



الجمهورية الجزائرية  
قراطية الشعبية



Republique Algerienne Democratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث  
العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي  
التبسي - تبسة

Université Larbi Tébessi – Tébessa –  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

En : Génie Civil

Spécialité : Structures

Par : Djellal Wiam

Sujet

**Étude et modélisation du comportement des poutres  
épaisses : Cisaillement transversale et Blocage  
numérique**

Présenté et soutenu publiquement, le 25 / 06 / 2024 , devant le jury composé de :

Mr. Layadi Ismail  
Mr. Boutagouga djamal  
Mr. Athamnia Ibrahim

Professeur  
Maître Assistant A  
Maître Assistant A

Président  
Rapporteur  
Examineur

Promotion : 2023/2024



## REMERCIEMENT

Je tiens à remercier le superviseur, **Pr BOUTGOUGA Djamel** au Département de Génie Civil de Université Larbi Tébessi– Tébessa, pour ses conseils précieux, sa générosité, son suivi et l'aide qu'il m'a apportée tout au long de cette période. Je le remercie encore une fois pour sa patience et sa présence, qui m'ont permis d'organiser cette thèse de manière satisfaisante.

Je souhaite également exprimer ma gratitude à Professeur **AYADI Ismaïl** au Département de Génie Civil d'Université Larbi Tébessi – Tébessa –, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier le Professeur **ATHMANIA Ibrahim** au Département de Génie Civil d'Université Larbi Tébessi – Tébessa, pour son aimable participation en tant que membre du comité d'arbitrage de cette thèse.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants du Département de Génie Civil de Université Larbi Tébessi – Tébessa – qui a contribué à ma formation au niveau du diplôme et du post-diplôme.

## DÉDICACE

### *Maman et Papa,*

Je ne peux que vous adressez mes plus sincères remerciements et ma profonde gratitude. Vous avez été mon soutien et mes premiers partisans à chaque étape de mon parcours, et sans vos prières et vos conseils, je n'aurais pas pu atteindre ce moment.

Ma chère maman, les mots de remerciement ne suffisent pas à exprimer toute ma gratitude pour tout l'amour, la tendresse et le soutien que tu m'as donnés tout au long de mes années d'études. Tu as toujours été une source de force et d'inspiration pour moi, et sans toi, je n'aurais pas pu surmonter les difficultés et les défis.

Mon cher papa, tu mérites toute ma considération et mon respect pour ton immense effort et ton dévouement sans limites. Tu as été pour moi un modèle et un exemple de patience et de persévérance, et tes conseils et orientations ont toujours été une lumière qui a guidé mon chemin.

Merci du fond du cœur, et que Dieu continue de nous bénir avec votre présence dans nos vies.

### *Mes amies*

Vous m'avez aidé à surmonter les difficultés et à relever les défis. Vous avez toujours été à mes côtés, que ce soit en m'encourageant, en me donnant des conseils précieux ou simplement en étant présents.

Je ne peux pas exprimer à quel point je suis reconnaissant pour chaque mot d'encouragement et chaque moment passé ensemble à étudier. Vous avez été une partie intégrante de mon succès et de ma graduation aujourd'hui, et je me considère chanceux de vous avoir eus dans mon parcours.

J'espère que nous resterons toujours amis et que vous continuerez à réussir et à exceller dans vos vies. Merci du fond du cœur.

Avec mes meilleurs vœux,

## Résumé

Cette étude porte sur l'analyse et la modélisation du comportement des poutres épaisses, en mettant particulièrement l'accent sur leur réponse sous l'influence de différentes forces, notamment l'effet du cisaillement transversal. L'étude utilise des théories de la mécanique des matériaux telles que la théorie de Timoshenko, réputée pour sa précision dans l'interprétation et l'analyse des effets du cisaillement transversal et de la rotation des sections transversales à l'intérieur des poutres. La modélisation numérique, en particulier l'utilisation des méthodes des éléments finis (FEM), est employée pour simuler le comportement des poutres et analyser les contraintes et les déformations avec précision. Cette approche aide à comprendre l'impact des charges réelles sur les poutres épaisses. Ces modèles fournissent des outils puissants pour la conception de structures d'ingénierie telles que les ponts et les bâtiments, contribuant à améliorer les performances structurelles et à proposer des solutions de conception assurant une construction sûre et efficace. Les résultats de cette étude offrent une base scientifique fiable pour améliorer la conception des poutres épaisses dans diverses applications d'ingénierie, garantissant ainsi la sécurité et la durabilité des structures complexes.

### **Mots-clés :**

Poutres épaisses, Théorie de Bernoulli, Théorie de Timoshenko, Cisaillement transversal, Rotation des sections transversales, Modélisation numérique, Méthode des éléments finis (FEM), Contraintes et déformations, Charges réelles, Conception de structures d'ingénierie, Performances structurelles.

## Abstract

This study focuses on the analysis and modelling of the behaviour of thick beams, with particular emphasis on their response under various forces, especially the effect of transverse shear. The study employs theories from material mechanics, such as Timoshenko's theory, known for its accuracy in interpreting and analysing the effects of transverse shear and the rotation of cross-sections within the beams. Numerical modelling, particularly using Finite Element Methods (FEM), is employed to simulate beam behaviour and analyse stresses and deformations with precision. This approach helps in understanding the impact of real loads on thick beams. These models provide powerful tools for the design of engineering structures such as bridges and buildings, contributing to improved structural performance and proposing design solutions that ensure safe and efficient construction. The results from this study offer a reliable scientific basis for enhancing the design of thick beams in various engineering applications, thus ensuring the safety and durability of complex structures.

### Keywords:

Thick beams, Bernoulli Theory, Timoshenko theory, Transverse shear, Rotation of cross-sections, Numerical modelling, Finite Element Methods (FEM), Stresses and deformations, Real loads, Engineering structure design, Structural performance.

## المخلص

تتناول هذه الدراسة تحليل نمذجة سلوك العوارض السميكة، مركزةً على تأثير القوى المختلفة عليها، وخاصة تأثير القص العرضي. تعتمد الدراسة على استخدام نظريات ميكانيكا المواد، مثل نظرية تيموشينكو المعروفة بدقتها في تفسير وتحليل تأثيرات (FEM) القص العرضي ودوران المقاطع العرضية داخل العوارض. تستخدم النمذجة الرقمية، خاصةً طريقة العناصر المحدودة لمحاكاة سلوك العوارض وتحليل القيود والتشوهات بدقة. هذا النهج يساعد في فهم تأثير الأحمال الفعلية على العوارض السميكة. تُعتبر هذه النماذج أدوات قوية لتصميم الهياكل الهندسية، مثل الجسور والمباني، حيث تساهم في تحسين الأداء الهيكلي وتقديم حلول تصميم تضمن بناءً آمناً وفعالاً. النتائج المستخلصة من هذه الدراسة توفر قاعدة علمية يمكن الاعتماد عليها في تحسين تصميم العوارض السميكة في مختلف التطبيقات الهندسية، مما يضمن سلامة واستدامة الهياكل الهندسية المعقدة.

### الكلمات المفتاحية

العوارض السميكة، نظرية تيموشينكو، نظرية بيرنولي، القص العرضي، دوران المقاطع العرضية، النمذجة الرقمية، طريقة العناصر المحدودة، القيود والتشوهات، الأحمال الفعلية، تصميم الهياكل الهندسية، الأداء الهيكلي.

## Table des matières

Résumé.....	VII
Abstract.....	VIII
المخلص.....	VIII
Table des matières .....	IX
Liste des Figures.....	V
Liste des Tableaux .....	VI
Introduction générale .....	7
Chapitre I : Théorie de poutres .....	2
I.1. Introduction :.....	3
I.2. Définition une poutre :.....	3
I.3. Avantages et inconvénients les poutres : .....	3
I.4. Objectifs de la poutre :.....	5
I.5. Les Types de poutres : .....	5
I.6. La différence entre les poutres minces et les poutres épaisses : .....	6
I.7. Types d'appui :.....	7
I.8. Théorie de poutre d'Euler- Bernoulli :.....	10
I.8.1. Définition théorique d'Euler-Bernoulli : .....	10
I.8.2. Équation générale des poutres :.....	11
I.8.3. La relation entre le moment de flexion et la flexion : .....	13
I.9. Théorie de poutre de Timochenko .....	13
I.9.1. Introduction à la théorie de poutre de Timochenko :.....	13
I.9.2. Théorie de poutre plane de Timochenko :.....	13
I.10. Coefficient de correctkion de cisaillement transversal .....	17
I.10.1. Equation du Coefficient de correctkion de cisaillement transversal :.....	18
I.11. Théorie d'ordre élevé :.....	18
Chapitre II : La Méthode des éléments finis .....	20
II.1. INTRODUCTION :.....	21
II.2. Un bref historique du MEF :.....	21
II.3. Objectifs de la MEF : .....	22
II.4. Pourquoi avoir choisi MEF ? .....	23
II.5. Idée de base de la méthode des éléments finis :.....	23
II.6. Domaines d'application du MEF : .....	24
II.7. Avantages et inconvénients de la MEF : .....	24
II.8. Principe de la méthode des éléments finis: .....	26

II.9. Formes classiques d'éléments :	26
II.10. Qu'est-ce qu'un élément fini ?	28
II.11. Les éléments poutres :	28
II.12. Fonctions de base en traction/compression et en torsion :	29
II.13. Fonctions de base en flexion :	29
II.14. Les éléments d'Euler-Bernoulli (sans déformations de cisaillement) :	30
II.15. Les éléments de Timoshenko (avec déformations de cisaillement) :	31
II.16. Théorèmes de l'énergie :	31
II.16.1. Les contraintes:	32
II.16.2. Les déformations:	33
II.16.3. Relations entre déplacements et déformations	34
II.16.4. Relation entre contraintes et déformations :	37
II.17. Énergie de déformation élastique :	40
II.18. Rôle des systèmes de coordonnées naturels (ISO) dans la méthode des éléments finis :	42
II.19. Étapes de base pour utiliser la méthode FEM en génie civil :	43
II.20. Système de coordonnées naturel (iso) :	44
Chapitre III : Élément finis de poutre plane à 2 nœuds.	46
III.1. Introduction	47
III.2. Élément de poutre plane d'Euler- Bernoulli :	48
III.3. Élément de poutre de Timoshenko "élément de Friedman & Kosmatka " :	50
III.4. ÉLÉMENT DE POUTRE TIMOSHENKO À DEUX NŒUDS avec interpolation linéaire:	52
III.4.1. Approximation du champ de déplacement :	52
III.4.2. Approximation des déformations généralisées et des contraintes :	54
III.4.3. L'énergie de déformation :	55
Chapitre IV : Blocage en cisaillement transversal: définition et solutions	57
IV.1. Intégration numérique :	58
IV.2. L'intégration réduite	59
IV.3. Blocage numérique	60
IV.3.1 Définition du blocage numérique:	61
IV.3.2. Solutions étudiées pour remédier le blocage par cisaillement	61
IV.4. Élément poutre de Timoshenko avec intégration réduite	62
IV.5. Sélection du champ de déformation transversale supposé "Assumed Strain":	63
IV.6. Interpolation liée (Linked interpolation)	64
IV.7. Élément de Friedman & Kosmatka	65
Chapitre V : Résultats et discussions	67
V.1. Présentation de MATLAB	68

V.2. Introduction .....	69
V.3. Validation numérique .....	71
Conclusion Générale .....	86
Références .....	88

## Liste des Figures

### Chapitre I

Figure I .1 : Appui simple .....	8
Figure I .2 : Appui double.....	9
Figure I .3 : Appui encastré.....	10
Figure I .4 : Déformation d'un poutre en flexion .....	11
Figure I .5 : Théorie du poutre de Timochenko. Rotation de la section transversale .....	14
Figure I .6 : Élément de la poutre Timoshenko montrant une déformation par cisaillement. Les sections ne sont plus perpendiculaires à la ligne de l'axe neutre.....	16
Figure I .7 : Paramètre de correction de cisaillement $k_z$ pour certaines sections. ....	18

### Chapitre II

Figure II .1 : Formes classiques d'éléments.....	27
Figure II .2 : Géométries de référence de deux types d'éléments poutres.....	28
Figure II .3 : Fonctions de base associées au traction/compression et à la torsion des éléments de poutre.....	29
Figure II .4 : Représentation de la déformée d'une poutre d'Euler-Bernoulli à partir des déplacements et des rotations des nœuds.....	30
Figure II .5 : Représentation de la déformée d'une poutre de Timoshenko à partir des déplacements et des rotations des nœuds.....	31
Figure II .6 : Corps solide déformable.....	32
Figure II .7 : les contraintes .....	33
Figure II .8 : Déplacement d'un point. ....	34
Figure II .9 : Déformations planes.....	36
Figure II .10 : Allongement d'un barre.....	37
Figure II .11 : courbe contrainte et déformation .....	38
Figure II .12 : Énergie de déformation uniaxial .....	40
Figure II .13 : Energies de deformation de cisaillement. ....	41

### Chapitre III

Figure III .1 : Élément de poutre plane.....	47
--	----

### Chapitre V

Figure V .1 : Poutre plane de section rectangulaire .....	69
Figure V .2 : Poutre console sous charge concentrée.....	71
Figure V .3 : .....	73
Figure V .4 : .....	74
Figure V .5 : .....	74
Figure V .6 : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments.....	75
Figure V .7 : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments .....	76
Figure V .8 : Variation de la flèche en termes de l'épaisseur $h$ .....	77

<b>Figure V .9</b> : Poutre console sous charge concentrée.....	77
<b>Figure V .10</b> : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments.....	79
<b>Figure V .10</b> : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments .....	79
<b>Figure V .12</b> : Variation de la flèche en termes de l'épaisseur h.....	80
<b>Figure V .13</b> : Poutre simplement supporté sous charge concentrée .....	80
<b>Figure V .14</b> : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments.....	81
<b>Figure V .15</b> : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments .....	81
<b>Figure V .16</b> : Variation de la flèche en termes de l'épaisseur h.....	82
<b>Figure V .17</b> : Poutre simplement supporté sous charge concentrée .....	83
<b>Figure V .18</b> : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments.....	83
<b>Figure V .19</b> : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments .....	84
<b>Figure V .20</b> : Variation de la flèche en termes de l'épaisseur h.....	84

## Liste des Tableaux

### Chapitre II

<b>Tableau II .1</b> : Évolution chronologique de la méthode .....	22
--	----

### Chapitre IV

<b>Tableau IV .1</b> : Tables de Gauss-Legendre.....	59
--	----

# **Introduction générale**

### Introduction générale

L'étude et la modélisation du comportement des poutres épaisses sont cruciales en génie civil et mécanique en raison de leurs grandes dimensions par rapport à celles des poutres minces. En raison de leur épaisseur, ils sont soumis à des défis de conception et d'analyse uniques. Contrairement aux poutres minces, auxquelles la théorie de Bernoulli est souvent appliquée en supposant que les sections restent plates et non déformées sous charge, les poutres épaisses nécessitent l'utilisation de théories plus avancées telles que la théorie de Timochenko. Ce dernier prend en compte les effets du cisaillement transversal et de la rotation des sections, fournissant ainsi un modèle plus précis du comportement des poutres épaisses en réponse aux charges appliquées.

Dans cette étude, nous explorerons en profondeur le comportement des poutres épaisses en génie civil et mécanique à travers le « Chapitre I », qui se concentrera sur la théorie des poutres, notamment les théories de Bernoulli et Timochenko, soulignant l'importance de la prise en compte des déformations résultant du cisaillement transversal et de la rotation des sections, et dans le « Chapitre II » nous présenterons une méthode d'éléments finis, qui est une technique d'analyse numérique nécessaire pour modéliser avec précision les contraintes et les déformations dans les structures complexes. Le « Chapitre III » se concentrera sur le fini. éléments de poutres planes à deux nœuds, expliquant les détails de leur application dans l'analyse des poutres épaisses. Le « Chapitre IV » abordera le blocage en cisaillement transversal, définira ces phénomènes et proposera des solutions, et le « Chapitre V » présentera les résultats obtenus. et les discuter en profondeur, en tenant compte des modèles théoriques et des simulations numériques réalisées. Utiliser MATLAB tout au long de l'étude pour effectuer les calculs et analyses nécessaires. Enfin, la « Conclusion générale » résumera les principales conclusions et fournira des recommandations pour de futures recherches et applications pratiques dans la conception de structures sûres et efficaces. En résumé, étudier et modéliser le comportement des poutres épaisses est essentiel pour concevoir des structures solides et sûres, aussi bien dans le cadre de grands projets d'infrastructures que dans les industries nécessitant l'utilisation de structures de grande taille et complexes.

# **Chapitre I : Théorie de poutres**

## I.1. Introduction :

Les poutres constituent un élément essentiel des ouvrages d'art et sont utilisées pour transférer et répartir les charges dans différents types de construction. Elles sont généralement classées en deux types principaux en fonction de leurs dimensions : les poutres minces et les poutres épaisses. Chaque type joue un rôle important et est utilisé dans différentes applications en fonction des exigences de conception et de construction. La théorie des poutres fournit une solution approximative aux champs de contrainte-déformation et donne une bonne idée des forces et des déplacements.

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodes et théories utilisées dans les calculs de la flèche, rotation et contraintes, les théories de Bernoulli et de Timochenko.

## I.2. Définition une poutre :

Une poutre est un élément structural horizontal ou incliné utilisé dans la construction pour soutenir des charges verticales. Les poutres sont généralement fabriquées en bois, en acier, en béton armé ou en matériaux avancés, et sont souvent utilisées dans la construction de bâtiments, de ponts, de structures de génie civil et d'autres ouvrages. [4]

## I.3. Avantages et inconvénients les poutres :

Les poutres ont plusieurs avantages et inconvénients selon leur utilisation :

### ► Avantages :

#### ● Résistance structurale :

Les poutres sont conçues pour supporter des charges lourdes et répartir le poids de manière efficace. Ce qui les rend idéales pour les structures de bâtiments.

#### ● Flexibilité de conception :

Elles peuvent être fabriquées dans une variété de formes et de tailles s'adapter à différents types de constructions et de styles architecturaux.

#### ● Durabilité :

Fabriquées à partir de matériaux comme le bois, l'acier ou le béton, les poutres sont souvent choisies pour leur durabilité et leur capacité à résister aux éléments et au temps.

#### ● Support de planchers et de toits :

Les poutres sont utilisées pour soutenir les planchers et les toits des bâtiments, fournissant une structure solide et stable.

- **Économie de coûts :**

En utilisant des poutres, les constructeurs peuvent réduire le besoin de supports supplémentaires, ce qui peut réduire les coûts de construction.

- **Facilité d'installation :**

Elles peuvent être relativement simples à installer, surtout lorsqu'elles sont préfabriquées ou préfabriquées.

- ▶ **Inconvénients :**

- **Poids :**

Les poutres peuvent être lourdes, ce qui peut nécessiter des équipements spéciaux pour les manipuler et les installer.

- **Encombrement :**

Dans certains cas, les poutres peuvent nécessiter plus d'espace que d'autres méthodes de construction, ce qui peut limiter la conception de l'espace.

- **Sensibilité aux intempéries :**

Certaines poutres en bois peuvent être sensibles à l'humidité et à la pourriture, nécessitant une protection et un entretien appropriés.

- **Coût initial :**

Bien que souvent économiques à long terme, les coûts initiaux de fabrication et d'installation des poutres peuvent être élevés, surtout pour des matériaux de haute qualité.

- **Besoin de support :**

Dans certaines situations, les poutres peuvent nécessiter des supports supplémentaires pour maintenir leur intégrité structurelle, ce qui peut ajouter à la complexité et aux coûts de construction.

En somme, les poutres jouent un rôle essentiel dans la construction en offrant résistance, flexibilité et durabilité.

#### I.4. Objectifs de la poutre :

Les objectifs de la conception et d'utilisation d'une poutre dépendent du contexte dans lequel elle est utilisée, mais généralement, voici quelques-uns des objectifs principaux :

- **Support de charge** : Les poutres sont souvent utilisées pour des charges, que ce soit dans les bâtiments, les ponts, les structures industrielles, etc.
- **Distribution de charges** : Elles permettent de distribuer uniformément les charges sur une plus grande surface, réduisant ainsi les contraintes et les risques de déformation excessive.
- **Rigidité structurale** : Les poutres contribuent à la rigidité et à la stabilité d'une structure en résistant aux forces appliquées et en minimisant les déformations indésirables.
- **Économie de matériaux** : Concevoir des poutres efficaces permet de minimiser l'utilisation de matériaux et la performance structurelle.
- **Durabilité** : Les poutres sont conçues pour résister aux charges et aux contraintes environnementales pendant une durée prolongée, contribuant ainsi à la durabilité globale de la structure.
- **Facilité de construction** : Elles doivent être conçues pour être fabriquées, transportées et installées efficacement sur le chantier, tout en répondant aux normes de sécurité et de qualité.

En fonction de l'application spécifique, la résistance au feu, la résistance aux séismes, etc. [4]

#### I.5. Les Types de poutres :

Les poutres peuvent généralement être classées comme suit :

- **Les poutre en acier :**

Utilisées dans les grandes structures, les bâtiments commerciaux et industriels. Les poutres en acier offrent une excellente résistance et durabilité et supporter de lourdes charges.

- **Les poutre en béton armé :**

Sont couramment utilisées dans les bâtiments résidentiels et commerciaux. Il se caractérise par une résistance élevée et une résistance aux influences environnementales et aux facteurs externes.

- **Les poutre en bois :**

Sont utilisées dans la construction résidentielle et les structures légères. Le bois est flexible, facile à façonner et peut être facilement renouvelé.

- **Les poutre en acier inoxydable :**

Utilisées dans des environnements où les matériaux sont sujets à la corrosion, comme les zones côtières ou les industries chimiques.

- **Les poutre épaisses en acier :**

Sont utilisées dans les structures industrielles et les grands bâtiments commerciaux. Ces poutres se distinguent par leur haute résistance et leur capacité à résister à de fortes pressions.

- **Les poutre épaisses en bois :**

Utilisées dans les bâtiments au caractère traditionnel ou rustique, et parfois dans les grandes structures en bois comme les bâtiments industriels légers. Elles se caractérisent par leur durabilité, leur esthétique et leur capacité à supporter de lourdes charges.

- **Les poutre épaisses en béton armé :**

Ce sont des poutres caractérisées par une plus grande largeur par rapport à leur hauteur. Ces poutres sont utilisées dans des applications qui nécessitent une large répartition des charges et un support stable pour les autres parties de la structure. Les poutres épaisses sont préférées dans les structures qui nécessitent une résistance à la flexion importante.[5]

## **I.6. La différence entre les poutres minces et les poutres épaisses :**

- **Dimensions et conception :**

- **Poutres minces :** Se caractérisent par un rapport hauteur/largeur ( $h/L$ ) tel que :  $4 \leq L/h \leq 20$ .

- **Poutres épaisses :** Se caractérisent par un rapport plus hauteur/largeur tel que :  $L/h > 20$ .

- **Applications :**

Les poutres sont conçues pour supporter des charges transversales ponctuelles et réparties. Elles offrent une grande résistance aux flexions et réduisent efficacement les déformations de flexion.

-**Poutres minces :** généralement utilisées dans les structures qui nécessitent de gagner de l'espace vertical ou de réduire la courbure.

-**Poutres épaisses :** utilisées dans les bâtiments industriels, les entrepôts et les installations nécessitant une large répartition des charges sur de grandes surfaces.[5]

- **Matériaux et coût :**

-**Poutres minces :** souvent constituées de matériaux plus résistants et d'un coût plus élevé en raison de besoins avancés en matière de conception et d'ingénierie.

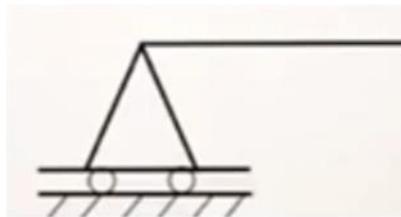
**-Poutres épaisses :** peuvent être constituées de divers matériaux. Ils comprennent le béton et le fer et sont généralement moins chers.

### I.7.Types d'appui :

En génie civil et en mécanique des structures, les organes d'appui pour poutre se schématisent généralement sous trois types principaux. Voici une explication détaillée de chacun de ces types :

- **Appui simple :**

L'appui simple c'est un support qui gêne le mouvement dans le sens vertical tout en permettant le mouvement dans le sens horizontal et permet la rotation.



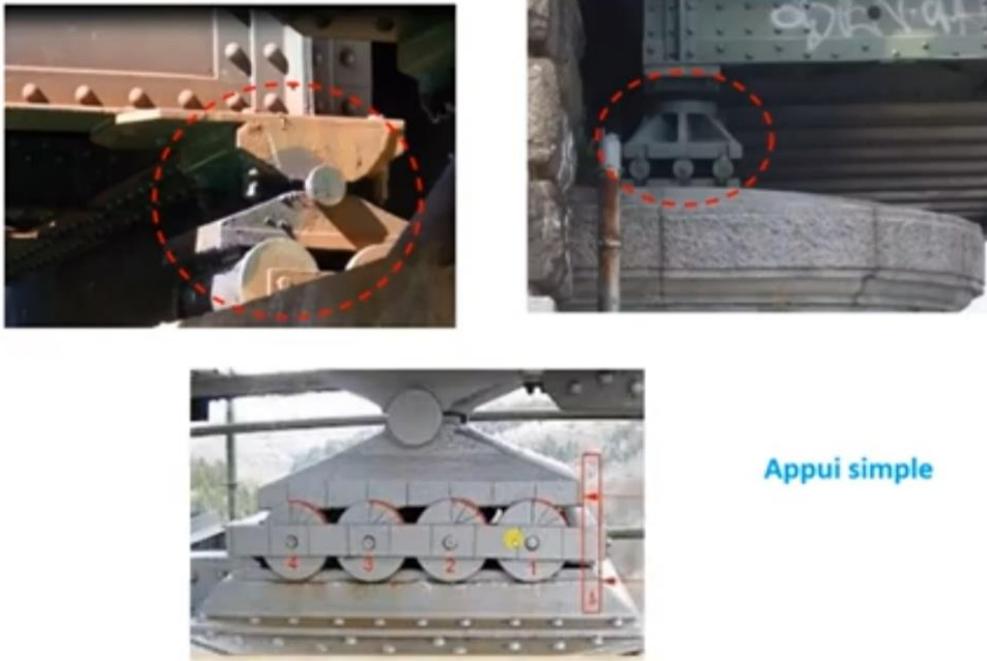
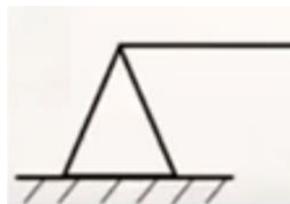


Figure I.1 : Appui simple

● **Appui double :**

est un support qui empêche les mouvements dans les directions verticale et horizontale et permet la rotation.



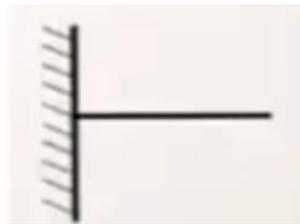


Appui double

Figure I .2 : Appui double

- **Appui encastré :**

C'est interdit tout mouvement de la poutre, que ce soit horizontal, vertical ou en rotation. La poutre est fixée de manière rigide à son support.



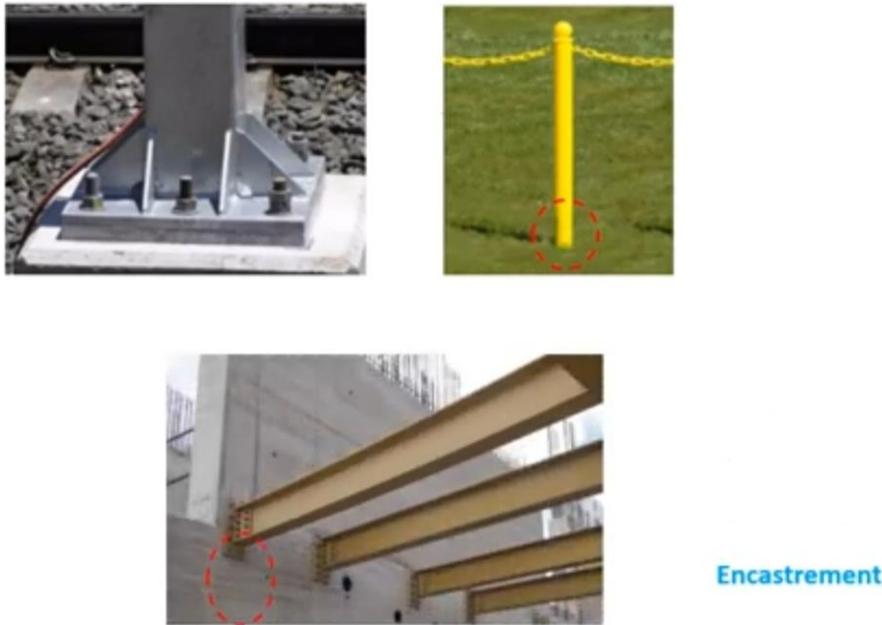


Figure I .3 : Appui encastéré

## I.8. Théorie de poutre d'Euler- Bernoulli :

La théorie des poutres de Bernoulli est utilisée dans de nombreux domaines d'ingénierie, notamment pour la conception de structures en génie civil, en architecture, en génie mécanique et en aéronautique. Elle est essentielle pour comprendre le comportement des ponts, des bâtiments, des avions et de nombreuses autres structures où la flexion des poutres joue un rôle crucial.

### I.8.1. Définition théoroire d'Euler-Bernoulli :

La théorie d'Euler-Bernoulli, également connue sous le nom de théorie classique de la flexion des poutres, est une théorie fondamentale en mécanique des matériaux et des structures utilisée pour analyser et calculer la flexion des poutres et des structures minces . Cette théorie a été développée par les scientifiques Leonhard Euler et Daniel Bernoulli au année 1750 . Elle se concentre sur la relation entre les charges appliquées sur une poutre et les déformations résultantes, en supposant que les sections de la poutre restent planes et perpendiculaires à l'axe moyen après la déformation, et ne prend pas en compte les déformations de cisaillement. [1]

I.8.2. Équation générale des poutres :

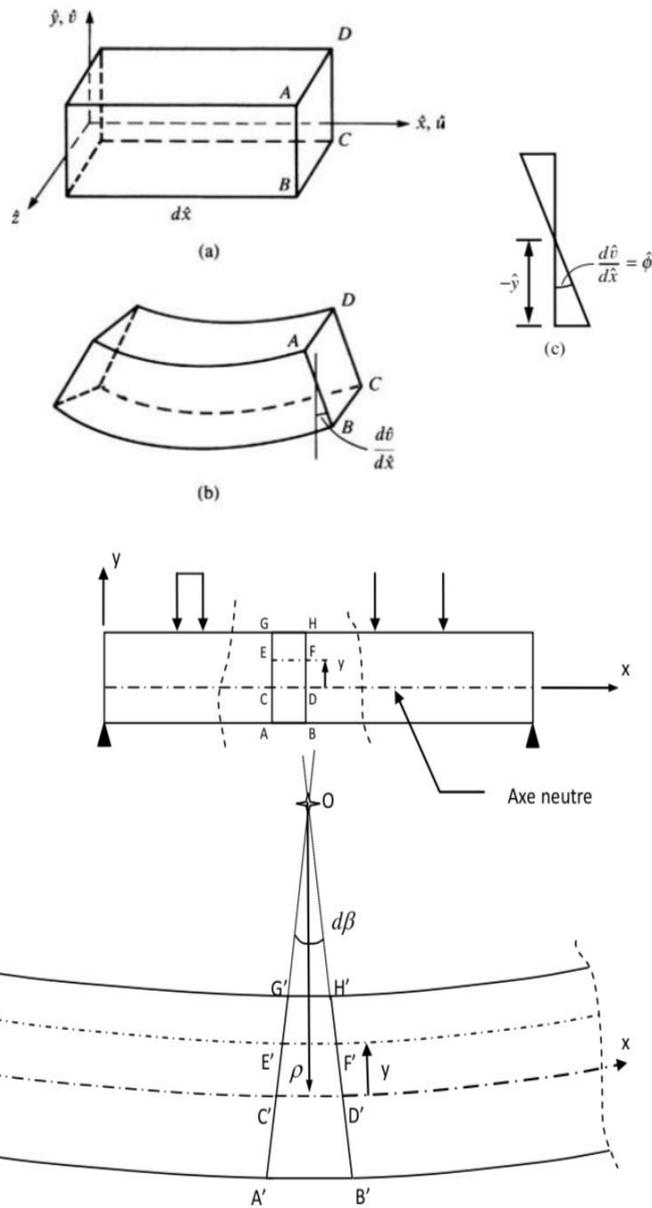


Figure I.4 : Déformation d'un poutre en flexion

Les parties droites des poutres courbes restent droites après déformation (principe de d'Euler-Bernoulli), étude de la déformation longitudinale la section ABGH permet d'établir une relation linéaire entre la déformation longitudinale et le rayon de courbure  $\rho$ . En effet, d'après sa définition la déformation en ordonnée est égale à :

$$\epsilon_{xx} = \frac{E'F' - EF}{EF} \tag{1.1}$$

Comme  $EF = CD$  et  $CD = C'D'$ , on déduit que :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{E' F' - E F}{E F} = \frac{(\rho - y) d\beta - \rho * d\beta}{\rho * d\beta} = -\frac{y}{\rho} \quad (1.2)$$

Enfin et en combinant l'équation d'équilibre de la section à celle liant contrainte et déformation, on retrouve la relation moment-courbure de la théorie des poutre :

$$\left. \begin{array}{l} \int \sigma_{xx} \cdot y \cdot dS - M_Z = 0 \\ \sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = -\frac{E}{\rho} \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow M_Z = -\frac{E}{\rho} \int y^2 \cdot dS \Leftrightarrow -\frac{M_Z}{E I_Z} = \frac{1}{\rho} \quad (1.3)$$

avec  $I_Z = \int_S y^2 * dS$  : moment d'inertie autour de l'axe z (perpendiculaire au plan xy).

De plus et sous l'effet des charges extérieures, le point situé sur l'axe neutre à l'abscisse x subira un déplacement vertical  $V(x)$  et une rotation  $\beta(x)$ . Par ailleurs et d'après la Figure (1.4), on sait que  $dx = \rho \cdot d\beta \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\rho}$  mais également que  $\beta = \frac{dv}{dx}$  ce qui permet de déduire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\beta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.4)$$

En égalisant (1.3) et (1.4), les relations moment-courbure et déformation-courbure deviennent [1]

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_Z}{E I_Z} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.6)$$

Sachant que l'effort tranchant correspond à la dérivée du moment fléchissant  $\left(\frac{dM_Z}{dx} = T_y\right)$  et que celle de l'effort tranchant<sup>1</sup> est équivalente à la charge répartie  $\left(\frac{dT_y}{dx} = -q_y(x)\right)$ , on obtient finalement :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M_Z(x) \quad (1.7)$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = -T_y(x) \quad (1.8)$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = qy(x) \quad (1.9)$$

Les relations (1.7) et (1.9) sont les formes les plus connues de l'équation générale des poutres.

### I.8.3. La relation entre le moment de flexion et la flexion :

Le moment de flexion d'une section transversale est défini comme suite :

$$M = \iiint y \cdot \sigma \, dv = \iiint y^2 \cdot E \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \, dv = E \cdot I \cdot \int \frac{d^2v}{dx^2} \, dx$$

$$M = E \cdot I \cdot \frac{dv^2}{dx^2} \quad (1.9)$$

Alors que  $\iiint dv = \int dx \int dy \int dz = dA \cdot dx$  où  $I$  est le moment d'inertie (ou module d'inertie) de la section par rapport à l'axe  $y$  et  $\frac{d^2v}{dx^2}$  est la courbure de l'axe de poutre.

## I.9. Théorie de poutre de Timochenko

### I.9.1. Introduction à la théorie de poutre de Timochenko :

Bien que la théorie d'Euler-Bernoulli soit très utile, elle présente des limitations, notamment pour les poutres très courtes, les poutres soumises à de grandes déformations, ou lorsque les effets de cisaillement deviennent significatifs. Dans de tels cas, des théories plus avancées comme la théorie des poutres de Timoshenko peuvent être nécessaires.

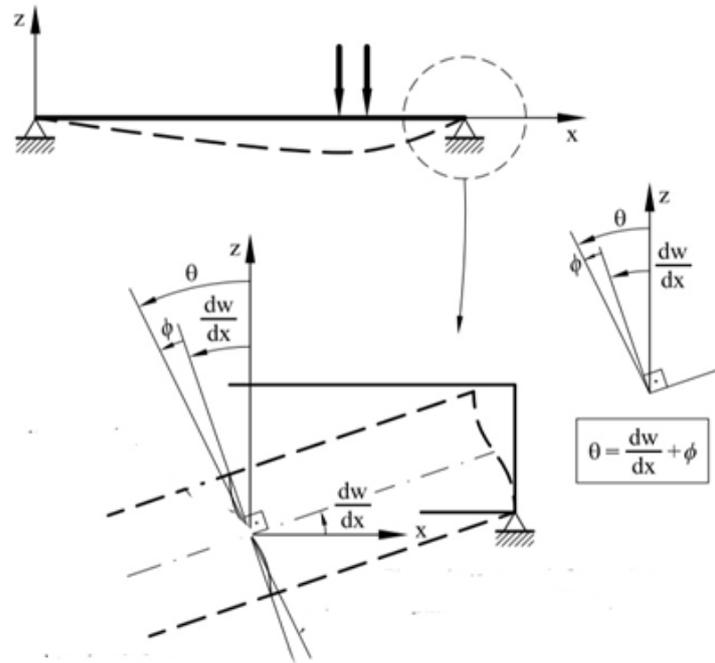
La théorie de poutre de Timoshenko, également appelée théorie des poutres à deux champs, a été développée par le mathématicien ukrainien Stephen Timoshenko. Cette théorie est utilisée pour modéliser le comportement des poutres en prenant en compte la flexion, la torsion et le cisaillement. Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli qui ne prend en compte que la flexion, la théorie de poutre de Timoshenko est plus précise dans la prise en compte de la déformation due aux forces de cisaillement.

### I.9.2. Théorie de poutre plane de Timochenko :

#### --Hypothèse de base--

La théorie du poutre plane de Timochinko partage les hypothèse 1 et 2 des théories conventionnelles d'Euler-Bernoulli. Cpendant, l'hypothèse 3 pour la cinématique normale s'écrit

désormais comme suite : « section transversales plane et perpendiculaire l'axe moyen de la poutre avant déformation restent plans mais pas nécessairement perpendiculaire à l'axe moyen après déformation ». Cette hypothèse représente une bonne approximation de la réalité des poutres à épaisseur modéré. Comme l'élançement de la poutre (rapport longueur/épaisseur) diminue, les sections transversales ne restent pas planes. L'hypothèse de Timochenko équivaut à supposer une moyenne rotation pour la section transversale déformée qui est maintenue plane, Figure 1.5.



**Figure I.5 :** Théorie du poutre de Timochenko. Rotation de la section transversale

La rotation de la section transversale est déduite de la Figure. 1.5 comme :

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi \quad (1.10)$$

On remarque que la rotation ne coïncide pas avec la tangente, comme c'était le cas dans la théorie d'Euler-Bernoulli, mais c'est plutôt la tangente de l'axe de la poutre  $\frac{dw}{dx}$ , qui est une rotation supplémentaire  $\phi$  due à la distorsion de la section transversale.

#### ●Champ des déplacements

Le champ de déplacements est donné par :

$$u(x) = -y \cdot \frac{d\theta}{dx} + \phi$$

$$\theta(x) = \theta(x) \quad (1.11)$$

Où

-  $\frac{dw}{dx}$ : est la pente de l'axe de la poutre.

-  $\phi$  : La déformation de cisaillement transversal.

• **Champs des déformation et cisaillement :**

À partir du champ de déformation d'un solide on trouve :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (1.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (1.13)$$

Par conséquent, la théorie de Timochenko introduit une déformation de cisaillement transversale

$\gamma_{xy}$ , dont la valeur absolue coïncide avec la rotation  $\phi$ .

Les contraintes axiales et de cisaillement  $\sigma_x$  et  $\gamma_{xy}$  en un point de la poutre sont exprimées par:

$$\sigma_x = \varepsilon \cdot E = -yE \frac{d\theta}{dx} \quad (1.14)$$

$E$  : est le Module de Young

tandis que la contrainte de cisaillement transversale est obtenue sous la forme

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad (1.15)$$

G: étant le module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.16)$$

• **Contraintes résultantes et déformations généralisées :**

Le moment de flexion  $M$  et l'effort de cisaillement  $T$  sont définis :

$$M = - \iint y \cdot \sigma_x dA$$

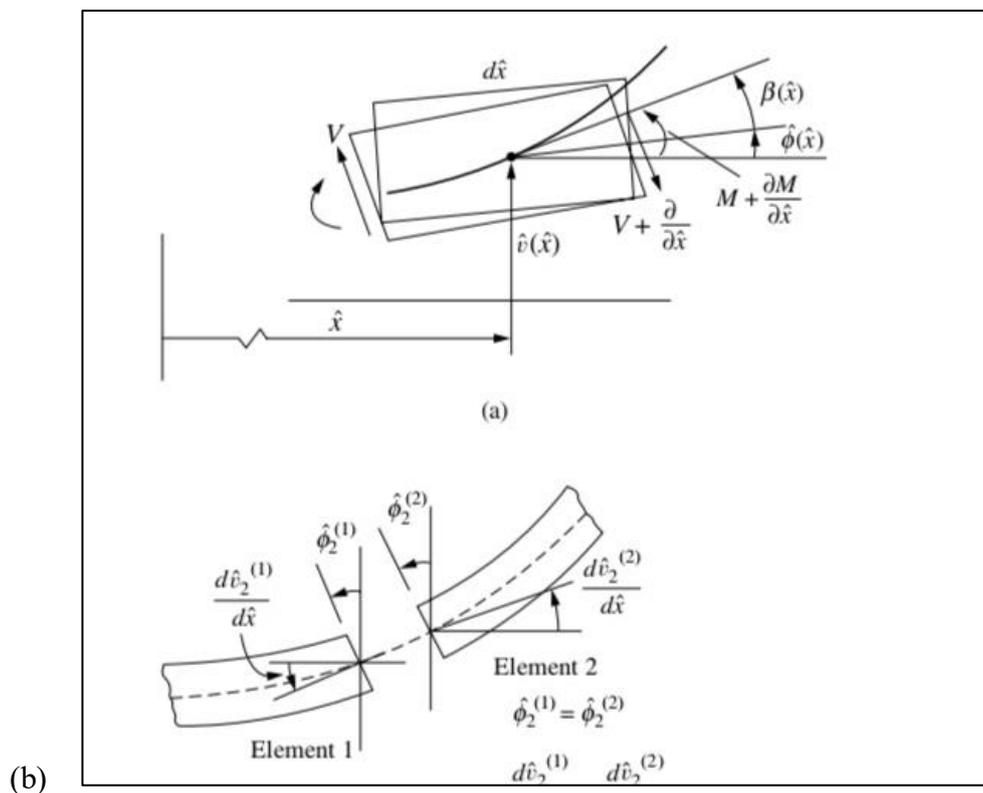
$$V = \iint \tau_{xy} dA \quad (1.17)$$

Substitution  $\sigma_x$  et  $\gamma_{xy}$

$$M = E \cdot I \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$V = G \cdot A \cdot \gamma_{xy} \quad (1.18)$$

La théorie de la déformation par cisaillement de la poutre est dérivée comme suit. Au lieu de supposer que les sections planes restent planes après flexion, comme indiqué précédemment, la déformation par cisaillement (déformation due à la force de cisaillement  $V$ ) est maintenant incluse. En se référant , nous considérons un segment de poutre de longueur différentielle  $dx$  , où la section transversale est supposée rester plane mais n'est plus perpendiculaire à l'axe neutre.



**Figure I.6 :** Élément de la poutre Timoshenko montrant une déformation par cisaillement. Les sections ne sont plus perpendiculaires à la ligne de l'axe neutre

La rotation due au moment de flexion et à la force de cisaillement transverse sont respectivement notées  $\frac{dv(x)}{dx}$  et  $\phi(x)$

Nous supposons, comme d'habitude, que la déformation linéaire et la déformation angulaire sont petites.

La relation entre le moment de flexion et la déformation en flexion (courbure) est donnée par

$$M = EI \frac{d\phi}{dx} \quad (1.19)$$

et la relation entre la force de cisaillement et la déformation par cisaillement (rotation due au cisaillement) et (déformation de cisaillement) est donnée par:

$$V(x) = K_z AG \gamma_{xy}(x) \quad (1.20)$$

Nous remplaçons les expressions pour les forces et les moments dans les équations originales pour obtenir les équations différentielles fondamentales qui décrivent la poutre de Timoshenko comme suit:

$$\frac{d}{dx} \left[ K_z AG \left( \frac{dv}{dx} - \phi(x) \right) \right] = -w \quad (1.21)$$

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\phi}{dx} \right) - K_z AG \left( \frac{dv}{dx} - \phi(x) \right) = 0 \quad (1.22)$$

### I.10. Coefficient de correction de cisaillement transversal

Le coefficient de correction de cisaillement transversal, est utilisé en mécanique des structures, plus précisément dans le contexte des poutres et des plaques. Ce coefficient intervient dans la théorie des poutres épaisses (ou théorie de Timoshenko) et permet de corriger l'effet de cisaillement transverse qui n'est pas pris en compte dans la théorie classique des poutres (théorie de Bernoulli-Euler).

La théorie de Timoshenko prend en compte la déformation due au cisaillement transverse, en plus de la déformation longitudinale due à la flexion. Le coefficient de correction de cisaillement transverse est introduit pour ajuster la rigidité en cisaillement effective, car l'hypothèse de déformation uniforme en cisaillement n'est pas réaliste.

Sa valeur dépend de la géométrie de la section transversale de la poutre. Par exemple, pour une poutre rectangulaire, est généralement pris comme environ 5/6. Pour des sections plus complexes, des calculs ou des tables spécifiques sont utilisés pour déterminer la valeur appropriée .

Le facteur de correction du cisaillement transversal est crucial pour une modélisation plus précise des poutres épaisses, des poutres courtes ou des matériaux composites, car les effets de cisaillement ne peuvent pas être négligés pour améliorer la précision des modèles de poutres en flexion, notamment dans des contextes de cisaillement. les effets sont importants. Il permet de modifier la rigidité en cisaillement pour mieux représenter le comportement réel des structures.

### I.10.1. Equation du Coefficient de correction de cisailment transversal :

$$K_z = \frac{Q^2}{GA} \left[ \iint \frac{\tau_{xy}}{G} \right]^{-1} dA. \quad (1.23)$$

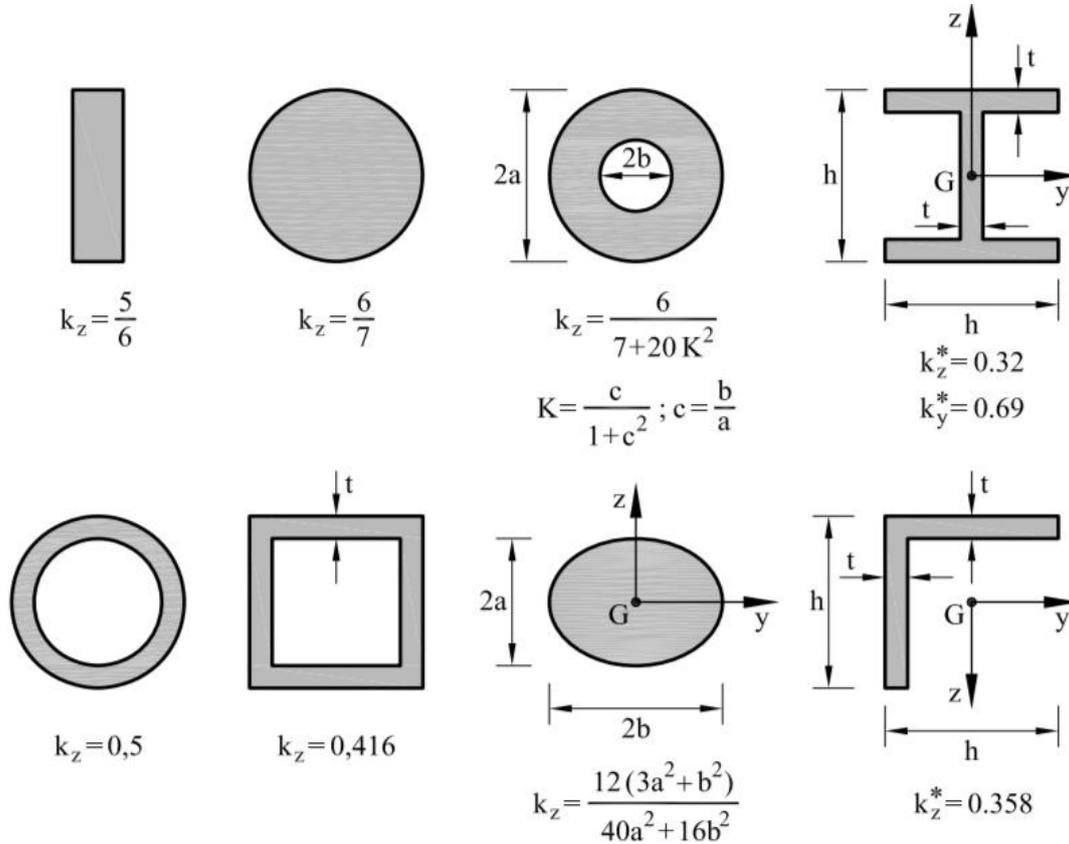


Figure I.7 : Paramètre de correction de cisailment  $k_z$  pour certaines sections.

### I.11. Théorie d'ordre élevé :

Dans cette théorie, la distribution des champs de déplacement est non linéaire en fonction de l'épaisseur de la poutre. Elle offre une précision supérieure à celle de la théorie du premier ordre en introduisant une fonction qui prend en compte le phénomène de "gauchissement". Ce phénomène se manifeste lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité, Figure. 1.8. La fonction  $\psi(z)$  représente le gauchissement, tandis que sa dérivée  $\psi'(z)$  exprime le cisailment.

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ \theta(x, z) = \theta^0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{d\theta}{dx} = -w^0(x) + \psi'(z) \gamma_{xz}(x) + w^0(x) \quad (1.25)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition selon l'expression de la fonction de gauchissement  $\psi(z)$ .

- Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CLBT):

$$\psi(z) = 0 \quad (1.26)$$

Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT)

$$\psi(z) = z \quad (1.27)$$

- Le modèle d'ordre élevé, avec l'approche de [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984]

$$\psi(z) = z(1 - (4z^2)/(3h^2)) \quad (1.28)$$

- Le modèle exponentiel proposé par [Afaq et al, 2003] :

$$\psi(z) = z e^{-z^2/\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (1.29)$$

# **Chapitre II : La Méthode des éléments finis**

## II.1. INTRODUCTION :

Les éléments finis sont apparus au années 60, alors qu'il était urgent de trouver des méthodes permettant de résoudre des problèmes de calcul et de mathématiques complexes, notamment dans les domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'astronomie.

Les éléments finis ont évolué au fil du temps avec les progrès des mathématiques et de l'informatique. Il s'est ensuite développé pour inclure des domaines plus larges tels que la conception technique et la recherche scientifique, et est devenu partie intégrante de nombreuses applications technologiques et techniques telles que la conception de structures, l'analyse du transfert de chaleur, les prévisions météorologiques, etc.

Les outils et logiciels informatiques se sont améliorés pour faciliter l'utilisation d'éléments finis, conduisant à des applications plus larges et plus complexes, telles que la modélisation et la simulation dans de multiples domaines tels que le génie civil et mécanique, la thermodynamique, la dynamique des fluides, etc.[8]

## II.2. Un bref historique du MEF :

Le terme Méthode des éléments finis a été utilisé pour la première fois en 1920, lorsque Ray Clough l'a utilisé dans un article de recherche sur les problèmes d'élasticité.

En fait, il existe trois réponses aux questions « Quelle est l'origine du MEF ? » et « À quelle période ? » Ces réponses indiquent un physicien, un mathématicien, ou un ingénieur, Le tableau 2.1 présente l'évolution chronologique de la méthode.

Une méthodologie similaire à la méthode des éléments finis, basée sur le développement continu de la fonction d'approximation d'un ordre donné définie pour les régions pour la première fois, les triangles ont été proposés par Courant en 1920 dans le problème de torsion de *St. Venant*, Turner a introduit la méthode actuellement reconnue des éléments finis.

*Clough, Martin et top* ont publié « Analyse de la rigidité et de la déflexion des structures complexes » dans le journal of the Aeronautique Sciences en 1926.

L'article est une représentation systématique de la méthode de déplacement. Il s'agit d'une contribution cruciale à la résolution de problèmes de contraintes planes tels que ceux qui existent appelés « triangulaires » dont les propriétés incluent établi à l'aide des équations de la théorie de (pour la plupart numériques) requis par le MEF, ce qui a conduit à un intérêt pratique accru de la méthode.

Parallèlement aux progrès rapides de la technologie informatique, l'application du MEF a également progressé de manière significative.[8]

**Tableau II .1 :** Évolution chronologique de la méthode

11241 <sup>(1)</sup>	Hrenikoff : Division d'un problème d'élasticité au domaine continue, en un certain nombre d'élément.
11243 <sup>(2)</sup>	Courant : méthodes variationnelles
11256 <sup>(3)</sup>	Turner, Clough, Martin Topp : Méthode de Rigidité Directe
11260 <sup>(4)</sup>	Clough : Finit Élément, problème plans (le terme Élément Fini utilisé pour la 1 <sup>ère</sup> fois)
11270(années 70)	Application sur gros ordinateurs
11280(années 80)	Application sur micro-ordinateurs
112120(années 120)	Possibilité d'analyse de systèmes de structures complexe

### II.3.Objectifs de la MEF :

L'objectif de l'utilisation des éléments finis en ingénierie des structures est de calculer l'effet des forces et des charges sur diverses structures. Ces éléments permettent de représenter les structures complexes de manière simplifiée. Voici les étapes pour utiliser les éléments finis :

#### ●Division de la structure :

La structure est divisée en petits éléments, tels que des éléments linéaires (tels que poutres et des colonnes) ou des éléments surfaciques (tels que des panneaux) ou même des éléments de volume.

#### ●Déterminer les propriétés :

Les propriétés de chaque élément sont définies, telles que la section transversal, les constantes d'élasticité... Etc.

- **Analyse des charges :**

Les charges sont déterminées et appliquées à la structure, telles que les forces, déplacement et contraintes qui lui sont appliquées.

- **Application de conditions aux limites :**

Les conditions aux limites, telles que le support, sont définies et appliquées pour déterminer la réponse de la structure aux charges appliquées.

- **Résolution d'équations :**

Les éléments finis sont utilisés pour résoudre des équations mathématiques qui décrivent le comportement de la structure et sa réponse aux différentes charges.

- **Analyse des résultats :**

Les résultats extraits sont analysés pour comprendre le comportement de la structure et estimer ses performances sous différentes charges.

En résumé, les éléments finis constituent un moyen puissant d'analyser des structures complexes et d'étudier leur comportement dans diverses condition et charges.[8]

## **II.4.Pourquoi avoir choisi MEF ?**

Les méthodes de calcul et le concept d'analyse sont basés sur le calcul manuel, l'expérience ou le calcul automatisé et la simulation informatique.

La méthode de simulation informatique la plus populaire parmi les ingénieurs est appelée MEF, Il s'agit d'une technique à prédominance numérique dans laquelle les équations gouvernantes (systèmes d'équations différentielles) sont représentées sous forme matricielle, ce qui convient très bien aux solveurs informatiques automatiques.

Il est inclus dans toutes les applications logicielles commerciales pour calculer les structures d'interface utilisateur graphique (GUI).

## **II.5.Idée de base de la méthode des éléments finis :**

La méthode des éléments finis est une technique analytique utilisée en génie des structures et pour résoudre des problèmes liés à l'analyse globale des structures. La méthode est basée sur la

division de la structure en petits éléments de taille limitée, puis sur le calcul des effets et des interactions au sein de chaque élément et sur les limites entre les éléments. Cette approche permet d'estimer le comportement global de la structure et d'analyser les effets qui peuvent lui être appliqués du fait de forces extérieures ou de conditions aux limites.

## II.6. Domaines d'application du MEF :

Les trois domaines d'application principaux du MEF sont :

- **Problèmes d'équilibre et de statistiques** : où le comportement du système ne varie pas avec le temps.
- **Problèmes de dynamique et de stabilité** : ce sont des extensions de problèmes d'équilibre où sont déterminées des valeurs spécifiques ou critiques de paramètres spécifiques.
- **Problèmes de propagation** : ce sont des problèmes où des phénomènes dont le comportement dépend d'une facture temporelle. [9]

## II.7. Avantages et inconvénients de la MEF :

Dans le domaine du génie civil, les éléments finis est une méthode d'analyse utilisée pour étudier le comportement de structures et de systèmes d'ingénierie complexes.

-- **Les avantages des éléments finis dans ce domaine comprennent :**

- **Assurer la précision :**

Les éléments finis permettent d'analyser les structures peut être divisée en petits éléments pour lesquels les forces et les déformations sont spécifiquement calculées.

- **Economisez l'efficacité des calculs :**

Les éléments finis peuvent être utilisés pour calculer efficacement les effets de charge et les déformations dans des structures complexes, économisant ainsi du temps et des efforts dans le processus d'analyse.

- **Fournir des informations détaillées sur les déformations :**

Les éléments finis peuvent fournir des informations détaillées sur les déformations des structures, ce qui permet de comprendre leur comportement et d'améliorer leur conception.

- **Permettre l'analyse de structures complexes :**

Les éléments finis permettent l'analyse de structures complexes qui sont traditionnellement difficiles à analyser, ce qui aide à concevoir des structures plus efficaces et plus sûres.

- **Offre la possibilité d'améliorer la conception :**

En analysant les structures à l'aide d'éléments finis, la conception peut être continuellement améliorée en fournissant des informations sur les performances, les déformations et les contraintes.[10]

-- **Les inconvénients des éléments finis dans ce domaine comprennent :**

- **Dépendance des résultats sur le maillage :**

Les résultats peuvent être sensibles à la division du maillage, ce qui nécessite une attention particulière à l'analyse du maillage et au choix de la taille des éléments.

- **Coût en temps et en effort :**

La préparation et l'analyse d'un modèle peuvent nécessiter beaucoup de temps et d'efforts, surtout pour les systèmes complexes.

- **Estimation des erreurs :**

Il peut être difficile d'estimer l'exactitude des résultats, surtout dans des conditions où le modèle est très complexe.

- **Sensibilité aux conditions aux limites :**

Les conditions imposées aux limites peuvent avoir un impact significatif sur les résultats.

- **Besoin de vérification des résultats :**

Les résultats obtenus à partir de l'analyse par éléments finis peuvent nécessiter une vérification par des tests expérimentaux.

En résumé, les éléments finis du génie civil fournissent des outils puissants pour analyser et concevoir des structures de manière précise et efficace, aidant ainsi à développer des projets d'ingénierie sûrs et durables.

## II.8.Principe de la méthode des éléments finis:

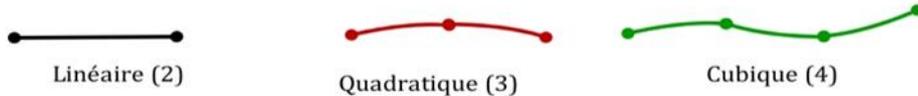
La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis, ayant des dimensions non infinitésimales. Dans chaque élément, la solution recherchée est approximée par des polynômes simples, puis le domaine est reconstitué en assemblant tous les éléments.[11]

- **Étape 1** : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.
- **Étape 2** : Division du domaine en éléments finis.
- **Étape 3** : Approximation de la solution dans chaque élément.
- **Étape 4** : Assemblage des éléments et application des conditions aux limites.
- **Étape 5** : Résolution du système global.

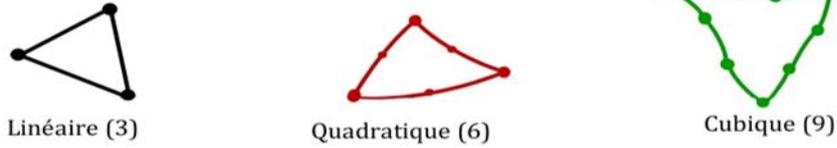
## II.9.Formes classiques d'éléments :

Il existe de nombreuses formes d'éléments classique qui correspondent à des sphères à une, deux ou trois dimensions, Chaque sorte d'élément est identifiée par un nom qui précise sa forme et la quantité d nodules géométrique qui composent l'élément.

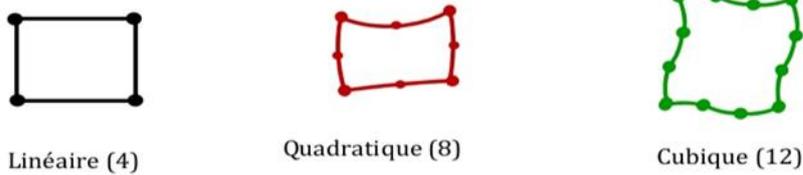
• **Eléments à une dimension**



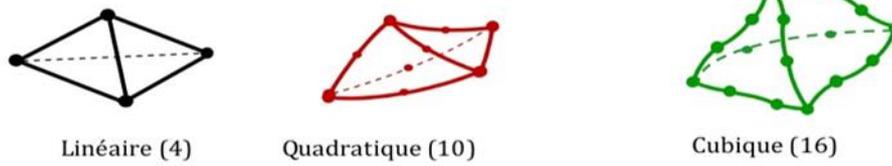
• **Eléments à deux dimensions triangulaires**



• **Eléments à deux dimensions quadrangulaires**



• **Eléments à trois dimensions tétraédriques**



• **Eléments à trois dimensions hexaédriques (briques)**

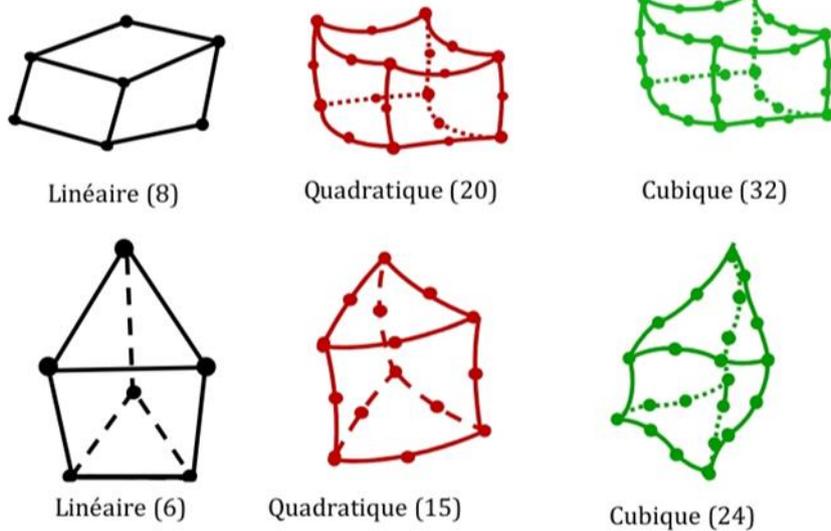


Figure II .1 : Formes classiques d'éléments

## II.10. Qu'est-ce qu'un élément fini ?

Il existe plusieurs définitions d'un élément fini utilisées dans divers contextes : la définition mathématique générale semble peu en rapport avec ce que l'on peut trouver dans la documentation des logiciels. Sur ce site, nous nous limitons aux éléments "courants" utilisés dans les logiciels généralistes et considérons, d'un point de vue pratique, qu'un tel élément est défini par quatre aspects :

1. Un domaine géométrique dont la dimension dépend de la théorie considérée, tel qu'un polyèdre, un polygone ou un segment ;
2. Un ensemble de points situés dans ce domaine ou sur sa bordure, nommés nœuds ;
3. Un ensemble de fonctions définies sur le domaine et à valeurs réelles, nommées fonctions de base (scalaires), chacune associée à un nœud ;
4. Une hypothèse cinématique qui exprime une grandeur physique (comme le champ de déplacement) à l'intérieur du domaine sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions de base, les coefficients étant arbitraires. Chaque terme de cette combinaison linéaire est appelé degré de liberté.[8]

## II.11. Les éléments poutres :

De nombreux logiciels proposent des éléments poutres, qui sont très appréciés en formation car la théorie des poutres « non discrétisée » conduit généralement à des solutions continues calculables à la main. Cela permet de mettre en évidence facilement l'effet de la discrétisation sur le résultat. Selon la théorie des poutres, ces éléments sont linéiques, la pièce étant modélisée par une ligne (droite ou courbe).

Les éléments poutres les plus courants ont une géométrie de référence très simple : un segment de droite de longueur unitaire avec un nœud à chaque extrémité Figure. II.2 et, parfois, un troisième nœud au milieu Figure II.2 Chaque nœud possède généralement six degrés de liberté, correspondant aux six déplacements généralisés de la théorie des poutres (c'est-à-dire trois translations et trois rotations). Certains éléments sont limités à une cinématique plane et ne possèdent donc que deux translations et une rotation par nœud.

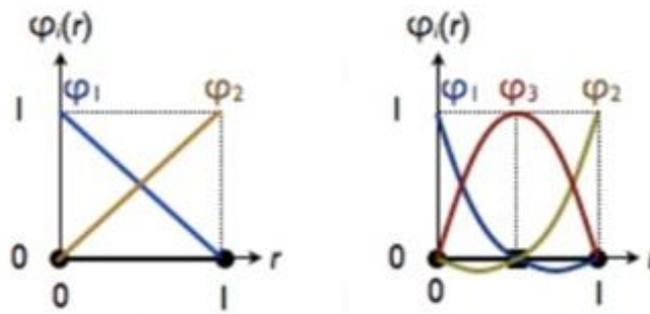


**Figure II .2 :** Géométries de référence de deux types d'éléments poutres.

Une particularité des éléments de poutres est qu'ils possèdent des fonctions de base différentes pour chaque degré de liberté. Cela est dû au fait qu'en théorie des poutres, on distingue plusieurs sollicitations élémentaires qui sont indépendantes les unes des autres. Les degrés de liberté axiaux, correspondant à la traction/compression et à la torsion, utilisent la plupart du temps des fonctions linéaires ou quadratiques 1D classiques. En revanche, les fonctions de base utilisées pour la flexion dépendent de la théorie employée.[10]

## II.12. Fonctions de base en traction/compression et en torsion :

Les fonctions de base de traction/compression et de torsion des éléments de poutre sont généralement classées en deux catégories : (a) sans nœud intermédiaire et (b) avec nœud intermédiaire.



**Figure II .3 :** Fonctions de base associées au traction/compression et à la torsion des éléments de poutre

## II.13. Fonctions de base en flexion :

Les fonctions de base associées aux degrés de liberté liés à la flexion (déplacements et rotations perpendiculaires à la ligne moyenne) dépendent de la théorie utilisée. De manière générale, il existe deux approches principales :

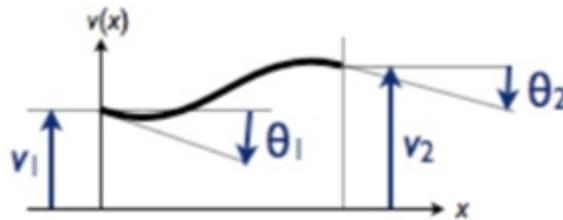
1. La théorie de Timoshenko suppose que les sections droites ont un mouvement de corps rigide.
2. La théorie d'Euler-Bernoulli suppose également un mouvement de corps rigide des sections droites, mais elle néglige les déformations de cisaillement causées par l'effort tranchant. Cette théorie est donc généralement applicable aux poutres "très minces", où l'épaisseur dans la direction de la flexion est très petite par rapport à la longueur de la poutre.

Ces deux approches influencent le choix des éléments de flexion utilisés en analyse structurelle.

### II.14. Les éléments d'Euler-Bernoulli (sans déformations de cisaillement) :

Dans la théorie d'Euler-Bernoulli (fondement de la résistance des matériaux classique), les sections droites demeurent perpendiculaires à la ligne médiane et l'angle de flexion  $\theta$  est toujours lié à la dérivée de la flèche  $\partial v/\partial x$  (pour de petites perturbations,  $\theta = \partial v/\partial x$ ). Cette relation permet d'éliminer  $\theta$  des équations. Ainsi, l'hypothèse cinématique se concentre uniquement sur la flèche, sans représenter l'angle de flexion de manière distincte. [2]

Le problème réside dans le besoin que la déformation soit non seulement continue, mais aussi que sa dérivée le soit (selon la théorie, tous les déplacements doivent être continus). Les fonctions classiques vues jusqu'ici génèrent des dérivées discontinues d'un élément à l'autre, ce qui n'est pas approprié. Les éléments d'Euler-Bernoulli utilisent donc des fonctions spécifiques appelées fonctions d'Hermite. Ces dernières permettent d'interpoler la déformation à partir de ses valeurs aux nœuds ainsi que des valeurs de sa dérivée aux nœuds, assurant ainsi une déformation continue et une dérivée continue.



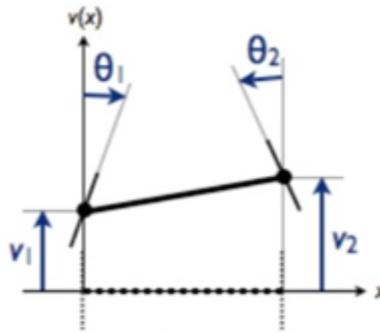
**Figure II .4 :** Représentation de la déformée d'une poutre d'Euler-Bernoulli à partir des déplacements et des rotations des nœuds

Les fonctions d'Hermite sont des polynômes de degré 3, donc les éléments d'Euler-Bernoulli sont cubiques en flexion. Ces éléments ne présentent jamais de nœud au milieu, ce qui les rend affines en traction/compression et en torsion, contrairement aux éléments de Timoshenko qui peuvent être affines ou quadratiques.

En traction, compression ou torsion, un élément d'Euler-Bernoulli soumis uniquement à des forces ou moments aux extrémités se comporte comme une poutre continue d'Euler-Bernoulli de caractéristiques similaires, sous les mêmes hypothèses (poutre droite de section constante, comportement homogène). En pratique, les éléments d'Euler-Bernoulli permettent de modéliser des comportements complexes tels que la flexion, avec peu de degrés de liberté, à moindre coût par rapport aux éléments volumiques. Ils sont ainsi considérés très performants. Cependant, pour des poutres très minces en flexion, il est préférable d'utiliser ces éléments plutôt que des éléments de Timoshenko pour obtenir un meilleur rapport précision/coût tout en évitant le verrouillage. Pour des poutres "épaisses", où l'hypothèse d'Euler-Bernoulli n'est pas valide, ces éléments peuvent conduire à des résultats non pertinents.

### II.15. Les éléments de Timoshenko (avec déformations de cisaillement) :

Dans la théorie de Timoshenko, le déplacement transversal  $v(x)$  (également appelé flèche) et l'angle de flexion  $\theta$  sont considérés comme indépendants. La plupart des éléments de Timoshenko représentent ces deux grandeurs de manière indépendante en utilisant des fonctions de base affines ou quadratiques, similaires à celles utilisées pour la traction/compression et la torsion. La cinématique d'un tel élément est illustrée sur la Figure.II.5.



**Figure II .5 :** Représentation de la déformée d'une poutre de Timoshenko à partir des déplacements et des rotations des nœuds

En flexion, contrairement à la traction/compression et à la torsion, les efforts internes varient le long de la poutre. Pour représenter ces variations, des maillages relativement fins peuvent être nécessaires. Un élément de Timoshenko ne correspond généralement pas à une poutre Timoshenko continue, surtout pour les éléments du premier ordre qui produisent des efforts constants par élément, similaires aux triangles du premier ordre qui génèrent des contraintes constantes par élément.[2]

### II.16. Théorèmes de l'énergie :

Soit un corps solide déformable Figure II.6 dont la géométrie définit un volume (domaine)  $V$  et une surface extérieure  $S$  . Sur ce corps agissent des forces de volume  $b_i$  et des forces de surface  $f_i$  .

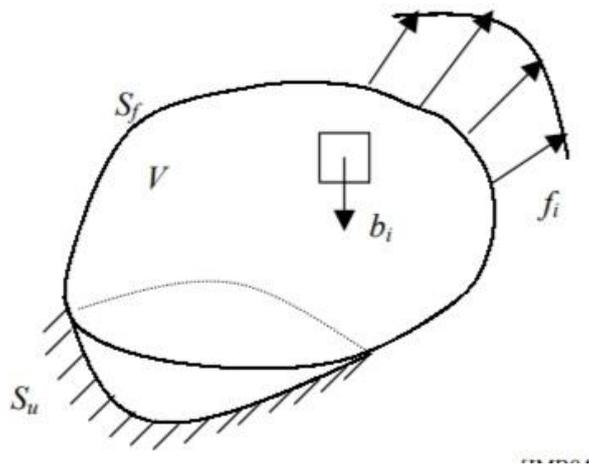


Figure II .6 : Corps solide déformable

Nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, ce qui implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique ou surfacique dans le cas tridimensionnel, nous adoptons la notation indicielle, ce qui permet une exposition théorique rigoureuse et concise.

La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leurs relations. Le champ de déplacement, noté :

### II.16.1. Les constraint:

Utilisation de la notation matricielle est essentielle pour présenter des méthodes d'éléments finis analyse des structures.

La formulation matricielle pratique pour la mécanique des structures nécessite une représentation matricielle simple des tenseurs contrainte-déformation d'ordre 2, où l'état de contrainte en un point d'un solide élastique est représenté par une matrice de composants du tenseur de contrainte.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad / \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Cette matrice étant symétrique

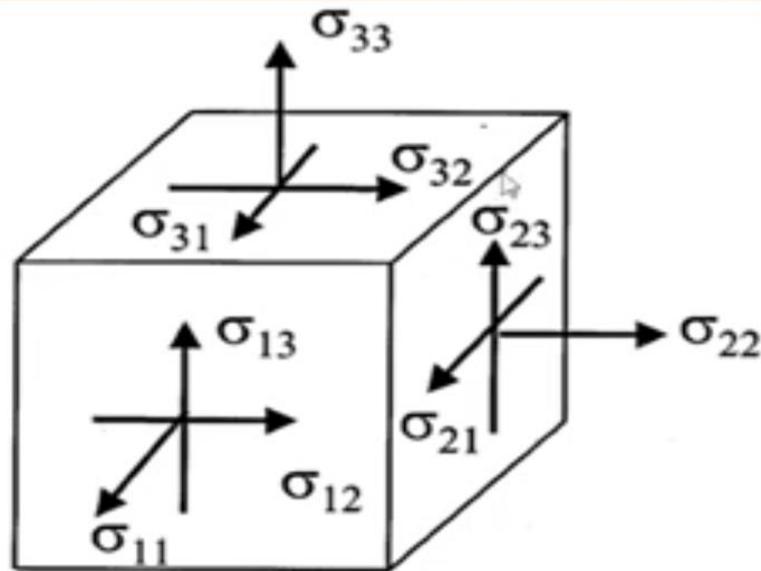


Figure II .7 : les contraintes

## II.16.2. Les déformations:

### • Notion de déformation

Lorsque des forces extérieures sont appliquées à un solide déformable, elles provoquent un mouvement en chacun points de sa géométrie qui peut être divisé en trois phases distinctes: une translation d'ensemble (mouvement de corps rigide en translation), une rotation d'ensemble (mouvement de corps rigide en rotation) et enfin une déformation pure. La déformation qui correspond à un mouvement relatif par rapport à un référentiel donné, peut suivre plusieurs hypothèses comme celles des petites ou grandes déformations mais également être associée à des petites ou grands déplacements. Considérant le cas le plus courant, seules les hypothèses de petites déformations et petits déplacements seront développées.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (2.2)$$

### • Déplacements

Pour être divisé le mouvement d'un point de  $O$  à  $O'$  caractérisé par le vecteur  $\vec{q}$  dans le système  $X Y Z$  en 3 composantes  $u, v, w$  qui représentent les mouvements de ce point sur les axes de référence, à savoir :

$$\vec{q} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k} \quad (2.3)$$

Nous définissons également la norme de déplacement comme:

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (2.4)$$

Ces déplacements  $u, v, w$  sont généralement des fonctions de  $x$  pour les poutres, de  $x$  et  $y$  pour les plaques et coques, de  $x, y$  et  $z$  pour les solides.

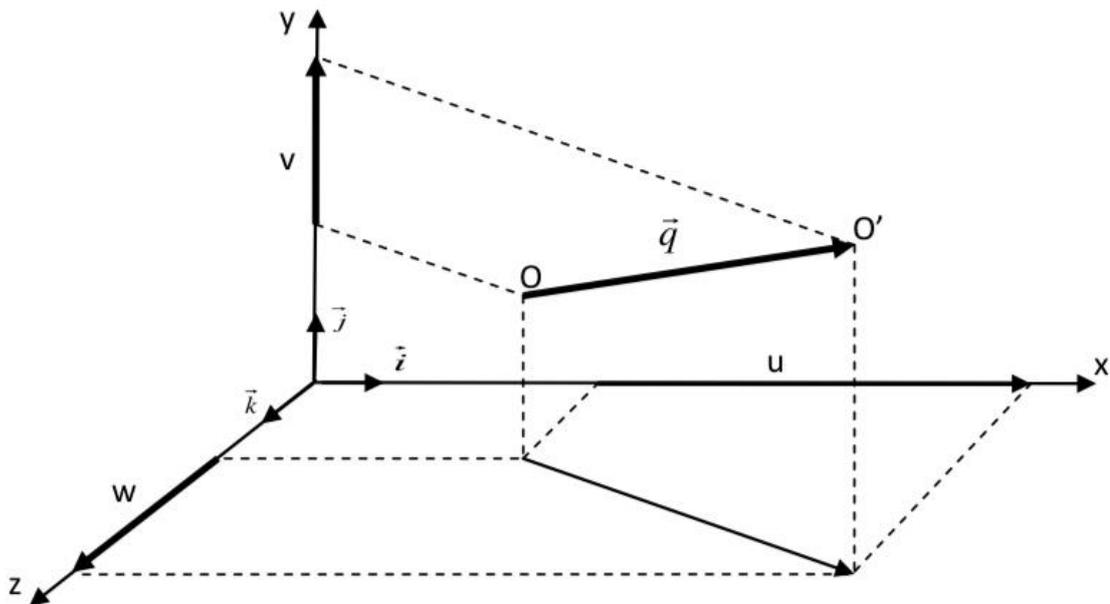


Figure II .8 : Déplacement d'un point.

### II.16.3.Relations entre déplacements et déformations

En considérant d'abord le niveau de déformation dans le plan XOY, La déformation normale et la déformation angulaire être obtenues en supposant ce qui suit:

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - B'A'D' \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.6)$$

La généralisation de cette approche bidimensionnelle aux deux autres plans permettra d'obtenir :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.7)$$

D'où l'expression générale des composantes du vecteur des déformations:

$$\{\varepsilon\}^T = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \} \quad (2.8)$$

(12.7) peut également être exprimé sous forme matricielle caractérisée par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

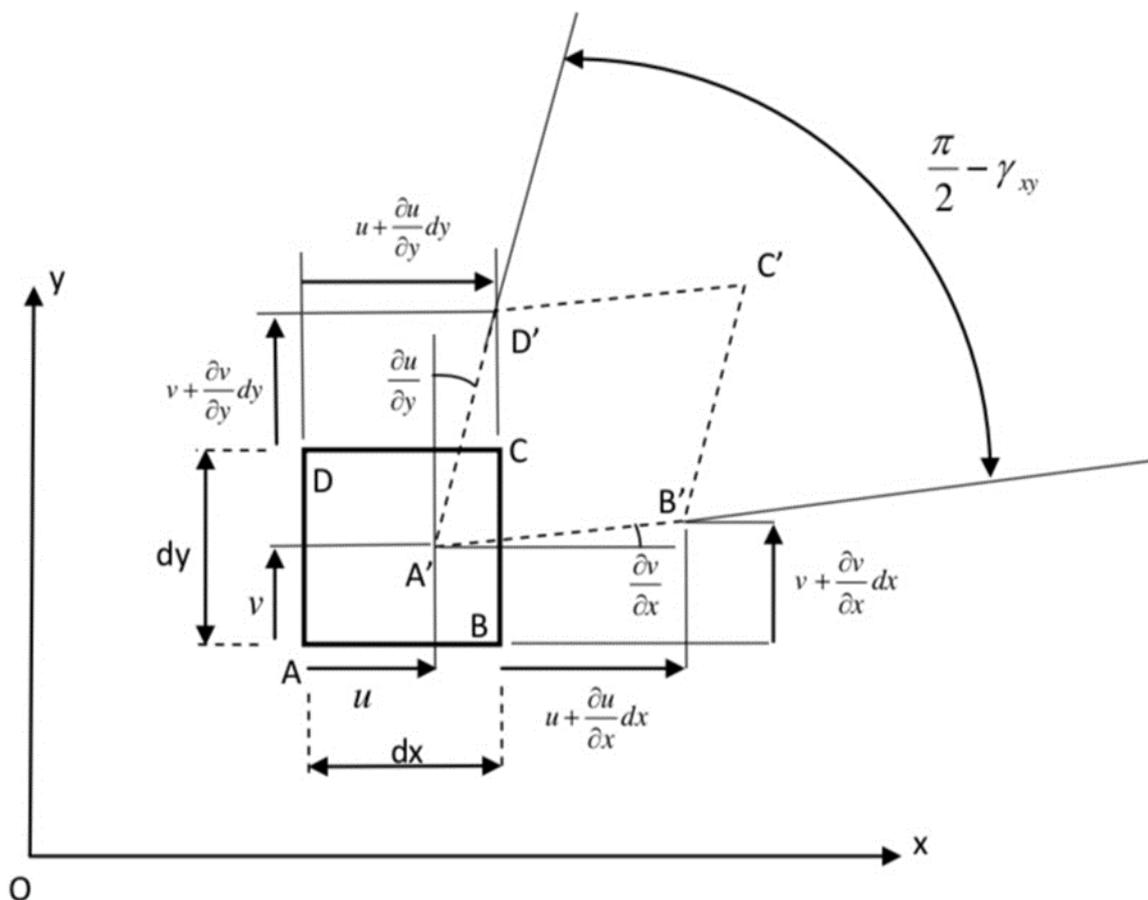


Figure II .9 : Déformations planes.

### II.16.4. Relation entre contraintes et déformations :

- Essai de traction pure:

En considérant une barre de longueur ( $L$ ) et de section ( $S$ ), la contrainte normale résultant de l'action de la force ( $F$ ) à son extrémité  $\sigma_x = \frac{F}{S}$  est constante tout le long de la barre. Sa déformation suivant ( $x$ ) peut être calculée grâce à la relation (12.5) qui est :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.10)$$

En faisant varier ( $F$ ), l'évolution de la contrainte normale en fonction de la déformation axiale, pour un matériau isotrope, peut-être, dans le cas d'un acier doux, schématisée sous la forme suivante :

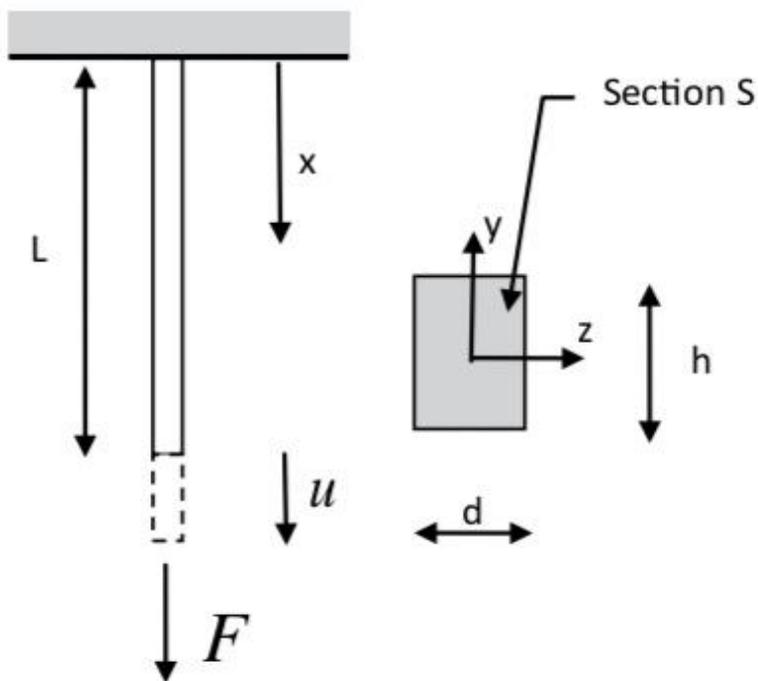
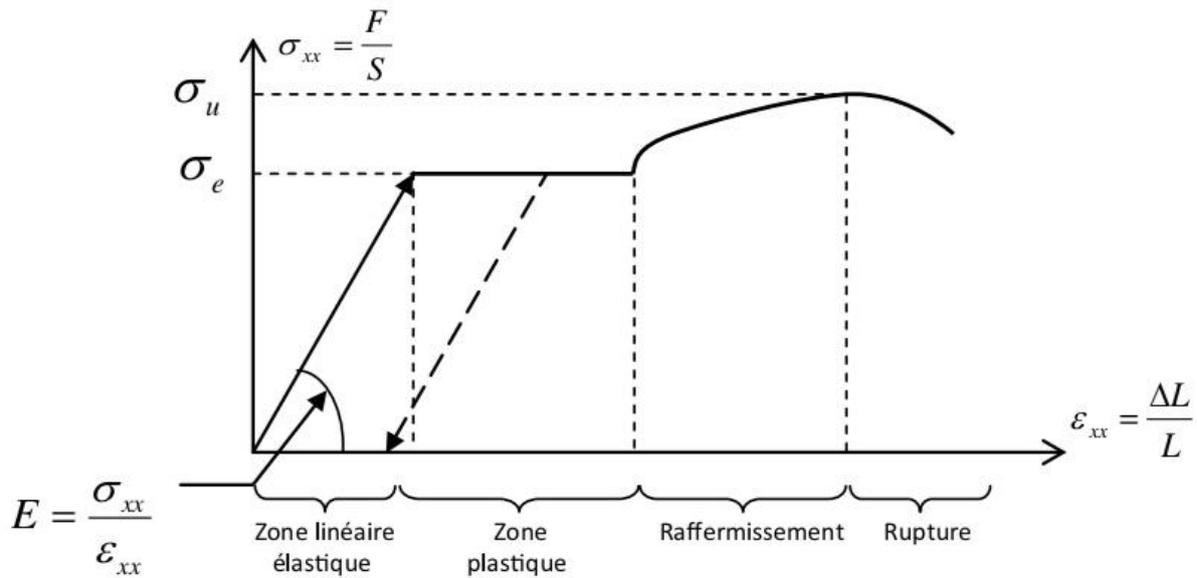


Figure II .10 : Allongement d'un barre



**Figure II .11** : courbe contrainte et déformation

Alors que:

$\sigma_e$  et  $\sigma_u$  limites d'élasticité et de rupture du matériau,

$E$  : module d'élasticité longitudinal ou module de Young (pour l'acier  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>).

La zone élastique est caractérisée par la loi de Hooke:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.11)$$

Les contraintes et les déformations sont liées linéairement. En plus de la déformation axiale et toujours dans le domaine élastique, une déformation associée à la contraction transversale de la poutre est observée le long de l'axe  $y$ .

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.12)$$

ET suivant  $z$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d} = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.13)$$

$\nu$  qui correspond au coefficient de Poisson doit être, strictement inférieure à 0.5 et étant positif.

• **Relations entre déformations et contraintes:**

En restant dans le domaine de l'élasticité linéaire, application de la démarche précédente aux deux autres axes y et z aboutirait inévitablement à des résultats similaires (permutations croisées des indices x, y et z). Par conséquent, et toujours en raison de la linéarité, la relation tridimensionnelle entre les déformations et les contraintes normales peut être obtenue par superposition des trois états d'équilibre suivant x, y et z, soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\quad (2.14)$$

De plus, il est également possible via un essai de cisaillement pur de montrer qu'il existe des relations linéaires entre contraintes et déformations de cisaillement tels que:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

• **Relations entre contraintes et déformations :**

Des équations (2.14) et (2.15) nous pouvons déduire les contraintes des déformations, comme suit:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} [\varepsilon_{xx} \cdot (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} [\varepsilon_{yy} \cdot (1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{zz} \cdot (1 - \nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

## II.17.Énergie de déformation élastique :

### • Cas du chargement uniaxial:

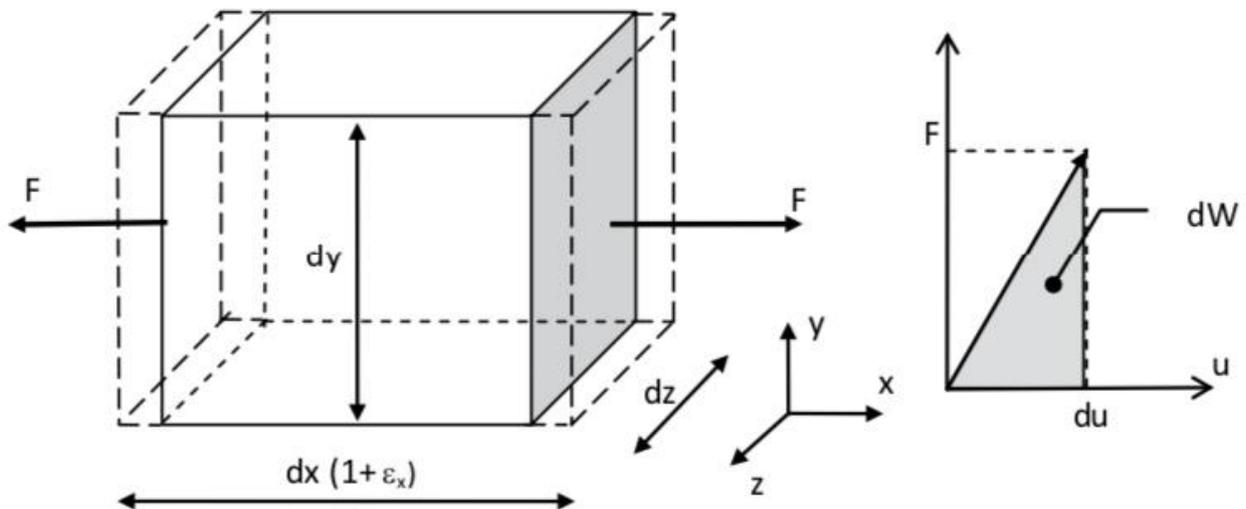


Figure II .12 : Énergie de déformation uniaxial

Prenons un élément infinitésimal de dimensions  $dx \, dy \, dz$  d'un solide, l'énergie emmagasinée dans le volume  $dV$  sous l'effet d'une force constante  $F$  dans la direction  $x$  est :

$$dW = \frac{1}{2} F \cdot du \quad (2.17)$$

Où  $du = \varepsilon_{xx} \cdot dx$  et  $F = \sigma_{xx} \cdot dydz$ ,  $dW$  on peut aussi l'exprimer ainsi :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \cdot dx dy dz \quad (2.18)$$

Généralisée, l'expression de l'énergie de déformation devient comme suit:

$$dW = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dx dy dz$$

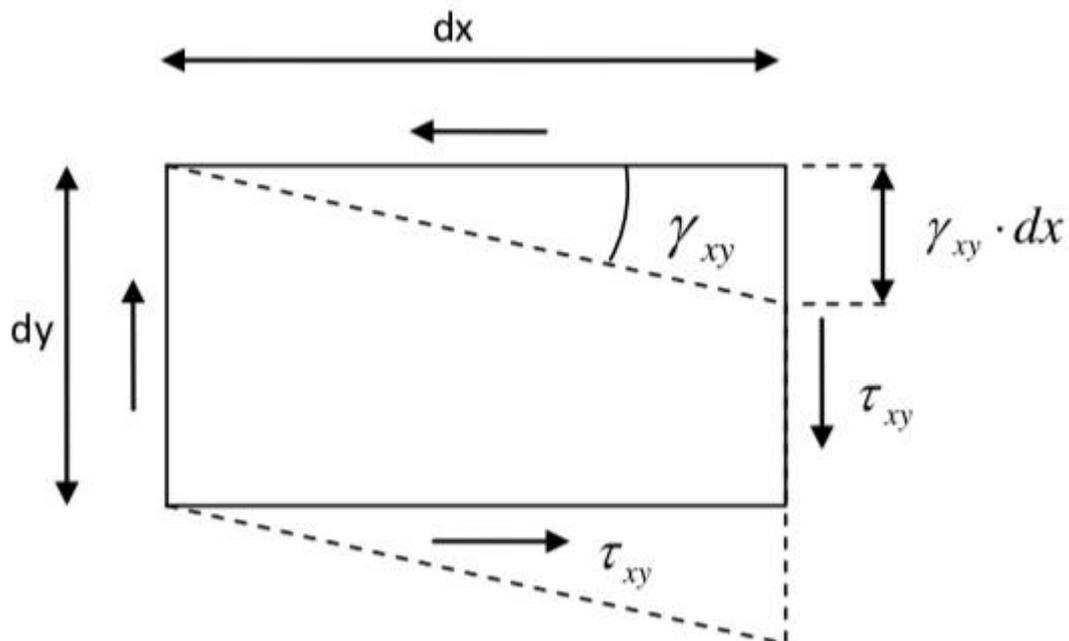
$$DW = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dv \quad (2.19)$$

• **Cas général :**

L'extension de l'état uniaxial précédent aux deux autres axes y et z permettra d'obtenir, par superposition:

$$dW = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \varepsilon_{zz}) dv \quad (2.20)$$

La démarche étant similaire pour les cisaillements, on a également ( Figure 1.17)[15]



**Figure II .13 :** Energies de déformation de cisaillement.

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \cdot dy dz) \cdot \gamma_{xy} \cdot dx = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} dx dy dz \quad (2.21)$$

L'énergie de contrainte élastique sera finalement la suivante:

$$dW = \frac{1}{2} \int \int (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dv \quad (2.22)$$

W peut également être exprimée uniquement en fonction des contraintes en injectant (2.14) et (2.15) dans (2.22) d'où

$$W = \frac{1}{2 \cdot E} \int (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) dv - \frac{\nu}{E} \int (\sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz}) dv + \frac{1}{2 \cdot G} \int (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) dv$$

## II.18. Rôle des systèmes de coordonnées naturels (ISO) dans la méthode des éléments finis :

### • Détermination des emplacements des nœuds et des éléments :

Les systèmes de coordonnées sont utilisés pour déterminer les emplacements des nœuds et des éléments dans le modèle géométrique.

Cela aide à transformer les données géométriques des conceptions initiales en modèles analysables par la méthode FEM.[6]

### • Analyse des contraintes et des déformations :

La méthode des éléments finis utilise les systèmes de coordonnées pour calculer les contraintes et les déformations dans les différents éléments.

Cela permet d'identifier les points faibles et les zones de haute contrainte dans la structure, et de concevoir des solutions pour les renforcer ou les modifier.

### • Transformation des coordonnées :

Il est parfois nécessaire de transformer les données entre différents systèmes de coordonnées (par exemple, transformer des coordonnées géographiques en coordonnées locales).

Ces transformations garantissent la compatibilité et la précision des données pour l'analyse.

### • Simulation des charges et des conditions environnementales:

Les systèmes de coordonnées sont utilisés pour localiser les applications des charges et des conditions aux limites sur le modèle.

Cela aide à simuler les effets des différentes charges comme le vent, les séismes et les charges d'exploitation sur la structure.

- **Intégration des résultats :**

Après l'analyse par la méthode FEM, les résultats sont présentés dans un système de coordonnées spécifié.

Ces résultats sont utilisés pour évaluer la performance de la structure et prendre des décisions techniques.

## **II.19. Étapes de base pour utiliser la méthode FEM en génie civil :**

- **Définition de la géométrie :**

Création d'un modèle géométrique de la structure à analyser en utilisant des systèmes de coordonnées pour définir les dimensions et la forme.

- **Génération du maillage :**

Division du modèle géométrique en éléments finis et définition des nœuds en utilisant des systèmes de coordonnées.

- **Application des propriétés matérielles :**

Définition des propriétés des matériaux pour chaque élément, comme le module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

- **Application des charges et des conditions aux limites :**

Application des charges sur les nœuds et les éléments, et définition des conditions aux limites en utilisant des systèmes de coordonnées.

- **Résolution des équations:**

Utilisation de méthodes numériques pour résoudre les équations d'équilibre et obtenir les résultats.

- **Analyse des résultats:**

Interprétation des résultats et utilisation des systèmes de coordonnées pour afficher la distribution spatiale des contraintes et des déformations.

L'utilisation des systèmes de coordonnées naturels (ISO) dans la méthode des éléments finis permet d'obtenir une précision et une fiabilité élevées dans l'analyse et la conception des structures en génie civil, contribuant ainsi à améliorer la sécurité et l'efficacité des projets de génie civil.[8]

## II.20. Système de coordonnées naturel (iso) :

Le système de coordonnées naturelles, souvent abrégé en ISO (pour "International System of Coordinats"), repose sur un système standard international utilisé pour déterminer les positions et les dimensions géométriques avec précision. Cependant, il semble y avoir une confusion entre les termes ici, car l'ISO (Organisation internationale de normalisation) traite de diverses normes, y compris les systèmes de coordonnées.

En parlant du système de coordonnées naturelles (ou cartésiennes), il y a quelques lois et concepts de base :

### 1. Dimensions tridimensionnelles :

- **Axe X** : l'axe horizontal.
- **Axe Y** : l'axe vertical.
- **Axe Z** : l'axe perpendiculaire (qui sort du plan dans les dimensions tridimensionnelles).

### 2. Points et coordonnées :

- Chaque point dans l'espace est exprimé par trois nombres (x, y, z).
- Le point d'origine (0, 0,0) est le point où les trois axes se croisent.

### 3. Directions et angles :

- Les angles entre les axes sont des angles droits (120 degrés).
- Utilisation du système d'angles cartésiens pour déterminer les directions dans l'espace.

### 4. Distances:

- La distance entre deux points peut être calculée en utilisant la formule de la distance :

$$d = \sqrt{(x_2^2 - x_1^2)^2 + (y_2^2 - y_1^2)^2 + (z_2^2 - z_1^2)^2}$$

### 5. Vecteurs:

- Les vecteurs sont utilisés pour représenter la direction et le mouvement.
- Un vecteur peut être défini de l'origine à tout point (x, y, z).

## 6. Transformations :

- **Transformations linéaires** : modification de la position par translation, rotation ou mise à l'échelle.

- **Transformations non linéaires** : peuvent inclure la distorsion ou la réflexion.

Si vous faites référence à des normes spécifiques de l'ISO, l'Organisation internationale de normalisation a de nombreuses normes différentes relatives aux systèmes de coordonnées et à d'autres domaines d'ingénierie, tels que :

- **ISO 112111** : Normes pour les systèmes de référence de coordonnées.

- **ISO 112107** : Normes pour la représentation spatiale.[14]

# **Chapitre III : Élément finis de poutre plane à 2 nœuds**

### III.1.Introduction

Une poutre est un élément structural long et mince généralement soumis à une charge transversale qui produit des effets de flexion significatifs plutôt que des effets de torsion ou axiaux. Les théories des poutres, permettent de réduire (convertir) des problèmes tridimensionnels en problèmes unidimensionnels en condensant les caractéristiques du problème au niveau de la fibre moyenne.

Dans cette section, nous allons dériver la matrice de rigidité pour des éléments de poutre minces et épaisse à deux nœuds seulement. Dans ces éléments la déformation de flexion est mesurée par un déplacement transversal et une rotation. Par conséquent, les degrés de liberté considérés par nœud sont un déplacement transversal et une rotation.

Les déplacements nodaux transversaux locaux sont donnés par  $v_i$  et les rotations par  $\theta_i$ . Les forces nodales locales sont données par  $f_{iy}$  et les moments de flexion par  $m_i$  comme illustré. Nous négligeons tous les effets axiaux. [5]

Sur tous les nœuds, les conventions de signe suivantes sont utilisées :

1. Les moments sont positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Les rotations sont positives dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
3. Les forces sont positives dans la direction positive Y.
4. Les déplacements sont positifs dans la direction positive Y

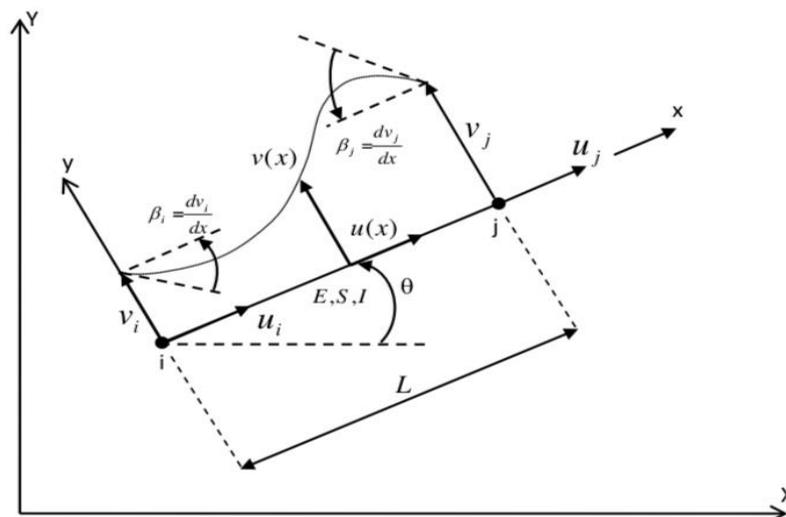


Figure III .1 : Élément de poutre plane.

### III.2.Élément de poutre plane d'Euler- Bernoulli :

Considérons un élément de poutre plane de longueur  $L$ , de section  $S$  et d'inertie  $I$  constants et son matériau présente un module élastique longitudinal  $E$ .

L'équation différentielle régissant le comportement élémentaire d'une poutre linéaire-élastique, communément appelée poutre d'Euler-Bernoulli, est dérivée à partir du postulat que les sections transversales planes perpendiculaires à l'axe longitudinal central de la poutre avant la flexion restent planes et perpendiculaires à cet axe après la flexion. Ceci est illustré à la Figure.3.2, où un plan passant par la ligne verticale a-c ( Figure. 3.2-a) est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $X$  avant la flexion, et ce même plan passant par a'-c' (tournant selon l'angle  $\theta$  dans la Figure. 3.2-b) reste perpendiculaire à l'axe  $X$  après la flexion. Ce phénomène se produit en pratique uniquement lorsqu'il existe un couple pur ou un moment constant dans la poutre. Toutefois, cette hypothèse est raisonnable et permet de dériver des équations qui prédisent avec une précision satisfaisante le comportement des poutres dans la plupart des cas pratiques. [5]

. Chaque nœud a deux degrés de liberté  $\mathbf{v}_i$  et  $\frac{d\mathbf{v}_i}{dx}$  permet de reconstruire la fonction de déplacement axial  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  et transversale  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Ses caractéristiques sont donc :

#### • Champ du déplacement transversal $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ :

Supposons que la variation du déplacement transversal sur la longueur de l'élément soit

$$v(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (3.18)$$

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad (3.12a)$$

La fonction de déplacement cubique complète, est appropriée car il y a quatre degrés de liberté au total (un déplacement transversal  $v_i$  et une petite rotation à chaque nœud  $\theta_i$ ). La fonction cubique satisfait également l'équation différentielle de base des poutres, justifiant davantage son choix. De plus, la fonction cubique respecte les conditions de continuité du déplacement et de la rotation aux nœuds

partagés par deux éléments. En appliquant les conditions d'extrémités (quatre conditions aux limites " $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ "), nous avons:

$v(0) = v_i; v'(0) = \theta_i; v(L) = v_j; v'(L) = \theta_j$ , le vecteur déplacement des nœuds peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R] \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.13a)$$

Soit: 
$$v(x) = \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} \cdot [R]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.14a)$$

D'où finalement,

$$V(x) = \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.15a)$$

En regroupant les résultats (9.11a) et (9.14a), le champ de déplacement complet de l'élément s'écrit :

$$V(x) = [N] \cdot \{q\}$$

La déformation de la poutre résultant de la concomitance de la flexion et des variations de longueur, on a :

$$\frac{dv(x)}{dx} = \left[ \frac{dN}{dx} \right] \{q\}$$

Nous avons :

$$\gg u(x) = -y \left[ \frac{dN}{dx} \right] \{q\}$$

Et

$$\gg \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \left[ \frac{d^2N}{dx^2} \right] \{q\} = [B] \{q\}$$

• L'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}) dv = \frac{1}{2} \int \{q\}^T [B]^T E [B] \{q\} dv \quad (3.16)$$

• Matrice de rigidité de Bernoulli :

$$K = \int (\varepsilon^T E \varepsilon) dv = \int \{q\}^T [B]^T E [B] \{q\} dv \quad (3.17)$$

$$K = \int [B]^T E [B] dv$$

$$\gg [B] = -y \left[ \frac{d^2N}{dx^2} \right] \quad (3.18)$$

$$[B] = -y \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \quad (3.19)$$

$$\gg K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### III.3. Élément de poutre de Timoshenko "élément de Friedman & Kosmatka " :

Cette méthode utilise les mêmes fonctions d'interpolation d'ordre supérieur que ceux de la théorie de Bernoulli toute en considérons la cinématique de la théorie de Timoshenko avec la prise de l'effet de cisaillement transversal. Par conséquent, cette méthode présente une solution efficace qui est basé sur une interpolation cubique du déplacement transversale toute en évitant le blocage en cisaillement.

Pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre en incluant la déformation de cisaillement transverse, nous supposons que le déplacement transverse est donné par une fonction cubique.

$$v(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Nous choisissons la déformation de cisaillement transverse  $\gamma$  en cohérence avec le polynôme cubique  $v(x)$ , de sorte que  $\gamma$  soit une constante donnée par.

$$\gamma = c \quad (3.16)$$

En utilisant la fonction d'interpolation cubique pour  $v(x)$ , et l'équation de déformation de cisaillement, ainsi que la relation moment de flexion-courbure on obtient:

$$c = 6a_1g \quad (3.17)$$

Le terme  $g = \frac{EI}{K_z AG}$  et  $K_z$  est le coefficient de correction de cisaillement, utilisant les équations précédentes, la rotation  $\phi$  peut être écrite comme suit :

$$\phi = a_3 + 2a_2x + (3x^2 + 6g)a_1 \quad (3.18)$$

Nous pouvons maintenant exprimer les coefficients  $a_1$  par  $a_4$  en termes de déplacements nodaux et de rotations en utilisant les conditions d'extrémités. Les expressions de  $a_1$  à  $a_4$  sont alors données comme suit :

$$a_1 = \frac{2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$a_2 = \frac{-3Lv_1 - (2L^2 + 6g)\theta_1 + 3Lv_2 + (-L + 6g)\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$a_3 = \frac{-12gv_1 + (L^3 + 6gL)\theta_1 + 12gv_2 - 6gL\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$a_4 = v_1 \quad (9.19)$$

D'une manière similaire à l'étape 4 utilisée pour dériver la matrice de rigidité de l'élément de poutre

De Bernoulli, nous avons:

$$f_{1y} = v(0) = 6EIa_1 = \frac{EI(12dv_1 + 6L\theta_1 - 12v_2 + 6L\theta_2)}{L(L^2 + 12g)}$$

$$m_1 = -m(0) = -2EIa_2 = \frac{EI(-6Lv_1 + 4L^2 + 12g)\theta_1 - 6Lv_2 + 2L - 12g)\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$f_{2y} = -v(L) = \frac{EI(-12v_1 - 6L\theta_1 + 12v_2 - 6L\theta_2)}{L(L^2 + 12g)}$$

$$m_1 = m(L) = \frac{EI(-6Lv_1 + (2L^2 - 12g)\theta_1 - 6Lv_2 + (4L^2 + 12g)\theta_2)}{L(L^2 + 12g)} \quad (3.21)$$

où encore les signes moins dans les deuxième et troisième équations sont le résultat de conventions de moment positif de la théorie des poutre et de la conventions de force de cisaillement positive.

Ces équations relient les forces nodales aux déplacements nodaux. Sous forme matricielle, Ces équations deviennent:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L(L^2 + 12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2 + 12g) & -6L & (2L^2 - 12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2 - 12g) & -6L & (4L^2 + 12g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

où la matrice de rigidité est alors

$$\hat{k} = \frac{EI}{L^3(1 + \varphi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4 + \varphi)L^2 & -6L & (2 - \varphi)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2 - \varphi)L^2 & -6L & (4 + \varphi)L^2 \end{bmatrix}$$

**Avec:**

$$\varphi = \frac{12EI}{K_z AGL^2} = \frac{12g}{L^2}$$

Dans cette matrice, rappelez-vous que  $\varphi$  représente le terme de cisaillement transversal, et si nous définissons  $\varphi = 0$ , on obtient la matrice de rigidité de la poutre de Bernoulli, en négligeant la déformation de cisaillement transversale.

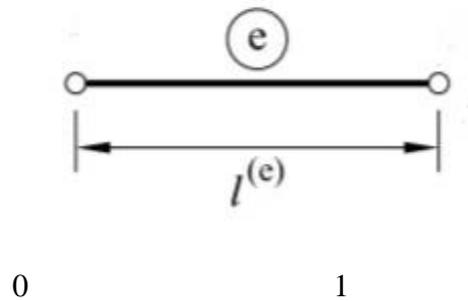
### III.4. ÉLÉMENT DE POUTRE TIMOSHENKO À DEUX NŒUDS avec interpolation linéaire:

#### III.4.1. Approximation du champ de déplacement :

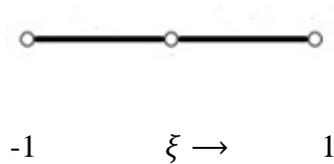
Considérons d'abord l'élément simple de poutre de Timochenko à 2 nœuds ( Figure 1.9). La flèche  $v$  et la rotation  $\theta$  sont maintenant des variables indépendantes

$$v(x) = a_0 + a_1x$$

$$\theta(x) = b_0 + b_1x \quad (3.1)$$



Dans l'analyse structurelle utilisant la méthode des éléments finis, les coordonnées physiques ( $x$ ) sont transformées en coordonnées locales ( $\xi$ ) pour faciliter l'intégration des éléments. Ici, ( $x$ ) représente les coordonnées la longueur de la poutre dans le système cartésien, tandis que ( $\xi$ ) sont les coordonnées normalisées qui varient généralement de (-1 à 1) le long de d'élément. [3]



Nous avons

$$X = \xi \cdot L \Rightarrow \xi = \frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = -1 \rightarrow x = 0 \\ \xi = 1 \rightarrow x = L \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{Implique} \Rightarrow v(\xi) = a_0 + a_1\xi \Rightarrow \begin{cases} \xi = -1 \rightarrow v = v_1 \\ \xi = 1 \rightarrow v = v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(\xi = -1) = a_0 - a_1 = v_1 \\ v(\xi = 1) = a_0 + a_1 = v_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = v_1 + a_1 \\ v_1 + 2a_1 = v_2 \end{cases}$$

A partir des équations (7.9) nous trouvons :

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{v_2+v_1}{2} \\ a_1 = \frac{v_2-v_1}{2} \end{cases}$$

$$V(\xi) = \frac{v_2+v_1}{2} + \frac{v_2-v_1}{2} \xi \quad (3.3)$$

En utilisant cette relation, nous pouvons exprimer n'importe quelles variables dépendant des coordonnées à l'intérieur de l'élément (comme le déplacement ou la rotation) en termes de coordonnées normalisées ( $\xi$ ), ce qui simplifie les calculs mathématiques et les rend plus efficaces.

$$\Rightarrow \begin{cases} V(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi)v_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi)v_2 \\ \theta(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi)\theta_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi)\theta_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(\xi) = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \\ \theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

### III.4.2. Approximation des déformations généralisées et des contraintes :

La déformation en flexion  $\frac{d\theta}{dx}$  et la déformation transversale  $\gamma_{xy}$  sont exprimées en termes l'équation (10.5)

$$\dot{K} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\xi}{dx} \left[ \frac{dN_1}{d\xi} \theta_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \theta_2 \right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta = \frac{d\xi}{dx} \left[ \frac{dN_1}{d\xi} v_1 + \frac{dN_2}{d\xi} v_2 \right] - [N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2] \quad (3.6)$$

Nous interpolons la géométrie de l'élément à partir de ses coordonnées de nœud de manière iso-paramétrique standard, telle que  $x = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi_i)x_i$ . De là, nous dérivons  $\frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}$  en substituant l'inverse de cette expression dans les équations (10.6) et en utilisant la notation matricielle, nous pouvons écrire

$$\dot{K} = \frac{d\theta}{dx} = \mathbf{B}_F \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} - \theta = \mathbf{B}_C \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_C = \left[ \frac{2}{L} \cdot \frac{N_1}{d\xi} \quad -N_1 \quad \frac{2}{L} \cdot \frac{N_2}{d\xi} \quad -N_2 \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_F = \left[ 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_1}{dx} \quad 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

En substituant, nous trouvons

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{(1-\xi)}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Le moment de flexion et la force de cisaillement sont obtenus comme suit

$$\mathbf{M} = EI \cdot \mathbf{B}_F \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{V} = k_z GA \cdot \mathbf{B}_C \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

### III.4.3.L'énergie de déformation :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{k}_z \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{xy}^T \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{xy} \, dv \quad (3.11)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{k}_z \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{xy} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{xy} \, dv$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{xy}^2 \, dv$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_V \left( -y \cdot \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{G} \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 \, dv$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dv + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_z \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 \, dv \quad (3.12)$$

#### ►Energie de Flexion :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} EI \int_{-1}^1 \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & \frac{dN_2}{d\xi} \end{bmatrix}^T \times \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & \frac{dN_2}{d\xi} \end{bmatrix} d\xi \quad (3.13)$$

#### ► Energie de cisaillement :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} k_s \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{L} \frac{dN_1}{d\xi} \quad -N^1 \quad \frac{1}{L} \frac{dN_2}{d\xi} \quad -N^2 \right]^T$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} \frac{dN_1}{d\xi} \quad -N_1 \quad \frac{1}{L} \frac{dN_2}{d\xi} \quad -N_2 \right] d\xi$$

$$\Rightarrow \mathbf{U} = \frac{1}{2} EI \int_{-1}^1 \frac{1}{L^2} [ \mathbf{B}_F ]^T [ \mathbf{B}_F ] d\xi + \frac{1}{2} k_z \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \int_{-1}^1 [ \mathbf{B}_c ]^T [ \mathbf{B}_c ] d\xi \quad (3.14)$$

Alors que  $k_z = \frac{5}{6}$

#### III.4.4. Matrice de rigidité de Timoshenko:

$$[\mathbf{K}] = [k_F] + [k_c] \quad (3.15)$$

$$-- k_F = EI \int_{-1}^1 [B_F]^T [B_F] d\xi$$

$$-- k_c = k_z \cdot A \cdot G \int_{-1}^1 [B_c]^T [B_c] d\xi$$

$[B_c]$ : matrices de cisaillement.

$[B_F]$ : Matrices de flexion.

En fin l'évaluation de l'intégral présent dans l'expression de la matrice de rigidité nécessite le recours aux intégrales numériques, tel que la méthode de Gauss.[3]

# **Chapitre IV : Blocage en cisaillement transversal: définition et solutions**

### IV.1. Intégration numérique :

Le calcul des composants de la matrice de rigidité d'un grand nombre d'éléments finis nécessite le recours aux intégrales numérique (le cas de l'élément de poutre de Timoshenko avec interpolation linéaire déjà présenté dans le Chapitre 4).

La méthode Gauss est généralement utilisée. Il est important de comprendre le concept de points d'intégration ou « Points de Gauss » pour découvrir les différentes approches employées. C'est la raison pourquoi, intégration numérique en 1 dimension est discutée ci-dessous.

L'intégrale d'une fonction  $f$  d'une seule variable  $\xi$  sur l'intervalle  $[a, b]$  peut être calculé mathématiquement par la méthode de Gauss en supposant que :

$$\int_a^b f(\xi) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^r w_i \cdot f(\xi_i) \quad (4.7)$$

qui remplace l'intégrale analytique de la fonction polynomiale  $f(\xi)$ .

Une combinaison linéaire des valeurs de  $f$  aux points  $\xi_i$  (appelés points d'intégration) et les poids appelés  $w_i$  (ou coefficients). Pour les éléments iso paramétriques, l'intervalle  $[a, b]$ , sera bien évidemment égal à  $[-1, 1]$ .

L'intégration numérique consiste alors à faire passer un polynôme  $\psi(\xi)$  par un certain nombre de valeurs de  $f(\xi)$  de telle manière à obtenir  $\int_a^b \psi(\xi) \cdot d\xi$  comme approximation  $\int_a^b f(\xi) \cdot d\xi$  On a donc :

$$f(\xi) \approx \psi(\xi) = a_1 + a_2 \cdot \xi + \dots + a_{2r} \cdot \xi^{2r-1} \quad (4.8)$$

A partir des équations (10.7) et (10.8), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\xi) \cdot d\xi &= a_1 \int_a^b d\xi + a_2 \int_a^b \xi \cdot d\xi + \dots + a_{2r} \int_a^b \xi^{2r-1} \cdot d\xi \\ &= a_1(w_1 + w_2 + \dots + w_r) + a_2(w_1 \cdot \xi_1 + w_2 \cdot \xi_2 + \dots + w_r \cdot \xi_r) + \dots \\ &\dots + a_{2r}(w_1 \cdot \xi_1^{2r-1} + w_2 \cdot \xi_2^{2r-1} + \dots + w_r \cdot \xi_r^{2r-1}) \quad (4.9) \end{aligned}$$

Sachant que  $\int_{-1}^1 \xi^\alpha \cdot d\xi$  est égal à 0 si  $\alpha$  est impair et  $\frac{2}{1+\alpha}$  lorsque  $\alpha$  est pair, l'équation (10.9) peut alors s'écrire sous la forme d'un système linéaire de  $2r$  équations :

$$2 = w_1 + w_2 + \dots + w_r$$

$$0 = w_1 \cdot \xi_1 + w_2 \cdot \xi_2 + \dots + w_r \cdot \xi_r$$

$$\frac{2}{3} = w_1 \cdot \xi_1^2 + w_2 \cdot \xi_2^2 + \dots + w_r \cdot \xi_r^2 \tag{4.10}$$

$$0 = w_1 \cdot \xi_1^{2r-1} + w_2 \cdot \xi_2^{2r-1} + \dots + w_r \cdot \xi_r^{2r-1}$$

Cela permet de trouver des valeurs différentes pour  $\xi_i$  et  $w_i$

Supposer que  $\begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ \xi_1 = -\xi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

**Tableau IV .1** : Tables de Gauss-Legendre

r	$\xi_i$	$w_i$	Degré maximum du polynôme à intégrer
1	0	2	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	8/9  5/9	5
4	$\pm \frac{\sqrt{3-2\sqrt{6/5}}}{7}$  $\pm \frac{\sqrt{3+2\sqrt{6/5}}}{7}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$	7

### IV.2. L'intégration réduite

Il déjà montré dans plusieurs études que l'intégration de Gauss, lorsqu'elle est effectuée avec un nombre de points d'intégration inférieur à celui fixé par la théorie pour obtenir un résultat exact, pouvait apporter un gain de comportement appréciable. Elle permet notamment de supprimer les contraintes pesant sur la représentation des déformations, en particulier celle du cisaillement. Par

ailleurs, il est évident que les temps de calcul des termes d'une matrice de raideur sont proportionnels au nombre de points utilisés pour l'intégration. Il est donc généralement avantageux d'utiliser l'intégration réduite, à condition de ne pas trop altérer la précision et de ne pas introduire de faux modes de déformation ou modes virtuels.

Ces modes sont les vecteurs propres de la matrice de raideur. Ils diffèrent des modes de corps rigides en ce que l'énergie de déformation qui leur est associée n'est pas nulle partout. Ils existent uniquement parce que le nombre d'évaluations des déformations aux points de Gauss est plus faible que le nombre des états de déformation produits par le champ de déplacement. Dans ce cas, il est possible que certaines combinaisons linéaires des modes de déformation produisent des modes nuls aux points d'intégration. Cette situation ne peut se produire si l'on utilise l'intégration complète, car alors le nombre d'états de déformation dépasse le nombre des états possibles constructibles par le champ des déplacements de l'élément.

Par exemple, pour un quadrangle à quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud, il y a  $4 \times 2 - 3 = 5$  modes de déformation indépendants. Si on utilise un point de Gauss, on obtient 3 composantes de la déformation ; il reste donc 2 modes virtuels. Pour déterminer ces modes, il faut considérer deux points: d'une part, ces modes virtuels sont forcément compatibles avec les déplacements ; d'autre part, ils ne peuvent être nuls partout, ce qui exclut les modes de déformations constantes. Ainsi, pour le quadrangle à quatre nœuds, par exemple, il ne reste que les termes  $u = rs$  et  $v = rs$  qui peuvent générer les modes virtuels.

### IV.3. Blocage numérique

Dans le calcul par éléments finis, on rencontre dans certains problèmes, le blocage (verrouillage) numérique qui empêche la convergence des solutions vers la solution exact même avec maillage raffiné. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément

est élançé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément.

### IV.3.1 Définition du blocage numérique:

Le blocage (verrouillage) : On appelle verrouillage d'un élément, une insuffisance de l'approximation polynomiale qui empêche l'élément de représenter correctement certains modes de déformation. L'élément se verrouille ou se bloque lorsque ces modes sont sollicités et les déplacements, contraintes et déformations peuvent devenir très incorrectes.

De plus, les éléments de Timoshenko peuvent donner des résultats incorrects lorsqu'ils modélisent une poutre très mince. Les poutres très minces sont beaucoup plus rigides en cisaillement qu'en flexion et subissent peu de déformations de cisaillement, maintenant leurs sections droites perpendiculaires à leur ligne moyenne. Cependant, les fonctions de base des éléments de Timoshenko ne permettent pas de telles déformations, surtout pour les éléments du premier ordre comme celle présentées dans le chapitre 3. Ainsi, ces éléments trop minces peuvent résister artificiellement aux déformations, produisant des flèches trop faibles et des contraintes de cisaillement excessivement élevées, parfois de plusieurs ordres de grandeur. C'est ce qu'on appelle le phénomène de "blocage" ou de "verrouillage" des éléments. Ce problème n'existe pas dans la théorie continue (comme la formulation de Friedman & Kosmatka présentée au chapitre 3, où les solutions de Timoshenko convergent simplement vers celles d'Euler-Bernoulli lorsque l'épaisseur de la poutre diminue), mais est spécifique à la discrétisation numérique.

En pratique, la plupart des logiciels commerciaux intègrent des techniques pour éviter le phénomène de verrouillage. Cependant, ces méthodes ne garantissent pas une efficacité absolue et peuvent altérer les résultats. Cela rend souvent l'interprétation des résultats complexe

### IV.3.2. Solutions étudiées pour remédier le blocage par cisaillement

Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs ces dernières vingt années et dont une abondance de solutions existe dans la littérature.

Une abondance de remèdes numériques existe dans la littérature où il est possible de réduire ou éliminer ce verrouillage par exemple en abaissant le niveau des fonctions d'interpolation ou en introduisant des éléments avec un plus grand nombre de degrés de liberté.

Il est aussi possible pour s'affranchir du problème de verrouillage d'utiliser une interpolation polynomiale de degré plus élevé pour les variables  $v(x)$  et  $\theta(x)$  qui ne seront plus indépendantes. Ces approches conduisent à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités, plus des

nœuds intérieurs. Cette solution conduit à une solution numérique coûteuse en termes de temps de calcul. C'est pour cette raison que cette solution n'est pas adoptée dans cette étude.

Afin d'améliorer les performances de l'élément et pour éviter certains blocages en membrane ou cisaillement, quelques techniques simples et efficaces vont être présentées:

#### IV.4.Élément poutre de Timoshenko avec intégration réduite

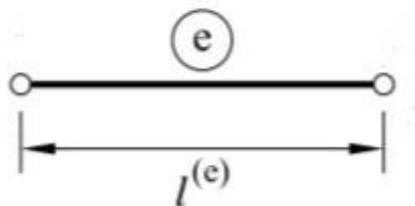
Une façon d'éviter l'apparition du blocage par cisaillement et de rendre la solution indépendante du rapport  $L/h$  est de calculer les termes de la matrice de rigidité en intégrant de manière exacte les termes relatifs à la flexion et en sous - intégrant les termes relatifs au cisaillement («Sélective/reduce intégration»),

##### Élément à intégration réduite (IR):

C'est un élément poutre de Timoshenko avec interpolation linéaire de la flèche et la rotation déjà présenté dans le chapitre 3. Mais ici nous allons utiliser la technique d'intégration réduite pour surmonter le problème de blocage numérique.

Considérons d'abord l'élément simple de poutre de Timoshenko à 2 nœuds. La flèche  $v$  et la rotation  $\theta$  sont maintenant des variables indépendantes

$$\begin{aligned} v(x) &= a_0 + a_1x \\ \theta(x) &= b_0 + b_1x \end{aligned} \quad (4.1)$$



$$[\mathbf{K}] = [k_F] + [k_c] \quad (4.15)$$

$$k_F = EI \int_{-1}^1 [B_F]^T [B_F] d\xi \times \det J$$

$$k_c = k_z \cdot A \cdot G \int_{-1}^1 [B_c]^T [B_c] d\xi \times \det J$$

$[B_c]$ : matrice de cisaillement.

$[B_F]$ : matrice de flexion.

Pour l'évaluation de l'intégral présent dans l'expression de la matrice de rigidité nous avons utilisé l'intégrale numérique avec la méthode de Gauss en utilisant un seul point de Gauss (intégration réduite).

#### IV.5.Sélection du champ de déformation transversale supposé "Assumed Strain":

Élément à déformation transversale supposé (AS):

Le champ de contrainte de cisaillement transversal supposé peut être obtenu directement par observez le champ d'origine, en tenant compte du fait qu'un équivalent doit être rencontré, pour l'élément de poutre de Timoshenko à 2 nœuds avec interpolation linéaire, il est raisonnable pour supposer le champ de contrainte de cisaillement constant

$$\gamma_{xy}' = a_1(v_1, \theta_1) \quad (4.6a)$$

Le paramètre  $a_1$  peut être obtenu en « échantillonnant »  $\gamma_{xz}$  au niveau du milieu de l'élément. Cela conduit à

$$a_1 = (\gamma_{xy})_{\xi=0} = \frac{v_2 - v_1}{L} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (4.7a)$$

et la matrice de déformation de cisaillement à utiliser est la suivante :

$$\gamma'_{xy} = -\frac{1}{L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{L}v_2 - \frac{1}{2}\theta_2 \quad (4.8a)$$

$$\gamma'_{xy} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.9a)$$

La matrice de rigidité est alors la suivante:

$$[\mathbf{K}] = [k_F] + [k_C]$$

$$-- k_F = EI \int_{-1}^1 [B_F]^T [B_F] d\xi \times detJ$$

$$-- k_C = k_z \cdot A \cdot G \int_{-1}^1 [B_C]^T [B_C] d\xi \times detJ$$

$[B_C]$ : matrice de cisaillement.

$[B_F]$ : matrice de flexion.

L'évaluation de l'intégral présent dans l'expression de la matrice de rigidité se fait par deux point de gauss (intégration complet).

#### IV.6. Interpolation liée (Linked interpolation)

Le phénomène de blocage peut être évité en utilisant une interpolation consistante, c'est-à-dire:

l'interpolation de la rotation doit être de l'ordre de  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Élément à Interpolation liée (LI):

Une technique efficace qui permet de tenir un déplacement transversal d'ordre quadratique avec rotation d'ordre linéaire toute en utilisant seulement les deux nœuds d'extrémité est présenté ici.



$V_1$

$v_3$

$v_2$

$$\Rightarrow V_3 = V\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{8}(\theta_1 - \theta_2)$$

Nous supposons que :

$$v(\xi) = N_1 V_1 + N_2 v_1 + N_3 V_3$$

$$\theta(\xi) = N_1' \theta_1 + N_2' \theta_2 \quad (4.1a)$$

$$\text{En utilisant les fonctions de poutre Bernoulli: } V(\xi = 0) \Rightarrow V_3 = V\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{8}(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.2a)$$

Le verrouillage de cisaillement peut être évité en améliorant l'interpolation pour le champ de déplacement transversal avec des termes polynomiaux d'ordre supérieur supplémentaires impliquant la rotation nodale. L'objectif est d'obtenir un champ de déformation transversale qui peut satisfaire à la condition limite d'Euler-Bernoulli de la déformation de cisaillement.

$$V = \frac{1}{2}(1 - \xi)V_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)V_2 + (1 - \xi^2)\frac{l}{8}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$V = \frac{1}{2}(1 - \xi)V_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)V_2 + (1 - \xi^2)\frac{l}{8}\theta_1 - (1 - \xi^2)\frac{l}{8}\theta_2 \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_3 = \frac{L}{8}(1 - \xi^2) \\ N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{cases} \quad (4.4)$$

Donc la déformation de cisaillement est la suivante:

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \quad N_1' \quad \frac{dN_3}{dx} \quad \frac{dN_3}{dx} \quad N_2' \right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

La matrice de rigidité est alors la suivante:

$$[\mathbf{K}] = [k_F] + [k_C]$$

$$-- k_F = EI \int_{-1}^1 [B_F]^T [B_F] d\xi \times detJ$$

$$-- k_C = k_z \cdot A \cdot G \int_{-1}^1 [B_C]^T [B_C] d\xi \times detJ \quad (4.6)$$

$[B_C]$ : matrice de cisaillement.

$[B_F]$ : matrice de flexion.

L'évaluation de l'intégral présent dans l'expression de la matrice de rigidité se fait par deux point de gauss (intégration complet).[13]

## IV.7. Élément de Friedman & Kosmatka

### Élément cubique (FK):

Cette méthode utilise les mêmes fonctions d'interpolation d'ordre supérieur que ceux de la théorie de Bernoulli toute en considérons la cinématique de la théorie de Timoshenko avec la prise de l'effet de cisaillement transversal. Par conséquence, cette méthode présente une solution efficace qui est basé sur une interpolation cubique du déplacement transversale toute en évitant le blocage en cisaillement.

La matrice de rigidité est évaluée analytiquement comme suit:

$$\hat{k} = \frac{EI}{L^3(1+\varphi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\varphi)L^2 & -6L & (2-\varphi)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\varphi)L^2 & -6L & (4+\varphi)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

# **Chapitre V : Résultats et discussions**

## V.1.Présentation de MATLAB

*Matlab* est une abréviation de Matrix Laboratory. Écrit à l'origine, en Fortran, par C. Moler.

*Matlab* est un langage simple et très efficace, optimisé pour le traitement des matrices, d'où son nom. Pour le calcul numérique, *Matlab* est beaucoup plus concis que les "vieux" langages (C, Pascal, Fortran, Basic).

*Matlab* contient également une interface graphique puissante, ainsi qu'une grande variété d'algorithmes scientifiques.

On peut enrichir *Matlab* en ajoutant des "boîtes à outils" (*toolbox*) qui sont des ensembles de fonctions supplémentaires, profilées pour des applications particulières (traitement de signaux, analyses statistiques, optimisation, etc.).

*Matlab* possède son propre langage, intuitif et naturel. Avec *Matlab*, on peut faire des liaisons de façon dynamique, à des programmes C ou Fortran, échanger des données avec d'autres applications (via la DDE : MATLAB serveur ou client) ou utiliser *Matlab* comme moteur d'analyse et de visualisation.

*Matlab* comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés "Tool boxes" (ou Boîtes à Outils). Indispensables à la plupart des utilisateurs, les Boîtes à Outils sont des collections de fonctions qui étendent l'environnement *Matlab* pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes. Les domaines couverts sont très variés et comprennent notamment le traitement du signal, l'automatique, l'identification de systèmes, les réseaux de neurones, le calcul de structure, les statistiques, etc.

*Matlab* permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmations (C ou Fortran), *Matlab* possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- la programmation facile,
- la continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,
- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- l'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- la possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmations (C ou Fortran).

Dans *Matlab*, aucune déclaration n'est à effectuer sur les nombres. En effet, il n'existe pas de distinction entre les nombres entiers, les nombres réels, les nombres complexes et la simple ou double précision. Cette caractéristique rend le mode de programmation très facile et très rapide. Dans *Matlab*, aucune nécessité n'est demandée pour la séparation de ces variables.

La bibliothèque des fonctions mathématiques dans *Matlab* donne des analyses mathématiques très simples. En effet, l'utilisateur peut exécuter dans le mode commande n'importe quelle fonction mathématique se trouvant dans la bibliothèque sans avoir à recourir à la programmation.

Pour l'interface graphique, des représentations scientifiques et même artistiques des objets peuvent être créées sur l'écran en utilisant les expressions mathématiques. Les graphiques sur *Matlab* sont simples et attirent l'attention des utilisateurs, vu les possibilités importantes offertes par ce logiciel.

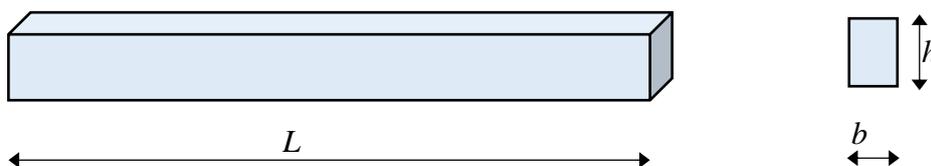
## V.2. Introduction

Dans cette étude un programme informatique écrit en langage Matlab base sur la MEF en utilisant la théorie de Bernoulli et la théorie de Timoshenko est développé. Ce programme permet la simulation du comportement linéaire en flexion des poutres planes minces et épaisses sous différents cas de chargement et condition d'appuis.

Dans la présente partie du travail, la flexion des poutres épaisses sous différentes cas de chargement (charge concentrée et charge uniformément répartie) et conditions aux limites (console, simplement supporté, double console) est investiguée.

Dans cette étude, le calcul numérique se base sur une poutre de section transversale rectangulaire ( $b \times h$ ). On suppose que la poutre est constituée d'un matériau élastique linéaire, de module de Young  $E = 1 \text{ Gpa}$  et de coefficient de poisson  $\nu = 0.25$ .

Les propriétés géométriques des poutres étudiées sont la longueur  $L = 5 \text{ m}$ , largeur  $b = 1$ , épaisseur  $h$  sera varié de 0.0001 à 0.5 m



**Figure V .1** : Poutre plane de section rectangulaire

La solution analytique des poutres rectangulaires en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal soumises à la flexion est obtenue en utilisant les deux équations caractéristiques des poutres de Timoshenko.

Les déplacements transversaux obtenus après la résolution numérique des problèmes étudiés sont comparés contre les déplacements théoriques calculés analytiquement en résolvant les équations de la théorie des poutres épaisses de Timoshenko.

La flèche des poutres étudiées est calculée numériquement à l'aide du programme développé basé sur la méthode des éléments finis en utilisant les cinq éléments finis poutres de Timoshenko définis comme suit:

**IC:** Élément poutre de Timoshenko avec interpolation linéaire du déplacement et de la rotation, dont la matrice de rigidité est calculé par intégration complet (en utilisant deux point de gauss);

**IR:** Élément poutre de Timoshenko avec interpolation linéaire du déplacement et de la rotation, dont la matrice de rigidité est calculé par intégration réduit (en utilisant un seul point de gauss);

**AS:** Élément poutre de Timoshenko avec interpolation linéaire du déplacement et de la rotation avec la technique "*Assumed Strain*", dont la matrice de rigidité est calculé par intégration complet (en utilisant deux point de gauss);

**LI:** Élément poutre de Timoshenko avec interpolation consistante en utilisant la technique "Linked Interpolation" (interpolation quadratique du déplacement et linéaire pour la rotation, dont la matrice de rigidité est calculé par intégration complet (en utilisant deux point de gauss);

**FK:** Élément poutre de Timoshenko avec interpolation cubique, dont la matrice de rigidité est calculée analytiquement.

**EB:** Élément poutre d'Euler-Bernoulli (pour les poutres minces) avec interpolation cubique, dont la matrice de rigidité est calculée analytiquement.

Des évaluations du déplacement transversal sont présentées et discutés pour étudier l'effet du cisaillement transversal, l'élanement et le comportement de chaque une des techniques utilisé vis-à-vis le phénomène de blocage en cisaillement transversal.

A cette fin, plusieurs élanements ( $L/h$ ) ont été utilisés pour étudier l'influence de l'élanement sur les réponses des poutres testées. Le tableau 1 présente ces différents élanements. Sachant que les dimensions " $L$ " et " $b$ " et les autres paramètres mécaniques sont restés inchangés. La hauteur de la

poutre " $h$ " a pris des valeurs allant de 0.0001 m jusqu'à 1 m, par conséquent les élancements varient de 5 jusqu'à 50000.

### V.3. Validation numérique

Afin de valider la présente modélisation, il va falloir comparer ses résultats obtenus avec ceux obtenus par une autre méthode. La méthode analytique a été adoptée comme méthode de référence. Les formules données dans cette partie sont appliquées pour les mêmes poutres qui sont analysées par les méthodes de Bernoulli et de Timochenko.

#### Exemple 1: Poutre console sous charge concentrée

Considérons l'exemple d'une poutre console de longueur  $L$  et de section rectangulaire ( $b \times h$ ) sollicitée par une force concentrée  $P$ , appliquée à son extrémité libre Figure V.2.



Figure V .2 : Poutre console sous charge concentrée

#### 1.1. Solution analytique

Pour avoir l'expression analytique de la flèche on utilisant la théorie de Timoshenko, nous considérons les expressions du moment et de l'effort tranchant suivantes:

$$M(x) = -P(L - x)$$

$$T(x) = P$$

L'équation différentielle d'équilibre est:

$$-EI \frac{d\theta(x)}{dx} = M(x) = -P(L - x)$$

En substituant l'expression du moment, nous avons:

$$EI\theta(x) = \frac{Px(2L - x)}{2} + c_1$$

En utilisant la condition aux limites suivante:

Pour  $x=0$ ;  $\theta(0) = 0$ , nous avons:

$$c_1 = 0$$

$$\text{Alors } \theta(x) = \frac{Px(2L-x)}{2}$$

En utilisant la deuxième équation différentielle de poutre de Timoshenko, nous avons:

$$k_s GA \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta(x) \right) = T(x)$$

$$\left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta(x) \right) = \frac{P}{k_s GA}$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \theta(x) + \frac{P}{k_s GA}$$

Par substitution de l'expression de  $\theta(x)$ , nous avons:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{Px(2L-x)}{2} + \frac{P}{k_s GA}$$

Après intégration nous avons l'expression de la flèche  $v(x)$  comme suit:

$$v(x) = \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} \right) + \frac{Px}{k_s GA} + c_2$$

En utilisant la condition aux limites suivante:

Pour  $x=0$ ;  $v(0) = 0$ , nous avons:

$$c_2 = 0$$

Dans le cadre de la théorie de Timoshenko, la flèche totale  $v(x)$  en tenant compte des déformations de

flexion et de cisaillement est donnée par :  $v(x) = \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} \right) + \frac{Px}{k_s GA}$

La flèche maximale comptée à l'extrémité libre ( $x = L$ ) est:

$$v(L) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{k_s GA}$$

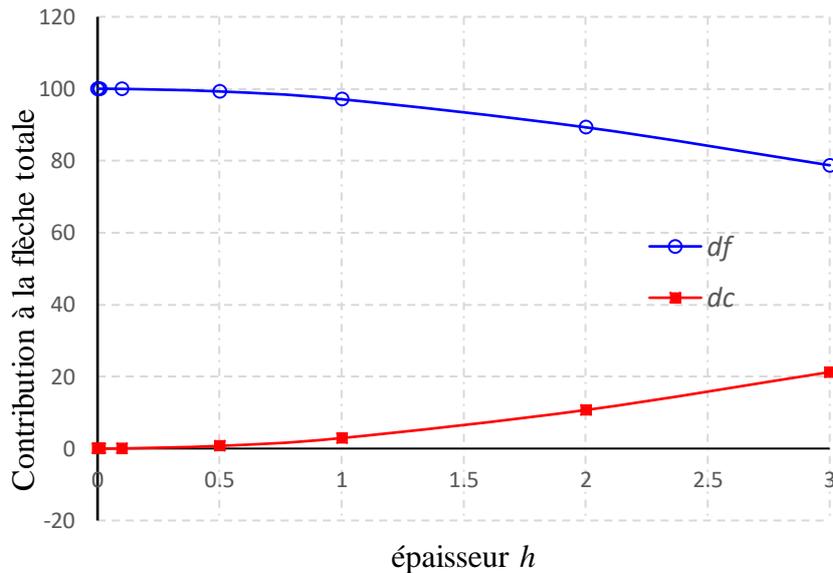
Dont  $v_f = \frac{PL^3}{3EI}$  représente la contribution de la flexion et  $v_c = \frac{PL}{k_s GA}$  représente la contribution de cisaillement dans la flèche totale.

Où :

$E$ : module de Young.

$I$ : moment d'inertie autour de l'axe  $Z$ .

$G$ : module d'élasticité transversal tel que  $G = E/(2 \times (1 + \nu))$



**Figure V.3 :** Contribution de la déformation de la flexion et du cisaillement dans la flèche totale

Pour illustrer la relation entre l'élançement et l'effet de cisaillement transversale, la variation de  $d_f$  et  $d_c$  en fonction de l'élançement est illustré sur la Figure V.3 en utilisant les expressions analytiques de la flèche.

D'après les courbes obtenues on constate que la contribution de la flèche due à la flexion à la flèche totale augmente avec l'augmentation de l'élançement, et celle de cisaillement à la flèche totale diminue avec l'augmentation de l'élançement.

On constate aussi que pour les poutres minces (élançées) la flèche additionnelle due à l'effort tranchant est négligeable ce qui n'est pas le cas pour les poutres épaisses.

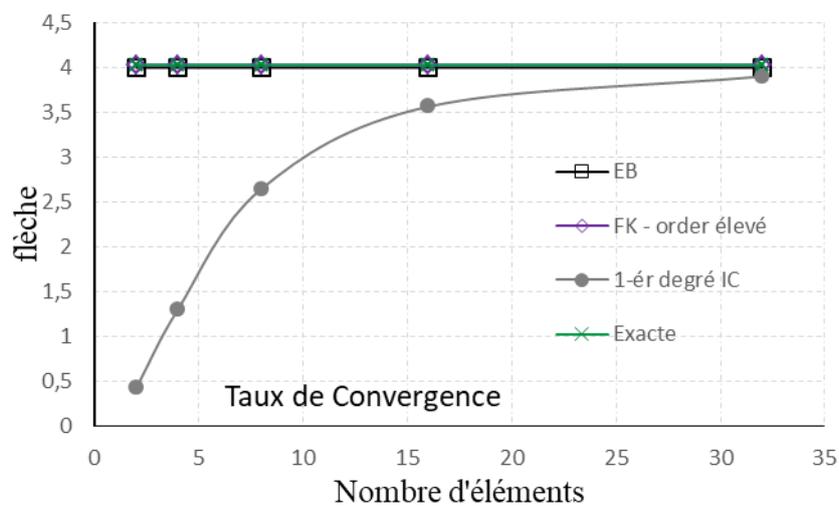
## 1.2. Illustration du phénomène de blocage

Dans une deuxième partie, une étude numérique basée sur la méthode des éléments finis est établie. Premièrement, afin de mettre en évidence le phénomène de verrouillage (blocage) numérique dans les

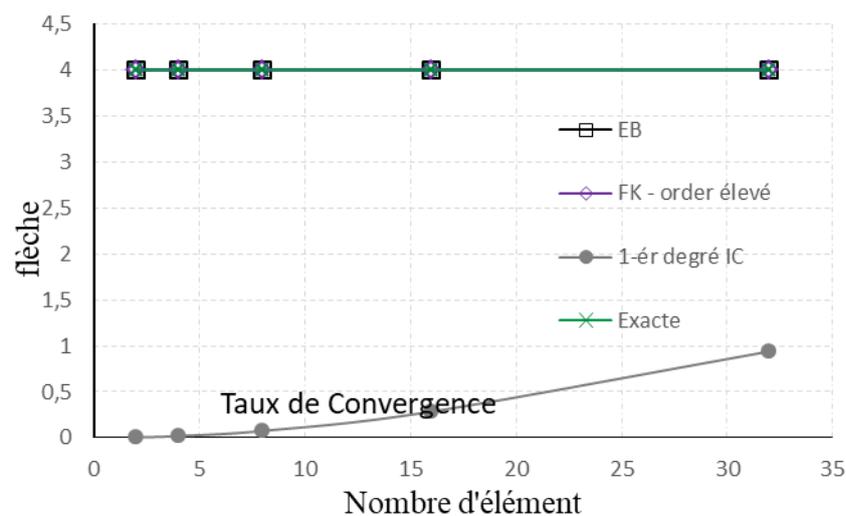
éléments finis poutres de Timoshenko, deux valeurs de l'élancement sont considérées (poutre épaisse  $h=0.5$  et poutre mince  $h=0.05$ ) qui correspondent aux élancements  $L/h = 10$  et  $L/h = 100$  respectivement.

Ce problème est modélisé en utilisant l'élément fini d'interpolation de premier ordre avec intégration numérique complète (2 points de Gauss) et l'élément de troisième ordre. Les déplacements d'une poutre console soumise à une charge concentrée pour les deux élancements sont présentés sur la Figure V.4 et Figure V.5.

Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats analytiques de la théorie de Timoshenko présentés précédemment.



**Figure V.4 :** Taux de convergence en termes de nombre d'élément ( $h=0.5$ )



**Figure V.5 :** Taux de convergence en termes de nombre d'élément ( $h=0.05$ )

D'après les Figure V.4 et Figure V.5 il est clair que tandis que l'élément poutre de Timoshenko avec interpolation cubique converge effectivement vers la solution exacte, l'élément poutre d'interpolation linéaire avec intégration complet souffre du blocage numérique de la solution appelé blocage en cisaillement transversal. Ce problème est plus énoncé quand l'élanement augmente de 10 Figure V.4 à 100 Figure V.5.

### 1.3.Étude de taux convergence des éléments

En flexion, contrairement à la traction/compression et à la torsion, les efforts internes varient le long de la poutre. Un élément de Timoshenko ne correspond généralement pas à une poutre continue, surtout pour les éléments du premier ordre (interpolation linéaire) qui produisent des efforts constants par élément.

Dans cette partie, pour étudier le taux de convergence des éléments poutre de Timoshenko développés, la flèche est calculée numériquement à l'aide du programme éléments Finis développé en utilisant plusieurs discrétisations (maillage avec 2 – 4 -8 16 et 32 éléments). Les résultats obtenus sont présentés sur les Figure V.6 et Figure V.7.

Les déplacements de poutre étudiée sont présents dans les Figure V.6 et Figure V.7. Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats générés par la solution analytique

On constate que pour les éléments basés sur interpolation linéaire, des maillages relativement fins peuvent être nécessaires pour avoir une solution précise.

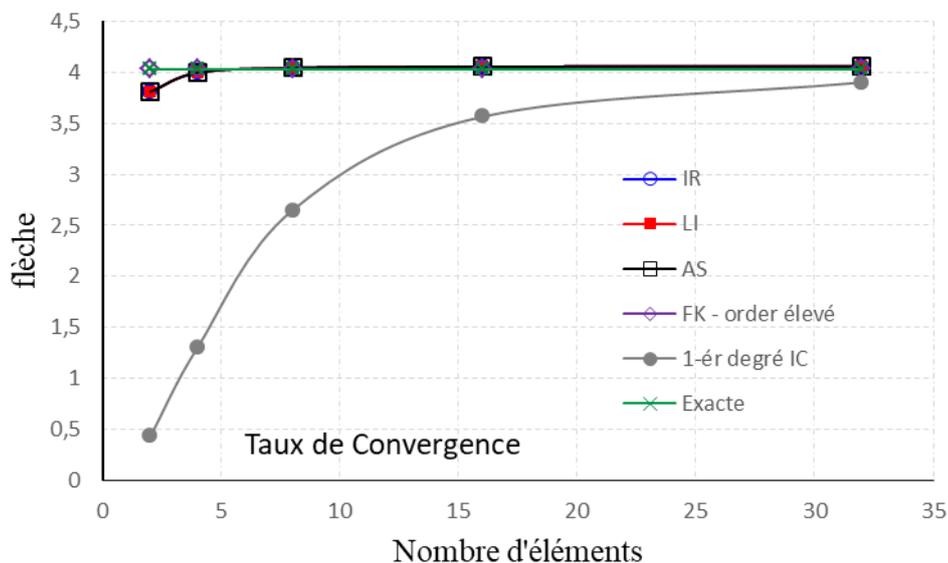
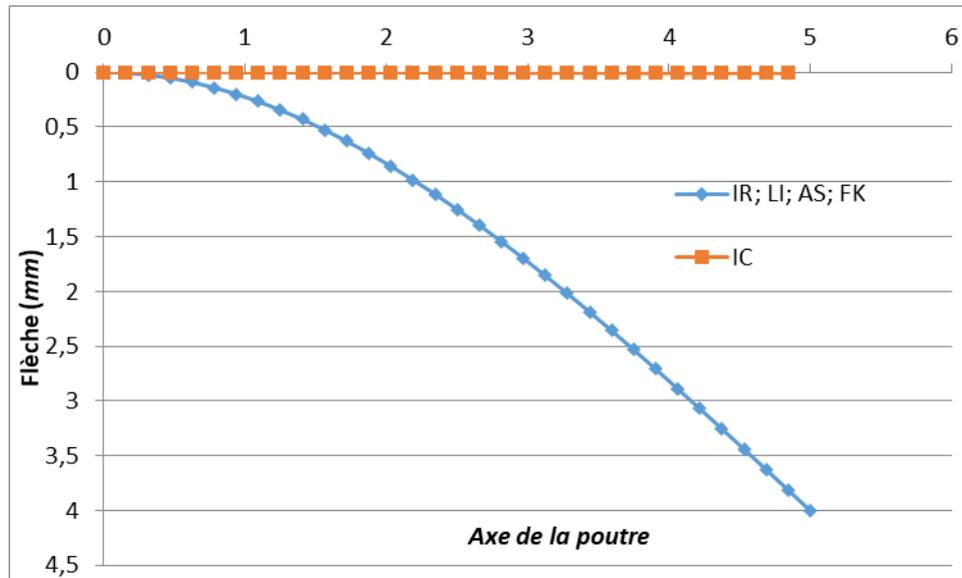


Figure V .6 : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments



**Figure V .7** : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments

#### 1.4.Étude de l'effet de l'élançement sur la réponse des éléments finis poutres de Timoshenko

Comme vu précédemment, les éléments de Timoshenko peuvent donner des résultats incorrects lorsqu'ils modélisent une poutre très mince du fait que les poutres très minces sont beaucoup plus rigides en cisaillement qu'en flexion et subissent peu de déformations de cisaillement, surtout pour les éléments du premier ordre.

Pour étudier l'efficacité des techniques adoptées pour surmonter le phénomène de blocage numérique en cisaillement transversale, dans cette partie, plusieurs élançements ( $L/h$ ) ont été utilisés pour étudier l'influence de l'élançement sur les réponses des techniques adoptées dans cette étude.

Les flèches obtenues pour les différents élançements avec les cinq éléments implémentés sont comparés avec la solution analytique sur la Figure V.8

La hauteur de la poutre " $h$ " a pris des valeurs allant de 0.0001 m jusqu'à 1 m, par conséquent les élançements varient de 5 jusqu'à 50000.

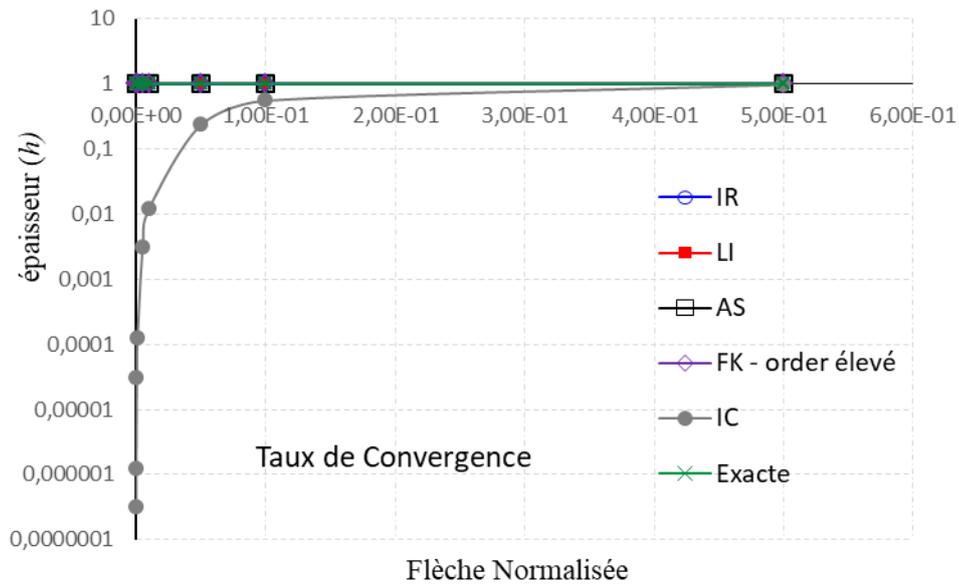


Figure V .8 : Variation de la flèche en termes de l'épaisseur h

On constate, d'après les résultats présentés sur la Figure. 5.8 que les technique de implémenté "IR, AS, LI" offrent des solutions simples et efficaces pour surmonter le problème de blocage numérique en cisaillement transversal des poutres de Timoshenko avec interpolation linéaire.

**Exemple 2: Poutre console sous charge uniformément répartie**

Dans cet exemple, une poutre console est soumise à une charge uniformément répartie  $q$ , appliquée le long de la poutre, Figure V.9 La poutre a une section rectangulaire de dimensions  $(b \times h)$  et de longueur  $L$ .

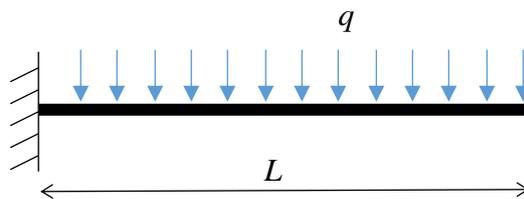


Figure V .9 : Poutre console sous charge concentrée

Pour avoir l'expression analytique de la flèche on utilisant la théorie de Timoshenko, prenant la première équation de Timoshenko et intégrant trois fois comme suit:

$$EI \frac{\partial^3 \theta(x)}{\partial x^2} = q$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} = qx + c_1$$

$$EI \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \frac{qx^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$EI \theta(x) = \frac{qx^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

En utilisant la deuxième équation différentielle de poutre de Timoshenko et substituant de l'expression de  $\theta(x)$ , nous avons:

$$k_s GA \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta(x) \right) = -EI \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2}$$

$$k_s GA \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta(x) \right) = -EI \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^3}{6} + c_1 \frac{qx^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) - \frac{1}{k_s GA} (qx + c_1)$$

Après intégration nous avons:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x \right) - \frac{1}{k_s GA} \left( \frac{qx^2}{2} + c_1 x \right) + c_4$$

Les constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  peuvent être calculés en utilisant les conditions aux limites suivantes:

Pour  $x=0$ ;  $V(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$

Pour  $x=L$ ;  $T(L) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2}$

et  $M(L) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = 0$

Nous avons:

$$c_3 = c_4 = 0$$

$$c_1 = -qL$$

$$c_2 = \frac{qL^2}{2}$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} \right) - \frac{1}{k_s GA} \left( \frac{qx^2}{2} - qLx \right)$$

La flèche maximale comptée à l'extrémité libre ( $x = L$ ) est:

$$v(L) = \frac{3qL^4}{24EI} + \frac{qL^2}{2k_s GA}$$

Les déplacements de poutre étudiée sont présents les Figure V.10 et Figure V.12. Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats générés par la solution analytique

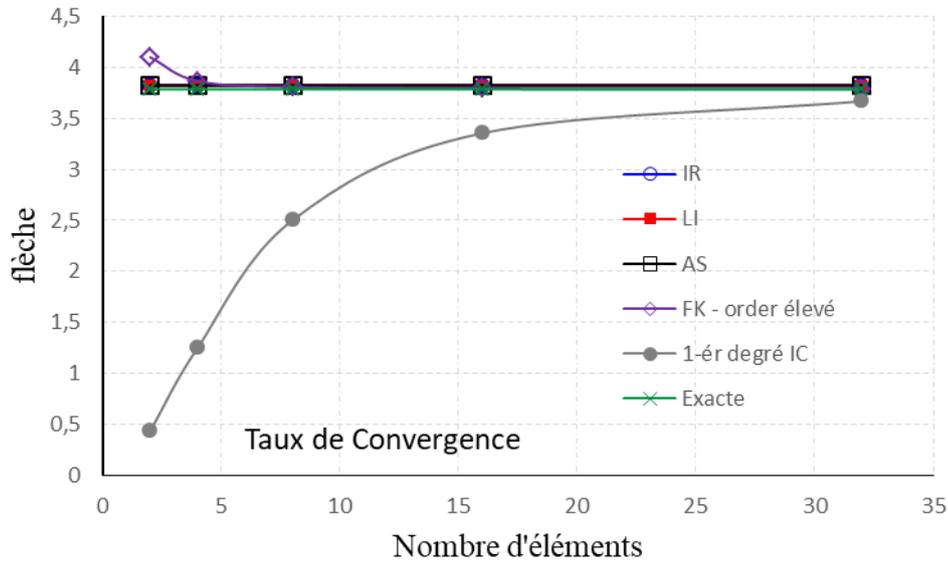


Figure V .10 : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments

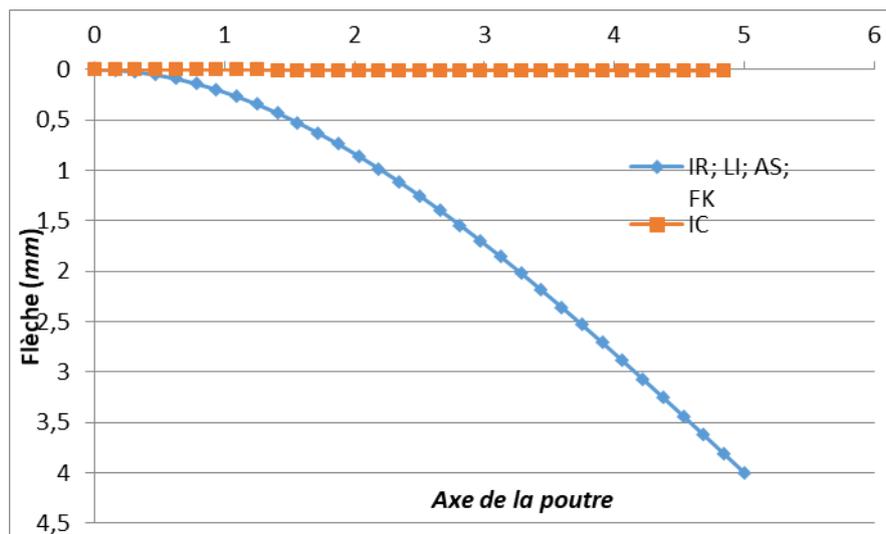
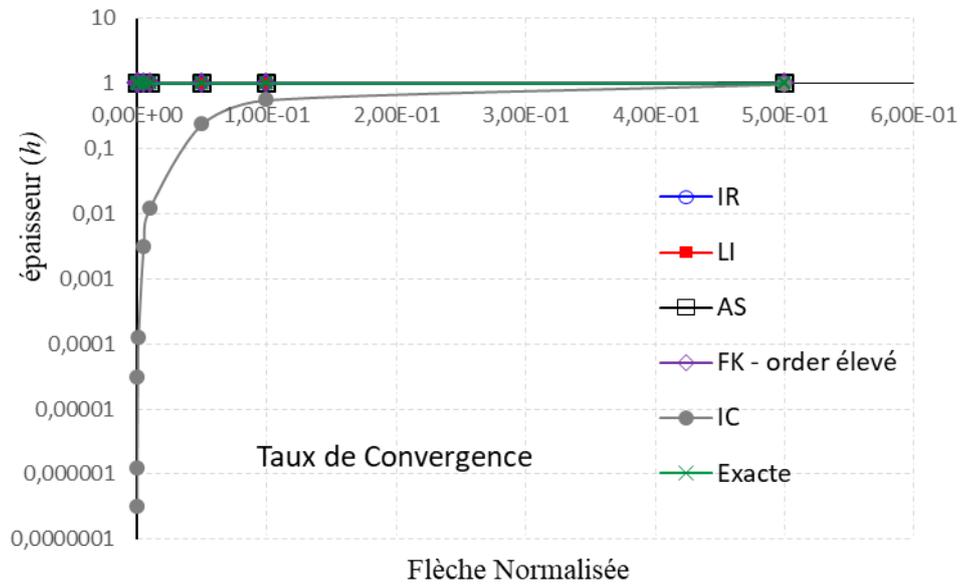


Figure V .11 : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments

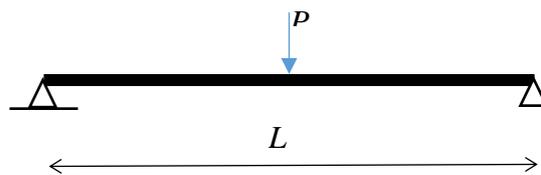


**Figure V .12 :** Variation de la flèche en termes de l'épaisseur h

On constate, d'après les résultats présentés sur les Fig. 5.10, Figure V.11 et Figure. V.12 que les technique implémenté "IR, AS, LI" offrent des solutions simples et efficaces pour surmonter le problème de blocage numérique en cisaillement transversal des poutres de Timoshenko avec interpolation linéaire.

**Exemple 3: Poutre simplement supportée sous charge concentrée**

Dans cet exemple, la poutre isostatique représenté sur la Figure. V.13 est étudiée lorsqu'il est soumis à une charge concentrée P appliquée à mi- portée.



**Figure V .13 :** Poutre simplement supporté sous charge concentrée

La solution analytique obtenue est la suivante:

$$v = \frac{PL^3}{48EI} \left( \frac{3x}{L} - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right) + \frac{PL}{2k_s GA} \left( \frac{x}{L} \right) \quad 1/48+1/4$$

Les déplacements de poutre étudiée sont présents dans les Figure V.14 et Figure V.16. Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats générés par la solution analytique

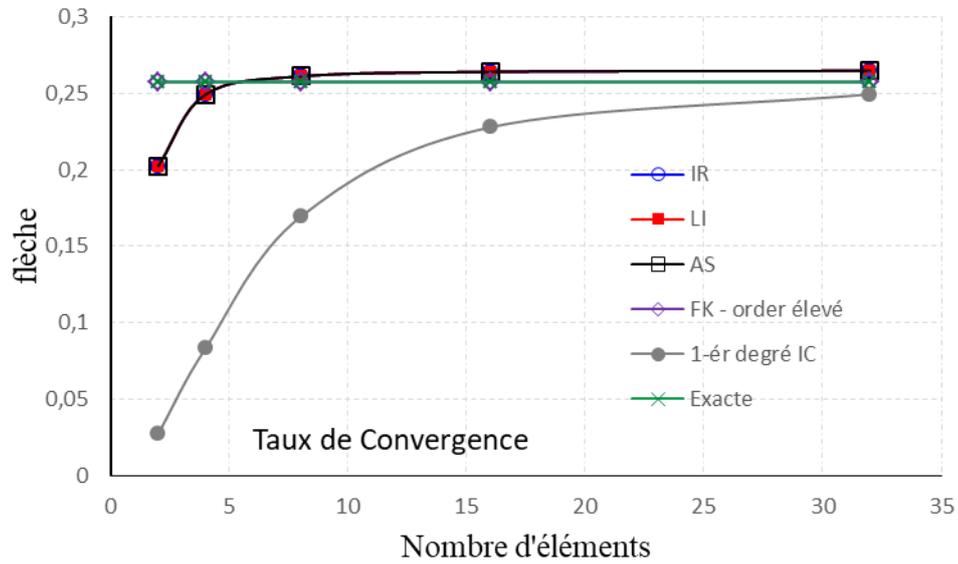


Figure V.14 : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments

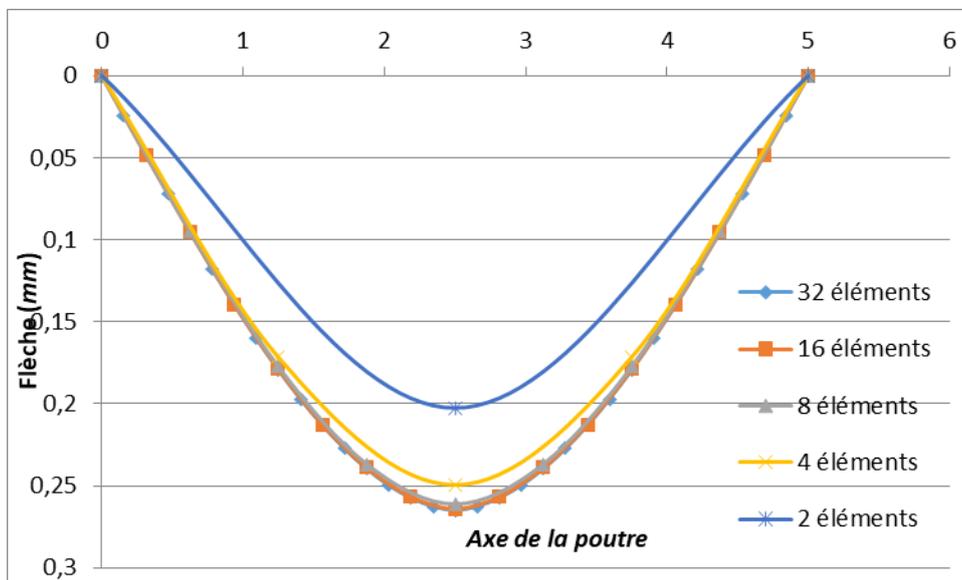
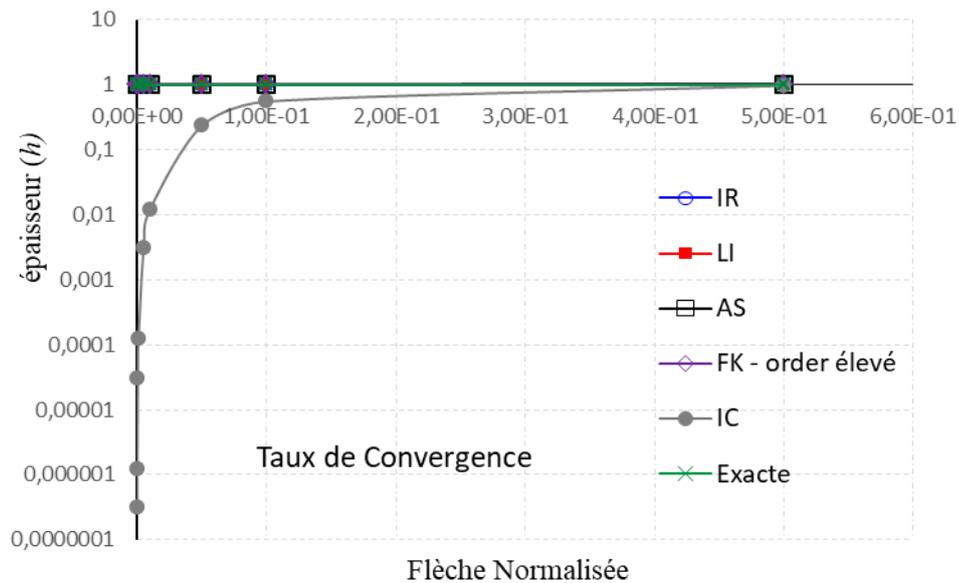


Figure V.15 : Déformé de la poutre en termes de nombre d'éléments



**Figure V .16 :** Variation de la flèche en termes de l'épaisseur  $h$

On constate, d'après les résultats présentés sur les Figure V.10, Figure V.11 et Figure V.12 que les technique implémenté "IR, AS, LI" offrent des solutions simples et efficaces pour surmonter le problème de blocage numérique en cisaillement transversal des poutres de Timoshenko avec interpolation linéaire.

#### **Exemple 4: Poutre simplement supportée sous charge uniformément répartie**

Considère l'exemple précédent d'une poutre d'une poutre simplement supportée représenté sur la Figure V.17. Dans cette exemple la poutre est étudiée lorsqu'il est soumis à une charge uniformément répartie  $q$ .

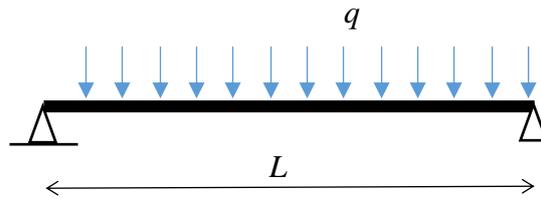


Figure V .17 : Poutre simplement supporté sous charge concentrée

La solution analytique obtenue est la suivante:

$$v = \frac{qL^4}{24EI} \left( \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right) + \frac{PL^2}{2k_s GA} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Les déplacements de poutre étudiée sont présents dans les Figure V.10 et Figure V.12. Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats générés par la solution analytique

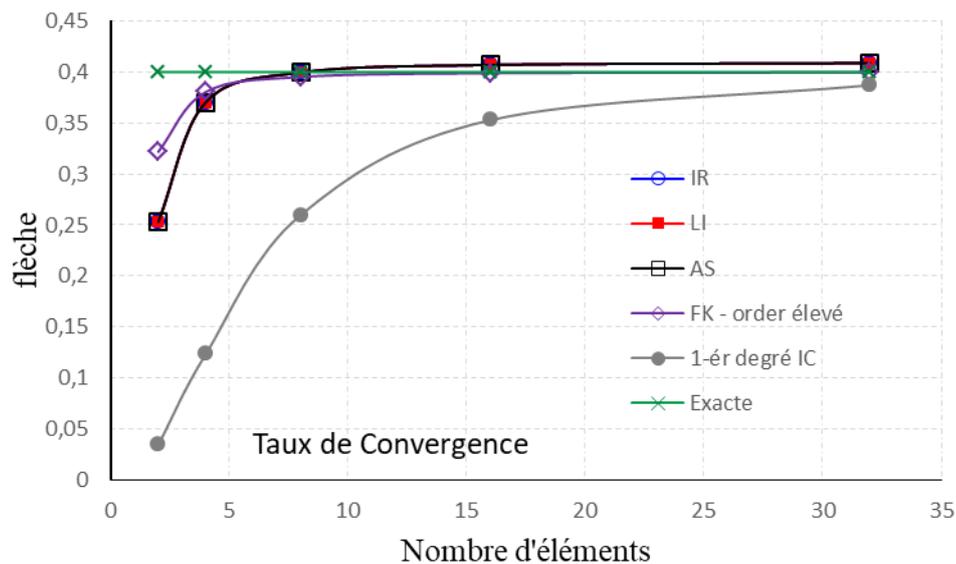


Figure V .18 : Variation de la flèche en termes de nombre d'éléments

On constate que pour les éléments basés sur interpolation linéaire, des maillages relativement fins peuvent être nécessaires pour avoir une solution précise.





# **Conclusion Générale**

### Conclusion Générale

La modélisation et l'étude du comportement des poutres épaisses, en particulier en ce qui concerne le cisaillement transversal, constituent un domaine crucial dans l'ingénierie structurelle. Cette recherche approfondie a permis de mieux comprendre les mécanismes internes qui gouvernent la réponse des poutres épaisses sous différentes charges. L'analyse du cisaillement transversal, souvent négligée dans les poutres minces, devient essentielle pour garantir la précision des modèles et la sécurité des structures.

Les résultats obtenus démontrent que les effets du cisaillement transversal ne peuvent être ignorés dans la conception des poutres épaisses. En intégrant ces effets dans les modèles analytiques et numériques, nous pouvons améliorer la précision des prédictions de déformation et de contrainte. Cela a des implications directes sur la fiabilité et la durabilité des structures.

En conclusion, cette étude souligne l'importance de prendre en compte le cisaillement transversal dans l'analyse des poutres épaisses. Les approches améliorées développées peuvent être appliquées à une variété de matériaux et de conditions de chargement, offrant ainsi des outils précieux pour les ingénieurs et les chercheurs visant à concevoir des structures plus sûres et plus efficaces. Cette recherche ouvre également la voie à des études futures pour explorer des modèles encore plus sophistiqués et des applications pratiques étendues.

# Références

## Références

---

- [1] Wikipedia: Euler-Bernoulli beam theory]([https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli\\_beam\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory))
- [2] [Engineering LibreTexts: Euler-Bernoulli Beam Theory]([https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Structural\\_Engineering/Book%3A\\_Introduction\\_to\\_Structural\\_Mechanics\\_\(Popovics\)/02%3A\\_https://books.google.com/books/about/Theory\\_of\\_Elastic\\_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC#v=onepage&q&f=falsehttps://books.google.com/books/about/Theory\\_of\\_Elastic\\_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC#v=onepage&q&f=false](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Structural_Engineering/Book%3A_Introduction_to_Structural_Mechanics_(Popovics)/02%3A_https://books.google.com/books/about/Theory_of_Elastic_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC#v=onepage&q&f=falsehttps://books.google.com/books/about/Theory_of_Elastic_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC#v=onepage&q&f=false) 11-03-2024
- [3] Livre « Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics Eugenio Oñate Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences Vol. 2 Beams, Plates and Shells' »
- [4] "Mechanics of Materials" by Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., John T. DeWolf
- [5] Cazenave, Michel. Méthode des éléments finis-2e éd.: Approche pratique en mécanique des structures. Dunod, 2013.
- [6] "Advanced Mechanics of Materials" by Arthur P. Boresi, Richard J. Schmidt -
- [7] "Theory of Plates and Shells" by S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger
- [8] Book: An Introduction to the Finite Element Method by J.N. Reddy
- [9] Book: Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS by Saeed Moaveni - ANSYS.
- [10] Book: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals by O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor
- [11] Book: Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 19 by Huei-Huang Lee - ANSYS Workbench
- [12] J. R. Claeys, D. R. Tolfo, and R. D. Copetti, "Nonlocal Timoshenko simply supported beam: second spectrum and modes," *ZAMM J. Appl. Math. Mech. Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 100, p. e201900163, 2020.
- [13] Elishakoff, "An equation both more consistent and simpler than the bresse–timoshenko equation," in *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 168. Berlin: Springer, 2010, pp. 249–254.
- [14] "Theory of Elasticity" by S. Timoshenko and J.N. Goodier

## Références

---

[15] D. S. Almeida Jr., A. J. A. Ramos, and M. M. Freitas, “Energy decay for damped shear beam model and new facts related to the classical Timoshenko system,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 120, p. 107324, 2021.