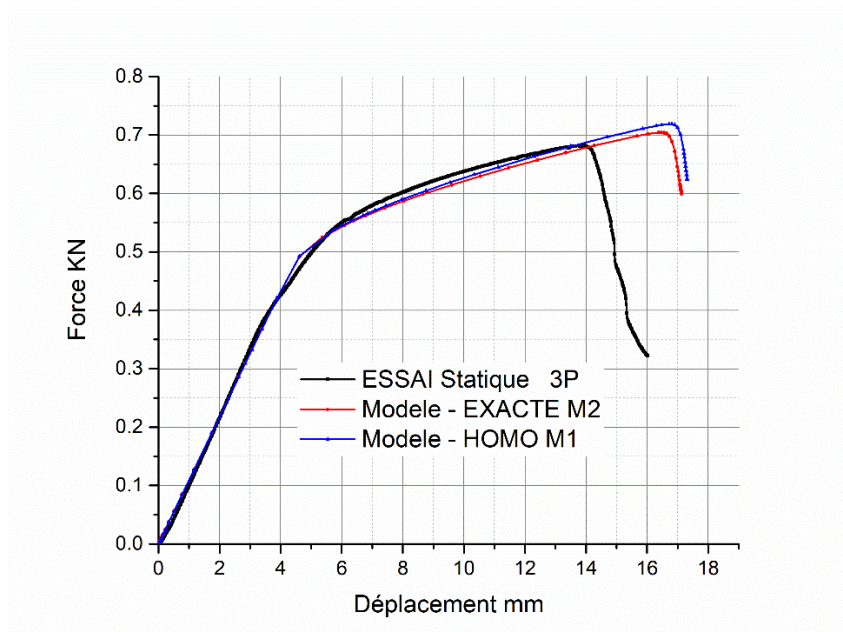


Figure 3.9 : essai statique 3 point Model homogène et exact- direction W

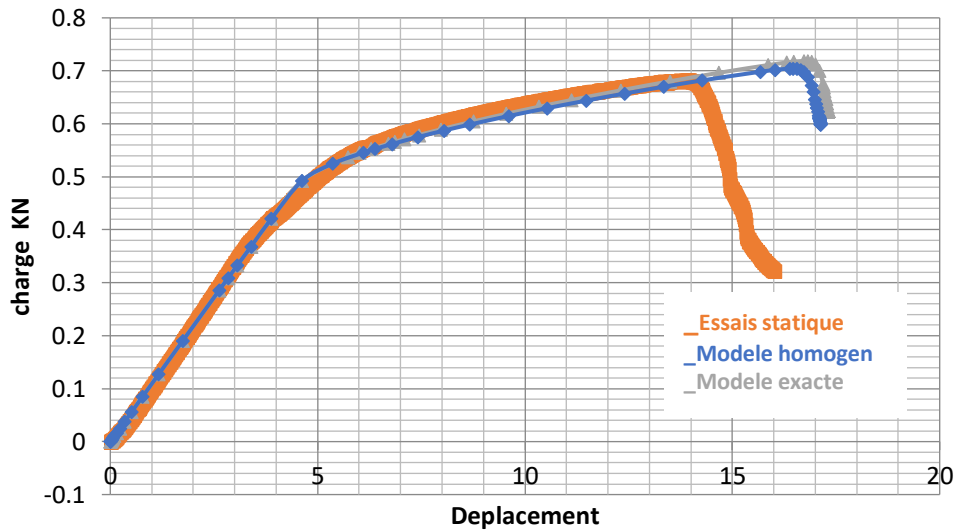


Figure 3.10 : comparaison de la variation de déplacement pour les différents modèles -direction L

### ➤ Résultats expérimentaux des essais statiques

#### Comparaison des résultats :

- Les données expérimentales obtenues lors d'essai statique ont été comparées aux résultats des simulations numériques des modèles M1 et M2.
- Un graphe a été créé pour visualiser et comparer la correspondance entre les différentes approches.

#### Résultats attendus :

- On s'attend à ce que le modèle M2, qui représente la réalité avec plus de précision, fournisse des résultats plus proches des données expérimentales que le modèle M1 simplifié.
- L'analyse des écarts entre les résultats des modèles et les données expérimentales permettra d'évaluer la pertinence de chaque approche de modélisation pour la prédiction du comportement en flexion 3 points des poutres sandwich en nid d'abeille

### 3.6.3 Modélisation numérique :

Plusieurs simulations numériques par éléments finis ont été réalisées en utilisant le code de calcul ABAQUS [6].[5].[1]. En raison des symétries de la forme et du chargement, le modèle de base est constitué de la moitié de la poutre. Pour rendre compte des symétries et des conditions d'essais, plusieurs tests ont été nécessaires, les conditions aux limites appliquées par les deux cas de

Chargement sont au niveau de l'appui, fixation de la translation U. et au niveau du plan moyen, une fixation de la translation U, et de la rotation [6].

La plaque sandwich est constituée de deux peaux en aluminium et un cœur en nid-d'abeilles en aluminium dont les dimensions :

$L = 300\text{mm}$ .

Largeur  $b = 40\text{ mm}$ ,

L'épaisseur  $H = [10]\text{ mm}$ ,  $h = [8.8]\text{mm}$ ,  $t = 0.6\text{mm}$

La charge appliquée est linéique sur toute la largeur  $P = 1000\text{ N}$ .

Les caractéristiques mécaniques des peaux :

$$E = 70\,000\text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

Les caractéristiques mécaniques du nid d'abeilles (Tableau 3.3)

$$E_1 = 1.35180\text{ (MPa)} \quad , \quad \nu_{12} = 1 \quad \quad G_{12} = 0.81113\text{ (MPa)}$$

$$E_2 = 1.35180\text{ (MPa)} \quad , \quad \nu_{13} = 0.00020 \quad \quad G_{23} = 308.394\text{ (MPa)}$$

$$E_3 = 2187.52\text{ (MPa)} \quad , \quad \nu_{23} = 0.00020 \quad \quad G_{13} = \text{Min ;}462.59\text{ (MPa)}, \text{ Max ;}513.99$$

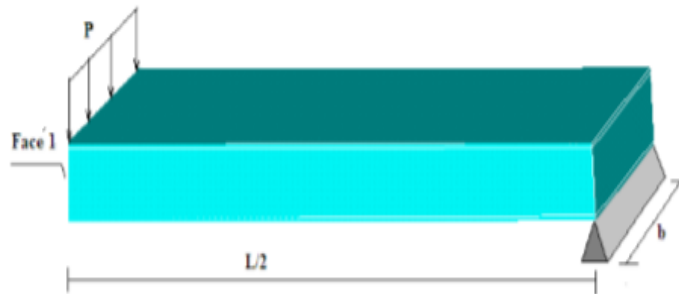


Figure 3.11 : Modélisation de la flexion 3 points [20]

### 3.6.3.1 Modèles développés :

La modélisation numérique par éléments finis nécessite l'étude de convergence du maillage afin de valider les résultats obtenus par approximation. Le modèle homogénéisé classique ne permettait pas de rendre compte des complexités locales des phénomènes de propagation des contraintes de cisaillement transversales dans le milieu du nid d'abeille. Pour cela, nous avons étudié la poutre sandwich en nid d'abeille avec deux modélisations différentes :

- (1) par un milieu orthotrope équivalent (modèle homogénéisé) ;
- (2) géométriquement exacte (ce qui donne la solution numérique de référence).

La modélisation 3D de la moitié de la poutre sandwich soumise à la flexion, trois points, a été effectuée en considérant deux types de représentations de cœur :

#### **Modèle M1** - Modèle M1 : Modèle homogène équivalent

- \_ Ce modèle simplifie la structure complexe de la poutre en la considérant comme un matériau homogène aux propriétés élastiques moyennes.

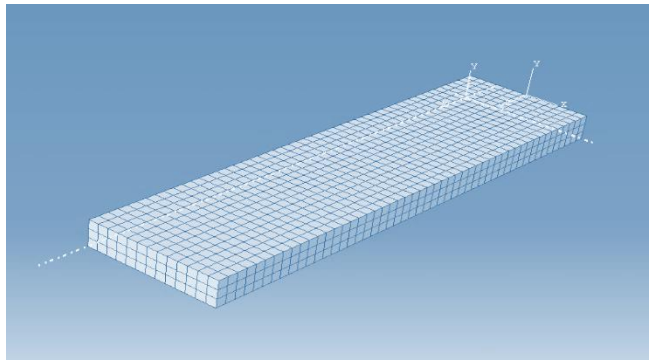


Figure 3.12 : Modèle M1 Maillage de la moitié de la plaque sur Abaqus

**Modèle M2** : Modèle réel

Ce modèle reproduit fidèlement tous les détails géométriques et Microstructuraux de la poutre réelle. Le milieu dans le modèle (peaux + cœur) devient isotrope avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E= 70000 \text{ MPa}$$

$$\nu=0,33$$

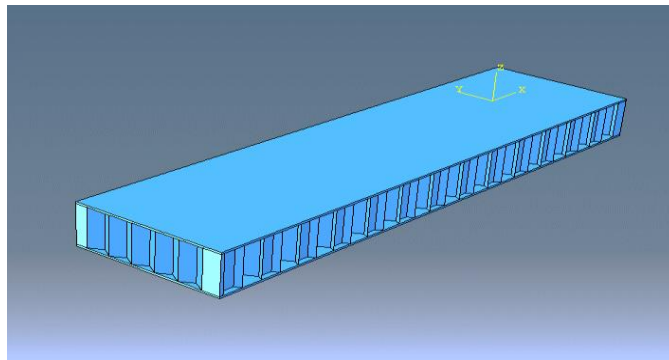


Figure 3.13 : modèle M2 Maillage de la moitié de la plaque sur Abaqus

**La variation de déplacement pour les différents modèles**

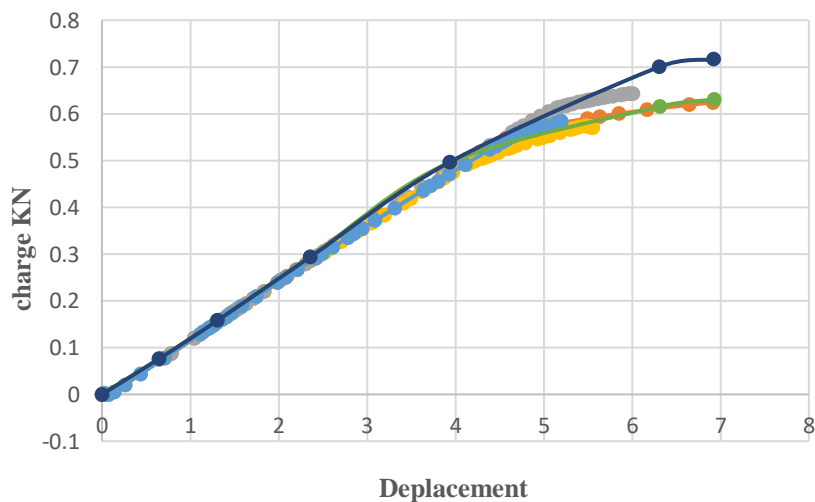


Figure 3.14: comparaison de la variation de déplacement pour les différents modèles -direction L

### 3.7 CONCLUSIONS DE COMPARAISON ENTRE LES TROIS MODELES EN F3P

Le diagramme présenté montre la relation entre la force et le déplacement lors d'essais de flexion trois points sur des structures sandwich. L'axe horizontal représente le déplacement de la structure sous l'effet de la force, tandis que l'axe vertical représente la force appliquée. La courbe illustre le comportement de la structure en quatre phases :

- a. Phase linéaire : La force augmente proportionnellement au déplacement, indiquant une déformation élastique où la structure reprend sa forme initiale une fois la force retirée, caractéristique des matériaux élastiques.
- b. Phase non linéaire : Au-delà d'un certain point, la force augmente plus lentement alors que le déplacement continue d'augmenter, représentant une déformation plastique et non élastique de la structure.
- c. Pic de charge : Correspond au point où la structure atteint sa force maximale supportable avant l'effondrement.
- d. Phase de descente : Après le pic de charge, la force diminue alors que le déplacement augmente, indiquant le début de l'effondrement de la structure.

#### 1- Comparaison des modèles :

Le graphique présente trois courbes représentant le comportement de deux modèles de structures sandwich différents :

- Modèle (essai statique): Cette courbe illustre le comportement du modèle expérimental, reflétant la réalité de la structure pendant l'essai.
- Modèle 2 (exact) et Modèle 3 (homogène): Ces courbes décrivent le comportement attendu de la structure dans un modèle de simulation informatique.

#### Analyse des résultats :

En examinant le graphique, plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- Les deux modèles présentent des comportements très similaires dans la phase linéaire.
- Les modèles se distinguent dans la phase non linéaire.
- Le modèle expérimental atteint le pic de charge avant le modèle de simulation.



- Après le pic de charge, le modèle expérimental montre une diminution plus rapide de comportement que le modèle de simulation.

#### Conclusion :

Le graphique offre des informations pertinentes sur la réaction des structures sandwich face aux forces appliquées. Ces données sont précieuses pour améliorer la conception des structures sandwich et perfectionner la précision des modèles de simulation.

#### 3.7.1 EFFET DE LA HAUTEUR

La figure donne l'évolution de la charge appliquée en fonction de la flèche prise au milieu de la poutre, pour cœurs homogène dans la configuration L, les résultats sont récapitulés dans la courbe suivant :

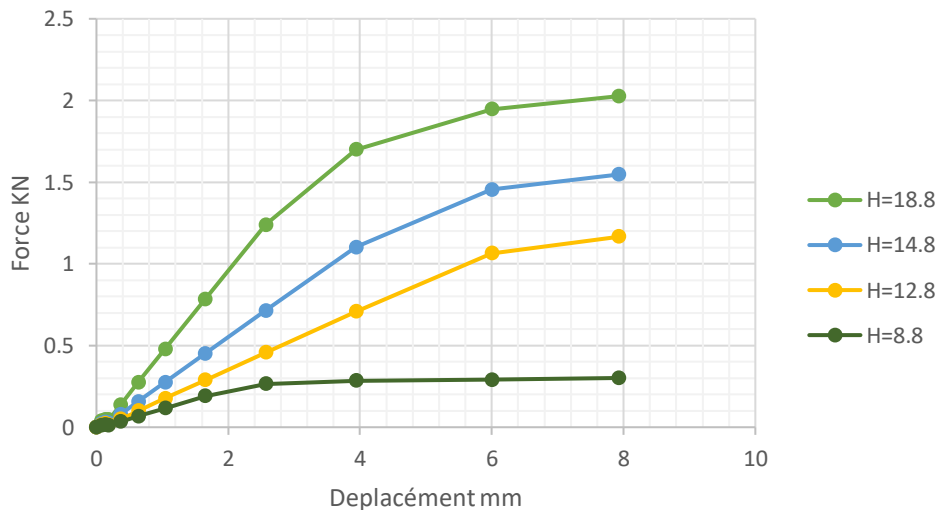


Figure 3.15 : courbe charge flèche -flexion 3 point des sandwichs homogène \_Sans L

- Le graphique présenté illustre la relation entre le déplacement appliquée à un matériau et son Force résultant. Le matériau se déforme de manière réversible dans la zone élastique et de manière irréversible dans la zone plastique. La limite d'élasticité marque le passage de la zone élastique à la zone plastique. La résistance à la rupture représente la force maximale supportable par le matériau avant sa rupture. Le point de rupture correspond à la rupture effective du matériau.

#### Résultats

Les résultats des essais statiques en flexion trois points sur les poutres sandwiches en nid d'abeilles ont été validés par un calcul analytique

Les résultats de la charge **P** obtenues par les différentes hauteurs sont regroupés dans les tableaux suivants :

- $\delta_{\text{Calcul}} (\text{mm}) = \frac{Pl^3}{48EI}$
- $I = \frac{bh^3}{12}$
- $E = \frac{2d * E_{\text{peau}} + E_{\text{coeur}}}{2d+h}$

Avec :

L : 300mm

P : charge en N

**Tableau 5.9 : les déplacements pour différent d'hauteur avec P=200 N**

Les modelés	P=200
	W(mm)
h=8.8	<b>4.01729</b>
h=12.8	<b>2.32335</b>
h=14.8	<b>1.56910</b>
h=18.8	<b>1.00416</b>

**Tableau 3.10 : les déplacements pour différent d'hauteur et charge**

h(mm)	$\delta_{\text{Courb}}(\text{mm})$	P(N)	$\delta_{\text{Calcul}} (\text{mm})$	$\delta_c(\text{mm})$
8.8	0.36604	16.619	<b>0.33382</b>	<b>0.03222</b>
12.8		25.127	<b>0.29189</b>	<b>0.07415</b>
14.8		39.315	<b>0.30845</b>	<b>0.05759</b>
18.8		68.759	<b>0.34523</b>	<b>0.02082</b>

Selon les données précédentes, la fonction réelle obtenue représente le changement de déplacement en fonction de la hauteur est suivant :

$$w(h) = e^{a+bx+cx^2} / a=6.92, b=0.585, c=0.0114$$

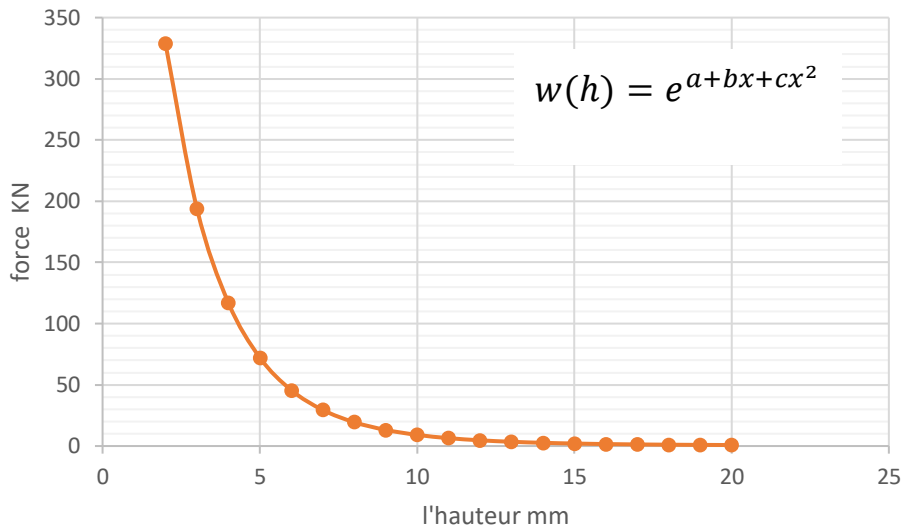


Figure 3.16 : courbe charge hauteur -flexion 3 point

### 3.7.2 La comparaison entre le model Alum exact et le model PVC

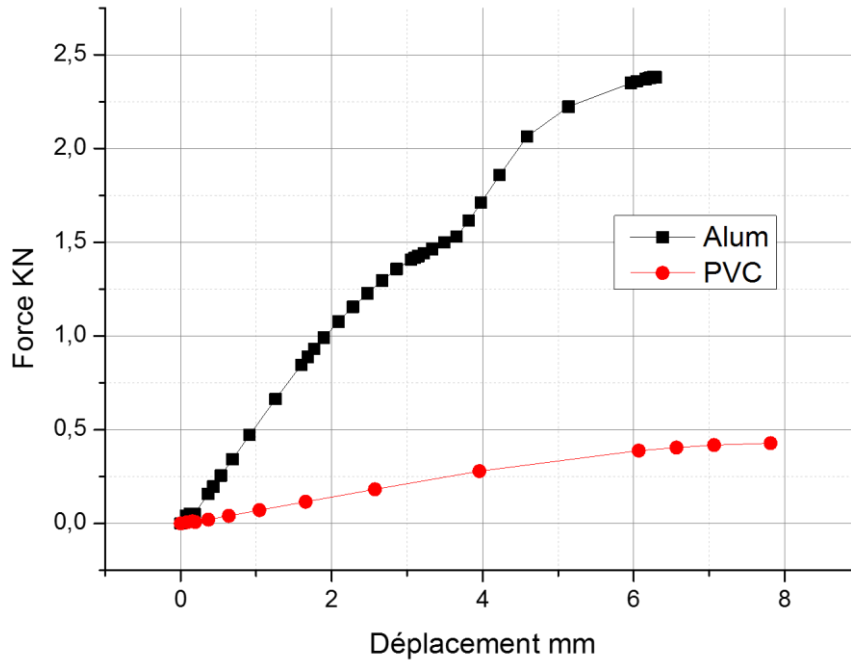


Figure 3.17 : La comparaison entre le model Alum exact et le model PVC

## Résultats et discussions

- **Introduction :**

Ce graphique sert à illustrer la relation entre la force et le déplacement pour l'aluminium et le PVC. La force est la quantité de pression appliquée à un objet, tandis que le déplacement est la quantité de distance parcourue par l'objet en réponse à cette pression.

- **Analyse des données :**

Le graphique montre que la force augmente linéairement avec le déplacement pour l'aluminium et le PVC. Cela signifie que plus la force appliquée à un objet est importante, plus la distance parcourue est grande. Cependant, il existe une différence importante entre l'aluminium et le PVC.

- **Aluminium :**

Pour les matériaux plus rigides, comme l'aluminium, la pente de la courbe sur le graphique est plus importante. Cela signifie que plus la force appliquée à une pièce d'aluminium est importante, plus la distance parcourue est grande. Par exemple, si la force appliquée à une pièce d'aluminium est augmentée de 1 KN, la pièce d'aluminium peut se déplacer de 1 mm.

- **PVC :**

Pour les matériaux plus flexibles, comme le PVC, la pente de la courbe sur le graphique est plus petite. Cela signifie que plus la force appliquée à une pièce de PVC est importante, plus la distance parcourue est grande, mais à un rythme plus lent que l'aluminium. Par exemple, si la force appliquée à une pièce de PVC est augmentée de 1 kn, la pièce de PVC peut se déplacer de seulement 0,5 mm.

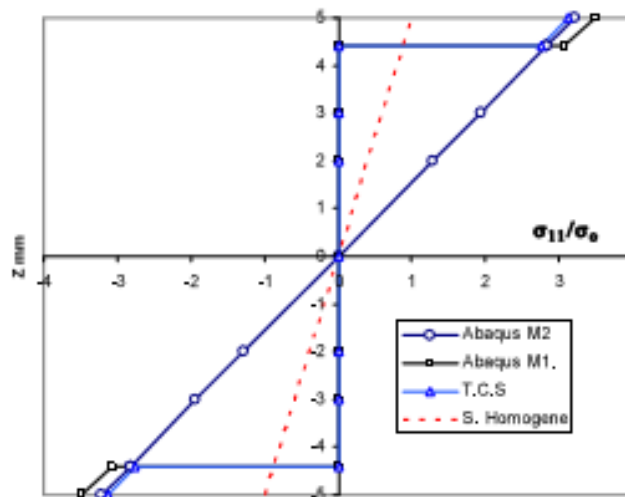
**Variation des contraintes normales à travers l'épaisseur**

Figure 3.18 : Distribution des contraintes normales normalisées dans l'épaisseur et la section

Variation des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur

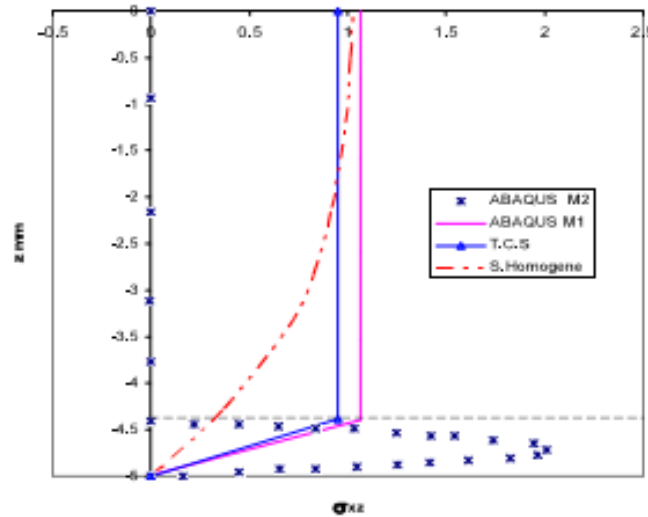


Figure 3.19 : Distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la moitié de la section pour  $X=L/10$

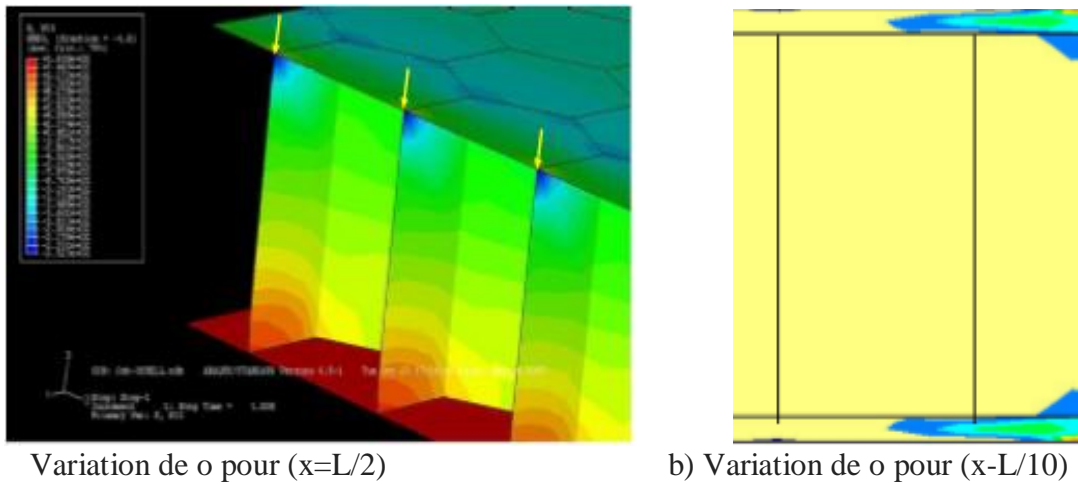


Figure 3.20 : distribution des contraintes normales  $\sigma$  et de cisaillement  $\tau$  dans l'épaisseur de la poutre (Modèle M2) [21]

3.8 Analyse des résultats des différentes simulations :

**Introduction**

L'analyse détaillée du comportement mécanique des panneaux sandwich en nid d'abeille en aluminium. L'objectif principal est de comprendre les caractéristiques mécaniques de ces matériaux en utilisant des méthodes d'homogénéisation, de modélisation analytique et numérique.

**Méthodologie**

L'étude a porté sur des panneaux sandwich constitués d'un noyau et de peaux en aluminium. Les constantes élastiques des matériaux ont été déterminées par la méthode d'homogénéisation. Le comportement des panneaux sous flexion trois points a été analysé à l'aide de modélisations analytiques et numériques (logiciel ABAQUS).

**Résultats**

- **Comparaison entre le modèle analytique et les simulations numériques :**
    - L'erreur sur la flèche verticale ( $w$ ) est de 13% pour le modèle analytique et inférieure à 7% pour le modèle M2.
    - Le modèle analytique classique surestime la rigidité globale des panneaux.
    - Les contraintes normales et de cisaillement présentent de légères différences entre les modèles numériques.
    - Seul le modèle M2 (à géométrie exacte) montre une forte concentration des contraintes de compression au niveau de l'interface peau-noyau.
  - **Comparaison entre les différents modèles numériques :**
    - Les résultats du modèle M2 sont plus précis que ceux des modèles M1 et de la théorie classique des poutres sandwich.
    - Le modèle M1 donne des résultats satisfaisants pour les déplacements mais ne suit pas les résultats du modèle M2 pour les contraintes de cisaillement.
  - **Validation des modèles :**
    - Une bonne concordance entre les résultats du modèle M1 et les résultats expérimentaux (écart inférieur à 2% pour les déplacements) a été observée.
    - Les résultats obtenus par l'homogénéisation du cœur (modèle M1) valident l'efficacité et la précision de cette méthode.
- L'étude a permis de comprendre le comportement mécanique des panneaux sandwich en nid d'abeille en aluminium sous flexion trois points. Les résultats ont montré que les modèles numériques, en particulier le modèle M2, permettent de prédire le comportement des panneaux avec une meilleure précision que les modèles analytiques classiques.

**3.9 Conclusions**

L'étude met en avant l'importance croissante des matériaux sandwich, en particulier des nids d'abeilles, qui combinent souplesse et rigidité. Elle se base sur la théorie classique du sandwich, sans prendre en compte la relation entre les atomes et les matériaux. Les caractéristiques du Nida, un matériau anisotrope, varient en fonction de divers facteurs tels que la taille, l'épaisseur et la méthode d'opération des alvéoles. Différentes théories de plaque sont utilisées pour calculer les structures de sandwich, certaines spécifiques aux plaques composites et sandwiches, d'autres prenant en compte les variations de rigidité entre les couches. L'objectif de l'étude est de souligner l'importance des matériaux composites comme les nids d'abeilles et de proposer des méthodes d'analyse étendues pour

### **Chapitre III : homogénéisation Analytique et Modélisation Numérique de nid d'abeilles**

---

d'autres types de structures, telles que les plaques et les sandwichs de coques, afin d'améliorer leurs performances. La recherche vise à proposer une approche plus approfondie pour l'analyse des structures de sandwich et à traiter les aspects techniques associés.

***Chapitre IV : Etude de comportement  
dynamique des structures sandwichs***



### 4.1 Introduction

Les matériaux composites sont de plus en plus couramment employés dans la majorité des secteurs du transport pour leur légèreté et leur amélioration des propriétés mécaniques. Toutefois, ces substances peuvent engendrer des difficultés vibratoires (structure plus résonante). Ainsi, il est essentiel de maîtriser les caractéristiques vibratoires, en particulier l'amortissement, afin de concevoir des structures composites pour des applications de haute performance. La dissipation de l'énergie dans le matériau, appelée amortissement, joue un rôle crucial dans la mise en place du comportement dynamique. Différents paramètres influencent la dissipation de l'énergie dans une structure sandwich. La composition du matériau composite, en particulier le comportement viscoélastique de la matrice et des fibres de renfort, joue un rôle essentiel [27]. Elle est également influencée par le type d'âme employé et les dimensions de la structure. Nous avons démontré dans les chapitres précédents que la structure microstructurale complexe des fibres naturelles de lin et la forme hexagone de l'âme ont des caractéristiques dynamiques élevées.

Ce chapitre vise principalement à souligner les propriétés dissipatives élevées des matériaux hexagones, les caractéristiques d'amortissement élevées des fibres de lin et les performances exceptionnelles des structures sandwichs. Afin d'accomplir cela, on a examiné les caractéristiques d'amortissement des composites sandwichs biosourcés avec une âme en nid d'abeilles réentrantes. On a effectué des essais expérimentaux de vibration en flexion encastree-libre pour étudier les caractéristiques dynamiques des peaux, des âmes et des sandwichs. On a mesuré et discuté de l'impact de la configuration L, du nombre de cellules dans l'âme et de l'épaisseur de l'âme sur la réponse en vibration des matériaux sandwichs. Par la suite, on a également employé une analyse par éléments finis afin d'évaluer le facteur d'amortissement en se basant sur la méthode de l'énergie de déformation modale. Les résultats expérimentaux ont confirmé la validité du modèle numérique et une corrélation satisfaisante a été découverte. On a donc employé l'analyse par éléments finis afin d'évaluer la part des peaux et des âmes dans la dissipation de l'énergie totale des différentes configurations de sandwichs.

#### 4.1.1 Forme hexagonale et vibration

La capacité des composites bios sources à dissiper de l'énergie vibratoire a été démontrée. Plusieurs recherches ont souligné les excellentes caractéristiques vibratoires de ces matériaux. Le coefficient d'amortissement des composites renforcés par des fibres de lin a été amélioré de plus de 50% tout en fournissant un gain de masse de 33% par rapport à ceux renforcés par des fibres de verre [28]. Selon Duc et ses collègues [29], les composites renforcés avec des fibres de lin ont un facteur de perte supérieur à celui des composites renforcés avec des fibres de carbone et de verre. De plus, les résultats indiquent que les matrices thermoplastiques permettent d'améliorer davantage les

## Chapitre IV : Etude de comportement dynamique des structures sandwichs

caractéristiques d'amortissement des composites en raison de leurs caractéristiques viscoélastiques qui ne sont pas présentes chez les polymères thermodurcissables. Les propriétés d'amortissement supérieures de la fibre de lin peuvent être attribuées à sa microstructure [30]. Les fibres végétales sont en réalité constituées de plusieurs couches de micro fibrilles d'hémicellulose et de cellulose qui ont la capacité de dissiper de l'énergie intrinsèquement grâce à leurs propriétés visqueuses et leur frottement.

Les structures hexagonales ont également démontré des propriétés vibratoires satisfaisantes. Le comportement vibratoire d'une structure sandwich à âme en treillis pyramidaux a été examiné par Yang et ses collègues [31]. Il est constitué de fibres en carbone recouvertes de couches viscoélastiques. Les résultats obtenus indiquent que les caractéristiques d'amortissement s'accroissent lorsque les couches viscoélastiques sont insérées, sans altérer ses fréquences naturelles. On a étudié de manière approfondie les caractéristiques d'amortissement de structures hexagonales dans les nids d'abeilles réentrantes [32, 33, 34]. On a constaté que les nids d'abeilles hexagonaux avec des parois inclinées peu profondes et des parois verticales courtes sollicitées dans la direction X offrent un bon équilibre entre la rigidité et l'amortissement (un module d'Young supérieur à 10 GPa est possible en combinaison avec un facteur de perte de 5%). De plus, une étude paramétrique a démontré que les caractéristiques dynamiques sont fortement influencées par le gradient d'angle de la structure hexagonale dans le nid d'abeilles [34].

Notre étude a examiné une structure hexagonale qui ressemble à un nid d'abeilles réentrantes. On a testé deux types de configurations hexagonaux. Les configurations-W et configuration-L sont présentées dans la Figure IV.1. Chaque structure a une connexion spécifique entre les cellules élémentaires qui aura un impact significatif sur la réponse de la structure à la sollicitation vibratoire.

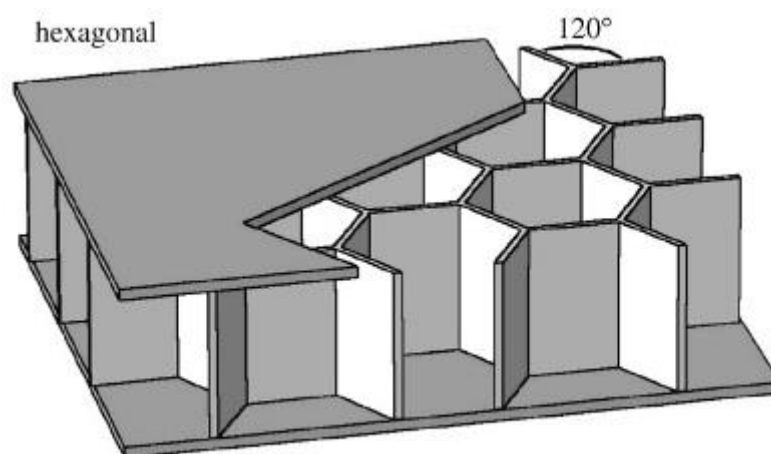


Figure 4.1: une structure hexagonale

## 4.2 Théorie des plaques en flexion

### 4.2.1. Définition d'une plaque

Une plaque est un matériau élastique de petite taille en termes d'épaisseur par rapport aux deux autres, et qui présente généralement un plan symétrique au milieu de l'épaisseur, que nous nommerons surface moyenne. Par convention, cette surface sera représentée par le plan (x-y), tandis que l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal en fonction de l'épaisseur. Il est possible d'obtenir une plaque en utilisant un matériau homogène ou en empilant plusieurs couches de matériaux orthotropes.

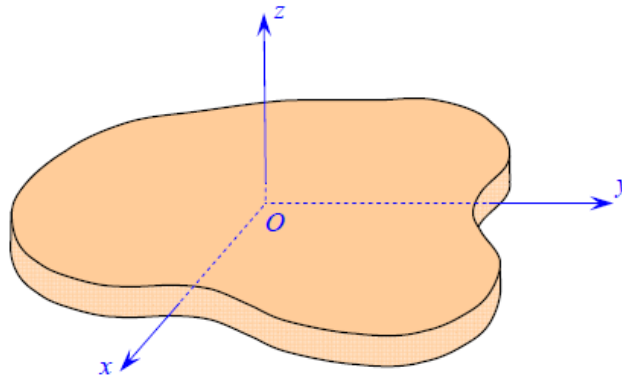


Figure 4.2: Élément de plaque

Le calcul des déformations et des contraintes est possible grâce à la théorie des plaques. On affirme qu'une plaque fonctionne à la flexion lorsque les charges auxquelles elle est soumise sont parallèles à l'axe perpendiculaire au plan moyen Z. Sa base est basée sur la théorie des poutres. Les hypothèses suivantes sont à la base des théories des plaques :

- Les contraintes normales  $\sigma_z$  sont relativement peu importantes par rapport aux autres éléments de contrainte.
- On suppose que les pentes de la surface moyenne après déformation sont basées sur l'unité.
- L'interaction entre les phénomènes des membranes et de flexion est négligée en raison des déplacements importants. Autrement dit, les contraintes dans la surface moyenne (membrane) causées par les déformations transversales (flexion) sont négligées. Il s'agit d'une estimation du premier ordre si les mouvements transversaux sont de l'ordre de l'épaisseur de la surface.
- Les phénomènes de membrane (dans le plan) et de flexion (transverses) sont éliminés grâce à la construction et aux matériaux de la plaque. Cela s'applique aux plaques isotropes monocoques ou multicouches symétriques (comme le sandwich composite nid d'abeilles symétrique). Cela permet de dissocier complètement la recherche sur les phénomènes de membrane et de flexion

- Les points qui se trouvent sur une même normale à la surface moyenne avant la déformation restent sur cette normale pendant la déformation. L'effet de cisaillement transversal est négligé.
- Parmi les multiples théories de la plaque élaborées depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, deux sont largement reconnues et employées dans le domaine de l'ingénierie. Ces éléments sont :

#### 4.2.2 Théorie des plaques minces (ou théorie classique de Kirchhoff)

L'extension de la théorie Kirchhoff-Love aux plaques minces est une extension de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Love a élaboré cette théorie en 1888 [36]. Les ingénieurs apprécient cette théorie qui néglige l'impact du cisaillement transverse en raison de sa simplicité. En principe, les éléments qui reposent sur cette théorie sont les plus appropriés pour la modélisation des plaques minces. Ils ne requièrent que l'approximation d'un seul composant de déplacement  $w(x,y)$  pour être formulés. Cependant, il s'agit simplement d'une simplicité apparente car des dérivées secondaires des déplacements jouent un rôle dans l'expression de l'énergie dissipée. De cette manière, la condition de compatibilité entre les éléments est la continuité C1 du déplacement transverse, c'est-à-dire que  $(\frac{\partial w}{\partial x})$ ,  $(\frac{\partial w}{\partial y})$  et  $w$  doivent être intégrés à travers les interfaces des éléments

##### 4.2.2.1 Relations cinématiques

À un moment donné, les mouvements sur les axes  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont déterminés par le point M, donc par ses coordonnées  $(x, y, z)$  est :  $u = z \tan \theta$

Le déplacement étant petit :  $\tan \theta = \theta = \frac{\partial w}{\partial x}$  (4.1)

Donc le champ de déplacement est défini uniquement par :

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les déformations  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont nulles.

D'après la définition du tenseur des déformations, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Si l'on définit en fonction des courbures :

$$\{\varepsilon_f\} = z\{k\} \text{ avec } \{k\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$$

Les relations déformations-contraintes seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

La résolution du système d'équations (IV.4) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

### 4.2.3 Théorie des plaques épaisses (ou théorie de Mindlin-Reissner)

La théorie de Mindlin élaborée en 1951 par Raymond Mindlin est la plus appropriée pour les plaques d'épaisseur modérée, car elle tient compte des effets de cisaillement transversal et d'inertie de rotation. La théorie utilise une approximation des trois variables indépendantes  $w, \theta_x, \theta_y$  pour formuler les éléments. Cependant, pour exprimer l'énergie de déformation, seules les dérivées premières de  $w, \theta_x, \theta_y$  interviennent, car la condition de comptabilité inter-éléments ne requiert qu'une continuité  $C_0$ . De cette manière, les éléments de Mindlin sont faciles à élaborer et peuvent être utilisés avec les fonctions d'interpolation courantes. Cela présente un bénéfice pour cette théorie, qui prend également en compte l'effet de cisaillement et, par conséquent, les déformations de cisaillement transverse seront automatiquement prises en compte.

#### 4.2.4 Théorie classique des stratifiés dans les plaques (CLT)

Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love sont utilisées dans la théorie classique des stratifiés pour l'analyse de structures de type plaque et coque courbe. Selon cette théorie, une ligne perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure, reste perpendiculaire à cette surface, ne changeant pas de forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction [42]. La théorie CLT ne prend pas en compte les effets de déformations des cisaillements transversaux ( $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ) ainsi que la déformation normale transversale ( $\varepsilon_{zz}$ ). Les hypothèses additionnelles comprennent :

- Les plis sont parfaitement liés les uns aux autres.
- Les déplacements selon les plis sont continus.
- Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique.
- Le stratifié est considéré comme mince.
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

#### 4.3 Vibration des plaques sandwichs

Le nombre d'utilisations des structures en forme de sandwich augmente constamment. Les ingénieurs et les concepteurs sont particulièrement intéressés par les études sur les vibrations des structures sandwich, car dans de nombreuses applications, ces structures sont soumises à différentes vibrations. Les équations de poutre Timoshenko ont été employées par Maheri et Adams [37] afin de décrire les vibrations de flexion des structures en sandwich. Plus spécifiquement, on aborde les conséquences des fluctuations du coefficient de cisaillement afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Dans leur étude [38], Sakiyama et ses collègues ont exposé une approche analytique pour étudier la vibration libre d'une poutre sandwich continue à trois couches, utilisant un noyau élastique ou viscoélastique, ainsi que des conditions arbitraires. Nous avons dérivé l'équation spécifique pour les fréquences et les modes naturels en introduisant une fonction green discrète. Selon Marur et Kant [39], la théorie sophistiquée d'ordre élevé a été utilisée pour analyser la dynamique transitoire d'une poutre stratifiée. Mindlin [40] a suggéré, au début des années 50, une approche pour analyser l'impact de la déformation transversale du cisaillement sur la plaque épaisse isotrope. Reddy [41] a proposé une théorie simple d'ordre élevé pour représenter la déformation causée par le cisaillement. Si la théorie des plaques de Mindlin requiert un facteur de correction de cisaillement pour les matériaux isotropes, la théorie de la plaque de Reddy ne requiert pas de facteurs de correction, mais nécessite des équations gouvernantes difficiles à résoudre. La vibration des plaques épaisses a été étudiée par Dawe et Roufaeil [42] en 1980 en utilisant l'approche de Rayleigh-Ritz. La vibration des plaques épaisses de forme structurale différente des rectangulaires simples a été étudiée par Liew [43], y compris la plaque épaisse et oblique et la plaque rectangulaire épaisse avec des raidisseurs. Les

relations entre les solutions de la théorie des plaques de Kirchhoff (classique plaque mince) et la théorie de la plaque épaisse de Mindlin (déformation de cisaillement de faible ordre) ont été étudiées par Wang [44]. Les fréquences naturelles d'un panneau sandwich simple supporté avec deux faces isotropes identiques et un noyau orthotrope ont été étudiées par Liu [45], qui a utilisé un principe vibrationnel.

### 4.3.1 Vibration des plaques orthotropes rectangulaires simplement appuyée

Il est supposé que le comportement élastique des peaux et du noyau orthotrope soit caractérisé par une relation contrainte-déformation élastique linéaire. D'autres théories incluent [44] :

- On utilise la théorie du cisaillement linéaire (théorie de la déformation au cisaillement de faible ordre) afin de décrire la déformation transversale causée par le cisaillement des deux peaux et du noyau.
- Chaque point dans la direction d'épaisseur du panneau présente une vitesse identique et peut être représentée par le mouvement du plan médian.
- Les peaux se fixent parfaitement au noyau
- Il est possible d'intégrer la masse de l'adhésif aux interfaces face / noyau dans la masse des feuilles de face, sans que cela ait un impact sur la rigidité du panneau.
- Il est possible de négliger la contrainte normale en direction de l'épaisseur.
- Le panneau sandwich présente une symétrie avec le plan médian.

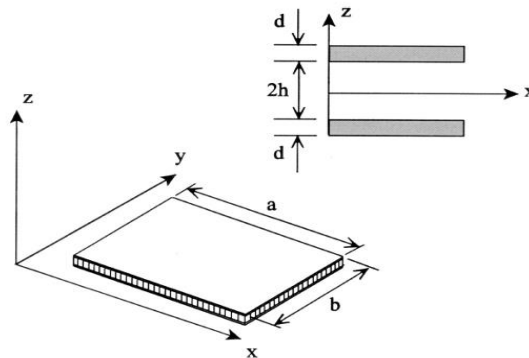


Figure 4.3 : Panneau sandwich en nid d'abeille.

La dimension du panneau sandwich est de  $a*b$  (Fig.5.2), l'épaisseur de la peau est de  $d$  et l'épaisseur de l'âme est de  $2h$ . La densité de la peau est exprimée par le module d'élasticité et le coefficient de Poisson des faces isotropes  $E_f$  et  $\nu_f$ . L'âme a une épaisseur de 2 heures. Dans les directions  $x$  et  $y$ , les coefficients d'élasticité équivalents sont  $E_{cx}$  et  $E_{cy}$ , le module de cisaillement dans le plan  $G_{cxy}$ , les modules de cisaillement transversal dans les plans  $xz$  et  $yz$   $G_{cxy}$  et  $G_{cyz}$  ainsi que la densité équivalente du noyau  $\rho_c$ .

**4.3.1.1 Relations cinématiques**

**a) Champ de déplacement**

Le champ des déplacements se manifeste donc selon ces trois variables distinctes : Le déplacement transversal d'un point du plan médian est représenté par  $w = w(x, y, t)$  et les deux angles de rotation des plans  $xz$  et  $yz$  sont représentés par  $\phi_1(x, y, t)$  et  $\phi_2(x, y, t)$ . Le mouvement de tout point dans la direction  $x$  et  $y$  dans le panneau peut être représenté par la formule suivante :

$$u(x, y, t) = z \left( \phi_1(x, y, t) - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.6)$$

$$v(x, y, t) = z \left( \phi_2(x, y, t) - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

**b) Champ de déformation**

Les déformations en tout point sont définies par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_1 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_2 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Avec l'hypothèse de contrainte plane, la relation contrainte-déformation pour les peaux s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{fx} \\ \sigma_{fy} \\ \tau_{fxy} \\ \tau_{fxz} \\ \tau_{fyz} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & \frac{\nu_f E_f}{1-\nu_f^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_f E_f}{1-\nu_f^2} & \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{fx} \\ \varepsilon_{fy} \\ \gamma_{fxy} \\ \gamma_{fxz} \\ \gamma_{fyz} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

La relation entre la contrainte et la déformation du cœur orthotrope en fonction des constantes d'ingénieurs est la suivante :



$$\begin{Bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \tau_{cxy} \\ \tau_{cxz} \\ \tau_{cyz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{cx}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{cy}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{cx}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{cy}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{cxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{cxz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{cyz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cx} \\ \varepsilon_{cy} \\ \gamma_{cxy} \\ \gamma_{cxz} \\ \gamma_{cyz} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

L'énergie de déformation pour le panneau sandwich est:

$$U = \frac{1}{2} \int [\sigma]^T [\varepsilon] dV \quad (4.11)$$

L'énergie de déformation associée à la tension / compression dans les directions x et y, et avec le cisaillement dans le plan xy pour les peaux et le noyau. Qui est composée de six composantes. L'énergie de contrainte induite par la tension/compression dans les faces supérieure et inférieure dans la direction x est :

$$U_{fx} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_h^{h+d} \sigma_{fx} \varepsilon_{fx} dx dy dz + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-(h+d)}^{-h} \sigma_{fx} \varepsilon_{fx} dx dy dz \quad (4.12)$$

$$U_{fx} = \frac{E_f}{1-\nu_f^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h z^2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy dz + \frac{\nu_f E_f}{1-\nu_f^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h z^2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy dz \quad (4.13)$$

$$U_{fx} = \frac{E_f}{1-\nu_f^2} \int_0^a \int_0^b \int_h^{h+d} z^2 dz \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\nu_f E_f}{1-\nu_f^2} \int_0^a \int_0^b \int_h^{h+d} z^2 dz \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.14)$$

$$U_{fx} = \frac{D_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\nu_f D_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.15)$$

Ou D est la rigidité de la peau par rapport au plan médian :

$$D_f = \frac{2E_f}{1-\nu_f^2} \int_0^h z^2 dz \quad (4.16)$$

D'une façon similaire, l'énergie de déformation associée à la composante de contrainte dans la direction y est :

$$U_{fy} = \frac{D_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy +$$

$$\frac{\nu_f D_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy$$

(4.17)

Et l'énergie de déformation induite par la contrainte de cisaillement est :

$$U_{fxy} = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \int_h^{h+d} z^2 dz \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

(4.18)

$$U_{fyz} = \frac{1-\nu_f}{4} D_f \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right.$$

$$\left. 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - 4 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

(4.19)

$$U_{fxz} = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \int_h^{h+d} 1 dz \int_0^a \int_0^b \phi_1^2 dx dy = \frac{dE_f}{2(1+\nu_f)} \int_0^a \int_0^b \phi_1^2 dx dy$$

(4.20)

$$U_{fyz} = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \int_h^{h+d} 1 dz \int_0^a \int_0^b \phi_2^2 dx dy = \frac{dE_f}{2(1+\nu_f)} \int_0^a \int_0^b \phi_2^2 dx dy$$

(4.21)

Pour un cœur orthotrope, nous avons :

$$U_{cx} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h}^h \sigma_{cx} \varepsilon_{cx} dx dy dz = \frac{D_{cx}}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dx dy$$

$$+ \frac{\nu_{12} D_{cy}}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy$$

(4.22)

$$U_{cy} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h}^h \sigma_{cy} \varepsilon_{cy} dx dy dz = \frac{D_{cy}}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy$$

$$+ \frac{\nu_{12} D_{cx}}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy$$

(4.23)

$$\begin{aligned}
 U_{cxy} &= \frac{G_{cxy}}{2} \int_{-h}^h z^2 dz \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - 4 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \\
 \frac{D_{cxy}}{2} \int_0^a \int_0^b &\left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - 4 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\
 U_{cxz} &= \frac{G_{cxz}}{2} \int_{-h}^h 1 dz \int_0^a \int_0^b \phi_1^2 dx dy = h G_{cxz} \int_0^a \int_0^b \phi_1^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$U_{cyz} = \frac{G_{cyz}}{2} \int_{-h}^h 1 dz \int_0^a \int_0^b \phi_2^2 dx dy = h G_{cyz} \int_0^a \int_0^b \phi_2^2 dx dy \tag{4.25}$$

Avec :

$$D_{cx} = \frac{E_{cx}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \int_{-h}^h z^2 dz, D_{cy} = \frac{E_{cy}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \int_{-h}^h z^2 dz, D_{cxy} = G_{cxy} \int_{-h}^h z^2 dz$$

Énergie de déformation totale :

$$\begin{aligned}
 U &= U_{fx} + U_{fy} + U_{fxy} + U_{fxz} + U_{fyz} + U_{cx} + U_{cy} + U_{cxy} + U_{cxz} + U_{cyz} \\
 U &= \frac{D_f + D_{cx}}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dx dy + \\
 \frac{D_f + D_{cy}}{2} \int_0^a \int_0^b &\left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy + \\
 (\nu D_f + \nu_{12} D_{cy}) \int_0^a \int_0^b &\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dx dy + \\
 \left( \frac{(1 - \nu_f) D_f}{4} + \frac{D_{cxy}}{2} \right) \int_0^a \int_0^b &\left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\
 &\left. + 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - 4 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy + \\
 \left( \frac{dE_f}{2(1 + \nu_f)} + h G_{cxz} \right) \int_0^a \int_0^b &\phi_1^2 dx dy + \left( \frac{dE_f}{2(1 + \nu_f)} + h G_{cyz} \right) \int_0^a \int_0^b \phi_2^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned}
 T &= T_z + T_{fx} + T_{fy} + T_{cx} + T_{cy} \\
 T_z &= \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy
 \end{aligned}$$

$$T_{\dot{u}} = \frac{\rho_f}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h}^{h+d} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy dz = \frac{I_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx dy \quad (4.27)$$

$$T_{\dot{v}} = \frac{I_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) dx dy \quad (4.28)$$

$$T_{\dot{w}} = \frac{\rho_c}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h}^h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz = \frac{I_c}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx dy \quad (4.29)$$

$$T_{\dot{v}} = \frac{I_c}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) dx dy \quad (4.30)$$

Avec :

$$\rho = 2d\rho_f + 2h\rho_c, \quad I_f = 2\rho_f \int_h^{h+d} z^2 dz, \quad I_c = \rho_c \int_{-h}^h z^2 dz$$

D'où :

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{I_f + I_c}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_2}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) dx dy \quad (4.31)$$

Appliquant le principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0$$

Pour une plaque rectangulaire simplement appuyée, la solution de l'équation donnée par :

$$\bar{w}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Poutre encastree à une extrémité libre à l'autre

Dans le cas d'une poutre encastree à l'extrémité  $x=0$  et libre à l'autre extrémité  $x=L$ , les conditions aux frontières sont :

-extrémité  $x=0$  :

$$W_0(x=0) = 0 \quad \frac{dw_0}{dx}(x=0) = 0$$

-extrémité  $x=L$  :

$$M_x(x=L) = 0 \quad Q_x(x=L) = 0$$

Il est usuel d'écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I}, \quad \frac{dM_x}{dx} = Q_x$$

Ou d'après ces deux formules :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2}(x=l) = 0, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3}(x=l) = 0$$

La flèche est exprimée sous la forme [12] :

$$w_0 = C_m X_m(x) \tag{4.33}$$

Ou  $X_m(x)$  est la fonction qui s'exprime ici suivant :

$$X_m(x) = \cos \frac{\lambda_m x}{L} - \cosh \frac{\lambda_m x}{L} - \gamma_m \left( \sin \frac{\lambda_m x}{L} - \sinh \frac{\lambda_m x}{L} \right)$$

La fonction  $X_m(x)$  satisfaisant les conditions d'encastrement à l'extrémité  $x=0$ , il reste à vérifier :

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2}(x=l) = 0, \quad \frac{d^3 X_m}{dx^3}(x=l) = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} \cos \lambda_m + \cosh \lambda_m - \gamma_m (\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m) &= 0 \\ \sin \lambda_m - \sinh \lambda_m + \gamma_m (\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m) &= 0 \end{aligned}$$

Une solution non nulle de  $\gamma_m$  est obtenue lorsque :

$$\frac{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m} = -\frac{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m}{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}$$

Ou 
$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = -1$$

Le coefficient  $\gamma_m$  est ensuite déterminé par l'expression :

$$\gamma_m = \frac{\cos \lambda_m + \cosh \lambda_m}{\sin \lambda_m + \sinh \lambda_m} \tag{4.34}$$

Pour les valeurs assez élevées de  $\lambda_m$ , des valeurs approchées peuvent être exprimées sous la forme:

$$\lambda_m = (m-0.5)\pi$$

Les fréquences propres sont obtenues en reportant l'expression (5.33) de la flèche dans la relation fondamentale d'une vibration de poutre, ce qui conduit à l'expression des fréquences propres.

$$\omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_x h^3}{12 \rho_s}} \quad (4.35)$$

$$\bar{w}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.32)$$

*Tableau 4.1 : les différentes valeurs de (analytique/exact/homogène) pour les trois premières modes*

	<b>Analytique</b>	<b>Model exact</b>	<b>Model homogène</b>
<b>1</b>	6007.21	3308.3	3346.2
<b>2</b>	10562.97	8407	8069
<b>3</b>	29579.095	13815	15093

Le tableau 4.1 présente une comparaison entre les valeurs de la fréquences propres obtenues par calcul analytique et les valeurs extraites du programme ABAQUS. Nous remarquons que les valeurs calculées manuellement sont beaucoup plus élevées que celles extraites du programme ABAQUS, ce qui nous permet de conclure que la méthode de calcul analytique n'est pas efficace pour le composite du sandwich

## **4.4 La théorie des nids d'abeille en plaques**

### **4.4.1. Composé d'un sandwich en forme de nid d'abeille**

Dans la conception d'une structure sandwich, la première étape consiste à sélectionner les différents éléments en fonction de l'utilisation : la face, l'âme et le joint de colle pour fixer les faces à l'âme. Les critères de sélection incluent évidemment les caractéristiques mécaniques des composants, ainsi que la transformation et le prix, qui peuvent varier selon plusieurs ordres de grandeur

Les conceptions à ossature cutanée utilisent fréquemment des structures sandwich. Un nid d'abeille sandwich est constitué de deux feuilles fines attachées des deux côtés d'un noyau léger (Figure.3.4). Les structures sandwich sont conçues de manière à ce que les tôles de face externe puissent supporter les charges axiales, les moments de flexion et les cisaillements dans le plan, tandis que l'âme peut supporter les cisaillements de flexion habituels. La présence de contraintes locales normales élevées dans les structures sandwich peut entraîner des ruptures en raison de la nature hétérogène de l'assemblage noyau/feuille de face. Il est donc nécessaire d'utiliser des inserts enrobés pour répartir les charges ponctuelles des connexions lors du montage des composants. En règle générale, les feuilles frontales des panneaux sandwich sont constituées de panneaux composites en aluminium ou en mousse d'aluminium [21-24]

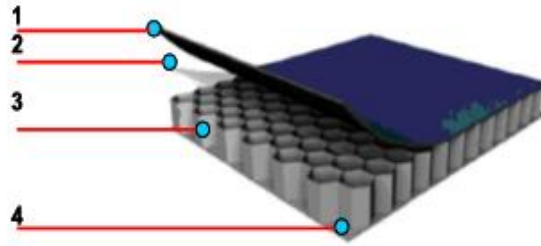


Figure 4.4: Honeycomb sandwich structure. 1. External aluminum skin, 2. Adhésive, 3. Aluminium honeycomb core, 4. Internal aluminium skin.

#### 4.4.2 Comportement équivalent des plaques sandwich nid d'abeille : une analyse complète.

L'utilisation principale du modèle équivalent produit est dans la phase de conception préliminaire du processus de conception. Il peut être employé afin de diminuer le temps consacré à l'analyse de la structure en nid d'abeille utilisée dans la conception structurelle du satellite, ce qui offre un avantage considérable en réduisant le temps de préprocesseur et le temps de calcul.

La notion d'homogénéisation est fréquemment utilisée pour étudier le comportement mécanique d'un matériau composite. Ce concept permet d'éviter les difficultés associées aux différences. La constitution réelle du matériau est idéalisée en la considérant comme continue (Fig. 2). On suppose que les caractéristiques particulières du matériau changent de manière discontinue avec les interfaces de passage entre les différentes phases. Tel qu'indiqué précédemment avant chaque étape homogène et isotrope

$$t_{eq} = (3 \cdot h^2)^{1/2} \quad (4.36)$$

$$E_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{t}{h} * E \quad (4.37)$$

Le tableau présente les caractéristiques équivalentes d'une plaque sandwich en nid d'abeille en comparant sa membrane et sa rigidité en flexion à celles d'une plaque isotrope. Tous les nids d'abeilles, dans un système mécanique anisotrope, sont des structures à cellules fermées. La densité équivalente est calculée en identifiant une maille unitaire et en dérivant la fraction volumique occupée par le métal [20]

$$\rho_{eq} = \frac{2 \cdot \rho_s \cdot t + 2 \cdot \rho_c \cdot (H - t)}{t_{eq}} \quad (4.38)$$

Dans notre analyse, nous utilisons la théorie appliquée dans le cas d'une poutre avec des conditions aux limites sans agglutination pour comparer la première fréquence modale du modèle équivalent. La fréquence principale d'une simple plaque est représentée par :

$$f = \frac{1.01}{2*\pi} \sqrt{\frac{E*h^2}{\rho*a^4}} \quad (4.39)$$

**Tableau 4.2 : Propriétés des noyaux en nid d'abeilles pour changement de la hauteur**

H	t <sub>eq</sub>	E <sub>eq</sub>	ρ <sub>eq</sub>	f
8.8	15.22	5511.07	4.31*10 <sup>-10</sup>	520.87
12.8	22.17	3788.86	3.19*10 <sup>-10</sup>	766.72
14.8	25.63	3276.85	2.86*10 <sup>-10</sup>	939.65
18.8	32.56	2579.65	2.4*10 <sup>-10</sup>	1085.5

**Tableau 4.3 : comparaison des fréquences pour la variation de hauteur**

Hauteur mm	Frequence analytique/ HZ	Frequence Homogene/ HZ	Frequence exact HZ
8.8	520.87	532.57	526.53
12.8	766.72	721.12	725.36
14.8	939.65	970.76	950.25
18.8	1085.5	1100.15	1296.7

Le tableau 4.2 présente une comparaison entre les valeurs de la fréquence obtenues par calcul analytique et les valeurs extraites du programme ABAQUS. Nous remarquons que les valeurs calculées manuellement sont très proches que celles extraites du programme ABAQUS, ce qui nous permet de conclure que la méthode de calcul analytique est efficace pour les composites du sandwich

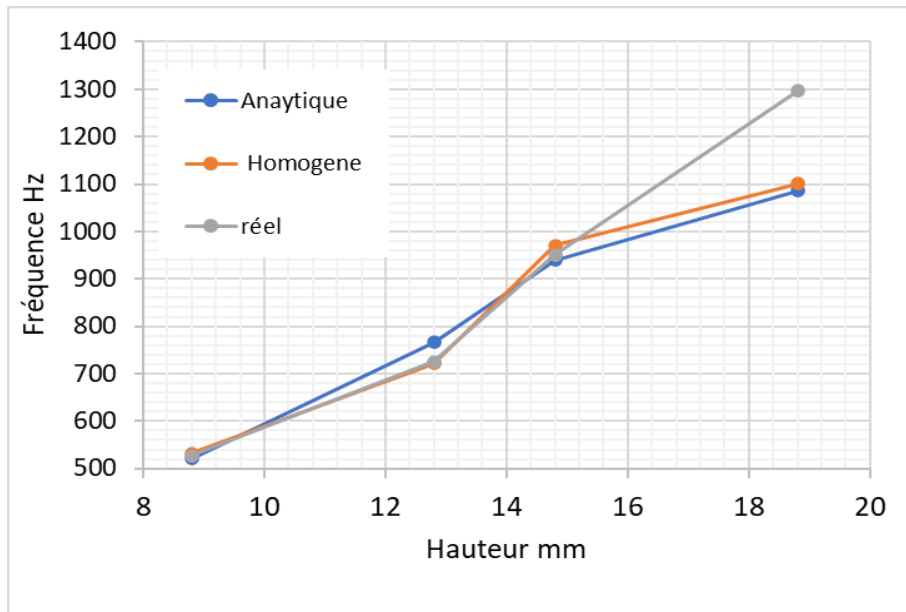


Figure 4.5 : une comparaison entre les valeurs de la fréquence pour les deux modelés el calcul analytique

#### 4.4.3 Analyse modale du panneau en nid d'abeille

N graphite/époxy. En général, le noyau est construit à partir d'une structure en nid d'abeille ou en mousse d'aluminium [21-24].



Dans cette partie, nous exposons une étude modale effectuée sur un spécimen en nid d'abeilles à l'aide de différentes techniques : analyse par éléments finis, méthode analytique basée sur la théorie du modèle équivalent et test expérimental du spécimen. On a également exposé une comparaison des résultats obtenus par ces méthodes. L'objectif de cette étude est d'identifier les fréquences propres et les formes des modes de cette plaque dans les conditions aux limites Clamped-Free-Free-Free (C-F-F-F). L'adhésif n'est pas considéré dans cette analyse, car son impact est minime

Boudjemai et al. /Materials and Design 35 (2012) 266–275

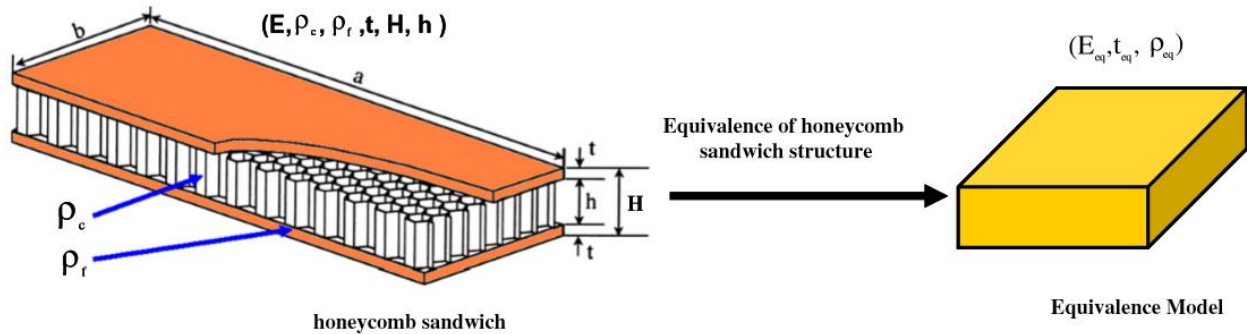


Figure 4.6: Paramètres équivalents d'une assiette de sandwich

### 4.5 Vibrations libres - fréquences naturelles

Si le système est exposé à une excitation externe, il peut résonner avec toutes les fréquences propres des différents modes normaux. Cette prise en compte est concluante. Il est essentiel de déterminer ces fréquences spécifiques afin de garantir que la structure ne soit pas soumise à des excitations fréquentes dans ses domaines pendant les conditions d'exploitation habituelles. Le système possède la même quantité de fréquences naturelles en termes de niveaux de liberté, et chaque fréquence naturelle possède son propre mode de vibration. On désigne par mode une vibration avec une configuration de mouvement spécifique. Tout mode fonctionne de manière autonome par rapport aux autres lorsque l'amortissement du système est proportionnel. L'analyse d'extraction de fréquence naturelle dans ABAQUS est utilisée pour étudier les fréquences modales non amorties et les formes de mode correspondantes des plaques sandwich. L'objectif de cette analyse est de mesurer les fréquences propres de la structure et les facteurs de participation modale en ignorant l'impact de l'amortissement. L'objectif est de trouver la fréquence la plus faible qui entraîne la plus grande contrainte de la structure,

La configuration de l'analyse dans ABAQUS est la suivante :

- Méthode de calcul (Étape) : Perturbation fréquence linéaire.
- On requiert les dix premières fréquences naturelles du système.

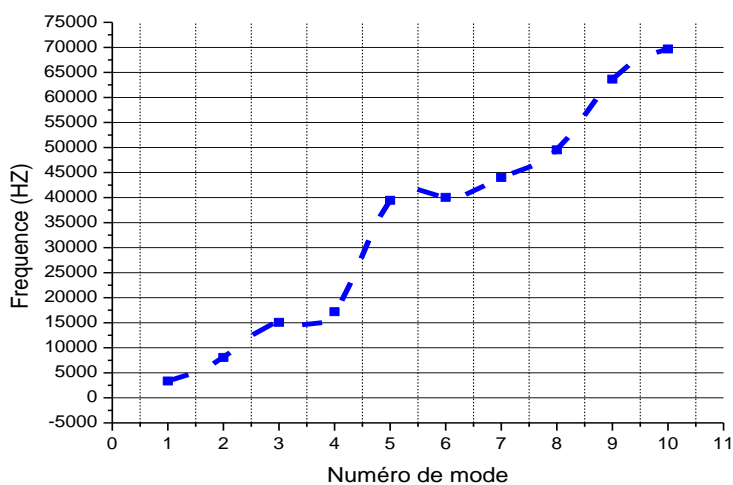
- Il est impossible d'appliquer des charges pendant cette analyse.

### 4.5.1 Résultats du modèle dans le plan

*Tableau 4.4 : comparaison des fréquences pour la variation de hauteur*

Mode	Fréquence	
	Homogène	Exact
1	532,57	526,53
2	1284,2	1338
3	2402,1	2198,7
4	2736,4	2523
5	6281,6	5583,8
6	6372,6	6403,4
7	7005,6	6624,4
8	7880,2	8203,4
9	10131	8763,8
10	11089	10088

Dans cette situation, les fréquences jouent un rôle crucial par rapport au plan. Les deux modèles présentent une variation des fréquences naturelles, comme illustré dans la figure 4.9 et le tableau 4.4. Les modes de vibrations propres sont principalement caractérisés par des modes de flexion, et les valeurs des fréquences sont très similaires pour les différents modèles. Selon les résultats, la modification des dimensions du modèle a un impact limité sur les valeurs des fréquences naturelles en cas de vibrations hors plan.



*Figure 4.7 : la fréquence pour les dix premiers modes de modèle exact*

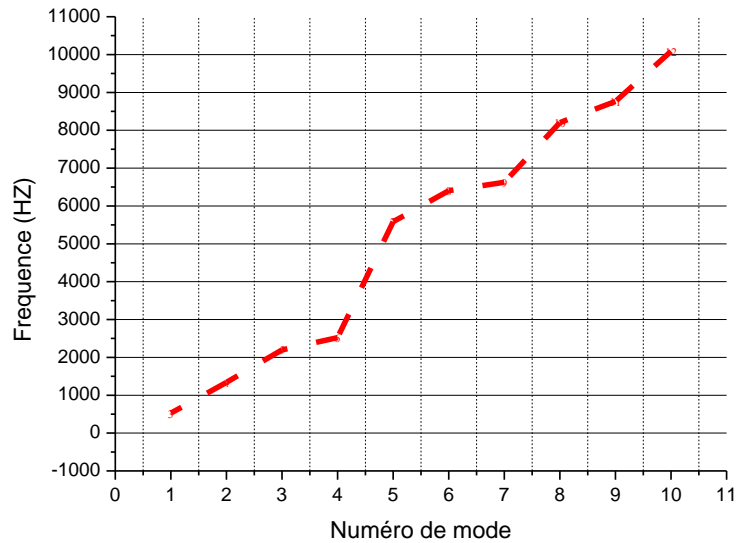


Figure 4.8: la fréquence pour les dix premiers modes de modèle homogène

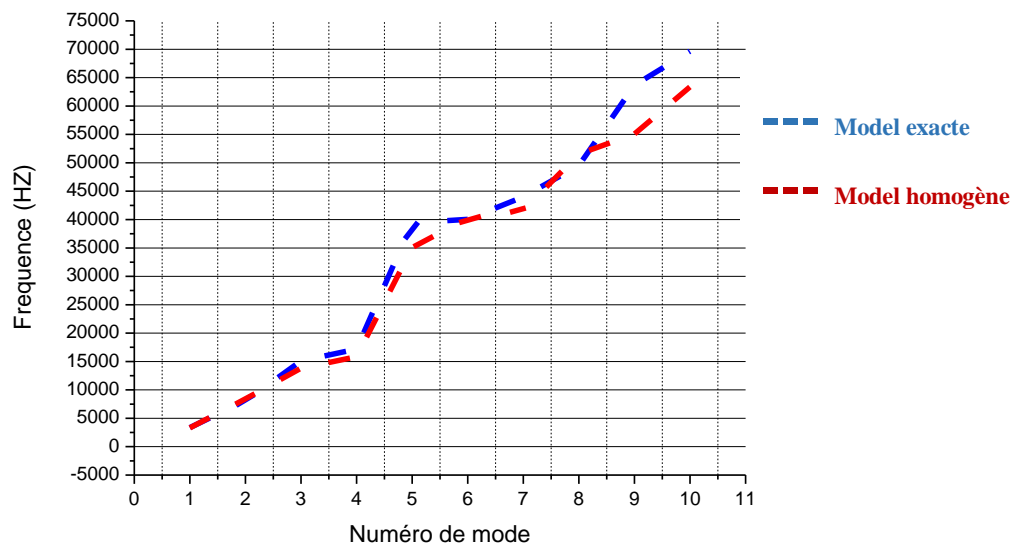


Figure 4.9 : Variation de la fréquence pour les dix premiers modes

- L'analyse comparative des fréquences naturelles des modèles réel et équivalent, illustrée par une courbe, révèle une similarité remarquable entre les deux modèles. Cette similitude se traduit par des valeurs de fréquences très proches, comme le démontre l'absence de différence notable sur la courbe. De plus, les résultats indiquent que la modification des dimensions du modèle n'a qu'un effet minime sur les valeurs des fréquences naturelles dans le cas des vibrations hors plan. Cette observation souligne la robustesse des caractéristiques vibratoires des modèles face aux changements dimensionnels dans le contexte des vibrations hors plan.

### 4.6 Vibrations forcées et Calcul de l'amortissement

Le processus d'amortissement d'un matériau consiste à dissiper de l'énergie, ce qui entraîne une diminution du mouvement. Différents phénomènes peuvent causer la dissipation d'énergie, tels que les frottements internes dans le matériau ou externes tels que la résistance de l'air et les frottements thermiques. La modélisation de l'amortissement est un aspect limité dans les simulations dynamiques numériques des structures, car elle permet de réduire l'amplitude des instabilités et des résonances dynamiques dans une structure. Effectivement, dans la plupart des cas considérés comme visqueux (amortissement de Rayleigh, modal, etc.), les modèles d'amortissement ne possèdent pas de fondement physique clair, et il est difficile de contrôler la quantité d'énergie qu'ils dissipent lors des analyses numériques. Les trois phases chronologiques caractéristiques de la réponse dynamique d'une structure ne sont pas représentées par ces modèles. La dissipation d'énergie est causée par de nombreux phénomènes physiques tels que les frottements, l'interaction entre le fluide et la structure, les chocs, la viscosité et la plasticité. Ces phénomènes sont souvent mal étudiés et il est impossible de les décrire explicitement au niveau élémentaire à l'aide de modèles de comportement. Les modèles simples qui permettent de reproduire les principaux effets sur les structures à l'échelle macroscopique sont les suivants :

- Amortissement visqueux : consommation d'énergie proportionnelle à la vitesse du déplacement,
- Le processus d'amortissement hystérétique (amortissement structural) consiste à dissiper de l'énergie en fonction du déplacement, avec une force d'amortissement qui est inversement proportionnelle à la vitesse.

#### 4.6.1 Analyse dynamique direct en régime permanent

L'amplitude d'équilibre dynamique est déterminée par l'importance des forces d'amortissement en présence d'amortissement. La détermination de l'amortissement est effectuée en utilisant la mesure de bande. La mesure d'amortissement sera également spécifique pour certains types d'amortissement, comme les amortissements visqueux ou hystérésis, mais elle sera déterminée par l'amplitude pour d'autres types d'amortissement, comme le frottement sec, et doit donc être utilisée avec précaution. La réponse périodique du système aux charges cycliques est évaluée à travers une analyse transitoire de la réponse dynamique. Il s'agit d'une fréquence pilote avec des amplitudes correspondantes qui est l'entrée de charge. L'analyse en réponse harmonique consiste à mesurer l'amplitude et la phase des mouvements, des vitesses, des accélérations et des contraintes d'un modèle en réponse à une charge oscillant à diverses fréquences.

Afin d'évaluer la fréquence de réponse des panneaux sandwich, une analyse d'équilibre direct est réalisée. Grâce à cette analyse, il est possible de mesurer l'amplitude et la phase en régime permanent de la réponse du système en réponse à une excitation harmonique à une fréquence préétablie. Le code

de calcul ABAQUS est utilisé pour effectuer l'analyse en appliquant une charge linéaire uniforme de 10 N/mm à l'extrémité supérieure du VER dans le modèle dans le plan.

**4.6.1.1 Méthode de la bande passante - Facteur de perte  $\eta_f$**

L'analyse modale est un instrument extrêmement performant pour évaluer les caractéristiques dynamiques d'un système mécanique en se basant sur ses fréquences de résonance. Ce procédé offre la possibilité de décrire une structure en utilisant ses propres caractéristiques dynamiques : Différentes fréquences, différents modes et amortissement modal Grâce à la simulation numérique, il est possible de créer la courbe de réponse en fonction des fréquences d'une structure soumise à des chargements harmoniques de type  $P_0 \sin(\omega t)$  à des intervalles de fréquences encadrant la fréquence de résonance, et de tracer la courbe qui représente les variations des amplitudes des déplacements résultants en fonction des fréquences appliquées. La figure 4.10 présente une courbe typique de réponse en fréquence pour une structure à amortissement modéré.

$\eta_f$  est le rapport entre la plage de fréquences entre les deux demi-points de puissance et la fréquence naturelle dans un mode.

Le facteur de perte ( $\eta_f$ ) est un des paramètres employés pour évaluer l'amortissement modal du panneau sandwich, qui évalue la capacité de la structure à absorber les vibrations intérieures provenant de l'environnement extérieur. Dans cette partie, nous ne calculerons que les facteurs de perte pour les pics de résonance correspondant au premier mode en utilisant la méthode de la bande passante (largeur de bande à  $-3$  dB) mentionnée précédemment.

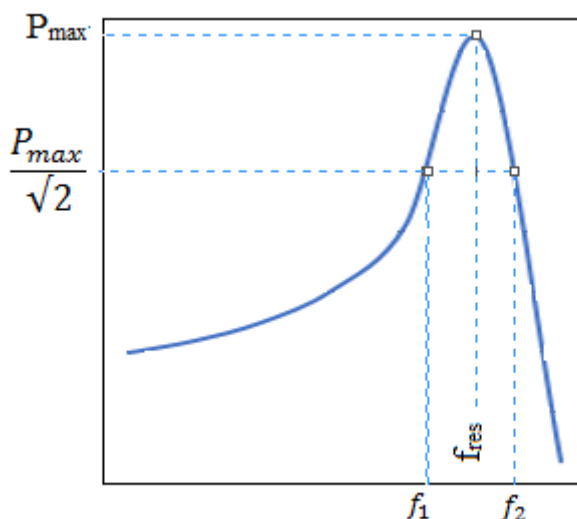


Figure 4.10: Courbe de réponse en fréquence pour un système faiblement amorti

$\eta_f$  : Le facteur de perte

$$\eta_f = 2\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_0} \tag{4.40}$$

## Chapitre IV : Etude de comportement dynamique des structures sandwichs

La réponse en fréquence correspond à la fréquence correspondant  $f_{res}$  à l'amplitude ( $P_{max}$ ) du pic résonant.  $f_1$  et  $f_2$  Cela correspond aux fréquences des demi-points de puissance [22]. Les demi-points de puissance correspondent à des points de réponse en fréquence avec une amplitude maximale de  $\frac{P_{max}}{\sqrt{2}}$ .

Les pics de résonance correspondant au premier mode de vibrations pour les cinq cellules étudiées sont pris en compte pour calculer les facteurs de perte  $\eta_f$ .

### 4.6.1.2 Résultats du modèle :

Tableau 4.5 : les facteurs de perte  $\eta_f$  et l'amortissement pour les deux modèles

	Modèle exact	Modèle homogène
$\eta_f$	0.125	0.158
$\xi$ %	6	7.8

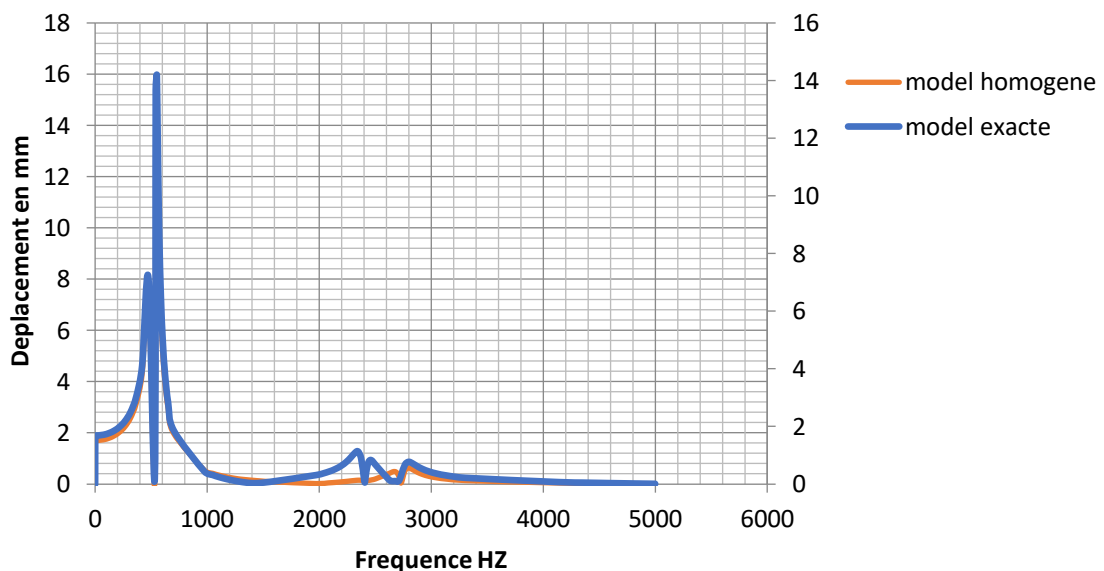


Figure 4.11 : comparésent de variation du frequence avec deplacement entre le modele exact et homogene

## Résultats

L'influence des fréquences sur le comportement des plaques rectangulaires est cruciale, avec des variations observées dans les modèles ainsi que des modes de vibrations forcées dominés par les modes de flexion. Malgré la similitude des valeurs de fréquence entre les modèles, il est noté que la modification des dimensions du modèle a un effet limité sur les fréquences naturelles en cas de vibrations hors plan, comme l'illustre la figure 4.11.

### 4.7 Conclusion :

Ce chapitre avait pour objectif principal d'évaluer les capacités de vibration et d'amortissement des plaques sandwich en nid d'abeille. L'étude s'est intéressée à l'influence de la géométrie sur le comportement vibratoire des plaques sandwich et s'inscrivait dans la continuité des recherches menées au sein du laboratoire.

L'analyse a permis de formuler les observations et conclusions suivantes :

Un écart significatif a été observé entre les fréquences propres obtenues par calcul analytique et celles extraites du logiciel ABAQUS, comme présenté dans le tableau 4.1. Les valeurs calculées manuellement étaient nettement plus élevées que celles issues de la simulation numérique. Cette observation met en évidence les limites de la méthode de calcul analytique pour déterminer les fréquences propres des composites sandwich.

Compte tenu de ces résultats, il est recommandé de privilégier l'utilisation de logiciels de simulation numérique tels qu'ABAQUS pour l'étude des vibrations des structures en composite sandwich. Ces outils permettent d'obtenir des résultats plus précis et fiables, en tenant compte des complexités géométriques et des propriétés matériau spécifiques à ce type de structures.

Il est important de souligner que la présente étude s'est focalisée sur un cas particulier de composite sandwich. Des investigations complémentaires seraient nécessaires pour explorer l'influence de divers paramètres, tels que la géométrie des cellules du nid d'abeille et les propriétés des matériaux constitutifs, sur le comportement vibratoire des structures sandwich.

La méthode analytique reste un outil précieux pour l'étude des vibrations des structures composites sandwich. Sa simplicité d'implémentation et sa précision acceptable la rendent particulièrement adaptée aux phases de conception préliminaires.

Pour des analyses plus approfondies ou pour des géométries complexes, il est recommandé de recourir à des logiciels de simulation numérique tels qu'ABAQUS, qui offrent une prise en compte plus fine des détails géométriques et des propriétés des matériaux.

En combinant les analyses issues des deux modèles et en considérant l'impact limité des variations dimensionnelles, il est possible de conclure que les fréquences naturelles des vibrations hors plan des plaques sandwich nid d'abeille sont relativement prévisibles et peu sensibles aux choix de

## **Chapitre IV : Etude de comportement dynamique des structures sandwichs**

---

modélisation et aux variations géométriques dans une certaine mesure. Cette observation souligne la robustesse de ces structures face aux vibrations hors plan et leur adaptabilité à diverses applications.

L'analyse des plaques rectangulaires met en lumière le rôle crucial des fréquences naturelles dans l'évaluation de leur comportement vibratoire hors plan. Les variations observées des fréquences naturelles entre les différents modèles et les plaques rectangulaires indiquent une certaine sensibilité à l'approche de modélisation spécifique et aux paramètres géométriques. Cependant, ces variations restent relativement limitées et n'affectent pas significativement les caractéristiques vibratoires globales des plaques. De plus, les résultats suggèrent que les modifications des dimensions du modèle ont un impact minimal sur les valeurs des fréquences naturelles pour les vibrations hors plan. Ces observations soulignent la robustesse des plaques rectangulaires face aux vibrations hors plan et leur adaptabilité à diverses applications.



## *Conclusion Général*

Cette étude vise à mettre en lumière l'importance des matériaux composites sandwichs, soulignant leur pertinence technique. Leur intérêt scientifique est renforcé par une demande croissante dans l'industrie en raison de leur multifonctionnalité, de leur légèreté et de leur rigidité élevée. Il est important de généraliser les analyses présentées à d'autres structures telles que les plaques et coques sandwichs pour étendre leur champ d'applications, ce qui constitue un aspect clé des recherches actuelles dans ce domaine.

Le nid d'abeille, en raison de sa structure géométrique complexe, présente un comportement mécanique anisotrope et variable, ce qui rend sa caractérisation analytique difficile. Pour pallier à cette complexité, le recours à la modélisation numérique s'avère indispensable pour appréhender les réactions mécaniques de ce matériau.

Dans cette étude, plusieurs modèles numériques ont été développés pour analyser le comportement mécanique du nid d'abeille. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux du modèle de Gibson, une référence dans le domaine.

L'analyse comparative entre les modèles de Gibson et Abaqus révèle des faibles écarts pour les modules  $E_x$  et  $E_y$ , ainsi que pour les coefficients de Poisson. Cependant, des différences plus significatives sont observées pour  $E_z$  et  $G_{xy}$ , où les écarts sont respectivement de 8,87% et 2,22%. Les modules de cisaillement  $G_{yz}$  et  $G_{zy}$  montrent une excellente concordance entre les deux modèles, avec des écarts minimes de 1,33% pour  $G_{yz}$ . Le module  $G_{zy}$  se distingue par une valeur nettement inférieure, indiquant une influence négligeable sur le comportement des structures sandwichs. En conclusion, les modèles analytiques et numériques offrent des perspectives complémentaires dans l'évaluation des propriétés des structures sandwichs, soulignant l'importance de chaque approche pour une compréhension approfondie du comportement de ces structures.

Les résultats des essais statiques en flexion 3 Points sur les poutres sandwichs en nids d'abeilles ont été validés par un calcul analytique (la théorie des poutres sandwichs exposée dans le chapitre précédent, et comparés aux résultats obtenus par un modèle éléments finis exécuté sur le code ABAQUS. Un bon compromis entre les résultats des divers modèles.

D'autre part il est évident qu'un seul calcul est insuffisant pour valider les résultats des modèles. Aussi, d'autres tests numériques ont été effectués afin de compléter cette validation. Ces résultats ont également confirmé les résultats des essais statiques.

Les théories classiques des stratifiés et les théories d'ordre supérieur en déformations de cisaillement ne tiennent pas compte des rapports de rigidités cœur-face ( $E_c/E_f$ ). La flèche  $w$  et la

contrainte  $\sigma$  restent quasiment constantes malgré les changements dans les rapports de rigidités. Ceci suggère que les rigidités globales des poutres sandwichs restent inchangées en fonction des rapports de rigidité. Cependant, ces modèles surestiment la rigidité globale des poutres sandwichs de manière inacceptable lorsque le noyau est mou. Il existe plusieurs théories de plaques utilisées pour calculer des structures sandwichs.

Certaines ont été initialement développées pour des plaques homogènes avant d'être étendues aux plaques composites (par exemple : Love-Kirchhoff 1987, Mindlin-Reissner 1987). Ces théories "globales" intègrent des déformations de cisaillement continues aux interfaces, enfreignant ainsi les conditions de continuité des contraintes inters laminaires. D'autres théories, conçues dès le départ pour les structures sandwichs composites (comme Rao-Nakra 1974), prennent en compte les contrastes de rigidité entre les couches en faisant des hypothèses distinctes sur les champs de déplacements et de contraintes à travers toute l'épaisseur de la plaque.

L'analyse des fréquences propres des modèles réel M2 et équivalent met en évidence une concordance remarquable entre les deux approches. Les propriétés dynamiques, telles que les fréquences et les facteurs de perte, présentent une forte corrélation, attestant de l'efficacité de l'homogénéisation et de la pertinence de la représentation mécanique pour les deux modèles.

En d'autres termes, le modèle équivalent reproduit fidèlement le comportement dynamique du modèle réel, ce qui valide son utilisation pour des analyses ultérieures.

# Les références

- [1] Kaskas Saliha 2010, « Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites », Mémoire de Magister, Université mentouri Constantine.
- [2] Jean Marie Berthelot 2012, « Mécanique des Matériaux et des Structures Composites », Edition Tec & Doc, 5ème édition.
- [3] Bacha Djaber 2014/” Comportement Mécanique en flexion trois point d'un sandwich à âme en nid d'abeille ” mémoire de master
- [4] Omar BAHO- 2016 Conception de structures sandwichs à fort pouvoir d'atténuation acoustique « analyse de sensibilité et optimisation »
- [5] Jamal Eddine Arbaoui, 2009 « Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches »
- [6] Lagoun Oualid \_Badre Madani \_\_ Comportement Mécanique Des Panneaux Sandwichs Avec âme en nid d'abeille
- [7] Gibson L. J, Ashby M. F, “Cellular Solids: Structure and Properties”, Pergamon, Oxford
- [8] Keskes Boualem- Décembre 2007 -" Comportement en fatigue des composite type sandwich en nid d'abeille
- [9] Berthelot J. M. Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures. 4ème édition, 2010.
- [10] Imen KALLEL-KAMOUN 30 Juin 1999, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique. (Canada),
- [11] Driss Bendjaballah. Analyse des plaques composites CARBONE/EPOXYDE sous l'effetdes efforts de perçage, Constantine, 2009
- [12] Abrate S., Impact on composite structures, édition S. Abrate, Southern Illinois University, Carbondale, 1998.
- [13] Reid S.R., Zou G., Impact Behaviour of Fibre-reinforced Composite Materials and Structures, édition CRC Press, 2000.
- [14] Berthelot J.-M. 2006. MATÉRIAUX COMPOSITES. Comportement mécanique et analyse des structures, Éditions TEC & DOC, 4ème édition
- [15] Gibson L.J, Ashby M.F., “ Cellular Solids Structure & Properties ” Pergamon Press, Oxford, U.K., 1988.
- [16] Belouettar S, Abbadi A, Azari Z, Belouettar R, Freres P., Composites structures, 87: 265-273, 2009
- [17] Mechanics of Honeycombs, <http://www.mse.mtu.edu~drjohn/my4150/honey>
- [18] Daniel Gay, Matériaux composite, Hermes, 4ème édition,
- 19] Bourouis Fairouz, " Optimisation de la rupture et de l'endommagement de différents matériaux sandwichs", Thèse de Doctorat, UNIVERSITE CONSTANTINE 1, 2013.
- [20] Lachguer. A et Akyoud. M "Les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales", Etude bibliographique, ECOLE DES MINES DE DOUAI, France, 2014
- [20] Chamseddine ABAIDIA 07/05/2014 \_\_ Homogenisation Analytique et Modelisation Numerique Des Structure sandwichs en nid d'abeille
- [21] Harkati el-haddi 2008, « Analyse du comportement et de l'endommagement des matériaux composites stratifiés et sandwichs »,
- [23] Mertani Boubekeur Med Bilel," Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs à âme en nids d'abeilles », mémoire magister, UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF. UFAS (ALGERIE)
- [24] Omar BAHO- 2016 Conception de structures sandwichs à fort pouvoir d'atténuation acoustique « analyse de sensibilité et optimisation »
- [25] [http //www.base-search.net/](http://www.base-search.net/)

- [26] Sandwich concept, "DIAB sandwich handbook «, Available from, <http://www.diabgroup.com>
- [27] A. Monti, A. El Mahi, Z. Jendli et L. Guillaumat, «Experimental and finite elements analysis of the vibration behaviour of a bio-based composite sandwich beam,» *Composites Part B: Engineering*, vol. 110, pp. 466-475, 2017.
- [28] J. Yang, J. Xiong, L. Ma, B. Wang, G. Zhang et L. Wu, «Vibration and damping characteristics of hybrid carbon fiber composite pyramidal truss sandwich panels with viscoelastic layers, » *Composite Structures*, vol. 106, pp. 570-580, 2013.
- [29] S. Prabhakaran, V. Krishnaraj et R. Zitoune, «Sound and vibration damping properties of flax fiber reinforced composites,» *procedia engineering*, vol. 97, pp. 573-581, 2014.
- [30] F. Duc, P.-E. Bourban, C. Plummer et J.-A. Mnson, «Damping of thermoset and thermoplastic flax fibre composites, » *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 64, pp. 115-123, 2014.
- [31] C. Lira, F. Scarpa et R. Rajasekaran, «A gradient cellular core for aeroengine fan blades based on auxetic configurations, » *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22 (9), pp. 907-917, 2011.
- [32] T. Strek, H. Jopek et M. Nienartowicz, «Dynamic response of sandwich panels with auxetic cores,» *physica status solidi (b)*, vol. 252 (7), pp. 1540-1550, 2015.
- [33] L. Boldrin, S. Hummel, F. Scarpa, D. Di Maio, C. Lira, M. Ruzzene, C. Remillat, T. Lim, R. Rajasekaran et S. Patsias, «Dynamic behaviour of auxetic gradient composite hexagonal honeycombs,» *Composite Structures*, vol. 149, pp. 114-124, 2016.
- [34] G. J. Murray et F. Gandhi, «Auxetic honeycombs with lossy polymeric infills for high damping structural materials,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 24 (9), pp. 1090-1104, 2013.
- [35] Asakura, T., Ishizuka, T., Miyajima, T., Toyoda, M., & Sakamoto, S. (2014). Finite-difference time-domain analysis of structure-borne sound using a plate model based on the Kirchhoff-Love plate theory. *Acoustical Science and Technology*, 35(3), 127-138.
- [36] Maheri, M. R., Adams, R. D., & Hugon, J. (2008). Vibration damping in sandwich panels. *Journal of materials science*, 43, 6604-6618.
- [37] Huang, M., & Sakiyama, T. (1999). Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes. *Journal of sound and vibration*, 226(4), 769-786.
- [38] Kant, T., Marur, S. R., & Rao, G. S. (1997). Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory. *Composite Structures*, 40(1), 1-9.
- [39] Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., & Wang, C. (1998). *Vibration of Mindlin plates: programming the p-version Ritz method*. Elsevier.
- [40] Reddy, J. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International journal of engineering science*, 45(2-8), 288-307.
- [41] Dawe, D. J., & Roufaeil, O. L. (1980). Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 69(3), 345-359.
- [42] Liew, K. M., Ng, T. Y., Zhao, X., & Reddy, J. N. (2002). Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration analysis of rotating cylindrical shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(37-38), 4141-4157.
- [43] Lu, Z., Wang, Z., Zhou, Y., & Lu, X. (2018). Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 423, 18-49.
- [44] Liu, G., & Li, Y. (2011). Vibration analysis of liquid-filled pipelines with elastic constraints. *Journal of sound and vibration*, 330(13), 3166-3181.
- [45] Xia Li-juan, Jin Xian-ding, Wang Yang-bao. Analyse équivalente de plaques sandwich en nid d'abeille pour structure satellite. *J Shanghai Jiao Tong Univ* 2003;37(7):999-1001.
- [46] Roggero E, Cerocchi M, Rauschert A, Sepulveda M. Une analyse et la conception d'une nouvelle alternative pour les plates-formes satellitaires. Dans : 10e conférence annuelle AIAA/USU sur les petits satellites ; 1996.
- [47] Burton WS, Noor AK. Évaluation des modèles de continuum pour les âmes en nid d'abeilles des panneaux sandwich. *Méthodes de calcul Appl Mech Eng* 1997;145(3-4):341-60.

- [48] Yu SD, Cleghorn WL. Analyse gratuite des vibrations de flexion des panneaux symétriques en nid d'abeille. *J Sound Vibrat* 2005 ; 284 : 189-204.
- [49] Griškevičius P, Zeleniakiene D, Leišis V, Ostrowski M. Étude expérimentale et numérique de l'absorption d'énergie d'impact des structures sandwich à âme en nid d'abeille importantes pour la sécurité. *Mater Sci (Medžiagotyra)*. 2010 ;16(2):119-23. ISSN1392-1320.
- [50] Hexcel, Design of sandwich structures, *Structural Materials Handbook* (1994).
- [51] Bitzer, T. *Useful Analysis Methods for Sandwich Structures*, California 1994
- [52] Chamis C C., R. A. Aiello, L.N. Murthy, "Fiber composite sandwich thermo structural behaviour: Computational simulation", *Journal of composite technology & research* 1988, vol. 10, pp. 93-99.
- [53] Grédiac M., "A finite element study of the ", transverse shear in honeycomb cores *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30(13), 1777-1788
- [54] Gibson L.-J, Ashby, M.-F "Cellular solids structure & properties."Ed Pergamon press England 1988.
- [55] Mistou, S. "Développement d'un élément fini de coque composite à double courbure pour l'implémentation d'une application orientée objet", Thèse de l'université de Bordeaux 2000.
- [56] Gibson L, J., M.F. Ashby, G.S. Schajer, C.I. Roberston, "The mechanics of two dimensional cellular materials", *Proc. R. Soc. Lond.* , 1982, A382, 25.
- [57] Bourgeois, Cartraud and O. Debordes , "Homogenization of periodic sandwiches.In: *Mechanic of Sandwich Structures*", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998), pp. 139–146.
- [58] Al Bâchi L., " Modélisation numérique et expérimentale du comportement des matériaux sandwiches appliqués à l'aéronautique", Thèse de l'ENI de Tarbes, (2002).
- [59] Masters and Evans, Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite. Strut.* 35 (1996), pp. 403-422.
- [60] Nkansah M. E, K.E. Evans, I.J.Hutchinson, " Modelling the mechanical properties of an auxetic-molecular network", *Model. Simul. Mater. SCI. Engin*, 1994, 2, 337
- [61] ZENKERT D, *The handbook of sandwich constmction*. EMAS Publishing, 1997.
- [62] HOFF N.J., MAUTNER S.E., *Sandwich construction*. *Aeronautical Engineering Review*, Vol 3>Aug. 1944, 1944.
- [63] AEROSPATIALE, *Matériaux composites : dans la grande mutation des structures*. Plaquette interne. 1986.
- [64] SCHULZE E.J., KESACK W.J., *Honeycomb sandwich composite structures used on the V22-Osprey fuselage*. *Proceeding of the 22nd International SAMPE technical conférence*, Boston MA 1990.
- [65] OLSSON K.A., MAKINEN K.E., HELLBRATT S.E., *The development of sandwich structures for naval vessel dunnng 25 years*. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium*, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers., 1997.
- [66] GUSTAFSSON R. N-G., *Hybrid stamless assemblies for weight réduction and performance*. *Proceedings of the Fourth International Conférence on Sandwich Construction*, Stockholm 1998, E-MAS Publishing., 1998
- [67] KLEIN Hermann: *General about buckling tests with thin-walled shells*. *Rapport DLR- Mitt*; 89-13., 1989.
- [68] ZENKERT D., *The handbook of sandwich construction*. EMAS Publishing., 1997.
- [69] DEN HAAN L.; G REIF., *Challenges for teaming-up sandwich technology and business success in rail transportation*. *Proceedings of the Fourth International Conférence on Sandwich Construction*, Stockholm 1998, E-MAS Publishing., 1998.
- [70] GAY Daniel., *Matériaux Composites*. Editions HERMES., 1991.

[71] J.E.C. : Comptes rendus des Journées Européennes des Composites. Composites n°25- 26., 1998.

[72] JEAN-MAREE BERTHELOT., Mécanique des Matériaux Composites. Editions HERMES., 2010.