



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa-
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Sciences de la matière



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD

Domaine : Sciences de la matière

Filière : Physique

Option : Physique théorique

Thème

**Étude de l'influence de la présence des défauts
topologiques sur le mouvement des particules bosoniques**

Par :

Abbad Moussa

Devant le jury :

Pr. Chemam Faïçal	Président	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi
Dr. Aounallah Houcine	Rapporteur	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi
Pr. Boumali Abdelmalek	Co- rapporteur	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi
Pr. Aouachria Mekki	Examineur	Université Batna 1
Pr. Zaim Slimane	Examineur	Université Batna 1
Dr. Chaouche Yassine	Examineur	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi

Date de soutenance : 17 / 09 / 2024

ملخص

في هذه الرسالة، نقوم بدراسة حركة الجسيمات البوزونية المعرضة للكمونات المحتملة السلمية و الشعاعية في سياق فضاء زمني لثقب دودي، وتحديدًا نموذج من نوع إيس-برونيكوف، المشحون توبولوجيًا. كما نفحص تأثير كمون أهارونوف-بوهم في فضاء زمني يحتوي على عيوب توبولوجية مثل الأوتار الكونية والمونوبولات العامة. لإجراء هذه الدراسة، نستخدم معادلات كلاين-جوردون و ديكاكي. بالإضافة إلى ذلك، نقوم بإدخال تبعية الكتلة عند الموضع باستخدام التحويل $m \rightarrow (m + S(x))$ حيث $S(x)$ تمثل الكمون السلمي.

هذا يؤدينا إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تعرف باسم معادلة هان تقوم بحل معادلة الموجة باستخدام طريقة فروبنوس، والتي تُعبر عنها على شكل سلسلة، بهدف تحديد مستويات الطاقة والدالة الموجية المرتبطة.

Abstract

In this thesis, we investigate the motion of bosonic particles subject to scalar and vector potentials in the context of a wormhole spacetime, specifically a model of the Ellis-Bronnikov type, exhibiting topological charge. We also examine the influence of the Aharonov-Bohm potential in the spacetime of topological defects such as cosmic strings and global monopoles. To conduct this study, we utilize the Klein-Gordon and DKP equations. Additionally, we introduce a mass dependence on position using the transformation $m \rightarrow (m + S(x))$, where $S(x)$ represents the scalar potential.

This leads us to a second-order differential equation known as the biconfluent Heun equation (BCH) along with its corresponding confluent Heun function. Finally, we solve the wave equation using the Frobenius method, expressed as a power series expansion around the origin, to determine energy levels and the associated wave function.

Résumé

Dans cette thèse, nous explorons le mouvement des particules bosoniques soumises à des potentiels scalaire et vectoriel dans le contexte d'un espace-temps de trou de ver, en particulier un modèle de type Ellis-Bronnikov, présentant une charge topologique. Nous examinons également l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques et les monopoles globaux. Pour mener cette étude, nous utilisons les équations de Klein-Gordon et de DKP. De plus, nous introduisons une dépendance de la masse par rapport à la position en utilisant la transformation $m \rightarrow (m + S(x))$, où $S(x)$ représente le potentiel scalaire.

Nous aboutissons à une équation différentielle du second ordre, communément appelée équation biconfluente de Heun (BCH), accompagnée de sa fonction Heun confluente correspondante. En conclusion, nous résolvons l'équation des ondes en utilisant la méthode de Frobenius, exprimée sous la forme d'un développement en série de puissances autour de l'origine, pour déterminer les niveaux d'énergie ainsi que la fonction d'onde associée.

Dédicace

Je souhaite dédier ce modeste travail à :

- ✓ *Mes parents,*
- ✓ *Ma famille,*
- ✓ *Mes amies,*
- ✓ *Et à tous mes enseignants.*

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à ce travail, ainsi qu'à toutes celles qui ont contribué à ma formation au cours de ces années. Leur précieuse contribution a grandement enrichi mon savoir individuel et intellectuel.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes promoteurs, le Dr Houcine Aounallah et le Professeur Abdelmalek Boumali, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant volontiers de m'encadrer. Leur patience, leurs précieux conseils et leurs encouragements constants ont été d'une importance capitale tout au long de la rédaction de cet écrit.

J'exprime mes sincères remerciements aux membres du jury, avec le Professeur Faïçal Chemam en tant que président du jury, le Pr Mekki Aouachria et le Pr Slimane Zaim, le Dr Yassine Chaouche, pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers toutes les personnes du Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique (LPAT).

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Les équations relativistes dans un espace-temps courbé	6
1.1 Changement de bases	6
1.2 La métrique	8
1.3 Les connexions de spin	8
1.4 L'équation des géodésiques	9
1.5 Le tenseur de torsion	10
1.6 Tensor de courbure de Riemann	10
1.7 Le tenseur d'Einstein	11
1.8 Trous de ver traversables	12
1.9 Défaut topologique	14
1.9.1 Cordes Cosmiques	14
1.9.2 Monopôle global	15
1.9.3 Parois de Domaine	16
1.9.4 Texture	16
1.10 L'équation de Klein-Gordon	16
1.11 L'équation de DKP	17
2 L'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps de trou de ver	19
2.1 Oscillateur de Klein Gordon	19
2.2 Potentiel linéaire	22
2.3 Potentiel du Coulomb	23
2.4 Potentiel de Cornell	26
2.5 Conclusions	28

3	L'équation de DKP dans un espace-temps de trou de ver	30
3.1	L'équation de DKP et les connexions de spin	30
3.2	L'équation de DKP libre dans un espace-temps de trou de ver	33
3.3	L'oscillateur de DKP libre dans un espace-temps de trou de ver	35
3.4	L'oscillateur de DKP avec l'interaction dans un espace-temps de trou de ver	41
3.4.1	Type1	41
3.4.2	Type2	43
3.5	Conclusion	44
4	L'équation de DKP en présence des défauts topologiques	46
4.1	Cas de corde cosmique	46
4.1.1	Potentiel linéaire	49
4.1.2	Potentiel de Cornell	51
4.2	Cas de monopôle globale	53
4.2.1	Potentiel linéaire	56
4.2.2	Potentiel de Cornell	58
4.3	Conclusion	60
	Conclusion	62
	Annexe A : L'équation de Heun confluyente	64
	Annexe B : L'équation de Heun biconfluente	66
	Annexe C : L'effet électromagnétique du potentiel d'Aharonov-Bohm	68
	Annexe D : Critère de Pauli et l'effet de vecteur d'Aharonov-Bohm	71

Introduction Générale

On sait que les transitions de phase sont associées à la brisure de symétrie en physique de la matière condensée. De manière analogue, on peut anticiper la présence d'objets dans les systèmes cosmologiques qui pourraient être qualifiés de défauts topologiques [1]. D'un point de vue physique, les défauts topologiques sont des structures qui divisent un système physique en deux ou plusieurs états distincts [2]. Cependant, d'un point de vue mathématique, ils se résument simplement à des solutions d'équations différentielles non linéaires. Les défauts topologiques les plus connus se présentent soit sous forme ponctuelle, soit de manière linéaire. Les chaînes cosmiques [3 – 4] représentent les exemples les plus courants de défauts topologiques linéaires. En dehors de cela, les dislocations spatiales et temporelles [5 – 6] sont également bien connues en tant que candidats pour les défauts topologiques linéaires. Dans le contexte de l'astrophysique extragalactique, le défaut ponctuel, monopôle global (GM) [7] est le candidat le plus fréquemment évoqué dans la littérature.

Le monopôle global ponctuel (PGM) a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature [8 – 11]. Le PGM a également fait l'objet d'études sur les oscillateurs quantiques de Dirac et de Klein-Gordon [12]. Des études approfondies sur le monopôle global (GM) peuvent également être consultées concernant l'oscillateur harmonique quantique [13 – 17]. Dans le contexte des systèmes quantiques non relativistes, un monopole global ponctuel peut effectivement représenter des lacunes ou des impuretés [18], à leur tour, peuvent influencer les niveaux d'énergie autorisés du système [19]. De plus, le PGM a été étudié sur une particule soumise à un potentiel d'auto-interaction [20], tandis que des particules non relativistes interagissent avec un potentiel sous champ de flux d'Aharonov-Bohm [21 – 23].

L'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) est peut-être la forme la plus répandue d'oscillateurs quantiques en mécanique quantique relativiste, car il peut être utilisé pour définir l'oscillateur harmonique quantique non relativiste correspondant décrit par l'équation de Schrödinger [24]. Initialement inspiré par l'oscillateur de Dirac [25], le KGO a récemment fait l'objet d'études dans diverses configurations. Parmi les scénarios explorés, on compte la théorie de Kaluza-Klein [26], l'espace-temps anti-de-Sitter [27], l'espace-temps avec torsion [28], l'espace-temps des cordes cosmiques [29], ainsi que sous l'influence de potentiels centraux [30, 31], etc.

La relativité générale (RG) présente diverses classes de solutions, parmi lesquelles les trous de ver [32, 33] sont assez bien connus et font l'objet d'une étude approfondie. En effet, les trous de ver offrent des raccourcis entre différents points de l'espace-temps, voire entre deux univers distincts. Il s'agit d'objets hypothétiques qui nécessitent la violation de la condition d'énergie

nulle pour leur maintien. Les trous de ver sont des objets géométriques hypothétiques dotés d'une structure tubulaire asymptotiquement plate des deux côtés. Ils ont été étudiés sous divers aspects dans la littérature [34 – 44]. L'une des solutions de trou de ver les plus simples et anciennes est le trou de ver Ellis-Bronnikov [45, 46]. Les théories de la gravité modifiée [47] sont envisagées comme une alternative aux composants exotiques de la matière tels que l'énergie noire [48]. Parmi de nombreux candidats, la gravité Born-Infeld inspirée d'Eddington (EiBI) [49] a été largement examinée dans la littérature, principalement en raison de sa capacité à éviter les singularités sans recourir à aucune forme de matière exotique. Le trou de ver d'Ellis-Bronnikov est une solution émergente de la gravité EiBI, décrivant un espace-temps statique et à symétrie sphérique avec la charge topologique de GM [50, 51]. Cette solution a été obtenue en couplant le tenseur énergie-impulsion associé à la région extérieure au cœur du GM avec la géométrie espace-temps. Elle a été étudiée de manière approfondie dans la littérature. Les effets du champ scalaire et la déviation de la lumière dans un espace-temps de trou de ver de type Ellis-Bronnikov chargé topologiquement ont été examinés dans la référence [52]. Une analyse du KGO dans l'espace-temps d'un trou de ver de type Ellis-Bronnikov chargé topologiquement a été réalisée par Soares et al. dans [53]. Motivés par ces résultats, nous souhaitons élargir l'étude du KGO dans l'espace-temps d'un trou de ver de type Ellis-Bronnikov chargé topologiquement en ajoutant un potentiel scalaire.

Dans les années 1930, R.J. Duffin, N. Kemmer et G. Petiau ont introduit l'algèbre de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [54 – 57], un outil crucial dans le domaine de la physique mathématique. Cette algèbre est généralisée par les matrices de DKP, qui font partie de l'équation de DKP fournissant une description relativiste des particules de spin-0 et de spin-1. Bien que l'équation de DKP soit une équation du premier ordre de type Dirac, elle présente une structure algébrique très complexe. Jusqu'aux années 1970, on croyait que l'équation de DKP étaient équivalente à l'équation de Klein-Gordon (KG) et à l'équation de Proca [58], produisant des résultats similaires. Pour cette raison, le développement de l'équation de DKP a été limité en raison de l'intérêt restreint de la communauté scientifique. Cependant, il a été démontré que cette équivalence n'est vraie que pour un cas symétrique particulier [59]. On a également montré que dans les cas impliquant la rupture d'une telle symétrie, la solution de l'équation de DKP diffère de celle des deux autres équations [60]. Depuis lors, un regain d'intérêt pour le sujet a été observé.

Récemment, des études approfondies sur les solutions de l'équation de DKP ont été largement documentées dans la littérature. L'oscillateur de DKP bidimensionnel sous l'effet de champs magnétiques a été examiné par Boumali et al [60], tandis que l'oscillateur tridimensionnel DKP a fait l'objet d'une étude dans [61]. Ces mêmes auteurs ont également exploré un oscillateur de DKP déformé avec l'algèbre de Snyder-de Sitter, tant dans un espace d'impulsion avec que sans champ magnétique, comme décrit dans les références [62, 63]. Par ailleurs, des solutions exactes de l'équa-

tion de DKP avec les énergies potentielles d'Aharonov-Bohm et de Coulomb dans l'espace-temps commutative [8] et non commutative [11] (supposés être produits par une corde cosmique) ont été obtenues. Le secteur de spin un de l'oscillateur de DKP dans un espace bidimensionnel non commutative a été étudié dans [64, 65]. L'oscillateur de DKP dans un espace-temps courbe a également fait l'objet d'une investigation dans [66]. De plus, le système spin-0 de l'équation de DKP en présence d'un espace-temps de type Gödel [67] et dans un fond d'espace-temps topologiquement trivial [68], ainsi que l'oscillateur de DKP dans un espace-temps de type Gödel [69], ont été examinés. Lunardi a discuté de l'équivalence de la représentation spin-1 et spin-0 de l'équation de DKP à une dimension dans [70]. Certains points discutables dans la littérature, basés sur l'équation de DKP à une dimension, ont été signalés par Chargui dans [71]. D'autres travaux notables sur ce sujet peuvent être trouvés dans [72 – 73].

La thèse se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous exposons un formalisme mathématique sur les équations relativistes et l'espace-temps courbé. Le deuxième chapitre aborde l'oscillateur de l'équation de Klein-Gordon avec des potentiels scalaire et vectoriel dans un fond d'espace-temps de trou de ver. Le troisième chapitre traite l'équation DKP dans un espace-temps de trou de ver de type Ellis-Bronnikov. Au quatrième chapitre, nous étudions les effets des défauts topologiques sur la solution aux valeurs propres de l'équation de DKP spin-0 . En conclusion, nous résumons notre étude de manière globale.

Chapitre 1

Les équations relativistes dans un espace-temps courbé

Dans ce chapitre, nous rappellerons certains des concepts utilisés dans notre travail, notamment les notions mathématiques nécessaires à la description de la théorie de la relativité restreinte (1905), de la relativité générale (1915) et à l'introduction des tenseurs.

La relativité générale, formulée par Einstein et indépendamment par Hilbert, est la théorie de l'espace temps et de la gravitation. Elle a été développée pour décrire la gravitation de manière centrale et a été confirmée pour la première fois par l'expérience d'Eddington [74].

Ce récit fut l'un des épisodes les plus remarquables de l'histoire de la science du siècle dernier, car il a offert une nouvelle vision de la nature de l'espace, du temps, de la gravité, de la matière et de l'univers lui-même.

1.1 Changement de bases

Dans la relativité restreinte, nous pouvons connaître l'espace plat à travers l'espace-temps de Minkowski, l'espace-temps Minkowskien est un espace affine à quatre dimensions doté d'un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel associé. Avec une base des coordonnées $\{e_\mu\}$ désigne une tétrade de l'espace vectoriel ($\mu = ct, x, y, z$) ou ($\mu = 0, 1, 2, 3$) telle que

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Dans cette relation (1.1) $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique relatif à l'espace-temps de Minkowski défini par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Pour donner une définition de la convention d'Einstein, on utilise le calcul de la différentielle de la fonction $f(x)$

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

$$df(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (1.3)$$

Cette convention simplifie l'écriture des sommations en éliminant la nécessité d'utiliser explicitement les symboles de sommation.

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (1.4)$$

D'autre part, on pose

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.5)$$

La fonction différentiable $f(x)$ devient

$$df(x) = \partial_\mu f(x) dx^\mu. \quad (1.6)$$

Puisque l'équation (1.6) est vraie pour toute fonction définie sur un voisinage du point donné, le symbole de la fonction peut être omis. Ainsi, nous pouvons l'écrire comme suit

$$d \equiv e_\mu dx^\mu, \quad (1.7)$$

ici,

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.8)$$

La transition du système des coordonnées de la base $\{e_\mu\}$ à la base $\{e_\nu\}$ est donnée par le changement suivant

$$e_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} e_\nu. \quad (1.9)$$

1.2 La métrique

Dans les changements de coordonnées, le carré de la distance infinitésimale entre deux points voisins x^μ et $x^\mu + dx^\mu$ est donné par

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (1.10)$$

L'expression (1.10), représente l'élément de ligne ou le tenseur métrique dans le contexte de la relativité générale. $g_{\mu\nu}(x)$ s'agit du tenseur métrique, un objet mathématique qui décrit la géométrie de l'espace-temps. Il dépend des coordonnées x^μ des événements dans l'espace-temps. Les indices μ et ν peuvent prendre des valeurs de 0 à 3, correspondant aux dimensions temporelles et spatiales. Avec $g_{\mu\nu}(x)$ est défini en tétrades $e_\mu^a(x)$ par la relation

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.11)$$

Ou de manière similaire, on peut exprimer ceci

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.12)$$

Nous avons la possibilité de trouver e_b^ν l'inverse de tétrade e_μ^a par les relations d'orthogonalité suivantes

$$e_\mu^a e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad (1.13)$$

$$e_\mu^a e_b^a = \delta_b^\mu. \quad (1.14)$$

δ_b^a est le symbole de Kronecker.

1.3 Les connexions de spin

En relativité générale, Les connexions de spin $\omega_{\mu b}^a$ peuvent être écrites en fonction des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ comme suit

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a, \quad (1.15)$$

La notation $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ se réfère aux symboles de Christoffel, qui sont utilisés en géométrie différentielle pour décrire la connexion affine dans une variété différentielle. La formule de définition pour les symboles de Christoffel est donnée par

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{g^{\mu\rho}}{2} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}). \quad (1.16)$$

Avec

$$\begin{aligned} g_{\rho\nu,\lambda} &= \frac{\partial (g_{\rho\nu})}{\partial x^{\lambda}}, \\ g_{\rho\lambda,\nu} &= \frac{\partial (g_{\rho\lambda})}{\partial x^{\nu}}, \\ g_{\nu\lambda,\rho} &= \frac{\partial (g_{\nu\lambda})}{\partial x^{\rho}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les symboles de Christoffe $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ sont symétriques

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}. \quad (1.18)$$

On peut également calculer les connexions de spin en utilisant les équations de structure de Maurer-Cartan.

Les équations de structure de Cartan sont un ensemble d'équations mathématiques utilisées dans le cadre de la géométrie différentielle. Elie Cartan a développé ces équations comme un outil fondamental pour étudier la géométrie des espaces courbes.

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (1.19)$$

1.4 L'équation des géodésiques

L'équation des géodésiques est fondamentale pour comprendre le mouvement des particules dans le champ gravitationnel généré par la courbure de l'espace-temps. Elle constitue un élément clé des fondements mathématiques de la relativité générale.

L'équation géodésique, impliquant l'utilisation des symboles de Christoffel, est exprimée par la formule

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0. \quad (1.20)$$

Dans cette équation, x^{μ} représentent les coordonnées de l'événement dans l'espace-temps à quatre dimensions, s est un paramètre affine le long de la trajectoire (la longueur propre de l'objet en mouvement), et $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ sont les symboles de Christoffel, qui décrivent la connexion affine associée au champ gravitationnel.

1.5 Le tenseur de torsion

Le tenseur de torsion est un concept important en géométrie différentielle, en particulier dans le contexte de la théorie des connexions affines. Il mesure le degré auquel une connexion affine, qui généralise la notion de dérivation covariante sur une variété différentielle, échoue à être symétrique.

En physique, le concept de torsion est également utilisé dans certaines théories de la gravité alternative, telles que la théorie de la gravité de torsion d'Einstein-Cartan, qui généralise la relativité générale en incluant la torsion comme une nouvelle propriété géométrique de l'espace-temps.

La première équation de structure de Cartan, dérivée à l'origine par Cartan, représente une équation fondamentale de géométrie différentielle. Elle définit la forme de torsion comme la dérivée extérieure covariante de la forme tétrade. Les relations clés déterminant la torsion et la courbure sont ainsi établies.

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = T^a. \quad (1.21)$$

Le tenseur de torsion de la géométrie de Riemann peut également être exprimé explicitement en fonction de la connexion affine par

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= e_a^\lambda T_{\mu\nu}^a \\ &= e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \omega_{\nu b}^a e_\mu^b). \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.6 Tensor de courbure de Riemann

La géométrie riemannienne est une branche de la géométrie différentielle qui étudie les espaces munis d'une métrique riemannienne. Elle a des applications importantes en physique, en particulier dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, où elle est utilisée pour décrire la courbure de l'espace-temps.

La géométrie riemannienne fournit donc les outils mathématiques nécessaires pour décrire la géométrie des espaces courbes de manière générale, et elle a des applications étendues dans divers domaines de la physique et des mathématiques. Les composants de tenseur de Riemann sont formulés à l'aide des symboles de Christoffel selon la formule suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\beta + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta, \quad (1.23)$$

à partir de cette expression, on peut immédiatement établir la symétrie suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = -R_{\nu\sigma\rho}^{\beta}, \quad (1.24)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (1.25)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}. \quad (1.26)$$

Et l'identité cyclique suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} + R_{\rho\sigma\nu}^{\beta} + R_{\sigma\nu\rho}^{\beta} = 0. \quad (1.27)$$

Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est une notion importante en géométrie différentielle et en relativité générale. Il est dérivé à partir du tenseur de courbure de Riemann, il résume certaines propriétés de la courbure de l'espace-temps. Il est défini en termes par la contraction sur les deux premiers indices supérieurs et inférieurs

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}. \quad (1.28)$$

Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est symétrique

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (1.29)$$

La définition du scalaire de Ricci R à partir du tenseur de Ricci est donnée par

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

Le scalaire de Ricci mesure la courbure moyenne de l'espace-temps à un point donné. Si le scalaire de Ricci est non nul en un point, cela indique la présence de courbure à cet endroit de l'espace-temps. Dans le cas où l'espace est plat, le scalaire de Ricci est égal à zéro. Si l'espace présente une courbure similaire à celle d'une sphère, le scalaire de Ricci est positif. En revanche, si l'espace présente une courbure semblable à celle d'une selle de cheval, le scalaire de Ricci est négatif.

1.7 Le tenseur d'Einstein

Il est important de noter que le contexte dans lequel le terme est utilisé détermine sa signification précise. En relativité générale, le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ est généralement associé au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, tandis qu'en relativité restreinte, il peut être lié au tenseur métrique.

Le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ est une quantité mathématique qui joue un rôle central dans la formulation des équations du champ d'Einstein, il est défini à partir du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ de la manière suivante

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Il est symétrique

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}. \quad (1.32)$$

Les équations du champ d'Einstein s'écrivent de la manière suivante

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

Où G est la constante gravitationnelle, c est la vitesse de la lumière.

Le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ encapsule l'effet gravitationnel résultant de la distribution de la matière et de l'énergie dans l'espace-temps, et il est central dans la compréhension de la gravité selon les principes de la relativité générale.

1.8 Trous de ver traversables

Nous examinerons les métriques des trous de ver traversables, abordant la problématique de manière similaire en détaillant la métrique d'un exemple simple d'espace-temps de trou de ver et en étudiant ses caractéristiques. Cependant, nous ne soulignerons pas l'absence de matière dans les espaces-temps, car cela exclurait des solutions intéressantes de trous de ver. Nous postulons une métrique et utiliserons les équations d'Einstein pour déduire les propriétés du matériau gravitationnel nécessaires à sa création, contrairement à l'approche habituelle où la métrique est obtenue en résolvant les équations d'Einstein pour une distribution de matière donnée.

Une métrique générale pour un trou de ver prend la forme

$$d\tau^2 = e^{2\Phi(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.34)$$

où Φ et b sont des fonctions de r . La métrique (1.34) possède une symétrie sphérique et statique. La valeur minimale de r est

$$r_{\min} = b_0, \quad (1.35)$$

qui satisfait

$$r = b(r). \quad (1.36)$$

Cela définit la gorge du trou de ver, à l'infini

$$\Phi(r) = 0, \quad (1.37)$$

sinon, elle est négative et finie, donc une particule stationnaire a toujours une ligne d'univers temporelle : il n'y a pas d'horizon. La distance appropriée par rapport à la gorge est l donnée par

$$dl = \frac{dr}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.38)$$

Un cas particulier simple de métrique de trou de ver est obtenu en mettant $\Phi = 0$ et

$$b = \frac{b_0^2}{r}, \quad (1.39)$$

avec

$$r^2 = l^2 + b_0^2. \quad (1.40)$$

Donc

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2 - (b_0^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.41)$$

c'est le cas dont nous discuterons. Le diagramme d'intégration de cette métrique est donné sur la figure (FIG 1.1). Contrairement à la métrique de Schwarzschild, qui dépend du temps à l'intérieur de l'horizon, la métrique du trou de ver est statique partout. Ainsi, le diagramme d'intégration donne les propriétés à tout moment. Un observateur peut voyager à travers la gorge et émerger de l'autre côté en un temps fini. Il n'y a donc aucune singularité dans le chemin. C'est pourquoi l'espace-temps est appelé trou de ver traversable. Une autre manière de démontrer l'absence de singularité consiste à calculer la courbure. Cela s'avère également limité partout.

Notez que pour les rayons lumineux radiaux se propageant vers l'extérieur, $dt = dl$. Ainsi, un rayon lumineux radial peut toujours s'échapper vers l'infini, ce qui constitue une autre manière de démontrer l'absence d'horizon dans l'espace-temps. Il existe donc deux régions distinctes, $l \rightarrow \pm\infty$, où la courbure tend vers zéro à de grandes distances du trou de ver. Ces régions sont reliées par la gorge du trou de ver, et il n'y a aucune restriction sur les déplacements entre les deux régions.

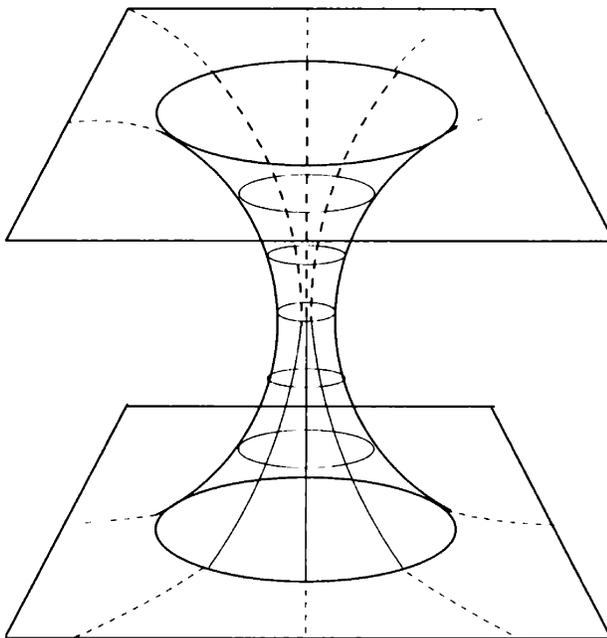


FIG. 1.1 – Le diagramme d'intégration pour la métrique spéciale de trou de ver

1.9 Défaut topologique

Un défaut topologique est une sorte d'irrégularité ou d'imperfection dans la structure d'un système physique qui résulte d'une rupture de symétrie lors d'une transition de phase. Ces défauts sont caractérisés par certaines propriétés topologiques, ce qui signifie que leur existence et leur comportement ne sont pas facilement modifiés par des déformations douces du système. Le type de défauts formé dépend de l'ordre n de l'homotopie non triviale du groupe.

Voici quelques types de défauts topologiques couramment évoqués en physique :

1.9.1 Cordes Cosmiques

Comme mentionné précédemment, les cordes cosmiques sont des défauts topologiques unidimensionnels qui sont hypothétiquement formés lors de transitions de phase dans l'univers primitif. On peut les considérer comme des "fissures" unidimensionnelles dans la trame de l'espace-temps et elles sont responsables de certaines structures à grande échelle dans le cosmos.

La métrique d'une corde cosmique droite sans effets gravitationnels est donnée par la métrique de Minkowski modifiée pour tenir compte de la présence de la corde. En coordonnées cylindriques, cela peut s'écrire [1, 8, 10 – 11] :

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (1.42)$$

Et en coordonnées sphériques,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.43)$$

Le paramètre α dans (1.43) est associé à la densité de masse linéaire η de la corde par

$$\alpha = 1 - 4\eta. \quad (1.44)$$

Il est défini dans l'intervalle $(0, 1]$ et correspond à un angle déficitaire

$$\Omega = 2\pi(1 - \alpha). \quad (1.45)$$

1.9.2 Monopôle global

Les monopôles globales, également appelés monopôles magnétiques, sont des particules hypothétiques qui ne possèdent qu'un seul pôle magnétique, soit nord soit sud. Bien qu'ils n'aient pas encore été observés expérimentalement, leur existence est prédite par certaines théories en physique des particules, notamment les théories de grande unification. Ces monopôles magnétiques seraient considérés comme des défauts topologiques dans le cadre de ces théories.

La géométrie de l'espace en présence de défaut topologique de monopôles globales est décrite dans les coordonnées sphériques par [1, 8, 10 – 11]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.46)$$

Le paramètre α , inférieur à l'unité, dépend de l'échelle d'énergie où se forme le monopôle et où la symétrie est brisée. L'espace-temps décrit par (1.46) a une courbure scalaire non nulle,

$$R = \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha^2 r^2}, \quad (1.47)$$

et présente un déficit angulaire solide

$$\Omega = 4\pi^2(1 - \alpha^2). \quad (1.48)$$

1.9.3 Parois de Domaine

Les parois de domaine sont des défauts topologiques qui peuvent se former lors de transitions de phase dans certains systèmes physiques. Ces parois séparent des régions où le champ d'ordre (la configuration ou l'état du système) subit des changements. Elles peuvent apparaître dans divers contextes, tels que la physique des particules, la cosmologie, ou la physique de la matière condensée.

En physique des particules, les parois de domaine peuvent se former lorsque des champs scalaires subissent une transition de phase. Dans le domaine de la cosmologie, elles sont parfois envisagées comme des structures qui ont pu se former dans l'univers primitif. Dans la physique de la matière condensée, elles peuvent apparaître lors des transitions de phase de certains matériaux.

Les parois de domaine peuvent avoir des implications importantes sur le comportement global d'un système, et leur étude contribue à la compréhension des propriétés fondamentales de la matière à différentes échelles [1].

1.9.4 Texture

Le terme "texture" dans le contexte de la cosmologie et de la théorie des champs fait référence à une distribution tridimensionnelle d'un champ avec un nombre d'enroulement. Une texture est un type particulier de défaut topologique qui peut se former lors des transitions de phase dans l'univers primitif.

La texture peut être considérée comme une configuration de champ qui a une structure complexe, souvent avec des propriétés de symétrie brisée. Elle est caractérisée par la présence d'une texture dite "non triviale", ce qui signifie qu'elle ne peut pas être continûment transformée en une configuration de champ homogène sans créer de singularités.

L'étude des textures est importante en cosmologie, car ces configurations complexes peuvent avoir des implications pour la formation des structures à grande échelle dans l'univers. Les textures peuvent laisser des empreintes sur le fond cosmologique micro-onde ou influencer la distribution des galaxies. Leur compréhension contribue donc à notre connaissance de l'évolution de l'univers à des stades très précoces [1].

1.10 L'équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon est une équation aux dérivées partielles qui décrit le comportement des particules de spin-0, (comme le boson scalaire, par exemple). Elle est souvent utilisée en

physique quantique relativiste. L'équation de Klein-Gordon s'écrit généralement sous la forme suivante

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi = 0, \quad (1.49)$$

ou

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (1.50)$$

avec la convention

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \\ \partial^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \end{aligned} \quad (1.51)$$

La relation entre l'énergie E , l'impulsion p , la masse m de la particule et la constante de Planck réduite \hbar est donnée par

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.52)$$

reflétant la nature relativiste de l'équation de Klein-Gordon.

1.11 L'équation de DKP

L'équation DKP, ou équation de Kemmer, est une généralisation de l'équation de Dirac, qui est utilisée pour décrire le comportement des fermions de spin demi-entier. L'équation DKP prend en compte des particules de spin-0 et spin-1. La forme générale de l'équation de DKP libre peut être écrite de la manière suivante

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (1.53)$$

β^μ représente des matrices de Kemmer conforme aux relations de commutation suivantes

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\rho} \beta^\nu + \eta^{\rho\nu} \beta^\mu, \quad (1.54)$$

$$(\beta^\mu)^3 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad \mu = \nu = \rho, \quad (1.55)$$

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho = 0, \quad \mu \neq \nu \neq \rho, \quad (1.56)$$

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\rho + \beta^\rho (\beta^\mu)^2 = \eta^{\mu\rho} \beta^\rho, \quad (1.57)$$

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = 0, \quad \mu = \rho \neq \nu, \quad (1.58)$$

Pour obtenir davantage d'informations, veuillez consulter [57, 75, 76 – 77].

Chapitre 2

L'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps de trou de ver

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillateur de l'équation de Klein-Gordon avec des potentiels scalaire et vectoriel dans un fond d'espace-temps de trou de ver (wormhole) simple de type d'Ellis-Bronnikov, chargé topologiquement. Pour cette étude, nous introduisons une dépendance de la masse par rapport à la position en utilisant la transformation $m \rightarrow (m + S(x))$, où $S(x)$ représente le potentiel scalaire.

2.1 L'oscillateur de Klein Gordon

Nous pouvons introduire l'oscillateur de Klein-Gordon généralisé sous la forme d'une équation qui prend en compte les effets du potentiel scalaire et vectoriel, permettant ainsi une analyse approfondie du comportement des particules dans un contexte d'espace-temps de trou de ver.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + m\omega x_\mu) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) (\partial_\nu - m\omega x_\nu) \Psi - (m + S(x))^2 \Psi = 0, \quad (2.1)$$

où $g = \det(g_{\mu\nu})$ et $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique inverse, m c'est la masse au repos du champ scalaire, et

$$x_\mu = (0, x, 0, 0). \quad (2.2)$$

Le trou de ver simple de type Ellis-Bronnikov (wormhole) est décrit par la métrique en unités naturelles

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dx^2}{\alpha^2} + (x^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.3)$$

Dans l'expression de métrique

$$\alpha = 1 - 8\pi^2 G \eta_0^2, \quad (2.4)$$

et

$$-\infty < x < \infty,$$

$$0 < \alpha < 1 \quad (2.5)$$

avec G étant la constante universelle de la gravitation, α est le paramètre de défaut topologique, η_0 la densité de masse volumétrique sans dimension du monopole global, et $a = \text{constante}$ est le rayon du trou de ver (wormhole).

Dans l'interaction, nous introduisons un couplage minimal de

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (2.6)$$

q est la charge électrique, A_μ est le quadrivecteur champ électromagnétique

$$A_\mu = (-A_0, \vec{A}). \quad (2.7)$$

Alors l'équation de Klein-Gordon devient sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + iqA_\mu + m\omega x_\mu) (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) (\partial_\nu + iqA_\nu - m\omega x_\nu) \Psi - (m + S(x))^2 \Psi = 0. \quad (2.8)$$

Nous choisissons

$$\vec{A} = 0, \quad (2.9)$$

dans l'équation (2.3) on trouve,

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{\partial}{\partial t} + qA_0 \right)^2 \Psi + \alpha^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2\alpha^2 x}{(x^2 + a^2)} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \alpha^2 m \omega \Psi - \frac{2\alpha^2 m \omega x^2}{(x^2 + a^2)} \Psi - \alpha^2 m^2 \omega^2 x^2 \Psi \\ & + \frac{1}{(x^2 + a^2)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] - (m + S(x))^2 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour résoudre l'équation (2.10) nous utilisons la séparation des variables, l'une des méthodes familières de résolution des équations différentielles partielles et ordinaires. On considérera donc

$$\Psi(t, x, \theta, \phi) = R(x) Y_{l,m}(\theta, \phi) e^{-iEt}. \quad (2.11)$$

Ici $R(x)$ est la composante radiale, $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ sont les harmoniques sphériques. En substituant

$$qA_0 = V(x), \quad (2.12)$$

dans l'équation (2.10) on trouve,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{dR(x)}{dx} - m\omega R(x) - \frac{2m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} R(x) - m^2 \omega^2 x^2 R(x) \\ + \frac{(E + V(x))^2}{\alpha^2} R(x) - \frac{l(l+1)}{\alpha^2(x^2 + a^2)} R(x) - \frac{(m + S(x))^2}{\alpha^2} R(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où nous avons utilisé la définition

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Nous supposons la solution de l'équation différentielle du second ordre (2.13) sous la forme,

$$R(x) = e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} Q(x). \quad (2.14)$$

En utilisant cette forme de solution, on peut obtenir de l'équation (2.13) en posant

$$S(x) = V(x), \quad (2.15)$$

On trouve

$$\frac{d^2 Q(x)}{dx^2} + 2x \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)} - m\omega \right] \frac{dQ(x)}{dx} + \left[\frac{2(E - m)S(x)}{\alpha^2} + b^2 - \frac{4m\omega x^2 + \iota^2}{(x^2 + a^2)} \right] Q(x) = 0, \quad (2.16)$$

où nous définissons les nouveaux paramètres comme,

$$b^2 = \frac{E^2 - m^2 - 2m\omega\alpha^2}{\alpha^2},$$

$$\iota^2 = \frac{l(l+1)}{\alpha^2}. \quad (2.17)$$

On applique une transformation de coordonnées

$$z = -\frac{x^2}{a^2}, \quad (2.18)$$

dans l'équation (2.16), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \left[a^2 m\omega + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(z-1)} \right] \frac{dQ(z)}{dz} \\ + \left[\frac{\iota^2 - a^2 b^2}{4z} + \frac{4a^2 m\omega - \iota^2}{4(z-1)} + \frac{a^2(m-E)S(z)}{2\alpha^2 z} \right] Q = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ci-dessous, nous allons examiner certains potentiels d'interaction, tels que le potentiel linéaire, le potentiel coulombien et le potentiel de Cornell, puis résoudre l'équation d'onde associée.

2.2 Potentiel linéaire

Dans cette section, nous étudierons le système quantique ci-dessus avec un potentiel de confinement linéaire $S(z) \propto z$. Ce type de potentiel a été utilisé dans les phénomènes de confinement des quarks [78], en physique atomique et moléculaire [79 – 80], dans les mouvements quantiques des particules de spin 0 et de spin $\frac{1}{2}$ [81 – 83], et dans le contexte de la théorie de Kaluza-Klein [84 – 86]. Nous avons choisi des potentiels scalaires et vectoriel pour étudier les mouvements quantiques du champ de l'oscillateur. Les potentiels linéaires scalaires et vectoriels sont donnés par :

$$V(z) = S(z) = C_1 z, \quad C_1 > 0. \quad (2.20)$$

Ainsi, en substituant le potentiel (2.20) dans l'équation (2.19), on arrive à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \left[a^2 m \omega + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(z-1)} \right] \frac{dQ(z)}{dz} \\ & + \left[\frac{\iota^2 - a^2 b^2}{4z} + \frac{4a^2 m \omega - \iota^2}{4(z-1)} + \frac{a^2 [m - E] C_1}{2\alpha^2} \right] Q(z) = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où nous avons défini les paramètres

$$\begin{aligned} Q(z) &= e^{\frac{az(-am\omega\alpha + \sqrt{2(E-m)C_1 + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2})}{2\alpha}} \times \\ & H_c \left(\frac{a\sqrt{2(E-m)C_1 + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{a^2 m \omega - a^2 b^2}{4}, \frac{a^2 m \omega + 1 - \iota^2 + a^2 b^2}{4}; z \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Considérons une solution en série de puissance infinie de la fonction $H(z)$ comme suit

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j. \quad (2.23)$$

Dans l'équation (2.12), on obtient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} c_{j+2} &= \frac{\left(\frac{a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} (4j+3) + a^2 m \omega - a^2 b^2 \right)}{2(j+2)(2j+3)} c_j \\ & \frac{\left(2(2j+3)(j+1) - \frac{a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} (4j+5) - \iota^2 + a^2 b^2 + a^2 m \omega \right)}{2(2j+3)(j+2)} c_{j+1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \frac{\left(a^2 b^2 - \iota^2 + a^2 m \omega - \frac{a\sqrt{2(E-m)C_1 + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} \right)}{2} c_0. \quad (2.25)$$

Considérons $j = n - 1$ lorsque $c_{n+1} = 0$ on a

$$c_n = \frac{\left(a^2 b^2 - a^2 m \omega - \frac{a \sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} (4n - 1) \right)}{\left(n(4n + 2) - (4n + 1) \frac{a \sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} - \iota^2 + a^2 b^2 + a^2 m \omega \right)} c_{n-1}. \quad (2.26)$$

Pour $n = 1$, on trouve

$$c_1 = \frac{\left(a^2 b^2 - a^2 m \omega - \frac{3a \sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} \right)}{\left(6 - \frac{5a \sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} - \iota^2 + a^2 b^2 + a^2 m \omega \right)} c_0. \quad (2.27)$$

En remplaçant l'équation (2.27) en l'équation (2.25), nous avons

$$\begin{aligned} E_{l,1}^4 + \left(4 \frac{\alpha^2}{a^2} - 2 \frac{\alpha^2}{a^2} \iota^2 - 2m\omega\alpha^2 - 2m^2 \right) E_{l,1}^2 \\ - 6 \frac{\alpha}{a} \sqrt{2C_1(E_{l,1} - m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2} E_{l,1}^2 \\ + \left(6 \frac{\alpha}{a} m^2 + \frac{6}{a} m \omega \alpha^3 + 6 \iota^2 \frac{\alpha^3}{a^3} \right) \sqrt{2C_1(E_{l,1} - m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2} \\ + m^4 + 2m^3 \omega \alpha^2 - 4 \frac{\alpha^2}{a^2} m^2 + 2 \frac{\alpha^2}{a^2} \iota^2 m^2 - 6 \frac{\alpha^4}{a^4} \iota^2 + 2 \frac{\alpha^4}{a^2} m \omega \iota^2 \\ + 6m^2 \omega^2 \alpha^4 + \frac{\alpha^4}{a^4} \iota^4 + 10 \frac{\alpha^2 C_1}{a^2} (E_{l,1} - m) = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'équation (2.28) est une équation du quatrième ordre de $E_{l,1}$ à partir de laquelle on peut trouver l'expression du niveau d'énergie de l'état fondamental des champs de l'oscillateur sous un potentiel de confinement linéaire.

La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par

$$Q_{1,l}(z) = e^{\frac{az(-am\omega\alpha + \sqrt{2C_1(E_{1,l}-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{2\alpha}} (c_0 + c_1 z). \quad (2.29)$$

2.3 Potentiel du Coulomb

Dans cette section, nous considérons le potentiel du Coulomb. Ce type de potentiel a été largement utilisé pour étudier divers phénomènes physiques, tels que la propagation des ondes gravitationnelles [87] confinement des modèles de quarks [78], modèles moléculaires [88], et en mécanique quantique [89 – 90]. Par conséquent, le potentiel scalaire de type Coulomb (égal au potentiel vecteur) est donné par

$$V(z) = S(z) = \frac{C_2}{z}, \quad (2.30)$$

où C_2 est une constante détermine la force du potentiel.

Ainsi, en substituant le potentiel de Coulomb dans l'équation (2.19), on arrivera à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \left[a^2 m \omega + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(z-1)} \right] \frac{dQ(z)}{dz} \\ & + \left[\frac{\iota^2 - a^2 b^2}{4z} + \frac{a^2 C_2 [m - E]}{2\alpha^2 z^2} + \frac{4a^2 m \omega - \iota^2}{4(z-1)} \right] Q(z) = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La solution de l'équation ci-dessus est donnée par

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^{\frac{\alpha - \sqrt{8(E-m)a^2 C_2 + \alpha^2}}{4\alpha}} \times \\ & H_c \left(a^2 m \omega, -\frac{\sqrt{8(E-m)a^2 C_2 + \alpha^2}}{2\alpha}, 0, \frac{a^2 m \omega - a^2 b^2}{4}, \frac{a^2 m \omega + 1 - \iota^2 + a^2 b^2}{4}; z \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Considérons une solution en série de puissance infinie de la fonction $Q(z)$ comme suit

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j. \quad (2.33)$$

Dans l'équation (2.32), on obtient la relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} c_{j+2} &= \frac{\left\{ 4a^2 m \omega j + 5a^2 m \omega - a^2 b^2 - a^2 m \omega \frac{\sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right\}}{4 \left[(j+1)(j+2) + (j+2) \left(\frac{2\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{2\alpha} \right) \right]} c_j \\ &+ \left\{ 4 \left(\frac{2\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{2\alpha} \right) (j+1) + 4j(j+1) - 4a^2 m \omega (j+1) - \iota^2 + a^2 b^2 \right. \\ &+ \left. 4(j+1) - a^2 m \omega \left(\frac{\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right) + \left(\frac{\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right) \right\} \\ &\times \frac{c_{j+1}}{4 \left[(j+2)(j+1) + \left(\frac{2\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{2\alpha} \right) (j+2) \right]}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \frac{a^2 b^2 - \iota^2 - a^2 m \omega \left(\frac{\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right) + \left(\frac{\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right)}{2 \left(\frac{2\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \right)} c_0 \quad (2.35)$$

Considérons $j = n - 1$ avec $c_{n+1} = 0$ on trouve

$$c_n = \frac{\left\{ -4(n-1)a^2m\omega + a^2b^2 - 5a^2m\omega + a^2m\omega \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m)+\alpha^2}}{\alpha} \right\} c_{n-1}}{\left\{ 4n^2 + 4 \left(\frac{2\alpha - \sqrt{8a^2C_2(E-m)+\alpha^2}}{2\alpha} \right) n - 4a^2m\omega n - \iota^2 + a^2b^2 + (1 - a^2m\omega) \left(\frac{\alpha - \sqrt{8a^2C_2(E-m)+\alpha^2}}{\alpha} \right) \right\}}. \quad (2.36)$$

Puis, pour $n = 1$

$$c_1 = \frac{\left\{ -5a^2m\omega + a^2b^2 + a^2m\omega \frac{\sqrt{8(E-m)a^2C_2+\alpha^2}}{\alpha} \right\}}{\left\{ 9 - 5a^2m\omega - \iota^2 + a^2b^2 + (a^2m\omega - 3) \frac{\sqrt{8(E-m)a^2C_2+\alpha^2}}{\alpha} \right\}} c_0 \quad (2.37)$$

En remplaçant l'équation (2.37) en l'équation (2.35), nous avons

$$\begin{aligned} & E_{l,1}^4 + \left(\frac{6}{a^2}\alpha^2 - 10m\omega\alpha^2 - \frac{2\iota^2}{a^2}\alpha^2 - 2m^2 \right) E_{l,1}^2 \\ & + \left(2m\omega\alpha^2 - \frac{2}{a^2}\alpha^2 \right) \frac{\sqrt{8a^2C_2(E_{l,1}-m)+\alpha^2}}{\alpha} E_{l,1}^2 \\ & + \left(-10m^2\omega^2\alpha^4 - 2m^3\omega\alpha^2 + \frac{2}{a^2}m^2\alpha^2 + \frac{8m\omega}{a^2}\alpha^4 - \frac{12}{a^4}\alpha^4 - \frac{2m\omega\iota^2}{a^2}\alpha^4 + \frac{4\iota^2}{a^4}\alpha^4 \right) \\ & \quad \times \frac{\sqrt{8a^2C_2(E_{l,1}-m)+\alpha^2}}{\alpha} \\ & + m^4 - \frac{6}{a^2}m^2\alpha^2 + 10m^3\omega\alpha^2 + \frac{2\iota^2}{a^2}m^2\alpha^2 - 8\frac{m\omega}{a^2}\alpha^4 + \frac{12}{a^4}\alpha^4 \\ & + \frac{10m\omega\iota^2}{a^2}\alpha^4 + 22m^2\omega^2\alpha^4 + \frac{\iota^4}{a^4}\alpha^4 - \frac{10\iota^2}{a^4}\alpha^4 \\ & + 8C_2(E_{l,1}-m) \left(a^2m^2\omega^2\alpha^2 - 2m\omega\alpha^2 + \frac{3}{a^2}\alpha^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'équation (2.38) est une équation du quatrième ordre de $E_{l,1}$ à partir de laquelle on peut trouver l'expression du niveau d'énergie de l'état fondamental des champs de l'oscillateur sous un potentiel d'interaction de type du Coulomb.

La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par

$$Q_{1,l}(z) = z^{\frac{\alpha - \sqrt{8a^2C_2(E_{1,l}-m)+\alpha^2}}{4\alpha}} (c_0 + c_1 z). \quad (2.39)$$

2.4 Potentiel de Cornell

Enfin, nous choisissons ici une autre superposition de potentiel linéaire plus potentiel de type Coulomb. Le potentiel de Coulomb est responsable des interactions à courte distance et le potentiel linéaire conduit aux phénomènes de confinement. Ce type de a été étudié dans l'état fondamental de trois quarks [91], et dans les équations d'onde relativistes et non relativistes de plusieurs auteurs [78, 90]. Ceci étant, considérons ce type de potentiel

$$V(z) = S(z) = C_1 z + \frac{C_2}{z} \quad (2.40)$$

L'équation (2.29) peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \left[a^2 m \omega + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(z-1)} \right] \frac{dQ(z)}{dz} \\ & + \left[\frac{\iota^2 - a^2 b^2}{4z} + \frac{4a^2 m \omega - \iota^2}{4(z-1)} + \frac{a^2 C_1 [m - E]}{2\alpha^2} + \frac{a^2 C_2 [m - E]}{2\alpha^2 z^2} \right] Q(z) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

On trouve

$$\begin{aligned} Q(z) = & z^{\frac{\alpha - \sqrt{8(E-m)a^2 C_2 + \alpha^2}}{4\alpha}} e^{\frac{az(-am\omega\alpha + \sqrt{2(E-m)C_1 + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2})}{2\alpha}} \times \\ H_c \left(\frac{a\sqrt{2(E-m)C_1 + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha}, -\frac{\sqrt{8(E-m)a^2 C_2 + \alpha^2}}{2\alpha}, 0, \frac{a^2 m \omega - a^2 b^2}{4}, \frac{a^2 m \omega + 1 - \iota^2 + a^2 b^2}{4}; z \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

nous écrivons $Q(z)$ dans l'équation (2.42)

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad (2.43)$$

on obtient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} c_{j+2} = & \frac{\left[\frac{4a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} (j+1) - a^2 b^2 + a^2 m \omega - \frac{\sqrt{8a^2 C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \left(\frac{a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} \right) \right]}{4(j+2) \left[(j+2) - \frac{\sqrt{8a^2 C_2(E-m) + \alpha^2}}{2\alpha} \right]} c_j \\ & + \left\{ 4(j+2)(j+1) - \left(\frac{\sqrt{8a^2 C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} + \frac{2a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} \right) (2j+3) \right. \\ & \left. - \iota^2 + a^2 b^2 + a^2 m \omega + 1 + \frac{\sqrt{8a^2 C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \left(\frac{a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2}}{\alpha} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\times \frac{c_{j+1}}{4(j+2) \left[(j+2) - \frac{\sqrt{8(E-m)a^2C_2 + \alpha^2}}{2\alpha} \right]}. \quad (2.44)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \left\{ 1 + a^2b^2 + a^2m\omega - \iota^2 - \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} - \frac{2a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2}}{\alpha} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \frac{\left(a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2} \right)}{\alpha} \right\} \\ \times \frac{c_0}{4 \left(1 - \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{2\alpha} \right)}. \quad (2.45)$$

considérons $j = n - 1$ quand $c_{n+1} = 0$ on a

$$c_n = \frac{A_n}{B_n} c_{n-1}, \quad (2.46)$$

où

$$A_n = a^2b^2 - a^2m\omega - \frac{4a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2}}{\alpha} n \\ + \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \frac{\left(a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2} \right)}{\alpha}. \quad (2.47)$$

et

$$B_n = 4n(n+1) - (2n+1) \left(\frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} + \frac{2a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2}}{\alpha} \right) - \iota^2 \\ + 1 + a^2b^2 + a^2m\omega + \frac{\sqrt{8a^2C_2(E-m) + \alpha^2}}{\alpha} \frac{\left(a\sqrt{2C_1(E-m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2} \right)}{\alpha}. \quad (2.48)$$

Puis pour $n = 1$

$$c_1 = \frac{A_1}{B_1} c_0. \quad (2.49)$$

En remplaçant l'équation (2.49) dans l'équation (2.45) nous avons

$$E_{l,1}^4 - \left(2\frac{\alpha^2}{a^2}\iota^2 + 2m^2 + 2m\omega\alpha^2 - 6\frac{\alpha^2}{a^2} \right) E_{l,1}^2 \\ - \frac{2\alpha}{a^2} \sqrt{8a^2C_2(E_{l,1} - m) + \alpha^2} E_{l,1}^2 + \frac{8\alpha}{a} \sqrt{2C_1(E_{l,1} - m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2} E_{l,1}^2 \\ + \frac{2}{a} \sqrt{2C_1(E_{l,1} - m) + a^2m^2\omega^2\alpha^2} \sqrt{8a^2C_2(E_{l,1} - m) + \alpha^2} E_{l,1}^2$$

$$\begin{aligned}
 & +C_2 \left(8a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2 + 24 \frac{\alpha^2}{a^2} \right) (E_{l,1} - m) + 26 \frac{\alpha^2}{a^2} (E_{l,1} - m) C_1 + 16 (E_{l,1} - m)^2 C_1 C_2 \\
 & + \left(\frac{2\alpha}{a^2} m^2 - 8m^2 \omega^2 \alpha^3 - 2 \frac{\alpha^3}{a^2} m \omega + 4 \frac{\alpha^3}{a^4} l^2 - 12 \frac{\alpha^3}{a^4} \right) \sqrt{8a^2 C_2 (E_{l,1} - m) + \alpha^2} \\
 & + \left(\frac{8\alpha}{a} m^2 + 8m \omega \frac{\alpha^3}{a} + 8 \frac{\alpha^3}{a^3} l^2 - 10 \frac{\alpha^3}{a^3} \right) \sqrt{2C_1 (E_{l,1} - m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2} \\
 & + \sqrt{2C_1 (E_{l,1} - m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2} \sqrt{8a^2 C_2 (E_{l,1} - m) + \alpha^2} \left(10 \frac{\alpha^2}{a^3} - 2m \omega \frac{\alpha^2}{a} - 2 \frac{\alpha^2}{a^3} l^2 - \frac{2}{a} m^2 \right) \\
 & + 2m \omega \frac{\alpha^4}{a^2} - 10 l^2 \frac{\alpha^4}{a^4} + 12 \frac{\alpha^4}{a^4} + 14 m^2 \omega^2 \alpha^4 + 2m \omega l^2 \frac{\alpha^4}{a^2} + \frac{\alpha^4}{a^4} l^4 \\
 & + 2m^3 \omega \alpha^2 + m^4 - 6m^2 \frac{\alpha^2}{a^2} + 2m^2 \frac{\alpha^2}{a^2} l^2 \\
 & - \frac{16\alpha C_2}{a} (E_{l,1} - m) \sqrt{2C_1 (E_{l,1} - m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2} \\
 & - \frac{16\alpha C_1}{a^2} (E_{l,1} - m) \sqrt{8a^2 C_2 (E_{l,1} - m) + \alpha^2} = 0. \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

L'équation (2.50) est une équation du quatrième ordre de $E_{l,1}$ à partir de laquelle on peut trouver l'expression du niveau d'énergie de l'état fondamental des champs d'oscillateurs avec des potentiels scalaires et vectoriels égaux de type Cornell .

La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par

$$Q_{1,l}(z) = z^{\frac{\alpha - \sqrt{8a^2 C_2 (E_{1,l} - m) + \alpha^2}}{4\alpha}} e^{\frac{ax(-am\omega\alpha + \sqrt{2C_1(E-m) + a^2 m^2 \omega^2 \alpha^2})}{2\alpha}} (c_0 + c_1 z). \tag{2.51}$$

2.5 Conclusions

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons examiné l'oscillateur de Klein-Gordon généralisé sous l'influence des potentiels scalaire et vectoriel au sein d'un espace-temps correspondant à un trou de ver d'Ellis-Bronnikov, caractérisé par une charge topologique. L'objectif fondamental était d'analyser le comportement d'un champ d'oscillateur scalaire relativiste, présentant une masse dépendante de la position dans l'espace-temps du trou de ver.

L'oscillateur de Klein-Gordon généralisé a été présenté en remplaçant la dérivée partielle $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + M \omega X_\mu$ et en insérant un potentiel scalaire comme modification du terme de masse $m^2 \rightarrow (m + S)^2$ dans l'équation d'onde de Klein-Gordon. Une interaction a été prise en compte en introduisant une charge électrique et un quadri-vecteur du potentiel électromagnétique, ce qui a conduit à une modification de l'équation de Klein-Gordon. L'équation résultante a été décomposée en un ensemble d'équations différentielles du deuxième ordre, exprimées en termes de chaque coordonnée sphérique, en utilisant une transformation appropriée et un terme de potentiel. Une

solution d'essai a été adoptée sous la forme exponentielle habituelle pour résoudre l'équation différentielle. Après l'application d'une transformation adéquate des coordonnées, l'équation de Heun confluyente ainsi que la fonction de Heun confluyente correspondante ont été obtenues.

L'équation de Heun confluyente résultante a été résolue à l'aide de la méthode de Frobenius, exprimée sous la forme d'un développement en série de puissances autour de l'origine. Cela a été réalisé en prenant en compte un potentiel de confinement linéaire (cas A), ce qui a permis d'obtenir les niveaux d'énergie pour l'état fondamental $E_{1,l}$. En poursuivant notre analyse, nous avons ensuite examiné les potentiels scalaire et vectoriel de type Coulomb (cas B), ce qui a conduit à l'obtention des niveaux d'énergie $E_{1,l}$. Enfin, nous avons choisi un potentiel scalaire et vectoriel de type Cornell (Cas C) et obtenu les niveaux d'énergie $E_{1,l}$. En suivant la même procédure, on peut obtenir d'autres niveaux d'énergie $E_{2,l}, E_{3,l}, \dots$ et les fonctions d'onde correspondantes $\psi_{1,l}, \psi_{2,l}, \dots$ pour les modes radiaux $n = 2, 3, 4, \dots$

Durant notre analyse, nous avons constaté que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde des champs oscillateurs sont soumis à l'influence des défauts topologiques présents dans l'espace-temps des trous de ver, caractérisés par le paramètre α . De plus, le paramètre a , qui désigne le rayon du trou de ver, exerce une influence significative sur les solutions des valeurs propres, entraînant ainsi des modifications notables dans les résultats obtenus.

Chapitre 3

L'équation de DKP dans un espace-temps de trou de ver

Dans ce chapitre, nous souhaitons examiner la dynamique quantique relativiste du système spin-0 décrit par l'équation DKP, lorsque celui-ci évolue dans un espace-temps de type trou de ver, spécifiquement un trou de ver de type Ellis-Bronnikov, qui présente une charge topologique. Par la suite, nous nous pencherons sur l'oscillateur DKP spin-0 évoluant dans la même géométrie. Nous procéderons à une analyse des impacts des défauts topologiques sur les solutions propres dans les deux scénarios.

3.1 L'équation de DKP et les connexions de spin

Au sein de cette section, nous expliciterons de manière détaillée les connexions de spin qui sont associées à l'équation DKP, dans le contexte d'une géométrie de trou de ver de type Ellis-Bronnikov qui présente une charge topologique.

L'équation de DKP qui décrit la dynamique quantique relativiste des bosons scalaires de spin-0 de masse m dans l'espace courbe est formulée comme suit [92 – 94]

$$\left\{ i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} \right) - m \right\} \Psi = 0, \quad (3.1)$$

où

$$S^{ab} = [\beta^a, \beta^b], \quad (3.2)$$

et

$$\tilde{\beta}^\mu = e^\mu_{(a)}\beta^a, \quad (3.3)$$

avec β^μ les matrices bêta de DKP qui satisfont aux règles de commutation suivantes

$$\beta^\kappa \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\kappa = g^{\kappa\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\kappa \quad (3.4)$$

Le tenseur métrique de Minkowski $g^{\mu\nu}$ est défini par

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Les matrices bêta β^μ sont choisies comme suit [94]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \nu & \tilde{0} \\ \tilde{0}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho^i_T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Avec $\hat{0}, \tilde{0}, \mathbf{0}$ comme $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3$ matrices nulles, respectivement et

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Les connexions de spin, telles qu'utilisées dans le contexte de l'équation de DKP, sont calculées en utilisant la relation avec le symbole de Christoffel et de tétrade, sont déterminées par la relation

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)l} e_{(b)}^j \Gamma_{j\mu}^l - e_{(b)}^j \partial_\mu e_{(a)j} \quad (3.9)$$

où $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ sont les symboles de Christoffel [95] donnés par

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{g^{\mu\rho}}{2} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}). \quad (3.10)$$

D'un autre côté, il est également possible de calculer les connexions de spin en appliquant l'équation de structure de Maurer-Cartan.

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (3.11)$$

La métrique de trou de ver simple de type Ellis-Bronnikov (wormhole) est décrit par

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dx^2}{\alpha^2} + (x^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.12)$$

Nous choisissons la tétrade $e_{(a)}^\mu$ comme

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

et l'inverse de cette tétrade $e_{r(b)\mu}$ est

$$e_{r(b)\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(x^2+a^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{(x^2+a^2)}\sin\theta \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ici la relation suivante doit satisfaire

$$e_{(a)}^\mu e_{r(b)\mu} = \eta_{ab} \quad (3.15)$$

où la métrique de Minkowski est donnée par

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Après quelques calculs simples, les connexions de spin sont données par,

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2+a^2)}} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2+a^2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}\sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

3.2 L'équation de DKP libre dans un espace-temps de trou de ver

Dans cette section, nous entreprendrons la dérivation de l'équation radiale de l'équation de DKP pour le système spin-0. Ensuite, nous résoudrons cette équation radiale en utilisant l'équation de Heun. Il est important de noter que le défaut topologique présent dans la géométrie spatio-temporelle exercera une influence significative sur la solution aux valeurs propres du système.

Ainsi, en utilisant les équations (3.13), (3.17) et (3.18) dans l'équation de DKP (3.1), nous avons

$$\left\{ \beta^0 E + i\alpha\beta^1 \partial_x + i \frac{\beta^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \left(\partial_\theta - \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \beta^2 \beta^1 \right) + i\beta^3 \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \left(\partial_\varphi - \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \sin\theta \beta^3 \beta^1 - \cos\theta \beta^3 \beta^2 \right) - m \right\} \Psi = 0, \quad (3.19)$$

où la fonction d'onde est définie par

$$\Psi = e^{-iEt} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)^T. \quad (3.20)$$

En utilisant cette fonction d'onde, nous obtenons les équations suivantes du système quantique

$$E\Psi_2 - i \left(\alpha\partial_x + \frac{2\alpha x}{(x^2 + a^2)} \right) \Psi_3 - i \left(\frac{\partial_\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \right) \Psi_4 - \frac{i\partial_\varphi}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \Psi_5 = m\Psi_1, \quad (3.21)$$

$$E\Psi_1 = m\Psi_2, \quad (3.22)$$

$$i\alpha\partial_x \Psi_1 = m\Psi_3, \quad (3.23)$$

$$\frac{i\partial_\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \Psi_1 = m\Psi_4, \quad (3.24)$$

$$\frac{i\partial_\varphi}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \Psi_1 = m\Psi_5. \quad (3.25)$$

En mettant les équations (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.21), nous avons

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} + \left(\frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2 (x^2 + a^2)} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \right) \right\} \Psi_1 = 0. \quad (3.26)$$

Maintenant, on peut écrire $\Psi_1(x, \theta, \phi)$ sous la forme séparée des variables

$$\Psi_1(x, \theta, \phi) = f(x) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.27)$$

En substituant cette fonction, nous obtenons les équations angulaires et radiales comme suit :

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2}{d\phi^2} \right) Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.28)$$

On trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} + \left(\frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} \right) - \frac{l(l+1)}{\alpha^2(x^2 + a^2)} \right\} f(x) = 0. \quad (3.29)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (3.29) comme suit

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} - \frac{\iota^2}{(x^2 + a^2)} + b^2 \right\} f(x) = 0, \quad (3.30)$$

où nous avons défini les paramètres

$$b^2 = \frac{E^2 - m^2}{\alpha^2}, \quad (3.31)$$

$$\iota^2 = \frac{l(l+1)}{\alpha^2}. \quad (3.32)$$

Transformer (3.30) en une nouvelle variable via

$$z = -\frac{x^2}{a^2}, \quad (3.33)$$

on peut obtenir l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{d}{dz} + \frac{\iota^2 - a^2 b^2}{4z} - \frac{\iota^2}{4(z-1)} \right\} f(z) = 0. \quad (3.34)$$

Dans l'équation (3.34), $f(z)$ est la fonction de Heun confluite donnée par

$$f(z) = H_c \left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{a^2 b^2}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\iota^2}{4} + \frac{a^2 b^2}{4}; z \right). \quad (3.35)$$

Nous considérons la fonction de Heun sous la forme de série de puissance suivante

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j. \quad (3.36)$$

En substituant cette série entière dans l'équation (3.34), on peut obtenir la relation de récurrence,

$$c_{j+2} = \frac{2(j+1)(2j+3) - \iota^2 + a^2 b^2}{2(j+2)(2j+3)} c_{j+1} - \frac{a^2 b^2}{2(j+2)(2j+3)} c_j. \quad (3.37)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \frac{a^2 b^2 - \iota^2}{2} c_0. \quad (3.38)$$

Considérons $j = n - 1$ où $c_{n+1} = 0$, et on a

$$c_n = \frac{a^2 b^2}{(2n(2n+1) - \iota^2 + a^2 b^2)} c_{n-1}. \quad (3.39)$$

Pour $n = 1$, on trouve

$$c_1 = \frac{a^2 b^2}{(6 - \iota^2 + a^2 b^2)} c_0. \quad (3.40)$$

En remplaçant l'équation (3.40) dans l'équation (3.38), nous avons

$$E_{l,1}^4 - 2 \left(m^2 - \frac{\alpha^2 (2 - \iota^2)}{a^2} \right) E_{l,1}^2 + m^4 - \frac{2\alpha^2 (2 - \iota^2)}{a^2} m^2 + \frac{\iota^2 (\iota^2 - 6) \alpha^4}{a^4} = 0. \quad (3.41)$$

L'équation (3.41) est une équation du quatrième ordre de $E_{l,1}$ et sa solution réelle est donnée par

$$E_{l,1} = \pm \sqrt{m^2 + \frac{l(l+1) - 2\alpha^2}{a^2} \pm \frac{1}{a^2} \sqrt{2\alpha^2 [l(l+1) + 2\alpha^2]}}. \quad (3.42)$$

Ce qui est intéressant à noter, c'est que le niveau d'énergie des particules de spin-0 relativistes, tel que décrit par l'équation de DKP dans la géométrie spatio-temporelle dérivée précédemment, présente des similarités avec celui obtenu à partir de l'équation de Klein-Gordon dans la même géométrie. Cette observation suggère que, dans le scénario actuel, la dynamique quantique relativiste du système spin-0, qu'elle soit décrite par les équations de Klein-Gordon ou de DKP, est équivalente. Cela renforce l'idée que ces deux formulations mathématiques conduisent à des résultats comparables dans le contexte de la géométrie spatio-temporelle spécifiée.

3.3 L'oscillateur de DKP libre dans un espace-temps de trou de ver

Dans cette section, notre objectif sera d'étudier l'oscillateur de DKP au sein de la même géométrie espace-temps, tout en analysant les effets des défauts topologiques sur la solution aux valeurs propres. Pour ce faire, nous débuterons par la dérivation de l'équation d'onde radiale de l'oscillateur de DKP. Par la suite, nous résoudrons cette équation d'onde radiale en utilisant la méthode de l'équation de Heun.

Il est à noter que le défaut topologique présent dans la géométrie spatio-temporelle exercera une influence significative sur la solution aux valeurs propres du champ de l'oscillateur. Nous observerons ainsi que la modification induite par le défaut topologique impacte les propriétés fondamentales du champ oscillateur.

Un aspect notable de cette étude réside dans l'introduction du champ de l'oscillateur dans l'équation d'onde par le biais d'un couplage minimal via

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + m\omega X_\mu \eta^0, \quad (3.43)$$

où ω est la fréquence de l'oscillateur, X_μ est un quadrivecteur, et

$$\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1. \quad (3.44)$$

Cette approche offre une perspective intéressante sur la manière dont le couplage avec la géométrie de l'espace-temps peut influencer les caractéristiques du champ de l'oscillateur, et donc les propriétés physiques du système dans son ensemble.

Par conséquent, l'oscillateur de DKP dans l'espace-temps courbe est décrit par l'équation suivante :

$$\left\{ i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + m\omega X_\mu \eta^0 + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab} S^{ab} \right) - m \right\} \Psi = 0, \quad (3.45)$$

où

$$X_\mu = (0, x, 0, 0). \quad (3.46)$$

En utilisant les équations (3.13), (3.17) et (3.18) dans l'équation DKP (3.45), nous avons

$$\left\{ \beta^0 E + i\alpha\beta^1 (\partial_x + m\omega x \eta^0) + i \frac{\beta^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \left(\partial_\theta - \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \beta^2 \beta^1 \right) \right. \\ \left. + i\beta^3 \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \left(\partial_\varphi - \frac{\alpha x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \sin\theta \beta^3 \beta^1 - \cos\theta \beta^3 \beta^2 \right) - m \right\} \Psi = 0. \quad (3.47)$$

En utilisant la fonction d'onde de l'équation (3.20) dans l'équation (3.47), nous obtenons le système des équations suivant

$$E\Psi_2 - i\alpha \left(\partial_x + m\omega x + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \right) \Psi_3 - i \left(\frac{\partial_\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \right) \Psi_4 \\ - \frac{i\partial_\varphi}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \Psi_5 = m\Psi_1, \quad (3.48)$$

$$E\Psi_1 = m\Psi_2, \quad (3.49)$$

$$i\alpha (\partial_x - m\omega x) \Psi_1 = m\Psi_3, \quad (3.50)$$

$$\frac{i\partial_\theta}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \Psi_1 = m\Psi_4, \quad (3.51)$$

$$\frac{i\partial_\varphi}{\sqrt{(x^2 + a^2)} \sin\theta} \Psi_1 = m\Psi_5, \quad (3.52)$$

On met les équations (3.49), (3.50), (3.51) et (3.52) dans l'équation (3.48), on a

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} + \left(\frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} \right) - \frac{2m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} - m\omega - m^2\omega^2 x^2 + \frac{1}{\alpha^2(x^2 + a^2)} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \right) \right\} \Psi_1 = 0. \quad (3.53)$$

Nous avons séparé les variables, en utilisant l'équation (3.27) et l'équation (3.28) dans l'équation (3.53) nous obtenons

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} - \frac{2m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} - m^2\omega^2 x^2 - \frac{l(l+1)}{\alpha^2(x^2 + a^2)} + b_2^2 \right\} f(x) = 0. \quad (3.54)$$

Où

$$b_2^2 = \frac{E^2 - m^2 - m\omega\alpha^2}{\alpha^2}, \quad (3.55)$$

Maintenant dans l'équation (3.54), nous faisons

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} g(x). \quad (3.56)$$

Nous avons

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + 2x \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)} - m\omega \right) \frac{d}{dx} - \frac{4m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} - \frac{l^2}{(x^2 + a^2)} + (b_2^2 - m\omega) \right\} g(x) = 0. \quad (3.57)$$

Comme indiqué précédemment, la définition d'une nouvelle variable

$$z = -\frac{x^2}{a^2}, \quad (3.58)$$

on obtient

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left(a^2 m\omega + \frac{1}{2z} + \frac{1}{(z-1)} \right) \frac{d}{dz} + \frac{4m\omega a^2 - l^2}{4(z-1)} + \frac{l^2 - a^2(b_2^2 - m\omega)}{4z} \right\} g(z) = 0. \quad (3.59)$$

Dans l'équation (3.59) $g(z)$ est l'équation de Heun confluite donnée par

$$g(z) = H_c \left(a^2 m\omega, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{a^2(b_2^2 - 2m\omega)}{4}, \frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} + \frac{a^2 b_2^2}{4}; z \right), \quad (3.60)$$

Nous commençons par considérer la fonction de Heun sous la forme de série de puissance suivante

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j. \quad (3.61)$$

dans l'équation (3.59), on obtient la relation de récurrence

$$c_{j+2} = \left[\frac{2(j+1)(2j+3) - a^2 m\omega(4j+5) - l^2 + a^2 b_2^2}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_{j+1}$$

$$+ \left[\frac{a^2 m \omega (4j + 5) - a^2 b_2^2}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_j. \quad (3.62)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega - \iota^2}{2} c_0. \quad (3.63)$$

considérons $j = n - 1$ où $c_{n+1} = 0$, et on a

$$c_n = \left[\frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega (4n + 1)}{2n(2n + 1) - a^2 m \omega (4n + 1) - \iota^2 + a^2 b_2^2} \right] c_{n-1}. \quad (3.64)$$

Pour $n = 1$ on trouve

$$c_1 = \left[\frac{a^2 b_2^2 - 5a^2 m \omega}{6 - 5a^2 m \omega - \iota^2 + a^2 b_2^2} \right] c_0. \quad (3.65)$$

En remplaçant l'équation (3.65) dans l'équation (3.63), nous avons

$$E_{l,1}^4 - 2 \left(m^2 + \frac{(\iota^2 - 2)}{a^2} \alpha^2 + 4m\omega\alpha^2 \right) E_{l,1}^2 + d = 0. \quad (3.66)$$

Où

$$d = m^4 + 2m^2\alpha^2 \left(\frac{\iota^2 - 2}{a^2} + 4m\omega + 6\omega^2\alpha^2 \right) + \alpha^4 \left(\frac{8m\omega\iota^2}{a^2} + \frac{\iota^2(\iota^2 - 6)}{a^4} \right). \quad (3.67)$$

En résolvant l'équation (3.66), on a l'expression suivante

$$E_{l,1} = \pm \left[m^2 + \frac{[l(l+1) - 2\alpha^2]}{a^2} + 4m\omega\alpha^2 \pm \frac{\alpha^2}{a^2} \sqrt{\frac{4\alpha^2 + 2l(l+1)}{\alpha^2} + 4m\omega a^2(m\omega a^2 - 4)} \right]^{1/2}. \quad (3.68)$$

L'équation (3.68) est le niveau d'énergie de l'état fondamental relativiste d'un champ d'oscillateur décrit par le système spin-0 de l'équation de DKP dans un trou de ver de type Ellis-Bronnikov (wormhole) chargé topologiquement.

La fonction d'onde radiale de l'état fondamental de l'équation (3.56) deviendra

$$f_{1,l}(x) = e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} (c_0 + c_1 x), \quad (3.69)$$

avec

$$c_1 = \left(\frac{a^2}{2\alpha^2} (E_{1,l}^2 - m^2) - m\omega a^2 - \frac{l(l+1)}{2\alpha^2} \right) c_0. \quad (3.70)$$

et $E_{1,l}$ est donnée par l'équation (3.68).

Nous avons généré quelques graphiques sur la figure (FIG.3.1) montrant comment les niveaux d'énergie $E_{1,l}$ évoluent avec le paramètre de défaut topologique α et la fréquence d'oscillateur ω pour différentes valeurs d'autres paramètres impliqués dans l'équation.

Nous avons également tracé la fonction d'onde de l'état fondamental $f_{1,l}(x)$ pour différentes valeurs du paramètre de défaut topologique α , de la fréquence de l'oscillateur ω et du rayon a du trou de ver sur la figure (FIG.3.2).

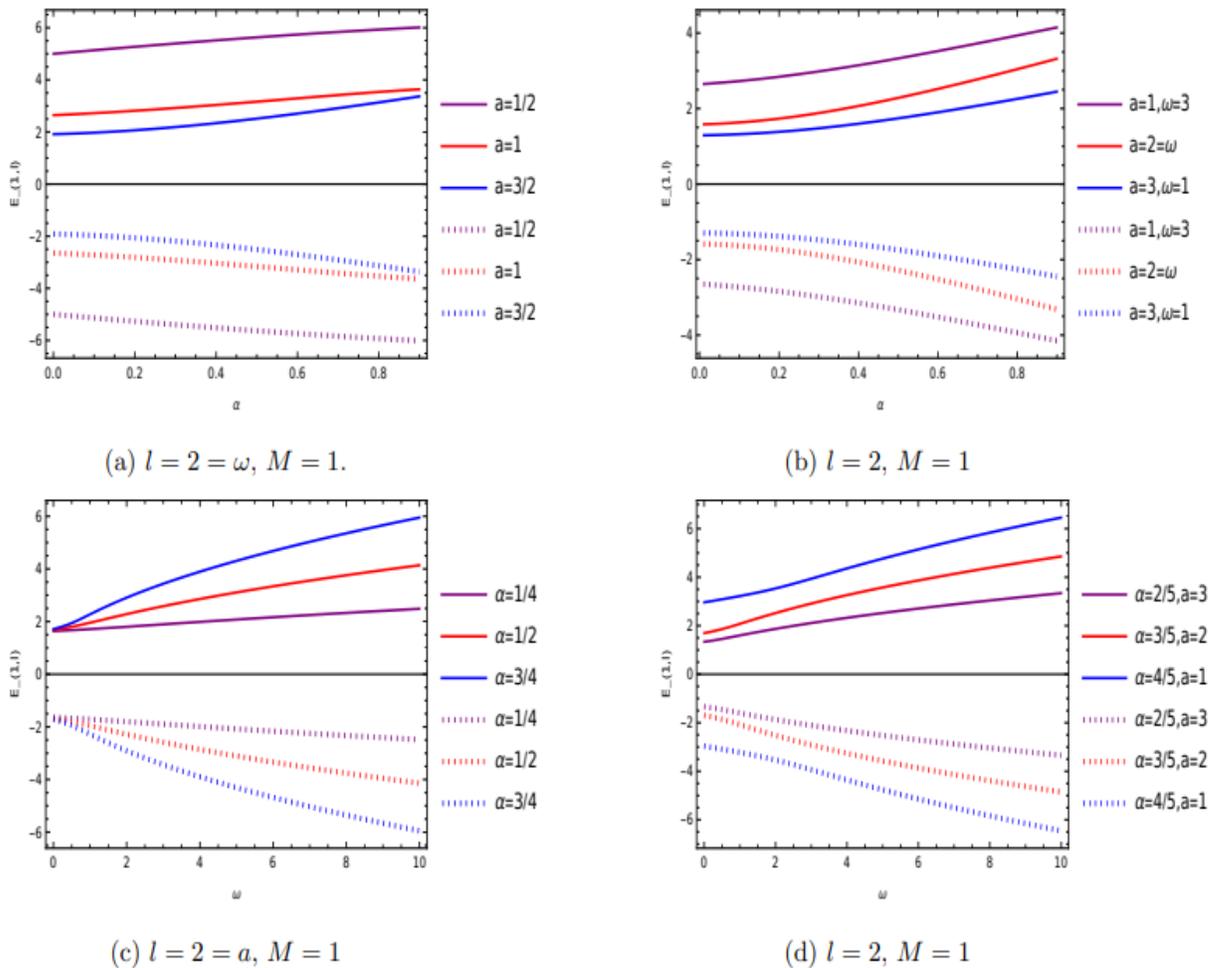


FIG. 3.1 – Graphiques du niveau d'énergie de l'état fondamental $E_{1,l}$ avec défaut topologique α et fréquence d'oscillateur ω . nous attribuons quelques valeurs à les constantes α and a afin de fournir une perception visuelle de l'évolution des niveaux d'énergie avec les constantes α et ω . De plus, nous pouvons observer que les valeurs autorisées de l'énergie relativiste DKP dans ce type de trou de ver sont influencées par la topologie et la structure du trou de ver. Cette influence s'explique par les paramètres associés à la charge topologique GM et à la gorge du trou de ver, α et a , respectivement. En faisant $\omega \rightarrow 0$, nous récupérons le résultat obtenu dans l'énergie de KG.

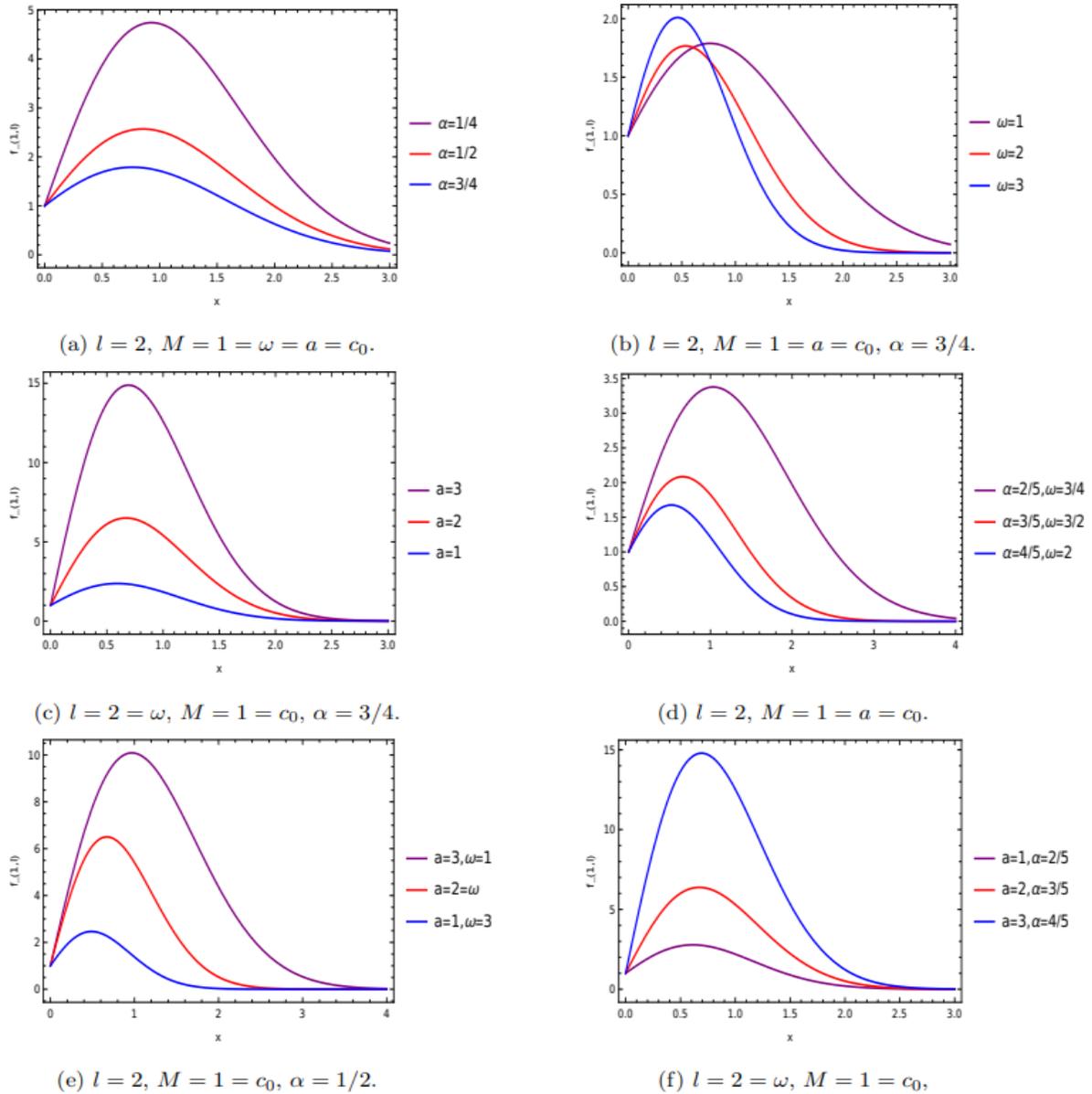


FIG. 3.2 – Graphiques de la fonction d’onde de l’état fondamental $f_{1,l}(x)$. nous pouvons observer que les valeurs autorisées de la fonction d’onde de DKP dans ce type de trou de ver sont influencées par la topologie et la structure du trou de ver. Cette influence s’explique par les paramètres associés à la charge topologique GM et à la gorge du trou de ver, α et a , respectivement. En faisant $\omega \rightarrow 0$, nous récupérerons le résultat obtenu dans l’énergie de KG.

3.4 L'oscillateur de DKP avec l'interaction dans un espace-temps de trou de ver

Dans cette section, nous étudierons l'oscillateur de DKP avec interaction dans le même fond spatio-temporel. Ce potentiel est introduit dans l'équation d'onde par un couplage minimal via

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (3.71)$$

avec q est la charge électrique et A_μ est le potentiel électromagnétique à quatre vecteurs

$$A_\mu = (-A_0, 0, 0, 0). \quad (3.72)$$

Dans ce cas,

$$qA_0 = V(x), \quad (3.73)$$

c'est la compoante zéro du potentiel électromagnétique à quatre vecteurs. Après simplification, l'équation de l'oscillateur de DKP avec une interaction $V(x)$ en arrière-plan d'un espace-temps de trou de ver d'Ellis-Bronnikov chargé topologiquement devient

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \frac{d}{dx} - \frac{2m\omega x^2 + \iota^2}{(x^2 + a^2)} - m^2 \omega^2 x^2 - \frac{(E + V(x))^2}{\alpha^2} - m\omega - \frac{b_2^2}{\alpha^2} \right\} f(x) = 0. \quad (3.74)$$

Ci-dessous, nous allons considérer deux types de potentiels différents et analyser le système quantique relativiste.

3.4.1 Type1

Considérons la fonction potentielle comme,

$$V(x) = \frac{C_1}{(x^2 + a^2)}, \quad (3.75)$$

En utilisant ceci dans l'équation (3.74) et en choisissant

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{\frac{C_1}{2a\alpha}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} g(x). \quad (3.76)$$

On trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + 2x \left(\frac{a\alpha + C_1}{a\alpha(x^2 + a^2)} - m\omega \right) \frac{d}{dx} + \frac{C_1}{a\alpha(x^2 + a^2)} - \frac{2m\omega C_1 x^2}{a\alpha(x^2 + a^2)} - \frac{4m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} - \frac{\iota^2}{(x^2 + a^2)} + \frac{2a^2 E C_1 + C_1^2}{a^2 \alpha^2 (x^2 + a^2)} + (b_2^2 - m\omega) \right\} g(x) = 0. \quad (3.77)$$

Maintenant, nous définissons

$$z = -\frac{x^2}{a^2} \quad (3.78)$$

et $g(z)$ c'est l'équation de Heun confluite donnée par

$$g(z) = H_c \left(a^2 m \omega, -\frac{1}{2}, \frac{C_1}{a\alpha}, -\frac{a^2 (b_2^2 - 2m\omega)}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\iota^2}{4} + \frac{a^2 b_2^2}{4} + \frac{EC_1}{2\alpha^2} + \frac{C_1^2}{2a^2\alpha^2}; z \right), \quad (3.79)$$

Nous commençons par considérer la fonction de Heun sous la forme série donnée dans l'équation (3.79) et nous avons la relation de récurrence

$$c_{j+2} = \left[\frac{a^2 m \omega (4j + 5) - a^2 b_2^2 + \frac{2am\omega C_1}{\alpha}}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_j + \left[\frac{2(j+1)(2j+3) - a^2 m \omega (4j+5) - \iota^2 + a^2 b_2^2 + \frac{C_1}{a\alpha}(j+2) + \frac{2a^2 EC_1 + C_1^2}{a^2 \alpha^2}}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_{j+1}, \quad (3.80)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \left(\frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega - \iota^2}{2} + \frac{2a^2 EC_1 + C_1^2}{2a^2 \alpha^2} + \frac{C_1}{2a\alpha} \right) c_0. \quad (3.81)$$

Considérons $j = n - 1$ où $c_{n+1} = 0$, on trouve

$$c_n = \left[\frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega (4n + 1) - \frac{2am\omega C_1}{\alpha}}{2n(2n+1) - a^2 m \omega (4n+1) - \iota^2 + a^2 b_2^2 + \frac{C_1}{a\alpha}(n+1) + \frac{2a^2 EC_1 + C_1^2}{a^2 \alpha^2}} \right] c_{n-1}, \quad (3.82)$$

Pour $n = 1$ nous avons

$$c_1 = \left[\frac{a^2 b_2^2 - 5a^2 m \omega - \frac{2am\omega C_1}{\alpha}}{6 - 5a^2 m \omega - \iota^2 + a^2 b_2^2 + \frac{2C_1}{a\alpha} + \frac{2a^2 EC_1 + C_1^2}{a^2 \alpha^2}} \right] c_0. \quad (3.83)$$

De l'équation (3.83) et l'équation (3.81), nous avons

$$E_{l,1}^4 - 2 \left(m^2 + \frac{(\iota^2 - 2)\alpha^2}{a^2} + 4m\omega\alpha^2 - \frac{3\alpha C_1}{2a^3} - \frac{3C_1^2}{a^4} \right) E_{l,1}^2 + \frac{4C_1}{a^2} E_{l,1}^3 + \left(\left(12\frac{\alpha^2}{a^4} - 4\frac{\alpha^2}{a^4}\iota^2 + \frac{4}{a^2}m^2 - \frac{8}{a^2}m\omega\alpha^2 \right) C_1 + \frac{6\alpha}{a^5}C_1^2 + \frac{2}{a^6}C_1^3 \right) E_{l,1} + \gamma_0 = 0, \quad (3.84)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_0 = & m^4 + 2m^2\alpha^2 \left(\frac{(\iota^2 - 2)}{a^2} + 4m\omega + 6\omega^2\alpha^2 \right) + \alpha^4 \left(\frac{8m\omega\iota^2}{a^2} + \frac{\iota^2(\iota^2 - 6)}{a^4} \right) \\ & + \left(6\frac{\alpha^3}{a^3} - 3\frac{\alpha^3}{a}m\omega - 3\frac{\alpha^3}{a^3}\iota^2 - \frac{3\alpha}{a^3}m^2 - \frac{3}{a^3}m\omega\alpha^3 \right) C_1 \\ & + \left(8\frac{\alpha^2}{a^6} - 2\frac{\alpha^2}{a^6}\iota^2 + \frac{2}{a^4}m^2 - \frac{4}{a^4}m\omega\alpha^2 \right) C_1^2 + \frac{3\alpha}{a^7}C_1^3 + \frac{C_1^4}{a^8}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

L'équation (3.84) peut être exprimée comme

$$E_{l,1}^4 + \gamma_3 E_{l,1}^3 + \gamma_2 E_{l,1}^2 + \gamma_1 E_{l,1} + \gamma_0 = 0, \quad (3.86)$$

où nous avons défini les paramètres γ_1, γ_2 et γ_3

$$\gamma_1 = \left(12 \frac{\alpha^2}{a^4} - 4 \frac{\alpha^2}{a^4} \iota^2 + \frac{4}{a^2} m^2 - \frac{8}{a^2} m\omega\alpha^2 \right) C_1 + \frac{6\alpha}{a^5} C_1^2 + \frac{2}{a^6} C_1^3, \quad (3.87)$$

$$\gamma_2 = -2 \left(m^2 + \frac{(\iota^2 - 2)\alpha^2}{a^2} + 4m\omega\alpha^2 - \frac{3\alpha C_1}{2a^3} - \frac{3C_1^2}{a^4} \right), \quad (3.88)$$

$$\gamma_3 = \frac{4C_1}{a^2}. \quad (3.89)$$

L'équation (3.86) est une équation polynomiale du quatrième ordre en $E_{l,1}$ et sa solution réelle (expression très longue) nous donne le niveau d'énergie de l'état fondamental $E_{1,l}$ qui est évidemment modifié par le paramètre de potentiel C_1 en plus du paramètre de défaut topologique et α le rayon a du trou de ver en comparaison avec le résultat précédent (3.68) obtenu dans la section précédente.

3.4.2 Type2

Considérons la fonction de potentiel comme,

$$V(x) = \frac{C_2 x^2}{(x^2 + a^2)} = C_2 - \frac{C_2 a^2}{x^2 + a^2}. \quad (3.90)$$

En utilisant ceci dans l'équation (3.74) et en choisissant

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{\frac{aC_2}{2\alpha}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} g(x). \quad (3.91)$$

On trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + 2x \left(\frac{aC_2 + \alpha}{\alpha(x^2 + a^2)} - m\omega \right) \frac{d}{dx} + \frac{aC_2 - 2am\omega C_2 x^2}{\alpha(x^2 + a^2)} + \frac{C_2^2 x^2}{\alpha^2(x^2 + a^2)} - \frac{4m\omega x^2}{(x^2 + a^2)} - \frac{\iota^2}{(x^2 + a^2)} + 2 \frac{EC_2 x^2}{\alpha^2(x^2 + a^2)} + (b_2^2 - m\omega) \right\} g(x) = 0. \quad (3.92)$$

Maintenant, nous définissons

$$z = -\frac{x^2}{a^2}, \quad (3.93)$$

et nous avons $g(z)$ l'équation de Heun confluite donnée par

$$H_c \left(a^2 m\omega, -\frac{1}{2}, \frac{aC_2}{\alpha}, -\frac{a^2(b_2^2 - 2m\omega)}{4} - \frac{a^2 C_2^2}{4\alpha^2} - \frac{a^2 EC_2}{2\alpha^2}, \frac{1}{4} - \frac{\iota^2}{4} + \frac{a^2 b_2^2}{4}; z \right), \quad (3.94)$$

Nous commençons par considérer la fonction de Heun sous la forme série donnée dans l'équation (3.94) et avons la relation de récurrence

$$c_{j+2} = \left[\frac{a^2 m \omega (4j + 5) - a^2 b_2^2 + \frac{2a^3 m \omega C_2}{\alpha} - \frac{a^2 C_2^2}{\alpha^2} - 2 \frac{a^2 E C_2}{\alpha^2}}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_j + \left[\frac{2(j+1)(2j+3) - a^2 m \omega (4j+5) + 4 \frac{a C_2}{\alpha} (j+1) - \iota^2 + a^2 b_2^2 + \frac{a C_2}{\alpha}}{2(j+2)(2j+3)} \right] c_{j+1}. \quad (3.95)$$

avec le coefficient

$$c_1 = \left(\frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega - \iota^2}{2} + \frac{a C_2}{2\alpha} \right) c_0. \quad (3.96)$$

considérons $j = n - 1$ où $c_{n+1} = 0$, et on a

$$c_n = \left[\frac{a^2 b_2^2 - a^2 m \omega (4n + 1) - \frac{2a^3 m \omega C_2}{\alpha} + \frac{a^2 C_2^2}{\alpha^2} + 2 \frac{a^2 E C_2}{\alpha^2}}{2n(2n+1) - a^2 m \omega (4n+1) + 4 \frac{a C_2}{\alpha} n - \iota^2 + a^2 b_2^2 + \frac{a C_2}{\alpha}} \right] c_{n-1}. \quad (3.97)$$

Pour $n = 1$, on trouve

$$c_1 = \left[\frac{a^2 b_2^2 - 5a^2 m \omega - \frac{2a^3 m \omega C_2}{\alpha} + \frac{a^2 C_2^2}{\alpha^2} + 2 \frac{a^2 E C_2}{\alpha^2}}{6 - 5a^2 m \omega + 5 \frac{a C_2}{\alpha} - \iota^2 + a^2 b_2^2} \right] c_0. \quad (3.98)$$

En remplaçant l'équation (3.98) dans l'équation (3.96), nous avons

$$E_{l,1}^4 - 2 \left(m^2 + \frac{(\iota^2 - 2) \alpha^2}{a^2} + 4m\omega\alpha^2 - 3 \frac{C_2 \alpha}{a} \right) E_{l,1}^2 - \frac{4C_2 \alpha^2}{a^2} E_{l,1} + d_2 = 0. \quad (3.99)$$

avec

$$d_2 = m^4 + 2m^2 \alpha^2 \left(\frac{(\iota^2 - 2)}{a^2} + 4m\omega + 6\omega^2 \alpha^2 \right) + \alpha^4 \left(\frac{8m\omega \iota^2}{a^2} + \frac{\iota^4 (\iota^2 - 6)}{a^4} \right) - 6m^2 \frac{C_2 \alpha}{a} - 6 \frac{C_2 m \omega \alpha^3}{a} + (6 - 6a^2 m \omega - 6\iota^2) \frac{C_2 \alpha^3}{a^3} + \frac{3C_2^2 \alpha^2}{a^2} = 0. \quad (3.100)$$

La vraie solution de l'équation (3.99) nous donne le niveau d'énergie de l'état fondamental $E_{1,l}$ d'un champ d'oscillateur dans le fond spatio-temporel considéré avec le potentiel choisi.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dynamique quantique relativiste du système spin-0 de l'équation de DKP dans un espace-temps de trou de ver de type Ellis-Bronnikov chargé topologiquement. L'équation de DKP donne la description relativiste des particules de spin-0 et de spin-1 et contrairement à l'équation de Dirac, elle possède une structure algébrique complexe. Nous avons dérivé l'équation d'onde radiale du système et l'avons résolue par l'équation de Heun. Nous avons

vu que la solution aux valeurs propres de l'équation de DKP obtenue ici et pour l'équation de Klein-Gordon obtenu dans la [52 – 53] sont les mêmes dans le scénario actuel.

Plus tard, nous avons étudié l'oscillateur de DKP et ensuite avec différentes formes de potentiel et résolu l'équation radiale à travers l'équation différentielle de Heun.

Le monopôle global est le défaut topologique le plus largement étudié qui devrait s'être formé au cours du processus de transition de phase de l'univers primordial, en raison du découplage des interactions fondamentales entraînant une rupture de symétrie. Ces défauts peuvent donner naissance à différentes structures exotiques comme un trou de ver. La solution de trou de ver la plus simple disponible dans la littérature est le trou de ver de type Ellis-Bronnikov. Un candidat bien connu de la théorie de la gravité modifiée est la gravité Born-Infeld inspirée d'Eddington. Cette théorie a suscité beaucoup d'intérêt ces derniers temps en raison de sa capacité à éviter toute singularité géodésique sans recourir à aucune forme de matière exotique ni à aucun effet quantique. De toutes les différentes solutions de gravité Born-Infeld inspirées d'Eddington disponibles dans la littérature, la plus simple est le trou de ver de type Ellis-Bronnikov à symétrie sphérique statique avec la charge topologique du monopole global. Beaucoup de recherches ont été faites dans ce sens. Notre travail s'est concentré sur l'étude de la dynamique quantique relativiste du système spin-0 de l'oscillateur DKP dans le fond de cet espace-temps de trou de ver chargé.

Nous avons revisité l'équation de DKP dans l'espace courbe et les différentes connexions de spin. L'espace-temps de trou de ver de type Ellis-Bronnikov a été considéré et l'équation de DKP a été étudiée en arrière-plan de cet espace-temps. La fonction d'onde et les niveaux d'énergie du système ont été dérivés. Ensuite, nous avons étudié l'oscillateur de DKP dans le contexte de l'espace temps de trou de ver chargé. La fonction d'onde et le niveau d'énergie du système ont été dérivés. Enfin, nous avons introduit un potentiel par une substitution minimale dans l'équation d'onde et résolu cette équation par la même équation différentielle. Nous pensons que les résultats présentés dans les sections 3 et 4 ont une importance et une signification dans la littérature.

Chapitre 4

L'équation de DKP en présence des défauts topologiques

Dans ce chapitre, nous étudions le mouvement quantique relativiste d'une particule scalaire chargée en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps des défauts topologiques tel que les cordes cosmique et les monopoles globale. Pour cette étude nous faisons la masse dépendante de la position est étudié via la transformation $m \rightarrow (m + S(x))$, où $S(r)$ est le potentiel scalaire, nous étudions les effets des défauts topologiques sur la solution aux valeurs propres de l'équation de DKP spin-0.

Nous utiliserons la définition et les propriétés de l'équation de DKP spin-0 dans un espace courbe avec lesquelles nous avons travaillé dans le chapitre précédent. Nous utiliserons également les connections de spin qui ont été calculés [8] dans l'espace-temps de corde cosmique et de monopole globale. Comme suit :

4.1 Cas de corde cosmique

La metrique dans cette espace s'écrit sous la forme,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.1)$$

avec $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et le paramètre $a' = 1 - \frac{4G}{c^2}u$. Nous avons choisis les tétrades $e_{(a)}^\mu$ et les inverses de tetrades $e_{r(b)\mu}$

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a' r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$e^{(b)\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a'r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Pour ce choix des tétrades, les connexions de spin sont les suivants

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & a' \cos \theta \\ 0 & -a' \sin \theta & -a' \cos \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Alors l'équation de DKP spin-0 est

$$\left\{ \beta^0 E + i\beta^1 \partial_r + \frac{i}{r} \beta^2 (\partial_\theta - \beta^2 \beta^1) + \frac{i\beta^3}{a'r \sin \theta} [(\partial_\varphi - i\alpha) - a' \sin \theta \beta^3 \beta^1 - a' \cos \theta \beta^3 \beta^2] - m \right\} \Psi = [m + S(r)] \Psi, \quad (4.6)$$

le vecteur de potentiel d'Aharonov-Bohm prend la forme

$$\begin{aligned} A_r &= A_\theta = 0, \\ A_\varphi &= \frac{\Phi}{2\pi a' \sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

et

$$\alpha = \frac{\Phi}{2\pi}. \quad (4.8)$$

où la fonction d'onde est définie par

$$\Psi = e^{-iEt} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)^T. \quad (4.9)$$

En utilisant cette fonction d'onde, nous obtenons les équations suivantes du système quantique

$$\begin{aligned} E\Psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Psi_3 - \frac{i}{r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \Psi_4 \\ - \frac{i}{a' \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \Psi_5 = [m + S(r)] \Psi_1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$E\Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_2, \quad (4.11)$$

$$i\partial_r\Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_3, \quad (4.12)$$

$$\frac{i}{r}\partial_\theta\Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_4, \quad (4.13)$$

$$\frac{i}{a'r\sin\theta}(\partial_\varphi - i\alpha)\Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_5. \quad (4.14)$$

Pour résoudre ce système des équations, on met les équations (4.10), (4.11), (4.12) et (4.13) dans l'équation (4.10), on trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{a'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right) \right\} \Psi_1 = [m + S(r)]^2 \Psi_1. \quad (4.15)$$

Par conséquent

$$L^2 = - \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{a'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right). \quad (4.16)$$

Ici

$$L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (4.17)$$

$$L_z = -\frac{i}{a'} \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right) \quad (4.18)$$

et

$$l = |\lambda| + n', \quad n' = 0, 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{a'}.$$

l sont les valeurs propres communes entre L_z et L^2 , respectivement, sont déterminées par le flux magnétique Φ et le paramètre géométrique de l'espace a' . Il est important de noter que ces valeurs propres varient en fonction de ces paramètres.

Donc, l'équation (4.15) devient

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \Psi_1 = [m + S(r)]^2 \Psi_1 \quad (4.20)$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\Psi_1(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (4.21)$$

avec $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $\chi(r)$, l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi(r) = [m + S(r)]^2 \chi(r). \quad (4.22)$$

4.1.1 Potentiel linéaire

Dans cette section, nous examinerons le système quantique mentionné ci-dessus, en présence d'un potentiel linéaire. Nous avons opté pour un potentiel scalaire afin d'analyser les mouvements quantiques. Le potentiel linéaire scalaire est défini par

$$S(r) = Cr, \quad (4.23)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.22) et en effectuant le choix approprié,

$$\chi(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4l(l+1)}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} R(r), \quad (4.24)$$

et le changement,

$$x = \sqrt{C}r. \quad (4.25)$$

Alors, $R(r)$ c'est la fonction de Heun biconfluente définie par

$$R(r) = HeunB\left(\sqrt{1+4l(l+1)}, \frac{2m}{\sqrt{C}}, \frac{E^2}{C}, 0, x\right), \quad (4.26)$$

Nous commençons par examiner la fonction de Heun biconfluente sous la forme de série,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (4.27)$$

telle que présentée dans l'équation (4.26), et nous établissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} a_{j+2} = & \left\{ \frac{m(1 + \sqrt{1+4l(l+1)}) + 2m(j+1)}{\sqrt{C}(j+2)(j+2 + \sqrt{1+4l(l+1)})} \right\} a_{j+1} \\ & - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1+4l(l+1)} - 2 - 2j}{(j+2)(j+2 + \sqrt{1+4l(l+1)})} \right\} a_j. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avec la condition

$$a_1 = \frac{m}{\sqrt{C}} a_0. \quad (4.29)$$

Dans l'équation (4.28), pour $n = 0$ on trouve

$$a_2 = \left\{ \frac{m(3 + \sqrt{1+4l(l+1)})}{2\sqrt{C}(2 + \sqrt{1+4l(l+1)})} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1+4l(l+1)} - 2}{2(2 + \sqrt{1+4l(l+1)})} \right\} a_0. \quad (4.30)$$

Analysons l'état pour un polynôme du premier degré ($n = 1$). Dans ce cas, nous avons cela

$$a_{j+1} = a_2 = 0. \quad (4.31)$$

à partir de la relation de récursion donnée par l'équation (4.28), la fonction de Heun biconfluente (4.26) devient un polynôme de degré n si et seulement si les conditions suivantes sont remplies

$$\frac{E^2}{C} - \sqrt{1 + 4l(l+1)} - 2 = 2n. \quad (4.32)$$

Donc,

$$E_n = \pm \sqrt{C \left[2n + 2 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right]}. \quad (4.33)$$

Alors, nous utilisons (4.31), on trouve

$$\left\{ \frac{m \left(3 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right)} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1 + 4l(l+1)} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right)} \right\} a_0 = 0 \quad (4.34)$$

avec la condition (4.29),

$$E^2 = m^2 \left[3 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right] + C \left[2 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right]. \quad (4.35)$$

et ensuite, les valeurs possibles du paramètre $C_{1,l}$ sont déterminées par

$$C_{1,l} = \frac{m^2}{2} \left[3 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right]. \quad (4.36)$$

l'expression générale des niveaux d'énergie relativistes du système de masse dépendant de la position donnée dans l'équation (4.22) sous l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps de corde cosmique avec le potentiel linéaire est

$$E_{1,l} = \pm m \sqrt{\frac{\left[3 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right] \left[4 + \sqrt{1 + 4l(l+1)} \right]}{2}}. \quad (4.37)$$

La fonction d'onde radiale de l'état fondamental de l'équation (4.24) prend la forme

$$\chi_{1,l}(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4l(l+1)}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} \left(1 + \frac{m}{\sqrt{C_{1,l}}} \right) a_0. \quad (4.38)$$

4.1.2 Potentiel de Cornell

Dans ce contexte, nous optons pour une superposition de potentiel incluant à la fois un potentiel linéaire et un potentiel de type Coulomb. Ainsi, considérons ce type particulier de potentiel.

$$S(r) = Cr + \frac{\tau}{r}, \quad (4.39)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.22), les solutions sont

$$\chi(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} R(r), \quad (4.40)$$

avec le changement,

$$x = \sqrt{C}r. \quad (4.41)$$

$R(r)$ c'est la fonction de Heun biconfluente définie par

$$R(r) = HeunB \left(\sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)}, \frac{2m}{\sqrt{C}}, \frac{E^2-2C\tau}{C}, \frac{4\tau m}{\sqrt{C}}, x \right), \quad (4.42)$$

Nous débutons en examinant la fonction de Heun biconfluente sous sa représentation en série,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (4.43)$$

conformément à l'équation (4.42), tout en établissant la relation de récurrence :

$$a_{j+2} = \left\{ \frac{m \left(1 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right) + 2m(j+1)}{\sqrt{C}(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right)} \right\} a_{j+1} - \left\{ \frac{\frac{E^2-2C\tau}{C} - \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} - 2 - 2j}{(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right)} \right\} a_j. \quad (4.44)$$

Avec la condition

$$a_1 = m \left(\frac{2\lambda + 1 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)}}{\sqrt{C} \left(1 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right)} \right) a_0. \quad (4.45)$$

Dans l'équation (4.44), pour $n = 0$ on trouve

$$a_2 = \left\{ \frac{m \left(2\lambda + 3 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)} \right)} \right\} a_1$$

$$- \left\{ \frac{\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \right\} a_0. \quad (4.46)$$

Examinons l'état pour un polynôme du premier degré ($n = 1$). Dans cette situation, nous obtenons

$$a_{j+1} = a_2 = 0. \quad (4.47)$$

En utilisant la relation de récurrence fournie par l'équation (4.44), la fonction de Heun biconfluente (4.42) se transforme en un polynôme de degré n si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} - 2 = 2n. \quad (4.48)$$

Donc,

$$E_n = \pm \sqrt{C \left[2n + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} + 2\lambda \right]}. \quad (4.49)$$

Alors, nous utilisons (4.47), on trouve

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{m \left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \right\} a_1 \\ & - \left\{ \frac{\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \right\} a_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

avec la condition (4.45), on trouve

$$\begin{aligned} E^2 = m^2 & \left[2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right] \frac{\left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \\ & + C \left[2\tau + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

les valeurs possibles du paramètre $C_{1,l}$ sont déterminées par

$$C_{1,l} = m^2 \frac{\left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right) \left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)}{2 \left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)}. \quad (4.52)$$

L'expression générale des niveaux d'énergie relativistes du système de masse dépendant de la position, donnée dans l'équation (4.22), sous l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps de corde cosmique avec le potentiel de Cornell, est :

$$E_{1,l} = \pm m \left\{ \left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right) \times \frac{\left(\tau + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right) \left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.53)$$

La fonction d'onde radiale de l'état fondamental de l'équation (4.40) prend la forme

$$\chi_{1,l}(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\tau^2+4l(l+1)}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} \left(1 + m \left(\frac{2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)}}{\sqrt{C} \left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4l(l+1)} \right)} \right) \right) a_0. \quad (4.54)$$

C'est à noter que si l'on néglige la constante associée τ au potentiel de Cornell, on aboutit aux mêmes paramètres $C_{1,l}$, énergie $E_{1,l}$ et fonction d'onde $\chi_{1,l}(r)$ que dans la section précédente avec le potentiel linéaire.

4.2 Cas de monopôle globale

La métrique dans cette espace s'écrit sous la forme,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.55)$$

avec le paramètre $b' = 1 - 8\pi G\eta^2$. Nous avons choisis les tétrades $e_{(a)}^\mu$ et les inverses de tétrades $e^{(b)\mu}$

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b'r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b'r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$e^{(b)\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b'r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b'r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Pour ce choix des tétrades, les connexions de spin sont les suivants

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & -b' \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Alors l'équation de DKP spin-0 en présence de potentiel d'Aharonov-Bohm est

$$\left\{ \beta^0 E + i\beta^1 \partial_r + \frac{i}{b'r} \beta^2 (\partial_\theta - b'\beta^2 \beta^1) + \frac{i\beta^3}{b'r \sin \theta} [(\partial_\varphi - i\alpha) - b' \sin \theta \beta^3 \beta^1 - \cos \theta \beta^3 \beta^2] - m \right\} \Psi = [m + S(r)] \Psi, \quad (4.60)$$

le vecteur de potentiel d'Aharonov-Bohm prend la forme

$$A_r = A_\theta = 0, \\ A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi b' \sin \theta}. \quad (4.61)$$

et

$$\alpha = \frac{\Phi}{2\pi}. \quad (4.62)$$

où la fonction d'onde est définie par

$$\Psi = e^{-iEt} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)^T. \quad (4.63)$$

En utilisant cette fonction d'onde, nous obtenons les équations suivantes du système quantique

$$E\Psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Psi_3 - \frac{i}{b'r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \Psi_4 - \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \Psi_5 = [m + S(r)] \Psi_1, \quad (4.64)$$

$$E\Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_2, \quad (4.65)$$

$$i\partial_r \Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_3, \quad (4.66)$$

$$\frac{i}{b'r} \partial_\theta \Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_4, \quad (4.67)$$

$$\frac{i}{b'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \Psi_1 = [m + S(r)] \Psi_5. \quad (4.68)$$

Pour résoudre ce système des équations, on met les équations (4.65), (4.66), (4.67) et (4.68) dans l'équation (4.64), on trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 + \frac{1}{b'^2 r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right) \right\} \Psi_1 = [m + S(r)]^2 \Psi_1. \quad (4.69)$$

Par conséquent

$$L^2 = - \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right). \quad (4.70)$$

Ici

$$L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (4.71)$$

$$L_z = -i \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right) \quad (4.72)$$

et

$$l = |\lambda| + n', \quad n' = 0, 1, 2, \dots \quad (4.73)$$

$$\lambda = m - \alpha.$$

l sont les valeurs propres communes entre L_z et L^2 , respectivement.

Donc, l'équation (4.69) devient

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 - \frac{l(l+1)}{b'^2 r^2} \right\} \Psi_1 = [m + S(r)]^2 \Psi_1 \quad (4.74)$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\Psi_1(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (4.75)$$

avec $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $\chi(r)$, l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + E^2 - \frac{l(l+1)}{b'^2 r^2} \right\} \chi(r) = [m + S(r)]^2 \chi(r). \quad (4.76)$$

4.2.1 Potentiel linéaire

Dans cette section, nous allons étudier le système quantique mentionné précédemment en présence d'un potentiel linéaire. Nous avons choisi un potentiel scalaire pour analyser les phénomènes quantiques. Le potentiel linéaire scalaire est défini par

$$S(r) = Cr, \quad (4.77)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.76) et en effectuant le choix approprié,

$$\chi(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} R(r), \quad (4.78)$$

et le changement,

$$x = \sqrt{C}r. \quad (4.79)$$

Alors, $R(r)$ c'est la fonction de Heun biconfluente définie par

$$R(r) = HeunB \left(\sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}}, \frac{2m}{\sqrt{C}}, \frac{E^2}{C}, 0, x \right), \quad (4.80)$$

Nous commençons par examiner la fonction de Heun biconfluente sous la forme de série,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (4.81)$$

telle que présentée dans l'équation (4.80), et nous établissons la relation de récurrence :

$$a_{j+2} = \left\{ \frac{m \left(1 + \sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right) + 2m(j+1)}{\sqrt{C}(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_{j+1} - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}} - 2 - 2j}{(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_j. \quad (4.82)$$

Avec la condition

$$a_1 = \frac{m}{\sqrt{C}} a_0. \quad (4.83)$$

Dans l'équation (4.82), pour $n = 0$ on trouve

$$a_2 = \left\{ \frac{m \left(3 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_0. \quad (4.84)$$

Analysons l'état pour un polynôme du premier degré ($n = 1$). Dans ce cas, nous avons cela

$$a_{j+1} = a_2 = 0. \quad (4.85)$$

à partir de la relation de récursion donnée par l'équation (4.82), la fonction de Heun biconfluente (4.80) devient un polynôme de degré n si et seulement si les conditions suivantes sont remplies

$$\frac{E^2}{C} - \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} - 2 = 2n. \quad (4.86)$$

Donc,

$$E_n = \pm \sqrt{C \left[2n + 2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right]}. \quad (4.87)$$

Alors, nous utilisons (4.85), on trouve

$$\left\{ \frac{m \left(3 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2}{C} - \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_0 = 0 \quad (4.88)$$

avec la condition (4.83),

$$E^2 = m^2 \left[3 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right] + C \left[2 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right]. \quad (4.89)$$

et ensuite, les valeurs possibles du paramètre $C_{1,l}$ sont déterminées par

$$C_{1,l} = \frac{m^2}{2} \left[3 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right]. \quad (4.90)$$

l'expression générale des niveaux d'énergie relativistes du système de masse dépendant de la position donnée dans l'équation (4.76) sous l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps de corde cosmique avec le potentiel linéaire est

$$E_{1,l} = \pm m \sqrt{\frac{\left[3 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right] \left[4 + \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)}{b^2}} \right]}{2}}. \quad (4.91)$$

La fonction d'onde radiale de l'état fondamental de l'équation (4.78) prend la forme

$$\chi_{1,l}(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\frac{l(l+1)}{b'^2}}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} \left(1 + \frac{m}{\sqrt{C_{1,l}}}\right) a_0. \quad (4.92)$$

4.2.2 Potentiel de Cornell

Dans ce contexte, nous optons pour une superposition de potentiel incluant à la fois un potentiel linéaire et un potentiel de type Coulomb. Ainsi, considérons ce type particulier de potentiel.

$$S(r) = Cr + \frac{\tau}{r}, \quad (4.93)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.76), les solutions sont

$$\chi(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} R(r), \quad (4.94)$$

avec le changement,

$$x = \sqrt{C}r. \quad (4.95)$$

$R(r)$ c'est la fonction de Heun biconfluente définie par

$$R(r) = HeunB \left(\sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}}, \frac{2m}{\sqrt{C}}, \frac{E^2-2C\tau}{C}, \frac{4\lambda m}{\sqrt{C}}, x \right), \quad (4.96)$$

Nous débutons en examinant la fonction de Heun biconfluente sous sa représentation en série,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (4.97)$$

conformément à l'équation (4.96), tout en établissant la relation de récurrence :

$$a_{j+2} = \left\{ \frac{m \left(1 + \sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right) + 2m(j+1)}{\sqrt{C}(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)} \right\} a_{j+1} - \left\{ \frac{\frac{E^2-2C\tau}{C} - \sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}} - 2 - 2j}{(j+2) \left(j+2 + \sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)} \right\} a_j. \quad (4.98)$$

Avec la condition

$$a_1 = m \left(\frac{2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}}}{\sqrt{C} \left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right) a_0. \quad (4.99)$$

Dans l'équation (4.98), pour $n = 0$ on trouve

$$a_2 = \left\{ \frac{m \left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_0. \quad (4.100)$$

Examinons l'état pour un polynôme du premier degré ($n = 1$). Dans cette situation, nous obtenons

$$a_{j+1} = a_2 = 0. \quad (4.101)$$

En utilisant la relation de récurrence fournie par l'équation (4.98), la fonction de Heun biconfluente (4.96) se transforme en un polynôme de degré n si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} - 2 = 2n. \quad (4.102)$$

Donc,

$$E_n = \pm \sqrt{C \left[2n + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} + 2\lambda \right]}. \quad (4.103)$$

Alors, nous utilisons (4.101), on trouve

$$\left\{ \frac{m \left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)}{2\sqrt{C} \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_1 - \left\{ \frac{\frac{E^2 - 2C\tau}{C} - \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} - 2}{2 \left(2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b^2}} \right)} \right\} a_0 = 0 \quad (4.104)$$

avec la condition (4.99), on trouve

$$E^2 = m^2 \left[2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right] \frac{\left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)} + C \left[2\tau + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right]. \quad (4.105)$$

les valeurs possibles du paramètre $C_{1,l}$ sont déterminées par

$$C_{1,l} = m^2 \frac{\left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right) \left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)}{2 \left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)}. \quad (4.106)$$

L'expression générale des niveaux d'énergie relativistes du système de masse dépendant de la position, donnée dans l'équation (4.76), sous l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans l'espace-temps de corde cosmique avec le potentiel de Cornell, est :

$$E_{1,l} = \pm m \left\{ \left(2\tau + 3 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right) \times \frac{\left(\tau + 2 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right) \left(2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.107)$$

La fonction d'onde radiale de l'état fondamental de l'équation (4.94) prend la forme

$$\chi_{1,l}(r) = r^{\frac{\sqrt{1+4\tau^2+4\frac{l(l+1)}{b'^2}}-1}{2}} e^{-\frac{Cr^2+2mr}{2}} \left(1 + m \left(\frac{2\tau + 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}}}{\sqrt{C} \left(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\frac{l(l+1)}{b'^2}} \right)} \right) \right) a_0. \quad (4.108)$$

C'est à noter que si l'on néglige la constante associée τ au potentiel de Cornell, on aboutit aux mêmes paramètres $C_{1,l}$, énergie $E_{1,l}$ et fonction d'onde $\chi_{1,l}(r)$ que dans la section précédente avec le potentiel linéaire.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les solutions des bosons scalaires en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm dans un champ gravitationnel associé à des défauts topologiques tels que les

cordes cosmiques et les monopoles globaux, avec l'inclusion de potentiels linéaires et du modèle de Cornell. Pour cette étude nous faisons la masse dépendante de la position est étudié via la transformation $m \rightarrow (m + S(x))$. Dans les deux cas, des solutions exactes ont été obtenues, et nous avons examiné l'influence du paramètre de géométrie sur les deux espaces. Il est important de noter que la présence du potentiel d'Aharonov-Bohm modifie considérablement les relations de commutation fondamentales du moment cinétique. Donc le critère de Pauli est inapplicable.

Nous avons revisité l'équation de DKP pour un système spin-0 dans deux espaces courbes distincts, à savoir l'espace de corde cosmique et l'espace de monopôle global. Dans chaque espace, nous avons calculé les connexions de spin et abordé la résolution de la partie radiale en développant l'équation de Heun biconfluente et en appliquant la méthode de Frobenius autour de l'origine, le tout sous l'influence du potentiel d'Aharonov-Bohm.

Poursuivant notre analyse, nous avons étudié les potentiels linéaire scalaire et le potentiel de Cornell, ce qui a conduit à l'obtention des niveaux d'énergie $E_{1,l}$ et des fonctions d'onde fondamentales $\chi_{1,l}(r)$.

Au cours de notre étude, nous avons observé que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde sont sensibles aux défauts topologiques présents dans l'espace-temps de la corde cosmique et l'espace du monopôle global, caractérisés par le paramètre a' . De plus, le paramètre b' , a une influence significative sur les solutions des valeurs propres, engendrant ainsi des modifications notables dans les résultats obtenus.

Conclusion

L'analyse des solutions exactes des équations de Dirac (spin-1/2), Klein-Gordon (spin-0) et Duffin-Kemmer-Petiau (spin-0 et 1) avec une masse dépendante de la position en utilisant la transformation $m \rightarrow (m + S(r))$ dans un espace-temps courbé revêt une importance cruciale dans l'élaboration d'une théorie intégrant la physique quantique et la gravité quantique. Dans cette perspective, l'examen du comportement des particules relativistes dans ce cadre revêt un intérêt majeur.

L'objectif principal de notre thèse est l'étude de l'influence de la présence de défauts topologiques sur le mouvement des particules bosoniques. Nous avons examiné en détail l'équation de Klein-Gordon ainsi que l'équation de DKP spin-0, ces équations décrivent le mouvement des bosons. Nous avons opté pour différentes formes de défauts topologiques tels que le trou de ver, la corde cosmique et le monopôle global. Cette sélection a été faite en tenant compte de la simplicité de la métrique associée à chaque défaut topologique, de plus, en raison de leur importance, notamment dans le domaine de l'astrophysique et de la cosmologie, ainsi que dans le domaine de la physique de l'état solide (notamment en ce qui concerne les défauts de dislocations), ces études ont suscité un vif intérêt dans la recherche moderne en physique théorique.

Au cours de notre analyse, nous avons également évalué divers types de potentiels, notamment le potentiel d'Aharonov-Bohm, le potentiel linéaire, le potentiel de Coulomb, le potentiel de Cornell, ainsi que d'autres formes de potentiels. Pour chacun des potentiels mentionnés, nous avons obtenu des équations différentielles du deuxième ordre sous la forme de Heun confluyente ou Heun biconfluyente. Ces équations différentielles ont été résolues en utilisant la méthode de Frobenius, exprimée sous la forme d'un développement en série de puissances autour de l'origine.

Les conclusions de notre étude étaient les suivantes :

1- Nous avons observé que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde des champs oscillateurs sont sensibles à l'influence des défauts topologiques présents dans l'espace-temps des trous de ver, caractérisés par le paramètre α . En outre, le paramètre a , représentant le rayon du trou de ver, exerce une influence significative sur les solutions des valeurs propres, induisant ainsi des modifications remarquables dans les résultats obtenus.

2- Concernant les défauts topologiques des cordes cosmiques et des monopoles globaux, nous avons constaté que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde obtenus sont sensibles à l'influence de ces défauts, caractérisés par le paramètre a' . De plus, le paramètre b' , respectivement associé à chaque défaut, exerce une influence significative sur les solutions des valeurs propres.

3- Exactement, l'effet Aharonov-Bohm induit une altération totale des relations de commutation fondamentales du moment cinétique, connues sous le nom de « critère de Pauli ». En conséquence,

le critère de Pauli devient inapplicable en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm.

Les fonctions propres ainsi que les valeurs propres de L_z et L^2 ont été exposées en respectant la condition de limite suivante $\psi(\theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0$. L'espace S a été divisé en deux sous-espaces, où S_+ est englobé par l'ensemble des fonctions d'onde $\psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$, tandis que S_- est inclus dans toutes les fonctions d'onde $\psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$.

Annexe A : L'équation de Heun confluyente

Dans cette annexe, nous expliquons comment arriver à l'équation de Heun confluyente à partir de l'équation différentielle qu'elle décrit. Il existe de nombreuses références dans la littérature. Mais nous comptons plus sur le travail [96].

La forme standard de l'équation de Heun confluyente est

$$H'' + \left[\alpha + \frac{\beta + 1}{x} + \frac{\gamma + 1}{x - 1} \right] H' + \left[\frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{x - 1} \right] H = 0, \quad (\text{B.1})$$

où $H(x) = H_C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x)$ est la fonction de Heun confluyente. Les paramètres μ et ν donnés dans le dernier terme de l'équation (B.1) sont définis comme

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\alpha}{2}(1 + \beta) - \frac{\beta}{2}(1 + \gamma) - \frac{\gamma}{2} - \eta \\ \nu &= \frac{\alpha}{2}(1 + \gamma) + \frac{\beta}{2}(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{2} + \delta + \eta. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En utilisant la méthode de Frobenius [97], nous pouvons obtenir une solution polynomiale à l'équation de Heun confluyente. écrivons la fonction de Heun confluyente sous la forme d'une série de puissances autour de l'origine, c'est-à-dire $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Ainsi, à partir de l'équation (B.1) on obtient la relation :

$$a_1 = -\frac{\mu}{\beta + 1} a_0 \quad (\text{B.3})$$

et la relation de récurrence :

$$a_{k+2} = \left[\frac{(k+1)(k+2+\beta+\gamma-\alpha) - \mu}{(k+2)(k+2+\beta)} \right] a_{k+1} + \left[\frac{\alpha k + \mu + \nu}{(k+2)(k+2+\beta)} \right] a_k \quad (\text{B.4})$$

En utilisant l'équation (B.2), nous pouvons réécrire les équations (B.3) et (B.4) sous la forme : avec le coefficient

$$a_1 = -\left[\frac{\alpha(\beta+1) - \beta(1+\gamma) - \gamma - 2\eta}{2(\beta+1)} \right] a_0 \quad (\text{B.5})$$

et

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \left[\frac{2(k+1)(k+2+\beta+\gamma-\alpha) - \alpha(\beta+1) + \beta(1+\gamma) + \gamma + 2\eta}{2(k+2)(k+2+\beta)} \right] a_{k+1} \\ &\quad + \left[\frac{\alpha k + \delta + \frac{\alpha}{2}(2+\beta+\gamma)}{(k+2)(k+2+\beta)} \right] a_k \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Par conséquent, à partir de l'équation (B.4) ou l'équation (B.6), le confluent Heun série devient un polynôme de degré n quand on impose deux conditions :

$$a_{n+1} = 0$$

$$\delta = -\alpha \left[n + \frac{1}{2} (2 + \beta + \gamma) \right]. \quad (\text{B.7})$$

Où $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Malheureusement, nous ne savons pas s'il existe une expression fermée pour le comportement asymptotique de la fonction de Heun confluente pour les grandes valeurs de son argument. Pour cette raison, nous avons utilisé les informations fournies par les équations (B.3) à (B.7) dans ce travail dans le but d'analyser chaque coefficient a_k séparément.

Annexe B : L'équation de Heun biconfluente

Dans cette annexe, nous détaillons le processus conduisant à l'équation de Heun biconfluente à partir de l'équation différentielle qu'elle représente. Bien que de nombreuses références soient disponibles dans la littérature, nous nous sommes principalement appuyés sur les contributions de travaux antérieurs [98].

L'équation biconfluente de Heun est une équation différentielle linéaire du second ordre et est généralement notée $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$. La forme générale de l'équation biconfluente de Heun est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{1 + \alpha}{x} - \beta - 2x \right] \frac{dy}{dx} \\ + \left\{ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] \frac{1}{x} \right\} y = 0. \end{aligned} \quad (C.1)$$

$y(x)$ est la fonction biconfluente de Heun. Supposons que les solutions de l'équation biconfluente de Heun (C.1) puissent s'écrire comme suit

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad (C.2)$$

et ainsi, nous avons

$$\frac{d}{dx} y(x) = \sum_{s=1}^{\infty} s c_s x^{s-1}, \quad (C.3)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2}. \quad (C.4)$$

Remplacement les équations (C.2), (C.3) et (C.4) dans l'équation (C.1), on arrive à

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2} + \left(\frac{1 + \alpha}{x} - \beta - 2x \right) \sum_{s=1}^{\infty} s c_s x^{s-1} \\ + \left\{ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] \frac{1}{x} \right\} \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s = 0. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Il en découle que

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2} + \sum_{s=1}^{\infty} (1 + \alpha) s c_s x^{s-2} - \sum_{s=1}^{\infty} \beta s c_s x^{s-1}$$

$$-\sum_{s=1}^{\infty} 2s c_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma - \alpha - 2) c_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] c_s x^{s-1} = 0, \quad (\text{C.6})$$

Ou, de manière équivalente

$$\begin{aligned} & \sum_{S=0}^{\infty} (S+2)(S+1) c_{S+2} x^S + \sum_{S=-1}^{\infty} (1+\alpha)(S+1) c_{S+2} x^S \\ & - \sum_{S=0}^{\infty} \beta (S+1) c_{S+1} x^S - \sum_{S=-1}^{\infty} 2S c_{S+2} x^S + \sum_{S=0}^{\infty} (\gamma - \alpha - 2) c_S x^S \\ & - \sum_{S=0}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] c_{S+1} x^S = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Où $S = s - 2$. En regroupant tous les termes du même ordre en x , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\{ (1 + \alpha) c_1 - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] c_0 \right\} x^{-1} \\ & + \left\{ 2(2 + \alpha) c_2 - \left\{ \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta + \beta] \right\} c_1 + (\gamma - \alpha - 2) c_0 \right\} \\ & + \sum_{S=0}^{\infty} \left\{ (S+2)(S+2+\alpha) c_{S+2} - \left\{ \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta + (S+1) \beta] \right\} c_{S+1} \right. \\ & \left. + (\gamma - \alpha - 2 - 2S) c_S \right\} x^S = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, l'équation (C.8) donne les relations de récurrence suivantes pour les coefficients de l'expansion

$$(1 + \alpha) c_1 = \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta] c_0, \quad (\text{C.9})$$

$$2(2 + \alpha) c_2 = \left\{ \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta + \beta] \right\} c_1 - (\gamma - \alpha - 2) c_0, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} (S+2)(S+2+\alpha) c_{S+2} &= \left\{ \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha) \beta + (S+1) \beta] \right\} c_{S+1} \\ &- (\gamma - \alpha - 2 - 2S) c_S, \quad S \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

à partir de la relation de récurrence donnée par l'équation (C.11), la fonction $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ devient un polynôme de degré n si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\gamma - \alpha - 2 = 2n, \quad (\text{C.12})$$

$$c_{n+1} = c_2 = 0. \quad (\text{C.13})$$

Annexe C : L'effet électromagnétique du potentiel d'Aharonov-Bohm

L'électrodynamique classique est décrite par les quatre équations fondamentales de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{D.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{D.4})$$

Dans ces équations, les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont respectivement le champ électrique et magnétique. ρ c'est la densité de charge et \vec{j} le courant. Dans la théorie classique, le champ électromagnétique exerce sur une particule de charge q qui se déplace par la vitesse \vec{v} la force de Lorentz ;

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{D.5})$$

Dans la théorie classique, la force de Lorentz est nulle $\vec{F} = \vec{0}$ lorsque $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$. Les équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) s'écrivent avec les seuls champs \vec{E} et \vec{B} . par conséquent il n'y a pas de champ électromagnétique dans les régions où ces derniers sont nuls. On introduit maintenant les notions des potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} , à partir la deuxième équation de Maxwell, on peut écrire le champ \vec{B} magnétique sous la forme

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{D.6})$$

parce que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. Alors la troisième équation de Maxwell devient

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{D.7})$$

le champ électrique s'exprime sous la forme

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{D.8})$$

Aharonov and Bohm [99] ont prédit que les potentiels électromagnétiques \vec{A} et ϕ pourraient être des quantités physiques réelles et que cela pourrait être démontré par des expériences d'interférence d'électrons .

il est facile de vérifier que les potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} ne sont pas uniques par la transformation de jauge suivante sur les potentiels

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (\text{D.9})$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (\text{D.10})$$

Donc,

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{E} \quad (\text{D.11})$$

En mécanique quantique, l'effet d'Aharonov-Bohm n'a pas un origine dans la théorie classique. Les effets physiques se produisent dans la région où $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ et dont le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas nul. Pour concrétiser ce phénomène, on introduit un solénoïde derrière le mur entre les fentes. Considérons les intégrales de la forme suivante

$$\chi_{C_1} = \int_{C_1} \vec{A}(r) dr \quad (\text{D.12})$$

$$\chi_{C_2} = \int_{C_2} \vec{A}(r) dr \quad (\text{D.13})$$

avec 1 et 2 désignant deux chemins différents. La différence de phase entre les deux chemins 1 et 2 est

$$\Delta = \chi_{C_1} - \chi_{C_2} = q \left\{ \int_{C_1} \vec{A}(r) dr - \int_{C_2} \vec{A}(r) dr \right\} \quad (\text{D.14})$$

En Utilisant le théorème de Stokes, on trouve que

$$\Delta = q \int \vec{A}(r) dr = q\Phi \neq 0 \quad (\text{D.15})$$

Ici, C_1 et C_2 représentent les chemins empruntés par chaque faisceau lors du passage du solénoïde. Puisqu'ils forment un chemin fermé autour de la solénoïde, la différence de phase totale entre les faisceaux sera proportionnelle au flux magnétique à l'intérieur de la solénoïde. Donc, si nous modifions le champ magnétique dans la solénoïde, la différence de phase entre les faisceaux et le motif d'interférence se déplace : c'est ce qu'on appelle l'effet d'Aharonov-Bohm. La vérification expérimentale de l'effet d'Aharonov-Bohm a fait l'objet de plusieurs expériences complexes dont certaines mettent en jeu les microtechnologies des circuits intégrés. Enfin, on pense que l'effet d'Aharonov-Bohm jouera un rôle important dans les circuits électroniques de demain.

Dans la région où $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$, en annulant les potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} , un potentiel vecteur \vec{A}' existera toujours. Ceci constitue l'effet d'Aharonov-Bohm qui est un effet de nature quantique.

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \chi \quad (\text{D.16})$$

la fonction de jauge prend la forme suivantes

$$\chi = \int \vec{A}(r) dr \quad (\text{D.17})$$

et le changement de jauge de phase devient

$$\psi' = e^{iq \int \vec{A}(r) dr} \psi. \quad (\text{D.18})$$

L'effet Aharonov-Bohm est un phénomène quantique qui démontre que même en l'absence de champ électromagnétique à l'intérieur d'une région donnée, la présence d'un champ magnétique peut tout de même influencer le comportement des particules chargées. Cet effet a été proposé par les physiciens Yakir Aharonov et David Bohm en 1959.

En essence, l'effet Aharonov-Bohm met en évidence le rôle du potentiel vecteur électromagnétique dans la physique quantique. Alors que le champ magnétique en lui-même peut être nul dans une certaine région, le potentiel vecteur associé peut avoir une influence mesurable sur la phase quantique d'une particule chargée qui se déplace à travers cette région.

Cette observation contredit l'idée classique selon laquelle seuls les champs électriques et magnétiques ont un impact sur les particules chargées. L'effet Aharonov-Bohm illustre ainsi la nécessité de considérer le potentiel vecteur électromagnétique pour une description complète des phénomènes quantiques.

Annexe D : Critère de Pauli et l'effet de vecteur d'Aharonov-Bohm

Le moment cinétique angulaire, est une grandeur physique importante en physique, en particulier en mécanique quantique. Il est défini comme le produit vectoriel de la position et de la quantité de mouvement d'une particule par rapport à un point donné $L = r \times p$. Sa composante quantifiée.

Le moment cinétique angulaire est un opérateur hermitien dans le formalisme de la mécanique quantique satisfait aux relations suivantes

$$L \times L = i\hbar L, \quad (\text{E.1})$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k, \quad (\text{E.2})$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}. \quad (\text{E.3})$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0. \quad (\text{E.4})$$

Avec les opérateurs L_{\pm} , L^2 et L_z sont

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y. \quad (\text{E.5})$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{E.6})$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{E.7})$$

Le moment cinétique angulaire repose sur les relations de commutation que Pauli a imposées afin que les fonctions propres appropriées soient intégrables et closes sous l'action des opérateurs. Cette exigence est connue sous le nom de critère de Pauli.

Le moment cinétique angulaire en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha \right)^2 \right), \quad (\text{E.7})$$

avec

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha \right). \quad (\text{E.8})$$

Le potentiel d'Aharonov-Bohm s'écrit sous la forme

$$A_r = A_\theta = 0,$$

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta}. \quad (\text{E.9})$$

Cheng [100] a démontré que le moment cinétique angulaire ne respecte pas les relations de commutation fondamentales. à la place de ces équations, il obtient

$$L \times L = i\hbar L + 2im\alpha\hbar \cos \theta \delta (\cos^2 \theta - 1) u_r, \quad (\text{E.10})$$

Pour cette équation, nous avons

$$[L_z, L_\pm] = \pm \hbar L_\pm. \quad (\text{E.11})$$

$$[L^2, L_\pm] = \mp 2\alpha\hbar^2 [L_\pm \delta (\cos^2 \theta - 1) + \delta (\cos^2 \theta - 1) L_\pm]. \quad (\text{E.12})$$

Ces règles sont différent des équations (E.1) et (E.4). Selon l'argument de Cheng [100], la région où le champ magnétique existe est inaccessible à l'électron, et par conséquent, les relations de commutation du moment cinétique angulaire devraient en tenir compte. Cheng [100] qualifie ce type de relations de communication de "global". En conséquence, le critère de Pauli n'est plus applicable. Les solutions de L_z et L^2 dans les conditions limites suivantes à

$$\psi(\theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (\text{E.13})$$

Cela signifie que la particule est limitée à la région doublement connectée de

$$\theta \neq 0, \pi \quad (\text{E.14})$$

Kretzschmar [101] a suggéré les solutions ci-après

$$L_z \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = \lambda \hbar \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \quad (\text{E.15})$$

$$L^2 \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi). \quad (\text{E.16})$$

Avec

$$\lambda = m - \alpha, \quad m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (\text{E.17})$$

$$l = |\lambda| + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.18})$$

Les paramètres λ et l évoluent en fonction de la quantité α du champ magnétique. Enfin, les fonctions propres normalisées sont exprimées de la manière suivante

$$\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = c_{\lambda,l} P_l^{|\lambda|} \cos \theta e^{im\varphi}, \quad m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (\text{E.19})$$

Avec

$$c_{\lambda,l} = e^{i\frac{\pi}{2}\lambda + i\frac{\pi}{2}|\lambda|} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\Gamma(l+|\lambda|+1)}{\Gamma(l-|\lambda|+1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.20})$$

L'inapplicabilité du critère de Pauli a entraîné une modification complète de l'espace Hilbert total S . Celui-ci est maintenant divisé en deux sous-espaces, S_+ et S_- . Le premier est englobé par toutes les fonctions propres $\psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$, tandis que le second est englobé par toutes les fonctions propres $\psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$. Ces deux sous-espaces ne sont reliés par aucun opérateur. Ou

$$\psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi) = c_{\lambda_1, l_1} P_{l_1}^{-\lambda_1} \cos \theta e^{im\varphi}, \quad (\text{E.21})$$

pour

$$\lambda_1 = m - \alpha > 0, \quad \text{et} \quad l_1 = \lambda_1 + k. \quad (\text{E.22})$$

Et

$$\psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi) = c_{\lambda_2, l_2} P_{l_2}^{-\lambda_2} \cos \theta e^{im\varphi}, \quad (\text{E.23})$$

pour

$$\lambda_2 = m - \alpha < 0, \quad \text{et} \quad l_1 = -\lambda_2 + k. \quad (\text{E.24})$$

à présent, nous allons discuter des règles de commutation en présence de défauts topologiques.

1- cas d'une corde cosmique.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (\text{E.25})$$

Le potentiel d'Aharonov-Bohm s'écrit sous la forme

$$A_r = A_\theta = 0,$$

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin \theta}. \quad (\text{E.26})$$

Ainsi, nous avons la relation de commutation suivante

$$L \times L = i\hbar L + \left(2 \frac{im_0}{a'} \hbar^2\right) \cos \theta \delta (\cos^2 \theta - 1) u_r, \quad (\text{E.27})$$

2- cas d'un monopole global.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{E.28})$$

Le potentiel d'Aharonov-Bohm s'écrit sous la forme

$$A_r = A_\theta = 0,$$

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi b' r \sin \theta}. \quad (\text{E.29})$$

Ainsi, nous avons la relation de commutation suivante

$$L \times L = i\hbar L + \left(2 \frac{im_0}{b'^2} \hbar^2\right) \cos \theta \delta (\cos^2 \theta - 1) u_r, \quad (\text{E.30})$$

Bibliographie

- [1] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [2] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls : An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [3] W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **31**, 3288 (1985).
- [4] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* **133**, 177 (1983).
- [5] V. B. Bezerra, *J. Math. Phys.* **38**, 2553 (1997).
- [6] R. A. Puntigam and H. H. Soleng, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1129 (1997).
- [7] M. Barriola and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).
- [8] A. Boumali and H. Aounallah, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, 1031763 (2018).
- [9] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E. R. Bezerra de Mello, *Class. Quantum Gravity* **23**, 5249 (2006).
- [10] A. Boumali and H. Aounallah, *Rev. Mex. Fis.* **66**(2), 192 (2020).
- [11] H. Aounallah and A. Boumali, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **16**, 195 (2019).
- [12] E. A. F. Bragança, R. L. L. Vitoria, H. Belich and E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C* **80**, 206 (2020).
- [13] R. L. L. Vitoria and H. Belich, *Phys. Scr.* **94** 125301 (2019).
- [14] C. Furtado and F. Moraes, *J. Phys. A Math. Gen.* **33**, 5513 (2000).
- [15] M. de Montigny, J. Pinfeld, S. Zare and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **137**, 54 (2022).
- [16] F. Ahmed, *Sci. Rep* **12**, 8794 (2022).
- [17] M. de Montigny, H. Hassanabadi, J. Pinfeld and S. Zare, *Eur. Phys. J. Plus* **136**, 788 (2021).

- [18] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, *Ann. Phys. (N.Y.)* **216**, 1 (1992).
- [19] G. A. Marques and V. B. Bezerra, *Class. Quantum Gravity* **19**, 985 (2002).
- [20] E. R. Bezerra de Mello and C. Furtado, *Phys. Rev. D* **56**, 1345 (1997).
- [21] F. Ahmed, *Communications in Theoretical Physics* **75** (5), 055103 (2023).
- [22] F. Ahmed, arXiv : 2209.13490 [quant-ph].
- [23] F. Ahmed, *Mol. Phys*, e2124935, DOI :10.1080/00268976.2022.2124935 (2022).
- [24] N. A. Rao and B. A. Kagali, *Phys. Scr.* **77**, 015003 (2008).
- [25] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
- [26] E. V. B. Leite, H. Belich and R. L. L. Vitoria, *Braz. J. Phys.* **50**, 744 (2020).
- [27] B. Hamil and M. Merad, *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 174 (2018).
- [28] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 490 (2018).
- [29] A. Boumali and N. Messai, *Can. J. Phys.* **92**, 1490 (2014).
- [30] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 36 (2016).
- [31] K. Bakke and C. Furtado, *Ann. Phys. (NY)* **355**, 48 (2015).
- [32] A. Einstein and N. Rosen, *Phys. Rev.* **48**, 73 (1935).
- [33] L. Flamm, *Physikalische Zeitschrift* **17**, 448 (1916).
- [34] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **46**, 603 (1992).
- [35] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Amer. J. Phys.* **56**, 395 (1988).
- [36] V. Frolov and I. D. Novikov, *Phys. Rev. D* **48**, 1607 (1993).
- [37] J. L. Friedmann, K. Schleich and D. N. Witt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1486 (1993).
- [38] S.-W. Kim and H. Lee, *Phys. Rev. D* **63**, 064014 (2001).
- [39] J. P. S. Lemos and F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **78**, 044030 (2008).
- [40] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446 (1988).
- [41] F. Rahaman, P. K. F. Kuhfittig, M. Kalam, A. A. Usmani and S. Ray, *Class. Quant. Grav.* **28**, 155021 (2011).
- [42] J. Sadeghi, M. Shokri, S. Noori Gashti, B. Pourhassan and P. Rudra, *Int. J Mod. Phys. D* **31**, 2250019 (2022).
- [43] G. C. Samanta and N. Godani, *Eur. Phys. J. C* **79**, 623 (2019).
- [44] T. A. Roman, *Phys. Rev. D* **47**, 1370 (1993).

- [45] K. A. Bronnikov, *Acta Phys. Pol. B* **4**, 251 (1973).
- [46] H. G. Ellis, *J. Math. Phys.* **14**, 104 (1973).
- [47] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007).
- [48] P. Brax, *Rep. Prog. Phys.* **81**, 1 (2018).
- [49] M Banados and P. G. Ferreira, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 011101 (2010).
- [50] R. D. Lambaga and H. S. Ramadhan, *Eur. Phys. J. C* **78**, 436 (2018).
- [51] J. R. Nascimento, G. J. Olmo, A. Yu. Petrov, P. J. Porfirio and A. R. Soares, *Phys. Rev. D* **99**, 064053 (2019).
- [52] H. Aounallah, A. R. Soares and R. L. L. Vitoria, *Eur. Phys. J. C* **80**, 447 (2020).
- [53] A. R. Soares, R. L. L. Vitoria and H. Aounallah, *Eur. Phys. J. Plus* **136**, 966 (2021).
- [54] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* **8**, 16 (1936).
- [55] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1939).
- [56] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **173**, 91 (1939).
- [57] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **166**, 127 (1938).
- [58] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, *Prog. Theor. Phys.* **30(2)**, 275 (2000).
- [59] R. A. Krajcik, Michael Martin Nieto, *Amer. J. Phys.* **45(9)**, 818, (1977).
- [60] A. Boumali, L. Chetouani, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys.* **91**, 1 (2013).
- [61] M. Falek, M. Merad, *J. Math. Phys.* **51**, 033516 (2010).
- [62] M. Falek, M. Merad, M. Moumni, *J. Math. Phys.* **60**, 013505 (2019).
- [63] M. Falek, M. Merad, T. Birkandan, *J. Math. Phys.* **58**, 023501 (2017).
- [64] B. Q. Wang, Z. W. Long, C. Y. Long, S. R. Wu, *Adv. High Energy Phys.* **2017**, 2843020 (2017).
- [65] B. Q. Wang, Z. W. Long, C. Y. Long, S. R. Wu, *Chin. Phys. B* **27**, 010301, (2018).
- [66] M. A. Hun, N. Candemir, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950056 (2019).
- [67] H. Hassanabadi, W. S. Chung, S. Zare & H. Sobhani, *Eur. Phys. J. C* **78**, 83 (2018).
- [68] F. Ahmed and H. Hassanabadi, *Mod. Phys. Lett. A* **35**, 2050031 (2020).
- [69] F. Ahmed, *Commun. Theor. Phys.* **72**, 025103 (2020).
- [70] J. Lunardi, *J. Math. Phys.* **58**, 123501 (2017).
- [71] Y. Chargui, *Phys. Lett. A* **382**, 949 (2018).

- [72] H Aounallah, BC Lütfüoğlu, J Křiž, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (33), 2050278 (2020).
- [73] B. Hamil, B. C. Lütfüoğlu, H. Aounallah, *Mod. Phys. Lett. A* **36** (4), 2150021 (2021).
- [74] F. W. Dyson, A. S. E. Eddington, C. R. Davidson, *Phil. Trans. Roy. Soc*, 220, 221 (1920).
- [75] A. Boumali, *Can. J. Phys*, 82, 67–74 (2004).
- [76] A. Boumali, *Can. J. Phys*, 85, 1417–29 (2007).
- [77] A. Boumali, Doctorat, Université d’Annaba, (2006).
- [78] C. L. Chrichfield, *J. Math. Phys.* **17**, 261 (1976).
- [79] I. C. Fonseca and K. Bakke, *Proc. R. Soc. A* **471**, 20150362 (2015).
- [80] E. Castro and P. Martin, *J. Phys. A : Math. Gen.* **33**, 5321 (2000).
- [81] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi and F. M. Andrade, *Eur. Phys. J. C* **78**, 93 (2018).
- [82] P. Sedaghatnia, H. Hassanabadi and F. Ahmed, *Eur. Phys. J. C* **79**, 541 (2019).
- [83] H. Hassanabadi, M. Hosseinpour and M. de Montigny, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 541 (2017).
- [84] F. Ahmed, *Eur. Phys. J. C* **80**, 211 (2020).
- [85] E. V. B. Leite, H. Belich and R. L. L. Vitoria, *Adv. High Energy Phys.* **2019**, 6740360 (2019).
- [86] E. V. B. Leite, R. L. L. Vitoria and H. Belich, *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 1950319 (2019).
- [87] H. Asada and T. Futamase, *Phys. Rev. D* **56**, R6062 (1997).
- [88] S. M. Ikhdair, B. J. Falaye and M. Hamzavi, *Ann. Phys. (N. Y.)* **353**, 282 (2015).
- [89] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 36 (2016).
- [90] M. de Montigny, S. Zare and H. Hassanabadi, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 47 (2018).
- [91] C. Alexandrou, P. de Forcrand and O. Jahn, *Nucl. Phys. B (Proceedings Supplements)* **119**, 667 (2003).
- [92] K. Sogut, A. Havare, *Class. Quant. Grav.* **23**, 7129 (2006).
- [93] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira :- Geometrical Aspects of Quantum Fields **111**,(2001).
- [94] M. Falek, M. Merad, *Cent. Eur. J. Phys.* **8**, 408 (2010).
- [95] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd (2003).
- [96] W. C. F. da Silva, K Bakke, R. L. L. Vitoria, *Eur. Phys. J. C* **79**, 657 (2019).
- [97] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th edn. (Elsevier Academic Press, New York, 2005).

- [98] H. S. Vieira and V. B. Bezerra, *J. Math. Phys.* **56**, 092501 (2015).
- [99] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [100] C.-F. Li, *Ann. Phys.* **525**, 329 (1996).
- [101] M. Kretschmar, *Z. Phys.* **185**, 97 (1965).