République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi-Tebessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département Mathématique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Existence et Multiplicité des Solutions d'un Problème Elliptique de Double Phase

Présenté Par:

Rahma Bakhouche

Devant le jury :

Mr.Kamel Akrout	PROF	Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi	Président
Mrs, Hakima Degaichia	MCA	Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi	Examinatrice
Mrs, Sounia Zediri	MCB	Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi	Encadreur

Date de soutenance : 08/06/2024

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر وعرفان

سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا، اشكر الله واحمده على فضل نعمه عليا، نعمة العقل التي أنار بها دربيوفكري ونعمة الذاكرة التي حفظت بها سري وجهري. والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آلة وصحبه أجمعين.

إن من تمام شكر الله، شكر أهل الفضل والبر، وعملا بقول نبيه محمد صلى الله عليه وسلم: >> من لا يشكر الناس لا يشكر الله ومن لا يشكر القليل لا يشكر الـكثير

رواه " أحمد والترمذي " واخص بالشكر الجزيل أساتذة الخير الذين علموني بلا شك أن العلم من أجمل >> العبادات وأفضلها، وإن من آمالي وتطلعاتي في هذا الصرح أن اتقدم بجزيل الشكر إلى كل من ساعدني وساهـم في تكويني طيلة مشواري الدراسي من أساتذة التعليم الابتدائي، وصولا إلى أساتذة التعليم العالي والبحث العلمي في قسم الرياضيات و الإعلام الآلي بجامعة العربي التبسي واخص بالذكر الأستاذة المشرفة المحترمة " زديري صنـيـة " على كل ما قدمته لي من معلومات

و توجيهات قيمة ساهمت في إثراء بحثي العلمي، فهي برهان للذين بذلوا شاق الجهد و يسروا العسير بقدرة الصمد القدير . كما اشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتني بقبولها مناقشة مذكرتي كل من الأستاذ " عكروت كمال " رئيسا و الأستاذة " دقايشية حكيمة " ممتحنا اللذين لاشك أنهما سيفيضون عليا بتوجيهاتهم القيمة وملاحظاتهم السديدة. دون أن اغض الطرف بالشكر والثناء على إخواني الطلبة المقربين بصلة العلم في فيحاء الأخوة والسند. وخاصة طلبة ماستر 2دفعة 2024راجية من المولى العلي القدير كل التوفيق والفلاح. وفي الأخير اشكر كل من قدم لي يد العون والمساعدة من قريب أو بعيد ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر والعرفان .ولـكم مني فائق التقدير والاحترام.

Congratulations!

إهداء

من قال أنا لها "نالها "
وأنا لها وان أبت رغما عنها أتيت بها.

كانت دروبا قاسية ولقد خسرت بها الكثير ولكني " وصلت " والحمد لله
ولهذا أهدي ثمرة جهدي إلى

الذي لديه القدرة على فك المستحيل الى صانع الاقدار اليك يا الله أقدم لك
جهدي وشكري فالحمد لله الذي يحكم بالحق ويجزي كل نفس بما تسعى

الى الذي زين اسمي بأجمل الألقاب من دعمني بلا حدود واعطاني بلا مقابل
الى من علمني ان الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة الى من غرس في روحي مكارم
الاخلاق داعمي
الأول في مسيرتي وسندي
وقوتي وملاذي بعد الله.....
الى فخري واعتزازي والدي (رشيد بخوش)

الى من جعل الجنة تحت اقدامها واحتضنني قلبها قبل يدها وسهلت لي الشدائد بدعائها
الى القلب الحنون
والشمعة التي كانت لي في الليالي المظلمات
سر قوتي ونجاحي ومصباح دربي الى وهج حياتي والدتي (فاطمة نصرة)

الى ضلعي الثابت وامان ايامي الى ملهمي نجاحي الى من شددت عضدي بهم فكانوا لي
ينابيع ارتوي منها
الى خيرة ايامي وصفوتها الى قرة عيني اخوتي (محمد – رائد - زكرياء)

لكل من كان عونا وسندا في هذا الطريق...الى من عشت معهم أجمل لحظات حياتي الى
من شهدوا معي متاعب الدراسة وسهر الليالي لرفقاء السنين وأصحاب الشدائد خصوصا
الى صديقاتي (وئام قتال. جيهان عويشات. رباب غانم).

الى عائلتي (اجدادي وجداتي - اخوالي وخالاتي - اعمامي وعماتي)

اهديكم هذا الإنجاز وثمرة نجاحي التي لطالما تمنيته ها انا اليوم اتممت اول ثمراته
راجية من الله تعالى ان ينفعني بما علمني وان يعلمني ما أجهل ويجعله حجة لي لا علي.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود وتعدد الحلول لمسألة إهليلجية بمدخلين في وجود شروط حدية غير خطية. وذلك بتطبيق نظرية النقاط الحرجة في منوعات نهاري وتقنية الاقتطاع والمقارنة بالإضافة إلى ذلك، حددنا أيضا اشارة الحلول (حل موجب ، حل سالب واخر يغير الاشارة).

وبشكل مستقل ، نثبت أن الحلول الضعيفة لفئة أعم من هذه المسألة هي حلول محدودة.

الكلمات المفتاحية :

منوعات نهاري، نظرية النقاط الحرجة، درجة طوبولوجية لبرور ونظرية مرور - جبل

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions d'un problème elliptique de double phase avec des conditions aux bords nonlinéaires, en appliquant la théorie des points critiques dans les variétés de Nehari, la technique de troncation et la comparaison. De plus, on a également déterminé le signe des solutions (une positive, une négative et une autre qui change de signe "solution nodale")

Et dans un intérêt indépandant nous prouvons que les solutions faibles sont bornées, pour une classe plus générale de tel problème.

Mots clés :

Variété Nehari, théorie de points critiques, degré topologique de Brouwer et théorème du col.

Abstract

The aim of this memoir is to study the existence and multiplicity of solutions of a double phase elliptical problem with nonlinear boundary conditions, by applying the critical point theory in Nehari manifold, truncation technique and comparison. In addition, we also determine the sign of the solutions (one positive, one negative, one nodal)

And in an independent interest we prove for a general class of such problem that the weak solutions are bounded.

Keywords :

Nehari manifold, critical points theory, Brouwer topological degree, Mountain pass theorem.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles revêtent une importance cruciale dans la modélisation et la description d'un large éventail de phénomènes tels que la dynamique des fluides, la physique quantique, le son, la propagation de la chaleur, électricité statique, diffusion, gravité, chimie, biologie, calculatrice graphique et prévisions météorologiques,...

Ces dernières années, les auteurs se sont intéressés aux problèmes elliptiques dits à double phase, à l'origine, telles classes des problèmes ont éte introduites par Zhikov [10, 13] pour fournir des modèles de matériaux hautement anisotropes, et aussi on la trouve dans les travaux de Zhikov-Kozlov-Olenik voir [21].

Dans ce mémoire nous étudions des problèmes elliptiques de double phase, le premier contient un terme de convenction et le deuxième sous la forme

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = f(x,u) - |u|^{p-2}u - \mu(x)|u|^{q-2}u, x \in \Omega, \\ (|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u)\upsilon = g(x,u), x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions Carathéodory, vérifiant certaines conditions, où $q < r_1 < p^*$ et $q < r_2 < p_*$, les exposants p^*et p_* sont déterminés, l'étude sera faite dans les espaces de Musilak-Orlicz [8].

Sous certaines conditions sur le terme de convenction nous obtenons un résultat de régularité de la solution du premier problème.

Et nous prouvons l'existence de trois solutions pour le deuxième problème, deux ne changent pas de signe et la troisième nodale (change de signe), en utilisant la théorie des points critiques de la fonctionnelle d'énergie et leurs trancations dans les variétés de Nehari.

En premier lieu, nous présentons quelques préliminaires d'analyse fonctionnelle concernant les espaces de Musilak-Orlicz. Nous aborderons ensuite dans le deuxième chapitre quelques techniques et méthodes telles que la théorie des points critiques, variétés de Nehari, et le degré topologique de Borouwer. Enfin, nous avons consacré le chapitre 3 à l'étude des problèmes elliptiques de double phase précisément nous démontrons un résultat de régularité et un résultat de multiplicité des solution compris leur signe.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Sommaire

Ce chapitre vise à présenter les concepts de base, les notations et les résultats élémentaires utilisés tout au long du mémoire.

1.1 Espaces fonctionnelles usuelles

1.1.1 Espaces de Lebesgue usuelles

Définition 1.1 *[2] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ pour $1 \leq p < +\infty$ on definit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \textit{mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

c'est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $p = +\infty$, on definit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } \exists c > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leq c. \textit{ p.p sur } \Omega \},$$

c'est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leq c. \textit{ p.p sur } \Omega \}.$$

Définition 1.2 *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ par*

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}^N) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^N;\ \textit{mesurable et } \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.1 *[2] Soit $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif et séparable, son dual est $L^{p}(\Omega)$.*

Si $p = 1$, l'epace $L^1(\Omega)$ est non réflexif et séparable, son dual est $L^\infty(\Omega)$.

Si $p = \infty$, l'epace $L^\infty(\Omega)$ est non réflexif et non séparable, son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

1.1.2 Espaces de Sobolev usuelles

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ et soient $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$

Définition 1.3 *[2] On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ et } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

avec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N,$$

et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D^\alpha,$$

sont les dérivées au sens de distributions, c-à-d :

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme suivante pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $p = +\infty$,

$$\|u\|_\infty = \max |\alpha| \leq m \|D^\alpha U\|_\infty.$$

Cas particulier $(p = 2)$

$W^{m,2}(\Omega)$ (noté aussi $H^m(\Omega)$) est un espace de pré- Hilbertient muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{Hm} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq m}^{N} \langle D^\alpha u; D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On a : $\langle u, v \rangle_{H^m} = \|u\|_{H^m}^2$

Définition 1.4 *[2] (Espace$W^{1,p}(\Omega)$)*

On appelle espace de sobolev d'ordre 1 l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L(\Omega) \text{ telle que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, ..., N \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^P(\Omega)}.$$

Pour $p = 2, W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

est de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^P(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

notons que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.2 *[2] L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*

1) Un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$

2) Un espase séparable pour $1 \leq p < \infty$

3) Un espace réflexif pour $1 < p < \infty$

Définition 1.5 *[8] Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, il est munit de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.3 *[8] Injections*

On a

$$W^{1,p}(\Omega) \to L^{\widehat{p}}(\Omega),$$

injection compacte pour tout $\widehat{p} < p$ *et cotinue si* $\widehat{p} = p^*$, *tele que* p^* *est l'exposon critique de* p *donné par*

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} \text{ si } p < N \\ \infty \text{ si } p \geq N \end{cases} \tag{1.1}$$

De plus, on considère la mesure de Hausdorff (surface) de dimension $(N-1)\sigma$ sur le bord $\partial\Omega$ de Ω.

Nous introduisons de manière usuelle l'espace de Lebesgue de frontière $L^p(\partial\Omega)$ voir [8] menu la norme $\|.\|_{p,\partial\Omega}$. Il est bien connu qu'il existe un unique opérateur linéaire continu,

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^{\widetilde{p}}(\partial\Omega), \widetilde{p} \leq p_*,$$

appelé application trace, tel que

$$\gamma(u) = u\,|_{\partial\Omega} \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\overline{(\Omega)},$$

ici, p_* est l'exposant critique de p sur le bord défini par

$$p_* = \begin{cases} \frac{(N-1)p}{N-p} \text{ si } p < N \\ \infty \text{ si } p \geq N. \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1.3 Espases de Musielak-Orlicz

Soit $\mathcal{H} : \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ la fonction

$$(x; t) \to t^p + \mu(x)t^q.$$

$$1 < p < q < N, \ \frac{Nq}{N+q-1} < p, \ \mu \in L^\infty(\Omega), \mu(x) \geq 0, x \in \Omega. \tag{1.3}$$

et

$$1 < p < q < N, \ \frac{q}{p} < 1 + \frac{1}{N}, \ 0 \leq \mu(.) \in C^{0,1}(\overline{\Omega}). \tag{1.4}$$

et on

$$\frac{Nq}{N+q-1} < p \text{ et } \frac{q}{p} < 1 + \frac{1}{N}$$

Soit

$$\rho_{\mathcal{H}}(u) := \int_\Omega \mathcal{H}(x, |u|)dx = \int_\Omega |u|^p + \mu(x)|u|^q dx. \tag{1.5}$$

Définition 1.6 *[8] L'espace de Musielak-Orlicz $L^{\mathcal{H}}(\Omega)$ est défini par :*

$$L^{\mathcal{H}}(\Omega) = \{u \mid u : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ est mesurable et } \rho_{\mathcal{H}}(u) < +\infty\},$$

équipé de la norme luxembourge

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \inf\left\{\tau > 0 : \rho_{\mathcal{H}}\left(\frac{u}{\tau}\right) \leq 1\right\}.$$

L'espace $L^{\mathcal{H}}(\Omega)$ est un Banach séparable, uniformément convexe et reflexife.

Définition 1.7 *[8]*

$$L^q_\mu(\Omega) = \left\{u \mid u : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ est mesurable et } \int_\Omega \mu(x)|u|^q dx < +\infty\right\},$$

et doter par la semi-norme

$$\|u\|_{q,\mu} = \left(\int_\Omega \mu(x) |u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De la même manière, nous définissons $L^q_\mu \left(\Omega; \mathbb{R}^N \right)$.

Définition 1.8 *[8] L'espace Sobolev Musielak-Orlicz $W^{1,\mathcal{H}}$ est défini par*

$$W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\mathcal{H}}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{\mathcal{H}}(\Omega) \right\},$$

équipé de la norme

$$\|u\|_{1,\mathcal{H}} = \|\nabla u\|_{\mathcal{H}} + \|u\|_{\mathcal{H}},$$

tel que $\|\nabla u\|_{\mathcal{H}} = \||\nabla u|\|_{\mathcal{H}}$.

Proposition 1.4 *[4](Injections continues et compactes)*

Soit $1 < p < q < N$, $\frac{Nq}{N+q-1} < p$, $\mu(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$, et soit

$$p^* := \frac{N_p}{N-p} \text{ et } p_* := \frac{(N-1)\,p}{N-p}, \tag{1.6}$$

sont les exposants critiques de p, on a les injection suivantes

(i) $L^{\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ et $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,r}(\Omega)$ sont continus pour tout $r \in [1,p]$

(ii) $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ est continue pour tout $r \in [1,p^*]$

(iii) $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ est compact pour tout $r \in [1,p^*)$

(iv) $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$ est continue pour tout $r \in [1,p_*]$

(v) $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$ est compact pour tout $r \in [1,p_*)$

(vi) $L^{\mathcal{H}}(\Omega) \hookrightarrow L^q_\mu(\Omega)$ est continue

(vii) $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\mathcal{H}}(\Omega)$ est continue.

Proposition 1.5 *[13] Soit $1 < p < q < N$, $\frac{Nq}{N+q-1} < p$, $\mu(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$, et soit $\rho_{\mathcal{H}}$ défini par*

$$\rho_{\mathcal{H}}(u) := \int_\Omega \mathcal{H}(x,|u|)dx = \int_\Omega |u|^p + \mu(x)|u|^q dx, u \in L^{\mathcal{H}}(\Omega).$$

(i) Si $y \neq 0$, alors $\|y\|_{\mathcal{H}} = \lambda$ si et seulement si $\rho_{\mathcal{H}}(\frac{y}{\lambda}) = 1$

(ii) $\|y\|_{\mathcal{H}} < 1$ $(resp. > 1, = 1)$ *si et seulement si* $\rho_{\mathcal{H}}(y) < 1$ $(resp. > 1, = 1)$

(iii) Si $\|y\|_{\mathcal{H}} < 1$*,alors*$\|y\|_{\mathcal{H}}^q \leq \rho_{\mathcal{H}}(y) \leq \|y\|_{\mathcal{H}}^p$

(iv) Si $\|y\|_{\mathcal{H}} > 1$*,alors*$\|y\|_{\mathcal{H}}^p \leq \rho_{\mathcal{H}}(y) \leq \|y\|_{\mathcal{H}}^q$

(v) $\|y\|_{\mathcal{H}} \to 0$*si et seulement si* $\rho_{\mathcal{H}}(y) \to 0$

(vi) $\|y\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$ *si et seulement si* $\rho_{\mathcal{H}}(y) \to +\infty$.

Proposition 1.6 *Soit* $1 < p < q < N$, $\frac{Nq}{N+q-1} < p$, $\mu(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $\mu(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$, *et soit* $\widehat{\rho}_H$ *défini par*

$$\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + \mu(x)|\nabla u|^q)dx + \int_{\Omega} (|u|^p + \mu(x)|u|^q)dx, u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \tag{1.7}$$

(i) Si $y \neq 0$*, alors* $\|y\|_{1,\mathcal{H}} = \lambda$ *si et seulement si* $\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(\frac{y}{\lambda}) = 1$

(ii) $\|y\|_{1,\mathcal{H}} < 1$ $(resp. > 1, = 1)$*si et seulement si* $\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y) < 1$ $(resp. > 1, = 1)$

(iii) Si $\|y\|_{1,\mathcal{H}} < 1$*, alors* $\|y\|_{1,\mathcal{H}}^q \leq \widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y) \leq \|y\|_{1,\mathcal{H}}^p$

(iv) Si $\|y\|_{1,\mathcal{H}} > 1$*, alors* $\|y\|_{1,\mathcal{H}}^p \leq \widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y) \leq \|y\|_{1,\mathcal{H}}^q$

(v) $\|y\|_{1,\mathcal{H}} \to 0$ *si et seulement si* $\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y) \to 0\ddot{A}$

(vi) $\|y\|_{1,\mathcal{H}} \to +\infty$ *si et seulement si* $\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y) \to +\infty$.

Théorème 1.1 *[2](convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré,* (E, A, μ) *à valeurs réelles ou complexes, telle que*

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* f*,*

-il existe une fonction intégrable g *telle que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall x \in E \ |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f *est intégrable et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Théorème 1.2 *[2] (Lemme de Fatou)*

Soit (E, A, μ) un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$,la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :

$$\int \lim_{n\to+\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

1.2 Rappels sur les opérateurs

1.2.1 Opérateurs monotones

Définition 1.9 *[3] Soit X un espace de Banach réel, et soit $A : X \to X$ un opérateur.*

(i) A est dit monotone si et seulement si

$$< Au - Av, u - v > \geq 0 \text{ pour tout } u, v \in X.$$

(ii) A est dit strictement monotone si et seulement si

$$< Au - Av, u - v >> 0 \text{ pour tout } u, v \in X \text{ avec } u \neq v.$$

(iii) monotone maximal si A est monotone et qu'il n'y a pas d'application monotone $\widetilde{A} : X \to 2^{X^*}$ telle que $Gr(A)$ est un sous-ensemble propre de $Gr(\widetilde{A})$, ce qui équivaut à l'implication suivante :

$$(u, u^*) \in X \times X^* : \langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0, \forall (v, v^*) \in Gr(A),$$

implique $(u, u^*) \in Gr(A)$, ($Gr(A)$ est le graphe de A).

Proposition 1.7 *[8] L'opérateur A défini par*

$$\langle A(u), v\rangle_{\mathcal{H}} := \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right) \nabla v dx, \forall u, v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega). \tag{1.8}$$

est bornés , continu, strictement monotone (donc monotone maximal), et il est de type (S_+)*, c'est-à-dire*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ et } \limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0,$$

alors

$$u_n \to u \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega).$$

Définition 1.10 *[8] (La condition de Cerami)*

Si X *est un espace de Banach et* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$*, on dit que* φ *satisfait la condition de Cerami, si toute suite* $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ *telle que* $\{\varphi(u_n)\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ *est bornée et telle que*

$$(1 + \|u_n\|_X)\varphi'(u_n) \to 0 \text{ dans } X^* \text{ lors que } n \to \infty,$$

admet une sous-suite fortement convergente.

Définition 1.11 *[3] (Fonction de Carathéodory)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *,* $N \geq 1$*, un ensemble mesurable non vide, et soient* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, m \geq 1$*, et* $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *ne fonction donnée. La fonction* f *est appelée une fonction de Carathéodory si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $x \to f(x, s)$ *est mesurable pour tout* $s \in \mathbb{R}^m$*.*

(ii) $s \to f(x, s)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^m$*, p. p.*$x \in \Omega$*.*

Définition 1.12 *[3]*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *,* $N \geq 1$*, un ensemble mesurable non vide,* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, m \geq 1$*, et* $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *une fonction donnée ,la superposition ou l'opérateur de Nemytskij* F *associe* $u \longmapsto f \circ u$ *; c'est-à-dire :* F *est défini par :*

$$Fu(x) = (f \circ u)(x) = f(x, u(x)) \text{ pour } x \in \Omega.$$

Lemme 1.1 *[3] Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, m \geq 1$; *une fonction de Carathéodory qui satisfait une condition de croissance de la forme :*

$$|f(x,s)| \leq k(x) + c\sum_{i=1}^{m} |s_i|^{\frac{p_i}{q}}, (s_1, ..., s_m), \ p.p. x \in \Omega; 1 \leq i \leq m,$$

pour une constante positive c *et un certain* $k \in L^q(\Omega)$, *et* $1 \leq q$, $p_i < \infty$ *pour tout* $i = 1, ..., m$. *Alors l'opérateur de Nemytskij* F *défini par :*

$$Fu(x) = f(x, u_1(x), ..., u_m(x)),$$

est continu et borné de $L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_m}(\Omega)$ *vers* $L^q(\Omega)$. *Ici,* u *désigne la fonction vectorielle* $u = (u_1, ..., u_m)$ *De plus,*

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq c\left(\|k\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{p_i}{q}}\right).$$

CHAPITRE 2

Quelques techniques et méthodes

Sommaire

2.1 Notions de la théorie des points critiques

Soit E un espace de Hilbert ou, d'une manière plus générale, un espace de Banach réflexif. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Et on note $\varphi'(u) : E \to E'$,E' le dual de E .

Définition 2.1 *On dit que $u \in E$ est un point critique si $\varphi'(u) = 0$. Si non, u est dit point régulier.*

On dit que $\beta \in E$ est une valeur critique de φ s'il existe un point critiqueu de φ avec $\varphi(u) = \beta$. Si non, β est une valeur régulière.

Théorème 2.1 *[18] Soit la fonctionnelle $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que*

(i) φ est faiblement semi-continue inférieurement,

(ii) φ est coercive.

Alors φ est bornée inférieurement et il existe $u_0 \in E$ tel que

$$\varphi(u_0) = \inf_E \varphi.$$

2.2 Degré topologique de Brouwer

La notion de degré a été introduite par Kronecker pour les applications $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ en 1869. Poincaré, Böhler et Hadamard l'ont ensuite développé au début des années 1990 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications $\mathcal{C}^0$ ont été développées par Nagumo et Heinz.

Nous annonçons un bref rappel.

Définition 2.2 *[11] Soient $N \geq 1$ un entier, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction*

$f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(\partial\Omega)$. On considére $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0,\infty[, \mathbb{R})$ à support compact contenu dans $]0, \varepsilon[$, et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)\, dx = 1.$$

On appelle le degré topologique de Brouwer de f dans Ω par rapport au point cible b le nombre :

$$deg(f, \Omega, b) := \int_\Omega \varphi(|f(x) - b|) J_f(x) dx.$$

Proposition 2.1 *[11] Avec les hypothèses et notations de la définition 2.2, le degré topologique $deg(f, \Omega, b)$ est indépendant de ε et de la fonction φ, pourvu que $\varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$.*

Proposition 2.2 *[11] Soient Ω un ouvert borné, $f_1, f_2 \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et b un point de $\mathbb{R}^N$. On suppose que*

$b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si $\varepsilon > 0$ est telque

$$\varepsilon < \frac{1}{4} dist(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)), \text{ et } \| f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,$$

on a $deg\,(f_1, \Omega, b) = deg\,(f_2, \Omega, b)$.

Théorème 2.2 *[11] Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in \left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N\right)$. On considère un point $b \notin f\,(\partial\Omega)$ et $(f_k)_k$ une suite de fonctions de $C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0 \text{ sur } \overline{\Omega},$$

alors le degré topologique de f_k existe pour k assez grand et le degré topologique de f est défini par :

$$deg\,(f, \Omega, b) := \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, b). \tag{2.1}$$

2.2.1 Propriétés du degré de Brouwer

1- Degré de l'identité

(a) $\deg(I, \Omega, y_0) = 1$, si $y_0 \in \Omega$,0, si $y_0 \notin \overline{\Omega}$.

(b) $\deg(-I, \Omega, y_0) = (-1)^n$, si $y_0 \in \Omega$,0, si $y_0 \notin \overline{\Omega}$.

2- Additivité

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i\in I} \subset \Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant

l'une des assertions suivantes :

(a) $\Omega = \underset{i\in I}{\cup}\Omega_i$ et $y_0 \notin f\left(\partial\Omega\right)$,

(b) $\underset{i\in I}{\cup}\Omega_i \subset \Omega$ et $y_0 \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus \cup_i \Omega_i\right)$.

Alors

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \sum_{i=1}^{N} \deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

3- Invariance par homotopie

Soit $\{f_t\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'applications appartenant à $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, reliées homotopiquement dépendant continûment de t et $\{y_0\,(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille de points indexés continûment par t et telles que

$y_0 \notin f_t(\partial\Omega), \forall t \in [0; 1]$.

Alors le degré $\deg(f_t, \Omega, y_0\,(t))$ ne dépend pas de t.

Définition 2.3 *On dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction réelles continue*

$$H : [0; 1] \times \overline{\Omega} \ \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ telle que } H(0, x) = f(x) \text{ et } H(1; x) = g(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

4-Résolution des équations algébriques Si $y_0 \in f(\overline{\Omega})$, le degré $\deg(f, \Omega, y_0)$ est nul, ou encore, de manière équivalente $\deg(f, \Omega, y_0) \neq 0 \Longrightarrow$ (le problème $x \in \Omega$, $f(x) = y_0$ admet au moins une solution
Si y_1 est voisin de $y_0 \notin f\,(\partial\Omega)$ (dans un sens à préciser), alors

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(f, \Omega, y_1).$$

En particulier, $\deg(f,\Omega,y_0)\in\mathbb{Z}$. **6-Invariance sur le bord** Si $y_0\notin f(\partial\Omega)$ et $f\mid_{\partial\Omega}=g\mid_{\partial\Omega}$, alors

$$\deg(f,\Omega,y_0)=\deg(g,\Omega,y_0).$$

7-Continuité par rapport à la fonction Soit $r=d(y_0,f(\partial\Omega))>0$ et soit $g\in C^1(\overline{\Omega})$ une fonction telle que

$$\sup_{x\in\partial\Omega}\|g(x)-f(x)\|<r,$$

alors

$$\deg(f,\Omega,y_0)=\deg(g,\Omega,y_0).$$

On peut retenir cette propriété en se souvenant que deux fonctions voisines ont même degré.

2.3 Théorème du col (passe montagne)

Théorème 2.3 *[11](Théorème du col " passe montagne")*

Soit H un espace de Hilbert $\varphi\in C^2(H,\mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant la condition de Cerami et soit $u_1,u_2\in H,\|u_1-u_2\|_X>\rho>0$ tellqe

$$\max\{\varphi(u_1),\varphi(u_2)\}<\inf\{\varphi(u):\|u_1-u_2\|_X=\rho\}=:m_\rho$$

et $c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1}\varphi(\gamma(t))$ tel que :

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H):\gamma(0)=u_1,\gamma(1)=u_2\},$$

avec $c\geq m_\rho$. Alors c est une valeur critique de φ.

Lemme 2.1 *[1] (Lemme de déformation contitative)*

Soit H un Hilbert $\varphi\in C^2(H,\mathbb{R}),m_0\in\mathbb{R},\varepsilon>0$.

Sposons que

$$\forall u\in\varphi^{-1}([m_0-2\varepsilon,m_0+2\varepsilon]),\|\varphi'(u)\|\geq 2\varepsilon.$$

Alor il existe $\eta : [0,1] \times H \to H$ *telle que*

(i) $\eta(1,v) = v$ *si* $v \notin \varphi^{-1}([m_0 - 2\varepsilon, m_0 + 2\varepsilon])$

(ii) $\varphi(\eta(1,v)) \leq m_{0-\varepsilon}$ *pour tout* $v \in H$, *avec* $\|v - y_0\|_{1,\mathcal{H}} \leq \delta$.*et* $\varphi(v) \leq m_0 + \varepsilon$

(iii) $\varphi(\eta(1,v)) \leq \varphi(v)$ *pour tout* $v \in H(\Omega)$.

Il s'ensuit facilement que

$$\max_{(s,t)\in D} \varphi\left(\eta\left(1, sy_0^+ - ty_0^-\right)\right) < m_{0.} \tag{2.2}$$

2.4 Méthode de Nehari

C'est une méthode variationnelle qu'elle s'agit de minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle d'énergie, où la contrainte justement, est la variété de Nehari.

Variété de Nehari

Exemple 2.1 *[19] Dans un cadre assez général, on considère le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dont l'équation s'avère étre l'équation d'Euler de la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u(x))dx \text{ où } F(x,u(x)) = \int_0^u f(x,s)ds.$$

qu'on considère, entenant compte de la condition au bord, sur l'espace fonctionnel $H = W_0^{1,2}(\Omega)$. *évidemment la fonctionnelle* $J(u)$ *peut ne pas être bornée sur tout l'espace mais peut l'être sur certains sous-ensembles de* H. *Un bon candidat pour un tel sous-ensemble est la dite variété de Nehari :*

$$\mathcal{N} = \{u \in H : \langle J'(u), u\rangle = 0\}$$

Le résultat suivant introduit une classe d'applications à travers les quelles ils'avère intéressant de voir ces variétés.

Théorème 2.4 *[19] Soit $u \in H_{\setminus\{0\}}$ et $t > 0$*

Alors $tu \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\Phi_u^{'} = 0$ où $\Phi_u(t) := J(tu)$.

Preuve *On a par définition*

$$\Phi_u(t) = J(tu),$$

et donc :

$$\Phi_u'(t) = \langle J'(u), u\rangle = \frac{1}{t}\langle J'(tu), tu\rangle.$$

Si $\Phi_u'(t) = 0$,alors $\langle J'(tu), tu\rangle = 0$, i.e. : $tu \in \mathcal{N}$

En d'autres termes, les points de la variété $\mathcal{N}$ correspondent aux points stationnaires des applications Φ_u. En conséquence logique, on divise $\mathcal{N}$ en trois sous-ensembles $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}^-$ et $\mathcal{N}^\circ$ qui correspondent aux minimums locaux, maximums locaux et aux points d'inflexion des applications Φ_u. Pour cela, on se penche sur la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\Phi_u'(t) \quad &= \langle J'(tu), u\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla(tu)|\,|\nabla u|\,dx - \lambda\int_\Omega f(x, tu)\,u dx \\
&= t\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \lambda\int_\Omega f(x, tu)\,u dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Phi_u''(t) \quad &= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \lambda\int_\Omega \left(f_u'(x, tu)\,u\right) u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \lambda\int_\Omega \left(f_u'(x, tu)\right) u^2 dx.
\end{aligned}$$

Et on peut définir les sous-ensembles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^+ &= \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x, u)\,u^2)dx > 0\right\} \\
\mathcal{N}^- &= \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x, u)\,u^2)dx < 0\right\} \\
\mathcal{N}^\circ &= \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x, u)\,u^2)dx = 0\right\}
\end{aligned}$$

et c'est $\Phi_u''(1)$ qui est utilisée pour ces définitions, puisqu'il est clair que si u est un minimum local *pour J, alors Φ_u a un minimum local en $t = 1$.*

Théorème 2.5 *[19] Soit $u \in \mathcal{N}$. Alors*

(i)

$$\Phi_u^{'}(1) = 0$$

(ii)

$$\begin{cases} u \in \mathcal{N}^{+} \textit{ si } \Phi_u^{''}(1) > 0 \\ u \in \mathcal{N}^{-} \textit{ si } \Phi_u^{''}(1) < 0 \\ u \in \mathcal{N}^{\circ} \textit{ si } \Phi_u^{''}(1) = 0. \end{cases}$$

En effet, soit $u \in \mathcal{N}$. Ceci est équivalent à dire que :

$$\langle J'(u), u \rangle = 0,$$

ce qui équivaut à : $\Phi_u^{'}(1) = 0$ d'où (i)

Pour (ii), il y a donc trois cas :

$$\begin{aligned} u \;\; &\in \;\; \mathcal{N}^{+} \Longrightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)u^2)dx > 0 \\ &\Longrightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,tu) \mid_{(t=1)} u^2)dx > 0 \\ &\Longrightarrow \Phi_u^{''}(1) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \;\; &\in \;\; \mathcal{N}^{-} \Longrightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\, u^2)dx < 0 \\ &\Longrightarrow \Phi_u^{''}(1) < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \;\; &\in \;\; \mathcal{N}^{\circ} \Longrightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\, u^2)dx = 0 \\ &\Longrightarrow \Phi_u^{''}(1) = 0. \end{aligned}$$

Le théorème suivant atteste que les minimiseurs de J sur la variété $\mathcal{N}$ sont bien, en général, points critiques de J :

Théorème 2.6 *[19] Supposons que u_0 est un minimiseur local pour J sur $\mathcal{N}$ et que $u_0 \notin \mathcal{N}^{\circ}$. Alors*

$$J^{'}(u_0) = 0.$$

Preuve Démonstration. Soit u_0 un minimum local pour J sur $\mathcal{N}$ avec $u_0 \notin \mathcal{N}^{\circ}$ (c'est-à-dire :$\Phi''_{u_0}(1) \neq 0$). Ceci implque que :

$$J(u_0) = \min_{\gamma(u)=0} J(u),$$

où $\gamma(u) = \left\langle J^{'}(u), u \right\rangle = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \lambda f(x,u)\, u \right) dx$. Il s'en suit, d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, que :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, J^{'}(u_0) = \mu \cdot \gamma^{'}(u_0).$$

Ainsi :

$$\left\langle J^{'}(u_0), u_0 \right\rangle = \mu \left\langle \gamma^{'}(u_0), u_0 \right\rangle$$

Compte tenu du fait que $u_0 \in \mathcal{N}$, il vient que :

$$\left\langle J^{'}(u_0), u_0 \right\rangle = \mu \left\langle \gamma^{'}(u_0), u_0 \right\rangle = 0.$$

Et donc :

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda f(x,u_0)\, u_0 \right) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\Omega} \left(|\nabla u_0|^2 \right) dx = \lambda \int_{\Omega} f(x,u_0)\, u_0 dx.$$

Et alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \gamma'(u_0), u_0 \right\rangle &= \int_\Omega (2|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u_0)(u_0)^2)dx - \lambda \int_\Omega f(x,u_0)\,u_0 dx \\
&= \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u_0)(u_0)^2)dx \\
&= \Phi''_{u_0}(1) \\
&\neq 0 \text{ puisque } u_0 \notin \mathcal{N}^\circ.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\mu = 0$ (compte tenu du fait que le produit est nul). Injecté dans

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, J'(u_0) = \mu \cdot \gamma'(u_0),$$

cela donne :

$$J'(u_0) = 0.$$

CHAPITRE 3

Traitement d'un probléme elliptique de double phase

Sommaire

3.1 Estimations a priori pour les problèmes à double phase

Dans cette section, nous allons prouver que les solutions faibles du problème de double phase sont bornées, dans un cadre plus générale nous étudions un problème avec un terme de convection voir [8] , c'est-à-dire le membre droit de l'équation dépond du gradient de la solution.

Nous considérons le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+\mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)=h_1(x,u,\nabla u),x\in\Omega \\ \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+\mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)v=h_2(x,u),x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{P$_1$}$$

Hypothèses :

Soit (h_1,h_2), $h_1:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ et $h_2:\partial\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions de Carathéodory satisfaisant

$$\begin{cases} \mathrm{h}_1)\ |h_1(x,s,\xi)|\le a_1|\xi|^{p\frac{r_1-1}{r_1}}+a_2|s|^{r_1-1}+a_3,\ x\in\Omega \\ \mathrm{h}_2)\ |h_2(x,s)|\le a_4|s|^{r_2-1}+a_5,x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

pour tout $s\in\mathbb{R}$ et pour tout $\xi\in\mathbb{R}^N$ et des constantes positives $a_i,i\in\{1,...,5\}$, $q<r_1\le p^*$ ainsi que $q<r_2\le p_*$, où p^* et p_* sont les exposants critiques de p indiqué dans (1.6).

Définition 3.1 *(Solution faible)*

Nous appelons $u\in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ une solution faible du problème (P_1) si

$$\int_\Omega(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+\mu(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u)\nabla v\,dx=\int_\Omega h_1(x,u,\nabla u)vdx+\int_{\partial\Omega}h_2(x,u)v\,d\sigma,\forall v\in W^{1,H}(\Omega). \tag{3.1}$$

En exploitant le résultat récent de Marino-Winkert [14] nous pouvons prouver le résultat suivant (P$_1$).

Théorème 3.1 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et $\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2$ sont satisfaites et soit $u\in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ une solution faible du problème (P_1) . Alors $u\in L^\infty(\Omega)$.*

On a pour $s \in \mathbb{R}$, soit $s^{\pm} = \max\{\pm s, 0\}$, et pour $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ nous définissons $u^{\pm}(.) = u(.)^{\pm}$ tels que

$$|u| = u^+ + u^-, u = u^+ - u^- \text{ et } u^{\pm} \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega).$$

Preuve On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $u \geq 0$.

Soit $h > 0$ et définissons $u_h := min\{u, h\}$. Choisissons $v = uu_h^{\kappa p}$, avec $\kappa > 0$ comme fonction de test dans (3.1) nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u|^p u_h^{\kappa p} dx + \kappa p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_h u_h^{\kappa p-1} u\, dx \\
&+ \int_\Omega \mu(x) |\nabla u|^q u_h^{\kappa p} dx + \kappa p \int_\Omega \mu(x) |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla u_h u_h^{\kappa p-1} u\, dx \\
&\qquad = \int_\Omega h_1(x, u, \nabla u) u u_h^{\kappa p} dx + \int_{\partial\Omega} h_2(x, u) u u_h^{\kappa p} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Evidemment, la troisième et la quatrième intégrale du membre gauche de (3.2) sont non négatives.

Cela donne

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u|^p u_h^{\kappa p} dx + \kappa p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_h u_h^{\kappa p-1} u\, dx \\
&\leq \int_\Omega h_1(x, u, \nabla u) u u_h^{\kappa p} dx + u u_h^{\kappa p} + \int_{\partial\Omega} h_2(x, u) u u_h^{\kappa p} d\sigma.
\end{aligned}$$

Puisque $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ on peut procéder exactement comme dans la preuve du théorème (3.1) de Marino Winkert [14, en commençant par(3.2)] pour obtenir que $u \in L^\infty(\Omega)$.

3.2 Solutions de signe constant

Dans cette section nous allons prouver l'existence des solutions de signe constant du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u + \mu(x) |\nabla u|^{q-2} \nabla u\right) = f(x, u) - |u|^{p-2} u - \mu(x) |u|^{q-2} u, x \in \Omega \\ \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u + \mu(x) |\nabla u|^{q-2} \nabla u\right) v = g(x, u), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P$_2$}$$

Tout d'abord, nous énonçons nos hypothèses.

(H) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions Carathéodory telles que :

(i) Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$|f(x,s)| \leq c_1 \left(1 + |s|^{r_1 - 1}\right), x \in \Omega,$$
$$|g(x,s)| \leq c_2 \left(1 + |s|^{r_2 - 1}\right), x \in \partial\Omega,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, où $q < r_1 < p^*$ et $q < r_2 < p_*$ avec les exposants critiques p^*et p_* donnés respectivement dans (1.1) et (1.2),

(ii) On a

$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{q-2} s} = +\infty, \text{ uniformément pour } x \in \Omega,$$
$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{g(x,s)}{|s|^{q-2} s} = +\infty, \text{ uniformément pour } x \in \partial\Omega,$$

(iii) Et aussi

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s} = 0, \text{ uniformément pour } x \in \Omega,$$
$$\lim_{s \to 0} \frac{g(x,s)}{|s|^{p-2} s} = 0, \text{ uniformément pour } x \in \partial\Omega,$$

(iv) Les fonctions

$$s \to f(x,s)s - qF(x,s) \text{ et } s \to g(x,s)s - qG(x,s),$$

sont non décroissants sur $\mathbb{R}^+$ et non croissants sur $\mathbb{R}^-$, et pour $x \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$, respectivement, où

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \text{ et } G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt,$$

(v) Les fonctions

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} \text{ et } \frac{g(x,s)}{|s|^{q-1}},$$

sont strictement croissants sur $(-\infty, 0)$ et sur $(0, +\infty)$, $x \in \Omega$ et $x \in \partial\Omega$, respectivement.

Notons que la continuité de $f(x, .)$ et $g(x, .)$ avec (H) (iii) implique que

$$f(x, 0) = 0, x \in \Omega \text{ et } g(x, 0) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Définition 3.2 *(Solution faible) On dit que $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ est une solution faible du problème (P_2) si elle satisfait*

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u + \mu(x) |\nabla u|^{q-2} \nabla u\right) \nabla v dx + \int_\Omega \left(|u|^{p-2} u + \mu(x) |u|^{q-2} u\right) v dx$$
$$= \int_\Omega f(x, u) v dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma,$$

pour toutes les fonctions de test $v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$.

La fonctionnelle d'énergie $\varphi : W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ correspondant au problème (P_2) est définie par

$$\varphi(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{q} \|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|u\|_{q,\mu}^q - \int_\Omega F(x, u) dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma,$$

pour tout $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$, on définit $K_\varphi = \{u \in X : \varphi'(u) = 0\}$, étant$\varphi$.

Notons que $\varphi \in C^1(W^{1,\mathcal{H}}(\Omega))$, voir Perera-Squassina [17, proposition(2.1)] et que tout $u \in K_\varphi = \left\{u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega), \varphi'(u) = 0\right\}$ est une solution du problème (P_2).

Nous voulons d'abord produire deux solutions de signes constants. À cette fin, nous considérons la positive et la négative troncations de la fonctionnelle d'énergie φ, $\varphi_\pm : W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_\pm(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{q} \|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|u\|_{q,\mu}^q - \int_\Omega F\left(x, \pm u^\pm\right) dx - \int_{\partial\Omega} G\left(x, \pm u^\pm\right) d\sigma.$$

Proposition 3.1 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors les fonctionnelles $\varphi_\pm$ vérifient la condition de Cerami.*

Preuve Nous montrerons la preuve uniquement pour φ_+ la preuve pour φ_- fonctionne de la même manière.

Soit $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ une suite telle que

$$|\varphi_+(u_n)| \leq M_1 \text{ pour certains } M_1 > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

et

$$\left(1 + \|u_n\|_{1,\mathcal{H}}\right) \varphi_+^{'}(u_n) \to 0 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega). \tag{3.4}$$

Grâce à (3.4) nous avons

$$\begin{aligned} | \quad & \textstyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v \, dx + \int_\Omega \mu(x) |\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n \nabla v \, dx \\ & + \textstyle\int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n v \, dx + \int_\Omega \mu(x) |u_n|^{q-2} u_n v \, dx \\ & - \textstyle\int_\Omega f(x, u_n^+) v \, dx - \int_{\partial\Omega} g(x, u_n^+) v \, d\sigma \; | \leq \frac{\varepsilon_n \|v\|_{1,\mathcal{H}}}{1+\|u_n\|_{1,\mathcal{H}}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

pour tout $v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$. avec $\varepsilon_n \to 0^+$. En prenant $v = -u_n^- \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ dans (3.5) on obtient

$$\left\|\nabla u_n^-\right\|_p^p + \left\|\nabla u_n^-\right\|_{q,\mu}^q + \left\|u_n^-\right\|_p^p + \left\|u_n^-\right\|_{q,\mu}^q \leq \varepsilon_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(u_n^-) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, par la proposition 1.6 (v) nous avons

$$\left\|u_n^-\right\|_{1,\mathcal{H}} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi

$$u_n^- \to 0 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega). \tag{3.6}$$

En utilisant (3.3) et (3.6) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{q}{p} \left\|\nabla u_n^+\right\|_p^p + \left\|\nabla u_n^+\right\|_{q,\mu}^q + \frac{q}{p} \left\|u_n^+\right\|_p^p + \left\|u_n^+\right\|_{q,\mu}^q \\ & - \int_\Omega qF\left(x, u_n^+\right) dx - \int_{\partial\Omega} qG\left(x, u_n^+\right) \, d\sigma \leq M_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

pour certains $M_2 > 0$. On choisit $v = u_n^+ \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ dans (3.5) et on obtient

$$-\left\|\nabla u_n^+\right\|_p^p - \left\|\nabla u_n^+\right\|_{q,\mu}^q - \left\|u_n^+\right\|_p^p - \left\|u_n^+\right\|_{q,\mu}^q$$

$$+\int_\Omega f\left(x, u_n^+\right) u_n^+ dx + \int_{\partial\Omega} g\left(x, u_n^+\right) u_n^+ \, d\sigma \leq \varepsilon_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Maintenant on ajoute (3.7) et (3.8) pour obtenir

$$\left(\frac{q}{p} - 1\right) \|\nabla u_n^+\|_p^p + \left(\frac{q}{p} - 1\right) \|u_n^+\|_p^p + \int_\Omega (f\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qF\left(x, u_n^+\right))dx$$
$$+ \int_{\partial\Omega} (g\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qG\left(x, u_n^+\right))d\sigma \leq M_3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

lemme

La suite $\{u_n^+\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ est bornée.

En effet, nous supposons, en passant si nécessaire à une sous-suite , que

$$\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}} \to +\infty \text{ comme } n \to +\infty. \tag{3.9}$$

Définir $y_n = \frac{u_n^+}{\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ on voit que $\|y_n\|_{1,\mathcal{H}} = 1$ et $y_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,nous pouvons supposer que

$$y_n \rightharpoonup y \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ et } y_n \to y \text{ dans } L^{r_1}(\Omega) \text{ et } L^{r_2}(\partial\Omega), y \geq 0, \tag{3.10}$$

voir proposition 1.4 (iii), (v).

1$^{\text{ier}}$**Cas :** $y \neq 0$

Soit.

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : y(x) > 0\} \text{ et } \Gamma_+ = \{x \in \partial\Omega : y(x) > 0\}.$$

Bien sûr, $|\Omega_+| > 0$. Alors, à cause de (3.10) nous avons

$$u_n^+(x) \to +\infty, x \in \Omega_+.$$

et donc, en raison de (H)(ii),

$$\frac{F\left(x, u_n^+(x)\right)}{u_n^+(x)^q} \rightarrow +\infty,\, x \in \Omega_+. \tag{3.11}$$

En appliquant (3.11), l'hypothèse (H)(ii) et le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_{\Omega_+} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx \rightarrow +\infty. \tag{3.12}$$

De plus, par (H)(i) et (ii) nous avons

$$F(x, s) \geq -M_4,\, x \in \Omega, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

et pour certains $M_4 > 0$. De (3.13) il résulte

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx &= \int_{\Omega_+} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx + \int_{\Omega \backslash \Omega_+} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx \\
&\geq \int_{\Omega_+} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx - \frac{M_4}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} |\Omega|_N .
\end{aligned}$$

Donc, grâce à (3.9) et (3.12), nous avons

$$\int_{\Omega} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx \rightarrow +\infty. \tag{3.14}$$

Si la mesure de surface Hausdorff de Γ_+ est positive, on peut prouver de la même manière que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{G\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} d\sigma \rightarrow +\infty. \tag{3.15}$$

Ou autrement

$$\int_{\partial\Omega} \frac{G\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} d\sigma = 0. \tag{3.16}$$

Ainsi, on obtient de (3.14), (3.15) et (3.16) que

$$\int_{\Omega} \frac{F\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{G\left(x, u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q} d\sigma \rightarrow +\infty. \tag{3.17}$$

De l'autre côté on obtient de (3.3) et (3.6) que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{F\left(x,u_n^+\right)}{\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}}^q}dx+\int_{\partial\Omega}\frac{G\left(x,u_n^+\right)}{\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}}^q}d\sigma\\ &\leq \frac{1}{\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}}^{q-p}}\left\|\nabla y_n\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|\nabla y_n\right\|_{q,\mu}^q+\frac{1}{\left\|u_n^+\right\|_{1,\mathcal{H}}^{q-p}}\left\|y_n\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|y_n\right\|_{q,\mu}^q+M_5,\end{aligned}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour certains $M_5>0$. Cela montre, à cause de $p<q$, (3.9) et $\|y_n\|_{1,\mathcal{H}}=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, que

$$\int_\Omega \frac{F\left(x,u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q}dx+\int_{\partial\Omega}\frac{G\left(x,u_n^+\right)}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}^q}d\sigma\leq M,\forall n\in\mathbb{N},$$

pour certains $M_6>0$, ce qui est en contradiction avec (3.17).

2$^{\text{éme}}$**Cas :** $y\equiv 0$

Soit $k\geq 1$ et mettons

$$v_n=(qk)^{\frac{1}{q}}\,y_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Par la définition de y_n nous avons

$$v_n\rightharpoonup 0 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ et } v_n\to 0 \text{ dans } L^{r_1}(\Omega) \text{ et } L^{r_2}(\partial\Omega). \tag{3.18}$$

De (3.18) il résulte que

$$\int_\Omega F\left(x,v_n\right)dx\to 0 \text{ et } \int_{\partial\Omega} G(x,v_n)d\sigma\to 0. \tag{3.19}$$

Rappelons que la fonctionnelle d'énergie $\varphi: W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)\to\mathbb{R}$ du problème (P_2) est définie par

$$\varphi\left(u\right)=\frac{1}{p}\left\|\nabla u\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|\nabla u\right\|_{q,\mu}^q+\frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|u\right\|_{q,\mu}^q-\int_\Omega F\left(x,u\right)dx-\int_{\partial\Omega}G\left(x,u\right)d\sigma.$$

Nous avons

$$\varphi(u)\leq\varphi_+(u) \text{ pour tout } u\in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ avec } u\geq 0. \tag{3.20}$$

On choisit $t_n \in [0,1]$ tel que

$$\varphi(t_n u_n^+) = \max\left\{\varphi(tu_n^+) : 0 \le t \le 1\right\}. \tag{3.21}$$

Puisque $\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}} \to +\infty$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 < \frac{(qk)^{\frac{1}{q}}}{\|u_n^+\|_{1,\mathcal{H}}} \le 1, \forall n \ge n_0. \tag{3.22}$$

En appliquant (3.21), (3.22), la proposition 1.6 (ii) et (3.19) on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t_n u_n^+\right) &\ge \varphi(v) \\
&= \frac{1}{p} q^{\frac{p}{q}} k^{\frac{p}{q}} \|\nabla y_n\|_p^p + k\|\nabla y_n\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{p} q^{\frac{p}{q}} k^{\frac{p}{q}} \|y_n\|_p^p + k\|y_n\|_{q,\mu}^q \\
&\quad - \int_\Omega F(x, v_n)\, dx - \int_{\partial\Omega} G(x, v_n)\, d\sigma \\
&\ge \min\left\{\frac{1}{p} q^{\frac{p}{q}}, 1\right\} k^{\frac{p}{q}} \left[\|\nabla y_n\|_p^p + \|\nabla y_n\|_{q,\mu}^q + \|y_n\|_p^p + \|y_n\|_{q,\mu}^q\right] \\
&\quad - \int_\Omega F(x, v_n)\, dx - \int_{\partial\Omega} G(x, v_n)\, d\sigma \\
&= \min\left\{\frac{1}{p} q^{\frac{p}{q}}, 1\right\} k^{\frac{p}{q}} \widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y_n) - \int_\Omega F(x, v_n)\, dx - \int_{\partial\Omega} G(x, v_n)\, d\sigma \\
&\ge \min\left\{\frac{1}{p} q^{\frac{p}{q}}, 1\right\} k^{\frac{p}{q}} - M_7 \text{ pour tout } n \ge n_1,
\end{aligned}$$

pour certains $n_1 \ge n_0$. Puisque $k \ge 1$ est arbitraire, nous concluons que

$$\varphi(t_n u_n^+) \to +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty. \tag{3.23}$$

De (3.3), (3.6) et (3.20) on obtient

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi\left(u_n^+\right) \le M_8, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.24}$$

pour certains $M_8 > 0$. La combinaison de (3.23) et (3.24) donne

$$t_n \in (0,1) \text{ pour tout } n \ge n_2 \tag{3.25}$$

pour certains $n_2 \geq n_1$. Par la règle de la chaîne, (3.25) et (3.21) impliquent que

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(tu_n^+) \mid_{t=t_n} = \left\langle \varphi'(t_n u_n^+), u_n^+ \right\rangle, \forall n \geq n_2.$$

Cela signifie

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla(t_n u_n^+)\right\|_p^p + \left\|\nabla(t_n u_n^+)\right\|_{q,\mu}^q + \left\|t_n u_n^+\right\|_p^p + \left\|t_n u_n^+\right\|_{q,\mu}^q \\
&= \int_\Omega f\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ dx + \int_{\partial\Omega} g\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ d\sigma, \forall n \geq n_2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Par les hypothèses (H)(iv) et (3.7) on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|\nabla(t_n u_n^+)\|_p^p + \left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|t_n u_n^+\|_p^p \\
&+ \textstyle\int_\Omega (f\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ - qF\left(x, t_n u_n^+\right))dx + \int_{\partial\Omega} (g\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ - qG\left(x, t_n u_n^+\right))d\sigma \\
&\leq \left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|\nabla(t_n u_n^+)\|_p^p + \left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|t_n u_n^+\|_p^p \\
&+ \textstyle\int_\Omega (f\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qF\left(x, u_n^+\right))dx + \int_{\partial\Omega} (g\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qG\left(x, u_n^+\right))d\sigma \\
&\leq \left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|\nabla u_n^+\|_p^p + \left(\tfrac{q}{p} - 1\right) \|u_n^+\|_p^p \\
&+ \textstyle\int_\Omega (f\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qF\left(x, u_n^+\right))dx + \int_{\partial\Omega} (g\left(x, u_n^+\right) u_n^+ - qG\left(x, u_n^+\right))d\sigma \\
&\leq M_3,
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_3$. Cela donne

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{q}{p} - 1\right) \left\|\nabla(t_n u_n^+)\right\|_p^p + \left(\frac{q}{p} - 1\right) \left\|t_n u_n^+\right\|_p^p \\
&+ \int_\Omega f\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ dx + \int_{\partial\Omega} g\left(x, t_n u_n^+\right) t_n u_n^+ d\sigma \\
&\leq \int_\Omega qF\left(x, t_n u_n^+\right) dx + \int_{\partial\Omega} qG\left(x, t_n u_n^+\right) d\sigma + M_3.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La combinaison de (3.26) et (3.27) conduit à

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{p}\left\|\nabla(t_n u_n^+)\right\|_p^p + \left\|\nabla(t_n u_n^+)\right\|_{q,\mu}^q + \frac{q}{p}\left\|t_n u_n^+\right\|_p^p + \left\|t_n u_n^+\right\|_{q,\mu}^q \\
&- \int_\Omega qF\left(x, t_n u_n^+\right) dx - \int_{\partial\Omega} qG\left(x, t_n u_n^+\right) d\sigma \\
&\leq M_3,
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_3$, ce qui implique

$$q\,\varphi(t_n u_n^+) \leq M_3 \text{ pour tout } n \geq n_3.$$

Cela contredit (3.23) et la réclamation est donc prouvée.

Vérification de la condition de Cerami

D'après (3.6) et la réclamation nous savons que la suite $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ est bornée. On peut donc supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ et $u_n \to u$ dans $L^{r_1}(\Omega)$ et $L^{r_2}(\partial\Omega)$.

Grâce à (3.27) nous avons

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^q_\mu\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right) \text{ et } \nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right). \tag{3.28}$$

En prenant $v = u_n - u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ dans (3.5), en passant à la limite comme $n \to \infty$ et en utilisant (4.27) on obtenir

$$\|\nabla u_n\|_{q,\mu} \to \|\nabla u\|_{q,\mu} \text{ et } \|\nabla u_n\|_p \to \|\nabla u\|_p\,. \tag{3.29}$$

Puisque les espaces $L^q_\mu\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ et $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ sont uniformément convexes, on sait qu'il satisfaire la propriété de Kadec-Klee, voir Gasinski-Papageorgiou [7, ,p911],. Ainsi, de (3.28) et (3.29) il s'ensuit que

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } L^q_\mu\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right) \text{ et } \nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right).$$

Par conséquent, par la proposition 1.6 (ii), nous concluons que

$$\|u_n - u\|_{1,\mathcal{H}} \to 0.$$

Ainsi, φ_+ remplit la condition de Cerami.

La proposition suivante sera utile pour des considérations ultérieures.

Proposition 3.2 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\widehat{c}, \widetilde{c}_\varepsilon, \widehat{c}_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\varphi(u), \varphi_\pm(u) \geq \begin{cases} \widehat{c}\, \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{q} - \widetilde{c}_\varepsilon \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_\varepsilon \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \ si\ \|u\|_{1,\mathcal{H}} \leq 1, \\ \widehat{c}\, \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{p} - \widetilde{c}_\varepsilon \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_\varepsilon \|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \ si\ \|u\|_{1,\mathcal{H}} > 1. \end{cases}$$

Preuve Nous montrerons la preuve uniquement pour la fonctionnelle φ, les preuves pour les autres fonctionnelles travailler de la même manière.

En tenant compte des hypothèses (H)(i), (iii), pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\widehat{c}_1 = \widehat{c}_1(\varepsilon) > 0$ et $\widehat{c}_2 = \widehat{c}_2(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leq \frac{\varepsilon}{p}|s|^p + \widehat{c}_1 |s|^{r_1}, x \in \Omega, \\ G(x,s) &\leq \frac{\varepsilon}{p}|s|^p + \widehat{c}_2 |s|^{r_2}, x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Soit $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$. En appliquant (3.30), les plongements de Sobolev et de trace pour $W^{1,p}(\Omega)$ le long avec les propositions 1.5 (ii), (iii) et 1.3 (c) on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{q}\|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|u\|_{q,\mu}^q \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{p}\|u\|_p^p - \widehat{c}_1 \|u\|_{r_1}^{r_1} - \frac{\varepsilon}{p}\|u\|_{p,\partial\Omega}^p - \widehat{c}_2 \|u\|_{r_2,\partial\Omega}^{r_2} \\ &\geq \frac{1}{p}\left[1 - (C_\Omega^p + C_{\partial\Omega}^p)\varepsilon\right]\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{q}\|\nabla u\|_{q,\mu}^q \\ &\quad + \frac{1}{p}\left[1 - (C_\Omega^p + C_{\partial\Omega}^p)\varepsilon\right]\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|u\|_{q,\mu}^q - \widehat{c}_1 \left(C_\Omega^{\mathcal{H}}\right)^{r_1}\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_2\left(C_{\partial\Omega}^{\mathcal{H}}\right)^{r_2}\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{p}\left[1 - (C_\Omega^p + C_{\partial\Omega}^p)\varepsilon\right], \frac{1}{q}\right\}\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(u) - \widehat{c}_1\left(C_\Omega^{\mathcal{H}}\right)^{r_1}\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_2\left(C_{\partial\Omega}^{\mathcal{H}}\right)^{r_2}\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2}, \end{aligned}$$

où C_Ω et $C_{\partial\Omega}$ sont les constantes d'injections $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ respectivement, tandis que $C_\Omega^{\mathcal{H}}$ et $C_{\partial\Omega}^{\mathcal{H}}$ sont les constantes d'injections $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \to L^{r_1}(\Omega)$ et $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \to L^{r_2}(\partial\Omega)$, respectivement.

En choisissant ε tel que $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{(C_\Omega^p + C_{\partial\Omega}^p)}\right)$ et en appliquant la proposition 1.6 (iii), (iv) on obtient l'affirmation de la proposition avec

$$\widehat{c} = \min\left\{\frac{1}{p}\left[1-\left(C_{\Omega}^{p}+C_{\partial\Omega}^{p}\right)\varepsilon\right], \frac{1}{q}\right\}, \widetilde{c}_{\varepsilon} = \widehat{c}_{1}\left(C_{\Omega}^{\mathcal{H}}\right)^{r_1}, \widehat{c}_{\varepsilon} = \widehat{c}_{2}\left(C_{\partial\Omega}^{\mathcal{H}}\right)^{r_2}.$$

Il est maintenant facile de montrer que $u = 0$ est un minimiseur local des fonctionnelles $\varphi_{\pm}$.

Proposition 3.3 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors $u = 0$ est un minimiseur local pour les deux fonctionnelles $\varphi_{\pm}$.*

Preuve Comme précédemment, nous montrerons la preuve uniquement pour la fonctionnelle φ_{+} , la preuve pour φ_{-} est travaillant de la même manière. Soit $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ tel que $\|u\|_{1,\mathcal{H}} < 1$.

L'application de la proposition 3.2 donne

$$\varphi_{+}(u) \geq \widehat{c}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{q} - \widetilde{c}_{\varepsilon}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_{\varepsilon}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2}.$$

Puisque $q < r_1, r_2$ il existe $\eta \in (0,1)$ suffisamment petit pour que

$$\varphi_{+}(u) > 0 = \varphi_{+}(0) \text{ pour tout } u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ avec } 0 < \|u\|_{1,\mathcal{H}} < \eta.$$

Par conséquent, $u = 0$ est un minimiseur local (strict) de φ_{+}.

La proposition suivante est une conséquence directe de l'hypothèse (H)(ii).

Proposition 3.4 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors, pour $u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ avec $u(x) > 0, x \in \Omega$, il tient que $\varphi_{\pm}(tu) \to -\infty, t \to \pm\infty$.*

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'existence de solutions de signe constant bornées pour le problème (P_2)

Proposition 3.5 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors le problème (P_2) a au moins deux solutions de signe constant non triviales $u_0, v_0 \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ telles que*

$$u_0(x) \geq 0 \textit{ et } v_0(x) \leq 0,\ x \in \Omega.$$

Preuve D'après les propositions 3.4 et [16, Théorème 5.7.6], existe $\eta_{\pm} \in (0,1)$ suffisamment petit pour que

$$\varphi_{\pm}(0) = 0 < \inf\{\varphi_{\pm}(0) : \|u\|_{1,\mathcal{H}} = \eta_{\pm}\} = m_{\pm}. \tag{3.31}$$

Par (3.31) et les propositions 3.1 et 3.5 nous pouvons utiliser le théorème du col (voir Théorème 2.4) qui implique l'existence de $u_0, v_0 \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$ tel que

$u_0 \in K_{\varphi_+}, v_0 \in K_{\varphi_-}$ et

$$\varphi_+(0) = 0 < m_+ \leq \varphi_+(u_0) \text{ ainsi que } \varphi_-(0) = 0 < m_- \leq \varphi_-(v_0).$$

Cela montre que $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. De plus, nous avons $\varphi_+'(u_0) = 0$ ce qui signifie que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 + \mu(x) |\nabla u_0|^{q-2} \nabla u_0\right) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(|u_0|^{p-2} u_0 + \mu(x) |u_0|^{q-2} u_0\right) v dx$$
$$= \int_\Omega f\left(x, u_0^+\right) v dx + \int_{\partial\Omega} g\left(x, u_0^+\right) v d\sigma$$

pour tout $v \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$. En choisissant $v = -u_0^- \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$ on obtient

$$\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}\left(u_0^-\right) = 0,$$

et donc, par la proposition 1.6, nous avons

$$\left\|u_0^-\right\|_{1,\mathcal{H}} = 0,$$

pour tout $w \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$. En choisissant $w = v_0^+ \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$ on obtient

$$\widehat{\rho}_{\mathcal{H}}\left(v_0^+\right) = 0, ,$$

et donc, par la proposition 1.6, nous avons

$$\left\|v_0^+\right\|_{1,\mathcal{H}} = 0.$$

Donc, $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$. et $v_0 \leq 0, v_0 \neq 0$. Enfin, en appliquant le théorème 3.1, nous avons que $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$.

3.3 Solutions changeant de signe

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence d'une solution du problème (P_2) qui change de signe [8] . Suite au traitement de Liu-Wang-Wang [12] et Gasi´nski-Papageorgiou [6] nous introduisons la variété dite Nehari pour la fonctionnelle φ qui est définie par

$$N = \left\{ u \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega) : \left\langle \varphi'(u), u \right\rangle = 0, u \neq 0 \right\}.$$

Puisque nous sommes intéressés par les solutions de changement de signe, nous avons également besoin de l'ensemble suivant

$$N_0 = \left\{ u \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega) : u^+ \in N, u^- \in N \right\}.$$

Proposition 3.6 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Soit $u \in W^{1.\mathcal{H}}(\Omega)$, $u \neq 0$, alors il existe un unique $t_0 = t_0(u) > 0$ tel que $t_0 u \in N$.*

Preuve Soit $\zeta_u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{aligned} \zeta_u(t) &= \left\langle \varphi'(tu), u \right\rangle \\ &= t^{p-1} \|\nabla u\|_p^p + t^{q-1} \|\nabla u\|_{q,\mu}^q + t^{p-1} \|u\|_p^p + t^{q-1} \|u\|_{q,\mu}^q \\ &\quad - \int_\Omega f(x, tu)\, u dx - \int_{\partial\Omega} g(x, tu)\, u d\sigma. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Par hypothèse (H)(v) on a pour $t \in (0, 1)$ et $|u(x)| > 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x, tu)(tu)}{t^q |u|^q} &\leq \frac{f(x, u)(u)}{|u|^q}, x \in \Omega, \\ \frac{g(x, tu)(tu)}{t^q |u|^q} &\leq \frac{g(x, u)(u)}{|u|^q}, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$f(x,tu)\,u \leq t^{q-1} f(x,u)\,u,\ x \in \Omega, \tag{3.33}$$
$$g(x,tu)\,u \leq t^{q-1} g(x,u)\,u,\ x \in \partial\Omega.$$

De (3.32) et (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}\zeta_u(t) \geq\ & t^{p-1}\|\nabla u\|_p^p + t^{p-1}\|u\|_p^p \\ & - t^{q-1}\int_\Omega f(x,u)\,u dx - t^{q-1}\int_{\partial\Omega} g(x,u)\,u d\sigma\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $p < q$,

$$\zeta_u(t) > 0 \text{ pour un petit } t \in (0,1).$$

Par contre on a pour $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_u(t)}{t^{q-1}} =\ & \frac{1}{t^{q-p}}\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{t^{q-p}}\|u\|_p^p + \|u\|_{q,\mu}^q \\ & - \int_\Omega \frac{f(x,tu)}{t^{q-1}} u dx - \int_{\partial\Omega} \frac{g(x,tu)}{t^{q-1}} u d\sigma\end{aligned} \tag{3.34}$$

En appliquant l'hypothèse (H)(ii) et en passant à la limite dans (3.34) comme $t \to +\infty$ donne

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\zeta_u(t)}{t^{q-1}} = -\infty,$$

comme $p < q$. Ainsi

$$\zeta_u(t) < 0 \text{ pour } t > 0 \text{ assez grand }. \tag{3.35}$$

(3.35) et le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 = t_0(u) > 0$ tel que

$$\zeta_u(t_0) = 0,$$

ce qui implique

$$\left\langle \varphi^{'}\left(t_0 u\right), t_0 u\right\rangle = 0.$$

Ainsi

$$t_0 u \in N.$$

Notez que l'équation $\zeta_u\left(t\right) = 0$ peut s'écrire de manière équivalente sous la forme

$$\begin{aligned} -\left\|\nabla u\right\|_p^p - \left\|u\right\|_{q,\mu}^q = & \frac{1}{t^{q-p}}\left\|\nabla u\right\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{t^{q-p}}\left\|u\right\|_p^p \\ & -\int_\Omega \frac{f\left(x,tu\right)\left(tu\right)}{t^q}dx - \int_{\partial\Omega}\frac{g\left(x,tu\right)\left(tu\right)}{t^q}d\sigma. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Le membre de droite de cette inégalité est strictement croissant lorsque $t > 0$. Il existe donc un unique $t_0 = t_0(u)$ tel que

$$\zeta_u\left(t_0\right) = 0.$$

Proposition 3.7 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Soit $u \in N$, alors $\varphi(tu) \leq \varphi(u)$ pour tout $t > 0$ (avec inégalité stricte lorsque $t \neq 1$).*

Preuve Soit $k_u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ défini par

$$k_u(t) = \varphi(tu) \text{ pour tout } t > 0.$$

Parce que $u \in N$, cela est vrai

$$k_u^{'}(1) = 0, \tag{3.37}$$

ce qui est, du fait de la proposition 3.6, l'unique point critique de k_u. A partir des hypothèses (H)(i), (ii), il existe, pour tout $\tau > 0$ donné, une constante $c_\tau > 0$ telle que

$$\begin{aligned} F(x,s) &\geq \frac{\tau}{q}\left|s\right|^q - c_\tau, x \in \Omega \text{ et tout } s \in \mathbb{R} \\ G(x,s) &\geq \frac{\tau}{q}\left|s\right|^q - c_\tau,.x \in \partial\Omega \text{ et tout } s \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.38}$$

En tenant compte de (3.38), on a pour $t > 0$

$$
\begin{aligned}
k_u(t) &= \varphi(tu) \\
&\leq \frac{t^p}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{t^q}{q}\|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \frac{t^p}{p}\|u\|_p^p + \frac{t^q}{q}\|u\|_{q,\mu}^q \\
&\quad -\frac{\tau t^q}{q}\|u\|_q^q - \frac{\tau t^q}{q}\|u\|_{q,\partial\Omega}^q + c_\tau\left(|\Omega|_N + |\partial\Omega|_N\right) \\
&= \frac{t^p}{p}\left(\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p\right) + \frac{t^q}{q}\left(\|\nabla u\|_{q,\mu}^q + \|u\|_{q,\mu}^q - \tau(\|u\|_q^q + \|u\|_{q,\partial\Omega}^q)\right) \\
&\quad + c_\tau\left(|\Omega|_N + |\partial\Omega|_N\right)
\end{aligned}
$$

En prenant τ suffisamment grand, nous avons

$$\varphi(tu) \leq c_3 t^p - c_4 t^q$$

pour certains $c_3, c_4 > 0$. Puisque $p < q$ on obtient

$$k_u(t) = \varphi(tu) < 0 \text{ pour } t > 0 \text{ assez grand.} \tag{3.39}$$

En appliquant la proposition 3.2, pour $t > 0$ suffisamment petit on obtient

$$
\begin{aligned}
k_u(t) &= \varphi(tu) \\
&\geq \widehat{c}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^q - \widetilde{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \\
&= c_5 t^q - c_6 t^{r_1} - c_7 t^{r_2}
\end{aligned}
$$

pour certains $c_5, c_6, c_7 > 0$. Puisque $q < r_1, r_2$ nous concluons que

$$k_u(t) = \varphi(tu) > 0 \text{ pour } t > 0 \text{ assez petit.} \tag{3.40}$$

D'après (3.39) et (3.40) nous savons qu'il existe un minimiseur local $t_0(u) > 0$ de k_u. Depuis $t = 1$ est le seul point critique de k_u, voir (3.37), on a que $t_0(u) = 1$ qui est un minimiseur de

k_u. Par conséquent, nous avons

$$k_u(t) \leq k_u(1) \text{ pour tout } t > 0,$$

et ainsi

$$\varphi(tu) \leq \varphi(u) \text{ pour tout } t > 0.$$

Proposition 3.8 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors la fonctionnelle $\varphi \mid_N$ est coercive.*

Preuve Il suffit de montrer que si $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ et

$$\varphi(u_n) \leq M_9 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{3.41}$$

pour certains $M_9 > 0$, alors la suite $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ est bornée.

En supposant le contraire, nous pouvons supposer que $\|u_n\|_{1.\mathcal{H}} \to +\infty$. Soit$y_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{1.\mathcal{H}}}$ nous peut supposer que $y_n \rightharpoonup y$ dans $W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$.Supposons que $y = 0$ .Puisque $u_n \in N$ et $y_n \rightharpoonup 0$ nous avons pour chaque $t > 0$ que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u_n\right) &\geq \varphi\left(ty_n\right) \\
&= \frac{1}{p}\left\|\nabla\left(ty_n\right)\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|\nabla\left(ty_n\right)\right\|_{q,\mu}^q + \frac{1}{p}\left\|ty_n\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|ty_n\right\|_{q,\mu}^q \\
&\quad - \int_\Omega F\left(x, ty_n\right) dx - \int_{\partial\Omega} G\left(x, ty_n\right) d\sigma \\
&\geq \frac{1}{q}\left\|ty_n\right\|_{1.\mathcal{H}} - \int_\Omega F\left(x, ty_n\right) dx - \int_{\partial\Omega} G\left(x, ty_n\right) d\sigma \to \frac{1}{q}t^p,
\end{aligned}$$

puisque $\|y_n\|_{1.\mathcal{H}}^p = 1$ où nous avons utilisé les propositions 1.6 et 3.7. Prendre $t > 0$ assez grand on obtient une contradiction avec (3.33). Par conséquent, $y \neq 0$. En appliquant la proposition 1.6, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi\left(u_n\right) \leq &\frac{1}{p}\left\|\nabla u_n\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|\nabla u_n\right\|_{q,\mu}^q+\frac{1}{p}\left\|u_n\right\|_p^p+\frac{1}{q}\left\|u_n\right\|_{q,\mu}^q \\ &-\int_\Omega F\left(x,\left\|u_n\right\|_{1.\mathcal{H}} y_n\right) dx-\int_{\partial\Omega} G\left(x,\left\|u_n\right\|_{1.\mathcal{H}} y_n\right) d\sigma \\ \leq &\frac{1}{q}\left\|u_n\right\|_{1.\mathcal{H}}-\int_\Omega F\left(x,\left\|u_n\right\|_{1.\mathcal{H}} y_n\right) dx-\int_{\partial\Omega} G\left(x,\left\|u_n\right\|_{1.\mathcal{H}} y_n\right) d\sigma.\end{aligned} \tag{3.42}$$

En divisant (3.42) par $\|u_n\|_{1.\mathcal{H}}^q$, en passant à la limite quand $n \to \infty$ et en appliquant (H)(ii), on obtient $\frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|_{1.\mathcal{H}}^q} \to -\infty$ ce qui contredit $\varphi(u_n) \geq 0$, voir Proposition 3.7 . Cela prouve la coercivity de $\varphi \mid_N$.

Soit $m = \inf\limits_N \varphi$ et $m_0 = \inf\limits_{N_0} \varphi$.Tout d'abord, nous montrons que $m > 0$.

Proposition 3.9 *Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors $m > 0$.*

Preuve Rappelons l'énoncé de la proposition 3.2, à savoir

$$\varphi(u) \geq \begin{cases} \widehat{c}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^q - \widetilde{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \text{ si } \|u\|_{1,\mathcal{H}} \leq 1, \\ \widehat{c}\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^p - \widetilde{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_1} - \widehat{c}_\varepsilon\,\|u\|_{1,\mathcal{H}}^{r_2} \text{ si } \|u\|_{1,\mathcal{H}} > 1. \end{cases}$$

Puisque $p < q < r_1, r_2$ il s'ensuit que pour certains $\eta_0 \in (0,1)$ assez petit

$$\varphi(u) \geq \widehat{\gamma} > 0 \text{ pour tout } u \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{1,\mathcal{H}} = \eta_0.$$

Soit maintenant $u \in N$ et prenons $s_u > 0$ tel que $s_u\,\|u\|_{1,\mathcal{H}} = \eta_0$. De la proposition 3.7 on obtient

$$0 < \widehat{\gamma} \leq \varphi(s_u u) \leq \varphi(u) \text{ pour tout } u \in N,$$

donc $m > 0$.

En conséquence directe de la proposition 3.9, nous obtenons que $m_0 > 0$.

Proposition 3.10 *Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors $m_0 > 0$.*

Preuve En appliquant la proposition 3.9 et en rappelant que $u^+, -u^- \in N$, on a pour chaque $u \in N_0$

$$\varphi(u) = \varphi(u^+) + \varphi(-u^-) \geq 2m > 0.$$

Donc $m_0 > 0$.

Proposition 3.11 *Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors il existe $y_0 \in N_0$ tel que $\varphi(y_0) = m_0$.*

Preuve Soit $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq N_0$ une suite minimisante, c'est-à-dire

$$\varphi\left(y_n\right) \searrow m_0.$$

Clairement,

$$\varphi(y_n) = \varphi(y_n^+) + \varphi(-y_n^-)$$

avec $y_n^+, -y_n^- \in N$. Semblable à la preuve de la proposition 3.8 nous pouvons montrer que les suites $\{y_n^+\}_{n\geq 1}, \{y_n^-\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ sont bornés. On peut donc supposer que

$$\begin{aligned} y_n^+ &\rightharpoonup v_1 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega), v_1 \geq 0, \\ y_n^- &\rightharpoonup v_2 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega), v_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

Supposons que $v_1 = 0$. Alors, puisque $y_n^+ \in N$, il est vrai

$$0 = \left\langle \varphi^{'}(y_n^+), y_n^+ \right\rangle = \widehat{\rho}_{\mathcal{H}}(y_n^+) - \int_\Omega f(x, y_n^+)y_n^+ dx - \int_{\partial\Omega} g(x, y_n^+)y_n^+ d\sigma$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De (3.43) et de la proposition 1.6 nous concluons que

$$y_n^+ \longrightarrow 0 \text{ dans } W^{1,\mathcal{H}}(\Omega).$$

Ainsi

$$0 < m \leq \varphi(y_n^+) \to \varphi(0) = 0 \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, $v_1 \neq 0$. De la même manière, nous pouvons montrer que $v_2 \neq 0$. En prenant En tenant compte de la proposition 3.6, il existe $t_1, t_2 > 0$ tel que

$$t_1 v_1 \in N \text{ et } t_2 v_2 \in N.$$

Définir $y_0 = t_1 v_1 - t_2 v_2 = y_0^+ - y_0^-$ donne $y_0 \in N_0$. Application de la séquentielle faiblement inférieure semi-continuité de φ , Proposition 3.7 et le fait que $y_0 \in N_0$ on obtient

$$\begin{aligned}
m_0 &= \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(y_n\right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\varphi\left(y_n^+\right) + \varphi\left(-y_n^-\right)\right) \\
&\geq \lim_{n \to +\infty} \inf\left(\varphi\left(t_1 y_n^+\right) + \varphi\left(-t_2 y_n^-\right)\right) \\
&\geq \varphi\left(t_1 v_1\right) + \varphi\left(-t_2 v_2\right) \\
&\geq \varphi\left(y_0\right) \\
&\geq m_{0.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(y_0) = m_0$$

avec $y_0 \in N_0$

Proposition 3.12 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Soit $y_0 \in N_0$ tel que $\varphi(y_0) = m_0$. Alors $y_0 \in K_\varphi$. En particulier $y_0 \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une solution du problème (P_2)*

Preuve La preuve de cette proposition suit l'idée de la preuve du théorème 1.4 dans Liu-Dai [13] et exploite le lemme de déformation quantitative de Willem, voir Jabri , [9, Théorème4.2]
.

A partir de l'hypothèse (H)(v), de la proposition 3.7 et de la définition de N_0 , pour $s, t > 0$ tel que au moins un des $s, t \neq 1$, on a

$$\varphi(sy_0^+ - ty_0^-) = \varphi(sy_0^+) + \varphi(-ty_0^-) < \varphi(y_0^+) + \varphi(-y_0^-) = \varphi(y_0) = m_0. \tag{3.44}$$

Maintenant, nous procédons par contradiction. Supposons donc que $\varphi'(y_0) \neq 0$. Alors il existe

$\delta > 0$ et $\rho > 0$ tel que

$$\left\| \varphi^{'}(v) \right\|_{1,\mathcal{H}} \geq \rho \text{ pour tout } v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \text{ avec } \|v - y_0\|_{1,\mathcal{H}} \leq 3\delta.$$

Soit

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

D'après (3.44), on voit que

$$\varphi(sy_0^+ - ty_0^-) = m_0 \text{ si et seulement si } s = t = 1.$$

Ainsi

$$\beta = \max_{(s,t)\in\partial D} \varphi(sy_0^+ - ty_0^-) < m_0.$$

Soit

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{m_0 - \beta}{4}, \frac{\rho\delta}{8}\right\}.$$

D'après le lemme de déformation quantitative de Willem, voir Jabri [9, Théorème 4.2], il existe une déformation continue $\eta : [0,1] \times W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \to W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ telle que

(i) $\eta(1, v) = v$ si $v \notin \varphi^{-1}([m_0 - 2\varepsilon, m_0 + 2\varepsilon])$

(ii) $\varphi(\eta(1, v)) \leq m_{0-\varepsilon}$ pour tout $v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ avec $\|v - y_0\|_{1,\mathcal{H}} \leq \delta$. et $\varphi(v) \leq m_0 + \varepsilon$

(iii) $\varphi(\eta(1, v)) \leq \varphi(v)$ pour tout $v \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$.

Il s'ensuit facilement que

$$\max_{(s,t)\in D} \varphi\left(\eta\left(1, sy_0^+ - ty_0^-\right)\right) < m_{0.} \tag{3.45}$$

Définissons maintenant $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to W^{1,\mathcal{H}}(\Omega)$ par

$$h(s,t) = \eta(1, sy_0 + -ty_0^-)$$

et soient

$$H_0(s,t) = \left(\left\langle \varphi'(sy_0^+), y_0^+ \right\rangle, \left\langle \varphi'(-ty_0^-), -y_0^- \right\rangle\right),$$
$$H_1(s,t) = \left(\frac{1}{s}\left\langle \varphi'(h^+(s,t)), h^+(s,t) \right\rangle, \frac{1}{t}\left\langle \varphi'(-h^-(s,t)), -h^-(s,t) \right\rangle\right).$$

Notez que $deg(H_0, D, 0) = 1$, comme

$$\left\langle \varphi'(sy_0^+), y_0^+ \right\rangle > 0 \text{ et } \left\langle \varphi'(-sy_0^-), -y_0^- \right\rangle > 0,\ s \in (0,1),$$
$$\left\langle \varphi'(sy_0^+), y_0^+ \right\rangle < 0 \text{ et } \left\langle \varphi'(-sy_0^-), -y_0^- \right\rangle < 0,\ s > 1.$$

D'après (3.45) et la propriété (i) de η (voir le choix de $\varepsilon > 0$), on a que

$$h(s,t) = sy_0^+ - ty_0^- \text{ pour tout } (s,t) \in \partial D.$$

Donc $H_0 = H_1$ sur ∂D et donc

$$deg(H_1, D, 0) = deg(H_0, D, 0) = 1.$$

Par la propriété d'existence du degré de Brouwer (voir, par exemple, Gasinski-Papageorgiou [5, Théorème 4.11] ou Papageorgiou-Winkert [15, Théorème 6.2.22]), on obtient

$$H_1(s,t) = 0 \text{ pour certains } (s,t) \in D.$$

Cela signifie que

$$\eta(1, sy_0^+ - ty_0^-) = h(s,t) \in N_0 \text{ pour certains } (s,t) \in D.$$

Mais cela contredit (3.45) et la définition de m_0.

Nous concluons donc que $y_0 \in K_\varphi$ et donc y_0 est une solution du problème (P_2). De la théorème 3.1 nous avons que $y_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Proposition 3.13 *[8] Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites.Il existe une solution $y_0 \in N_0$*

du (P_2) changant de signe.

Il reste à montrer que y_0 possède exactement deux domaines nodaux. Arguant par contradiction, supposons qu'il existe des ouverts disjoints Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sur les quels y_0 a signe fixe.

Sans aucune perte de généralité, on peut supposer que y_0 n'a que trois domaines nodaux, soit

$$y_k\left(x\right)\begin{cases} y_0\left(x\right) \text{ si } x \in \Omega_k \\ 0 \text{ si } x \in \Omega \diagdown \Omega_k \end{cases}$$

pour $k = 1, 2, 3, x \in \Omega$.Sans aucune perte de généralité, on peut supposer que

$$y_1 \mid_{\Omega_1} > 0, y_2 \mid_{\Omega_2} < 0, y_3 \mid_{\Omega_3} < 0.$$

En définissant $\hat{y} = y_1 + y_2$, nous avons $\widehat{y}^+ = y_1$ et $\widehat{y}^- = -y_2$.

Puisque $y_0 = y_1 + y_2 + y_3 = \widehat{y} + y_3$ et $\varphi'(y_0) = 0$ car d'après la proposition 3.12 nous avons

$$0 = \left\langle \varphi'(y_0), \hat{y}^+ \right\rangle = \left\langle \varphi'(\hat{y}) + \varphi'(y_3), \hat{y}^+ \right\rangle = \left\langle \varphi'(\hat{y}), \hat{y}^+ \right\rangle.$$

Donc $\langle \varphi'(\hat{y}), \hat{y}^+ \rangle = 0$. De la même manière on peut montrer que $\left\langle \varphi'(\widehat{y}), \widehat{y}^- \right\rangle = 0$. De là on voir que $\hat{y}^+, -\hat{y}^- \in N$ et donc $\hat{y} \in N_0$.

L'application de la proposition 3.11 et de l'hypothèse (H)(iv) donne

$$\begin{aligned}
m_0 &= \varphi(y_0) = \varphi(y_0) - \frac{1}{q}\left\langle \varphi'\left(y_0\right), y_0 \right\rangle \\
&= \varphi(\hat{y}) + \varphi(y_3) - \frac{1}{q}\left(\left\langle \varphi'(\hat{y}), \hat{y} \right\rangle + \left\langle \varphi'(y_3), y_3 \right\rangle\right) \\
&= \varphi(\hat{y}) + \varphi(y_3) - \frac{1}{q}\left(\left\langle \varphi'(y_3), y_3 \right\rangle\right) \\
&= \varphi(\hat{y}) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\nabla y_3\|_p^p + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|y_3\|_p^p \\
&\quad + \int_\Omega \left(\frac{1}{q} f\left(x, y_3\right) y_3 - F\left(x, y_3\right)\right) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{q} g\left(x, y_3\right) y_3 - G\left(x, y_3\right)\right) d\sigma \\
&\geq m_0 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\nabla y_3\|_p^p + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|y_3\|_p^p.
\end{aligned}$$

Puisque $p > q$, on voit que $\Omega_3 = \emptyset$. Nous concluons donc que y_0 n'a que deux domaines nodaux.

Enfin, nous pouvons énoncer le théorème de multiplicité suivant pour le problème (P_2) résumant les résultats des propositions 3.5.et 3.13.

Théorème 3.2 *Soit les hypothèses (1.3) et (H) satisfaites. Alors le problème (P_2) a au moins trois solutions non triviales* $u_0, v_0, y_0 \in W^{1,\mathcal{H}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *telles que*

$$u_0 \geq 0, v_0 \leq 0, y_0 \text{ est nodale avec deux domaines nodaux.}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et la multiplicité des solutions non triviales d'un problème elliptique intervenant un opérateur de double phase, et la régularité des solutions d'une certaine classe du problème appelé problème de convection.

Les résultats obtenus sont censés être généralisés à des systèmes elliptiques, ou bien à des problèmes fractionaires de double phase.

Bibliographie

[1] Beck. Lisa, Giusseppe. Mingione, Lipschitz bounds and nonuniform ellipticity, Comm. Pure Appl. Math.73 (2020),no. 5, 944–1034.

[2] Brezis, Haïm. "Analyse fonctionnelle." Théorie et applications (1983).

[3] Carl, Siegfried, Vy Khoi Le, and Dumitru Motreanu. Nonsmooth variational problems and their inequalities : comparison principles and applications. Springer Science & Business Media, 2007.

[4] Colasuonno, Francesca, and Marco Squassina. "Eigenvalues for double phase variational integrals." Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-) 195 (2016) : 1917-1959.

[5] GasiĂ, Leszek, and Nikolaos S. Papageorgiou. Exercises in Analysis : Part 2 : Nonlinear Analysis. Springer International Publishing, 2016.

[6] Gasiński, Leszek, and Nikolaos S. Papageorgiou. "Constant sign and nodal solutions for superlinear double phase problems." Advances in Calculus of Variations 14.4 (2021) : 613-626.

[7] Gasinski, Leszek, and Nikolaos S. Papageorgiou. "Nonlinear Analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 9." (2006).

[8] Gasiński, Leszek, and Patrick Winkert. "Sign changing solution for a double phase problem with nonlinear boundary condition via the Nehari manifold." Journal of Differential Equations 274 (2021) : 1037-1066.

[9] Jabri, Youssef. The Mountain Pass Theorem : variants, generalizations and some applications. Vol. 95. Cambridge University Press, 2003.

[10] Jikov, Vasili Vasilievitch, Sergei M. Kozlov, and Olga Arsenievna Oleinik. Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Kavian, Otared. "Introduction à la théorie des points critiques : et applications aux problèmes elliptiques." (No Title) (1993).

[12] Liu, Jia-quan, Ya-qi Wang, and Zhi-Qiang Wang. "Solutions for quasilinear Schr650dinger equations via the Nehari method." Communications in partial differential equations 29.5-6 (2004) : 879-901.

[13] Liu, Wulong, and Guowei Dai. "Existence and multiplicity results for double phase problem." Journal of Differential Equations 265.9 (2018) : 4311-4334.

[14] Marino, Greta, and Patrick Winkert. "Moser iteration applied to elliptic equations with critical growth on the boundary." Nonlinear Analysis 180 (2019) : 154-169.

[15] Papageorgiou, Nikolaos S., and Patrick Winkert. Applied Nonlinear Functional Analysis : An Introduction. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018.

[16] Papageorgiou, Nikolaos S., Vicenţiu D. Rădulescu, and Dušan D. Repovš. Nonlinear analysis-theory and methods. Springer, 2019.

[17] Perera, Kanishka, and Marco Squassina. "Existence results for double-phase problems via Morse theory." Communications in Contemporary Mathematics 20.02 (2018) : 1750023.

[18] STRUWE M., Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Dierential Equations and Hamiltonian Systems, Ed.Springer (2000)

[19] Szulkin, A., and T. Weth. "The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, DY Gao and D. Motreanu eds." (2010) : 597-632.

[20] Zhikov, Vasilii Vasil'evich. "Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory." Mathematics of the USSR-Izvestiya 29.1 (1987) : 33.

[21] Zhikov, Vasiliĭ V. "On some variational problems." Russian J. Math. Phys. 5.1 (1997) : 105..

[22] Zhikov, Vasiliĭ V, On Lavrentiev's phenomenon, Russian J. Math. Phys. 3 (1995), no. 2, 249–269.