



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique



كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT LMD

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Thème :

Etude de l'existence globale des solutions de certains systèmes de réaction-diffusion

Présenté Par :

ABDELMALEK Karima

Devant le jury :

<i>Boumaza Nouri</i>	<i>MCA</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Président</i>
<i>Rebiai Belgacem</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Haouam Kamel</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Co-Rapporteur</i>
<i>Saoudi Khaled</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Khenchela</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mansour Abdelouahab</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université d'Eloued</i>	<i>Examineur</i>
<i>Zitouni Salah</i>	<i>MCA</i>	<i>Université de Souk Ahras</i>	<i>Examineur</i>

Date de soutenance : 16/05/2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah à tout le puissant qui m'a donné la patience pour terminer ce travail, qui m'a aidé pour surmonter les difficultés rencontrées durant mes études.

J'ai le grand honneur et le profond respect de remercier, mon encadreur le professeur **Rebiai Belgacem** qui a fait tout son possible pour m'orienter et m'a guidé afin de réaliser ce projet avec compétence pour tous les conseils précieux qu'il m'a prodigué.

Je tiens à remercier particulièrement mon co-encadreur le professeur **Haouam Kamel**.

Je tiens à remercier tous les membres du jury de mon thèse : Dr **Boumaza Nouri** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury et aussi pour tout ce qu'il m'a appris Prof **Saoudi Khaled**, Prof **Mansour Abdelouahab**, Dr **Zitouni Salah** qui ont encouragé mon travail par leur présence.

Je n'oublie pas de remercier spécialement Dr **Abdelmalek Salem**, Dr **Hafdallah Abdelhak** et Dr **Barrouk Nabila**.

Un grand plaisir envers tous mes enseignants d'avoir su m'assurer une bonne formation.

Abdelmalek Karima

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

*Mon défunt père et ma très chère mère qui mérite le
meilleur des respects.*

*Tout famille sans exception, surtout mes frères avec
leurs épouses et mes sœurs avec leurs maris*

À tous les petits-enfants de la famille

Tout mes amis sans exception.

Tous ceux qui me connaissent.

ملخص

خصت هذه الاطروحة لدراسة الوجود الكلي للحلول الكلاسيكية لبعض أنظمة رد الفعل- والانتشار المتكونة من m معادلة.

نبدأ مع نظام رد الفعل- والانتشار المرفق بمصفوفة الانتشار القطرية، ثم مع نظام رد الفعل- والانتشار المرفق بمصفوفة الانتشار الثلاثية الأقطار من نوع توبليتز.

ونهي هذه الدراسة بنظام رد الفعل- والانتشار المرفق بمصفوفة الانتشار الثلاثية الأقطار أعم من مصفوفة توبليتز.

تعتمد التقنية المستخدمة لإثبات الوجود الكلي للحلول على بناء مناطق ثابتة ومن ثم على بناء تابعة كثير حدود لليابونوف.

الكلمات المفتاحية: أنظمة رد الفعل- والانتشار، الوجود الكلي، تابعة ليابونوف، المناطق الثابتة، مصفوفة توبليتز.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the global existence of classical solutions for certain reaction-diffusion systems formed by m -equations.

We start with a reaction-diffusion system with a diagonal diffusion matrix, then with a reaction-diffusion system with a tridiagonal diffusion matrix of the Toeplitz type.

And we finish this study with a reaction-diffusion system with a tridiagonal diffusion matrix more general than Toeplitz matrix,

The technique used to prove the global existence of solutions is based on the construction of invariant regions and then on the construction of a polynomial Lyapunov functional.

Keywords: *Reaction-diffusion systems, Global existence, Lyapunov functional, Invariant regions, Toeplitz matrix,*

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence globale de solutions classiques pour certains systèmes de réaction diffusion formés de m -équations.

On commence par un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion diagonale, puis par un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion tri-diagonale de type Toeplitz.

Et on détermine par l'étude d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion tri-diagonale plus générale que celle de Toeplitz.

La technique suivie pour prouver l'existence globale de solutions est basée sur la construction des régions invariantes, puis sur la construction d'une fonctionnelle polynômiale de Lyapunov.

Mots-clés: *Systèmes de réaction-diffusion, Existence globale, Fonctionnelle de Lyapunov, Régions invariantes, Matrice de Toeplitz.*

Table des matières

Introduction générale	4
1 Notations et notions préliminaires	8
1.1 Notations et notions générales	8
1.1.1 Quelques égalités et inégalités utiles	12
1.1.2 Positivité des formes quadratiques	15
1.1.3 Matrice de Toeplitz	17
1.1.4 Algorithme de Dodgson	18
2 Systèmes de réaction-diffusion	20
2.1 Introduction aux systèmes de réaction-diffusion	20
2.2 Modélisation	21
2.3 Quelques exemples	23
2.4 Existence des solutions	27
2.4.1 Existence locale et caractérisation du temps maximal	27
2.4.2 Positivité des solutions	28
2.4.3 Fonctionnelle de Lyapunov	29
2.4.4 Régions invariantes	30
2.4.5 Existence globale	31
3 Existence globale pour un système de réaction-diffusion à m-équations avec	

Table des matières

une matrice de diffusion diagonale	34
3.1 Introduction	34
3.2 Quelques résultats précédents	37
3.3 Existence locale et globale	39
3.4 Applications	47
4 Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion	
à m-équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symé-	
trique	49
4.1 Introduction	49
4.2 Valeurs propres et vecteurs propres	53
4.3 Régions invariantes	55
4.4 Existence locale et globale	57
4.5 Etude d'un système généralisé	59
4.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres	63
4.5.2 Régions invariantes	66
4.5.3 Existence locale et globale	69
5 Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion	
à m-composantes avec une matrice de diffusion tri-diagonale symétrique	72
5.1 Introduction	72
5.2 Existence de solutions locales	76
5.3 Valeurs propres et vecteurs propres	76
5.4 Régions invariantes	78
5.5 Existence globale	80
5.6 Remarques finales	88
Conclusion	91
Bibliographie	91

Notations

Ω : Domaine ouvert bornée de \mathbb{R}^n .

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

$d\sigma$: La mesure de surface sur $\partial\Omega$.

$\frac{\partial u}{\partial t}$: La dérivée partielle de u par rapport au temps t .

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$: La dérivée normale de u sur le bord $\partial\Omega$.

X : Espace de Banach.

$W^{m,p}, H^1, H^m$: Les espaces de Sobolev.

$L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$: l'espace des fonctions mesurables de $[0, T]$ dans $L^p(\Omega)$.

$L^\infty(\Omega)$: L'ensemble des fonctions réelles bornées sur Ω .

BC : L'espace des fonctions bornées et continues dans \mathbb{R} .

$p.p$: Presque partout.

∇u : Le gradient de u .

$\nabla \cdot u$: La divergence de u .

Δu : Le laplacien de u .

$\|u\|$: La norme de u .

P : Matrice de diagonalisation.

$\det A$: Déterminant de A .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.

$A(u, u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$: La forme quadratique.

Σ : Région invariante.

$L(t)$: Fonctionnelle de Lyapunov.

T_n : Matrice de Toeplitz.

Introduction générale

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes, non seulement dans les sciences naturelles, mais aussi dans l'ingénierie et l'économie, tels que la dynamique des gaz, des processus de fusion, certains modèles biologiques, les processus cellulaires, l'écologie, la propagation de maladies, les processus industriels, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la propagation des flammes et des réactions chimiques et autres. La plupart de ceux-ci, en première vue, sont des phénomènes qui ont un dénominateur commun, la présence de diffusion (permettant à la propagation d'une épidémie ou d'une substance chimique), et de réaction (qui est la manière spécifique dont les différentes phases ou composantes chimiques réagissent), ils sont génériquement appelés systèmes de réaction-diffusion.

L'objet de cette thèse est l'étude de l'existence globale des solutions classiques pour des systèmes formés de m -équations aux dérivées partielles du type parabolique appelés systèmes de réaction-diffusion dans les cas où la matrice de diffusion est diagonale, la matrice de diffusion est de Toeplitz tri-diagonale et la matrice de diffusion tri-diagonale plus générale que celle de Toeplitz. Pour ce but nous utilisons la technique de la fonctionnelle polynômiale de Lyapunov. pour mieux apprécier problématique, il est pertinent de diviser notre travail en cinq chapitre

Dans le premier chapitre, nous présentons les différentes notions nécessaires pour notre travail tels que les espaces avec leurs normes, quelques égalités et inégalités, dans le même contexte nous présentons les différentes notations qui nous allons utiliser tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, en premier lieu nous exposons la forme générale des systèmes

de réaction-diffusion, la modélisation des systèmes de réaction-diffusion en utilisant la loi de comportement de Fick. En deuxième lieu nous donnons les définitions de la fonctionnelle de Lyapunov classiques et les régions invariantes, propositions et théorèmes sur l'existence locale et globale, la positivité de solutions des systèmes de réaction-diffusion.

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier l'existence globale de système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion diagonale [4] de la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \Delta u_i = f_i(U) \quad \text{dans } \Omega \times \{t > 0\}, \quad (0.0.1)$$

avec les conditions aux bords

$$\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i) \partial_\eta u_i = \beta_i \quad \text{sur } \partial\Omega \times \{t > 0\}, \quad (0.0.2)$$

et les conditions initiales pour tout $i = 1, \dots, m$

$$u_i(0, x) = u_i^0(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (0.0.3)$$

pour ce but nous allons construire une fonctionnelle de Lyapunov à croissance polynômiale. Sous la forme :

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_m(t, x)) dx,$$

où

$$H_{p_m}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} u_1^{p_1} u_2^{p_2 - p_1} \dots u_m^{p_m - p_{m-1}},$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_j}^{p_i} = \frac{p_j!}{p_i!(p_j - p_i)!}$.

Nous terminons ce chapitre par un exemple en chimie.

Dans le quatrième chapitre, nous allons étudier l'existence globale de solutions pour deux systèmes de réaction-diffusion formés de m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz. Les termes de réaction sont supposés être de croissance polynômiale.

Le premier système [3] est sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a \Delta u_1 - b \Delta u_2 &= f_1(U), \\ \frac{\partial u_\ell}{\partial t} - b \Delta u_{\ell-1} - a \Delta u_\ell - b \Delta u_{\ell+1} &= f_\ell(U), \ell = 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} - b \Delta u_{m-1} - a \Delta u_m &= f_m(U), \end{aligned}$$

avec les conditions aux bords (0.0.2) et les conditions initiales (0.0.3).

Les données initiales sont supposées être dans les régions :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \left\{ (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L}, \\ \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \leq 0, \quad z \in \mathfrak{Z}, \end{array} \right. \right\},$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L}, \\ \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \leq 0, \quad z \in \mathfrak{Z}, \end{array} \right.$$

où

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Le deuxième système (I) est sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D\Delta U = F(U) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty),$$

avec les conditions aux bords (0.0.2) et les conditions initiales (0.0.3). Où la matrice de diffusion est définie comme :

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des constantes strictement positives. Les données initiales sont supposées être dans les régions :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, U_0 \rangle, z \in \mathfrak{Z}, \ell \in \mathfrak{L}\},$$

où

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\},$$

vérifiant

$$\langle V_z, B \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, B \rangle, \text{ si } z \in \mathfrak{Z}, \ell \in \mathfrak{L}.$$

Dans le cinquième chapitre, [5] nous allons généraliser les résultats précédents du quatrième chapitre. Nous prouvons l'existence globale de système de réaction-diffusion à m -composante avec une matrice de diffusion tri-diagonale symétrique plus générale de Toeplitz, définie comme suit :

$$A_m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} & a_m \end{pmatrix}, \quad (0.0.4)$$

$(a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^{m-1}$ sont des constantes strictement positives, avec les conditions aux bords (0.0.2) et les conditions initiales (0.0.3). Les termes de réaction sont supposés être de croissance polynômiale.

Chapitre 1

Notations et notions préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires qui sont utiles dans les chapitres suivants.

1.1 Notations et notions générales

On note $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice carrée d'ordre n qui s'écrit comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Les déterminants principaux successifs de A sont notés par $\det 1, \det 2, \dots, \det n$, on les écrits :

$$\det 1 = a_{11}, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Les déterminants sous la forme :

$$\det A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}, \quad (1.1.3)$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n \end{cases}, p \leq n.$$

et $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$ sont appelés les déterminants principaux.

On note par $(a_{i,j})_{\substack{i \neq i_1, i_2, \dots, i_k \\ j \neq j_1, j_2, \dots, j_l}}$ la matrice $(n-k) \times (n-l)$ obtenue de A en supprimant les lignes i_1, i_2, \dots, i_k et les colonnes j_1, j_2, \dots, j_l .

On note par $A(k)$ la matrice carrée d'ordre $(n-2)$ obtenue de A en supprimant les lignes $(n-2)$ et $(n-1)$ et les colonnes $(n-1)$ et n et en remplaçant la colonne $(n-2)$ par $(n-k)$, dont on peut l'écrire comme suit :

$$A(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-3)} & a_{1(n-k)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-3)} & a_{2(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-3)1} & a_{(n-3)2} & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-k)} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-3)} & a_{n(n-k)} \end{pmatrix}, \quad (1.1.4)$$

aussi on peut l'écrire comme une matrice en bloc :

$$A(k) = \begin{pmatrix} & & & a_{1(n-k)} \\ & & & a_{2(n-k)} \\ & & & \vdots \\ (a_{i,j})_{\substack{i \neq n, n-1, n-2 \\ j \neq n-1, n-2,}} & & & \\ & & & a_{(n-3)(n-k)} \\ & & & a_{n(n-k)} \end{pmatrix},$$

On note par $B(l)$ la matrice carrée d'ordre n obtenue de A en remplaçant les lignes n par

$(n - l) :$

$$B(l) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-3)} & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-3)} & a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-3)1} & a_{(n-3)2} & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} & a_{(n-3)(n-1)} & a_{(n-3)n} \\ a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & \cdots & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & a_{(n-2)n} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-3)} & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{(n-l)1} & a_{(n-l)2} & \cdots & a_{(n-l)(n-3)} & a_{(n-l)(n-2)} & a_{(n-l)(n-1)} & a_{(n-l)n} \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

Soit Ω est un ouvert borné inclus dans \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \vec{\eta},$$

où $\vec{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs définie par :

$$\text{gradu} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \Delta u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.1.6)$$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on appelle divergence de u la fonction définie par :

$$\text{div } u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1.1.7)$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\Delta u = \text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (1.1.8)$$

On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout) u mesurables sur Ω , telles que $\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$,

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx. \quad (1.1.9)$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions u mesurables et vérifiant $|u| \leq C$ p.p (presque partout) sur Ω , où C est une constante positive,

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| = \inf \{C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}. \quad (1.1.10)$$

On définit les espaces $L^p(0, T; X); L^\infty(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, comme suit :

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}, \quad (1.1.11)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \sup_{t \in (0, T)} \text{ess } \|u\|_X < \infty \right\}, \quad (1.1.12)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess } \|u\|_X.$$

Naturellement, on a : $L^p([0, T], L^p) = L^p(\Omega \times [0, T])$

On peut introduire l'espace important dans notre travail $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$, comme suit :

$$L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess } \|u\|_{L^p} < \infty. \quad (1.1.13)$$

D'autre terme

$$u(x, t) \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \Leftrightarrow \sup_{t \in (0, T)} \|u(x, t)\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω ,

muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace des fonctions k fois continûments différentiable sur Ω , et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

BC désigne l'espace des fonctions bornées et uniformément continues dans \mathbb{R} , et on écrit :

$$BC_0 = \left\{ u \in BC : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0 \right\}.$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev définie par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (1.1.14)$$

pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définies comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.1.15)$$

Où $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, est la dérivée au sens des distribution

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p, 1 \leq p < +\infty \quad (1.1.16)$$

alors

$$\begin{cases} H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega), \\ H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega). \end{cases}$$

1.1.1 Quelques égalités et inégalités utiles

Théorème 1.1.1. (*d'Ostrogradski*) (ou théorème de la divergence) Soit S une surface fermée, frontière d'un domaine de volume V . Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur, et désignons par α, β et γ les angles que

fait cette normale avec la direction des x, y et z positifs respectivement.

Alors si A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans le domaine, le théorème de la divergence s'exprime ainsi :

$$\int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \int_S A_1 dx dz + A_2 dz dx + A_3 dx dy. \quad (1.1.17)$$

Sous la forme vectorielle avec $A = (A_1, A_2, A_3)$, ceci peut s'écrire simplement

$$\int_V \nabla \cdot A dV = \int_S A \cdot \eta dS.$$

Ce théorème, est appelé encore théorème de Green dans l'espace.

Démonstration. (Voir Spiegel [42] page (210)). □

Théorème 1.1.2. (Théorème de l'intégrale nulle) Soit une fonction numérique définie et continue dans le domaine Ω et F une famille dense dans Ω . Si pour tout w de F l'intégrale de Φ dans w est nulle alors, la fonction Φ est identiquement nulle dans Ω .

Formule de Green □

Pour tout fonction u de $H^2(\Omega)$ et tout fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \quad (1.1.18)$$

Inégalité de Young □

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, c]$ où $c > 0$.

$f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ et $b \in [0, f(c)]$, alors

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \quad (1.1.19)$$

où f^{-1} est la fonction inverse de f .

¹George Green est un physicien britannique (14 juillet 1793 - 31 mai 1841)

²William Henry Young est un mathématicien anglais (20 octobre 1863 (Londres)-7 juillet 1942 (Lausanne))

Démonstration. On commence par l'expression

$$g(a) = ab - \int_0^a f(x) dx \quad (1.1.20)$$

on prend $b > 0$ comme un paramètre. Puisque $g'(a) = b - f(a)$ et comme la fonction f est croissante, on a

$$\begin{aligned} g'(a) &> 0 \text{ pour } 0 < a < f^{-1}(b), \\ g'(a) &= 0 \text{ pour } a = f^{-1}(b), \\ g'(a) &< 0 \text{ pour } a > f^{-1}(b). \end{aligned}$$

De cela, $g(a)$ est une valeur maximale de la fonction g atteinte à $a = f^{-1}(b)$. Ainsi

$$g(a) \leq \max g(x) = g(f^{-1}(b)). \quad (1.1.21)$$

Appliquons une intégration par parties

$$\begin{aligned} g(f^{-1}(b)) &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x) dx \\ &= \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x) dx. \end{aligned}$$

Si on prend $y = f(x)$, l'égalité ci-dessus devient :

$$g(f^{-1}(b)) = \int_0^b f^{-1}(y) dy. \quad (1.1.22)$$

En comparant (1.1.20), (1.1.22) et (1.1.21), on obtient (1.1.19) (voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [37]). □

La fonction $f(x) = x^{p-1}$ avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes.

On applique (1.1.19) utilisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.1.23)$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par ϵx^{p-1} dans (1.1.19) alors on obtient l'inégalité de Young avec ϵ :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \epsilon a^p + \frac{(\epsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q. \quad (1.1.24)$$

Ce qui donne

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \epsilon a^p + (\epsilon)^{\frac{1}{p-1}} b^q.$$

Inégalité de Hölder ³

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.1.25)$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité (1.1.23), on obtient

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q,$$

il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g(x)|^q dx. \quad (1.1.26)$$

Remplaçant dans (1.1.26) f par λf ($\lambda > 0$) il vient

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{\lambda q} \int_{\Omega} |g(x)|^q dx.$$

On choisit $\lambda = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{p}}$ on obtient alors (1.1.25).
(Voir Brezis [8] page (56)). □

1.1.2 Positivité des formes quadratiques

Définition 1.1.1. Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré.

Une forme quadratique par rapport aux n variable u_1, u_2, \dots, u_n , peut être représentée par

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j, \quad (1.1.27)$$

³Otto Ludwig Hölder est un mathématicien allemand ,(22 décembre 1859 (Stuttgart)- 29 août 1937)

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

est une matrice symétrique réelle.

Si nous désignons la matrice-colonne (u_1, u_2, \dots, u_n) par u et la forme quadratique par :

$$A(u, u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_i u_j, \quad (1.1.28)$$

nous pouvons écrire

$$A(u, u) = u^T A u = A u \cdot u.$$

Si $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice symétrique réelle, la forme $A(u, u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ est dite forme quadratique réelle.

Définition 1.1.2. Une forme quadratique réelle $A(u, u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ est dite définie positive si

$$A(u, u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad u \neq 0. \quad (1.1.29)$$

Définition 1.1.3. Une forme quadratique réelle $A(u, u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ est dite semi-définie positive si, pour des valeurs arbitraires des variables non nulles ($u \neq 0$), on a

$$A(u, u) \geq 0. \quad (1.1.30)$$

Théorème 1.1.3. Une forme quadratique réelle $A(u, u) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ est dite définie positive si et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients, sont positifs.

$$\det 1 = a_{11} > 0, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Démonstration. (Voir Gantmacher [14] page(306)).

□

Corollaire 1.1.1. *Dans une forme quadratique définie positive $A(u, u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_iu_j$ tous les déterminants principaux de la matrice des coefficients, sont positifs, lorsque les déterminants principaux successifs d'une matrice symétrique réelle sont positifs, tous les déterminants principaux restants sont positifs.*

$$\det A \left(\begin{array}{c} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{array} \right) > 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, p = 1, \dots, n).$$

Remarque 1.1.1. *Si les déterminants principaux successifs sont non-négatifs*

$$\det 1 \geq 0, \det 2 \geq 0, \dots, \det n \geq 0 \tag{1.1.31}$$

il ne résulte pas que $A(u, u)$ soit semi-définie positive. Ainsi la forme :

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 \tag{1.1.32}$$

dans laquelle $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} < 0$ satisfait (1.1.31) mais n'est pas semi-définie positive.

Cependant, nous avons le théorème suivant

Théorème 1.1.4. *Une forme quadratique réelle $A(u, u)$ est dite semi-définie positive si et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont non négatifs.*

$$A \left(\begin{array}{c} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{array} \right) \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, p = 1, \dots, n).$$

Démonstration. (Voir Gantmacher [14] page (307)). □

1.1.3 Matrice de Toeplitz

Définition 1.1.4. *Une matrice carrée de dimensions $(n \times n)$ est dite de Toeplitz si*

$T_n = [t_{i,j}]$ tel que : $t_{i,j} = t_{i-j}, \forall i, j = 1, \dots, n$, i.e., une matrice de la forme :

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.33}$$

Exemple. Une matrice de Toeplitz $T_4 = [t_{i,j}]$ tel que : $t_{i,j} = t_{i-j}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4$,

la première ligne est : $[t_{1-1}, t_{1-2}, t_{1-3}, t_{1-4}] = [t_0, t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}]$,

la deuxième ligne est : $[t_{2-1}, t_{2-2}, t_{2-3}, t_{2-4}] = [t_1, t_0, t_{-1}, t_{-2}]$,

la troisième ligne est : $[t_{3-1}, t_{3-2}, t_{3-3}, t_{3-4}] = [t_2, t_1, t_0, t_{-1}]$,

la quatrième ligne est : $[t_{4-1}, t_{4-2}, t_{4-3}, t_{4-4}] = [t_3, t_2, t_1, t_0]$,

donc la matrice de Toeplitz T_4 définie sous la forme :

$$T_4 = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.5. Une matrice de Toeplitz $T_n = [t_{i,j}]$, avec $i, j = 1, \dots, n$ est dite symétrique si elle vérifie :

$$t_{i,j} = t_{|i-j|}, \forall i, j = 1, \dots, n,$$

i.e., une matrice de la forme :

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & \ddots & \vdots \\ t_2 & t_1 & \ddots & \ddots & t_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_{n-1} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire une telle matrice possède des éléments identiques sur ou sous la diagonale.

1.1.4 Algorithme de Dodgson

Pour prouver mathématiquement l'algorithme bien connu de Dodgson [28] concernant une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ on doit le généraliser comme suit :

$$\det \left[(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \right] \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq k, l \\ j \neq k, l}} \right] = \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq l \\ j \neq l}} \right] \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq k \\ j \neq k}} \right] - \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq l \\ j \neq k}} \right] \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \right], \quad (1.1.34)$$

pour tout $k, l = 1, \dots, n$ telles que $k < l$.

Nous avons besoin de quelques lemmes

Lemme 1.1.1. *On a*

$$A(0) = (a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1, n-2 \\ j \neq n-1, n-2}}, A(1) = (a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1, n-2 \\ j \neq n, n-2}}, A(2) = (a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1, n-2 \\ j \neq n, n-1}}, \quad (1.1.35)$$

$$\det [A(k)] = 0 \text{ pour tout } k = 3, \dots, n-1, \quad (1.1.36)$$

et

$$\det [A(k)] = a_{n(n-k)} \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n, n-1, n-2 \\ j \neq n, n-1, n-2}} \right] + \sum_{l=3}^{l=n-1} (-1)^l (a_{n-l, n-k}) \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1, n-2, n-l \\ j \neq n, n-1, n-2}} \right]. \quad (1.1.37)$$

Démonstration. (Voir Kouachi, Abdelmalek, Rebiai [28]). □

Lemme 1.1.2. *On a*

$$B(0) = A, \quad (1.1.38)$$

$$\det [B(l)] = 0 \text{ pour tout } l = 1, \dots, n-1 \quad (1.1.39)$$

et

$$\det [B(l)] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (a_{n-l, n-k}) \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n \\ j \neq n-k}} \right]. \quad (1.1.40)$$

Démonstration. (Voir Kouachi, Abdelmalek, Rebiai [28]). □

Lemme 1.1.3. *Si le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1, n \\ j \neq n-1, n}}$ est nul ainsi nous obtenons la formule suivante :*

$$\det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n \\ j \neq n}} \right] \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1 \\ j \neq n-1}} \right] - \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n \\ j \neq n-1}} \right] \det \left[(a_{i,j})_{\substack{i \neq n-1 \\ j \neq n}} \right] = 0. \quad (1.1.41)$$

Démonstration. (Voir Kouachi, Abdelmalek, Rebiai [28]). □

Théorème 1.1.5. *Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $n > 2$ la formule (1.1.34) est satisfaite.*

Démonstration. (Voir Kouachi, Abdelmalek, Rebiai [28]) □

Chapitre 2

Systemes de réaction-diffusion

Dans ce chapitre on va exposer les méthodes générales transformant les phénomènes naturels à des systèmes de réaction-diffusion (Modélisation), et nous donnerons une définition d'une fonctionnelle de Lyapunov et régions invariantes, ainsi que la notion de l'existence locale et l'existence globale.

2.1 Introduction aux systèmes de réaction-diffusion

Dans les années récentes, les systèmes de réaction-diffusion ont reçu un grand traité d'attention, motivé par leur incident répandu dans des modèles de phénomènes biologiques et chimiques, et par la richesse de la structure de leurs ensembles de solutions.

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations différentielles aux dérivées partielles de type parabolique de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \tag{2.1.1}$$

où $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ est l'inconnue, $f(x, t, u(x, t)) = (f_1(x, t, u(x, t)), \dots, f_n(x, t, u(x, t)))$ est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x, t, u(x, t))$ est une matrice carrée $n \times n$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion.

Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u .

Par exemple, en chimie

u est un vecteur de concentrations chimiques.

f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations.

Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

2.2 Modélisation

Dans cette partie, nous donnons les étapes nécessaires à la création du système de réaction-diffusion. Pour modéliser un phénomène, nous devons simplifier plusieurs termes et négliger les autres facteurs dans les réactions, leur objectif est d'obtenir des équations simples et faciles à étudier.

Lois de Fick

Première loi de Fick : La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Elle peut être vue comme une définition du vecteur densité du courant J_i . Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante : Soit B un milieu dans lequel se trouve une espèce chimique A , et soit une surface S . On note $C_A(x, y, z, t)$ la concentration de A en un point donné.

On appelle J_A le vecteur densité de courant des particules de A , la première loi de Fick s'écrit

$$J_A = -D_{AB} \cdot \nabla C_A,$$

où D_{AB} est le coefficient de diffusion de A dans le milieu B , il dépend de la température du milieu et de A .

Seconde loi de Fick : La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i : $\int \int \int C_i dv$ dans un volume donné V est égale au flux sortant : $\int \int J_i \cdot ds$ du vecteur densité de courant de particules J_i à travers la surface fermée S délimitant le volume V .

On obtient la deuxième loi de Fick en identifiant les intégrants ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_v C_i \cdot dV = \int \int_s J_i \cdot dS = \int \int \int_v \nabla \cdot J_i \cdot dV. \quad (2.2.1)$$

La deuxième égalité ci-dessus est due au théorème de la divergence, dit de "Green-Ostrogradsky", et le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente.

On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i = 0, \quad (2.2.2)$$

à une dimension, l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial j_i}{\partial x}.$$

Les équations de réaction-diffusion ont été proposées par Turing (1952) pour modéliser des phénomènes de morphogènes, c'est à dire le développement des formes.

Considérons un région borné Ω de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$) dans lequel des réactions se réalisent. Ω peut être des molécules ou une surface géographique qui forme les lieux des milliers de virus, d'épidémies ou même des rumeurs circulant entre les individus des populations. Ω peut être aussi une cellule vivante qui est le siège de plusieurs réactions chimiques.

Nous avons besoin du principe suivant :

La vitesse de formation de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans un volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface S . Soit alors J_i le flux de ces espèces à travers la frontière et soient $u_i(t, x)$ la concentration de la $i^{\text{ème}}$ espèce prenant part dans une réaction et $f_i((u_1, u_2, \dots, u_m), t, x)$ son taux de formation dans la réaction en question à l'instant $t > 0$ et au point x . Considérons alors un volume V infiniment petit de Ω de frontière $S = \partial V$. En terme d'équations, le principe précédant se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_i(x, t) dx = \int_V f_i(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t)) dx - \int_S J_i d\sigma, \quad (2.2.3)$$

après application directe du théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_S J_i d\sigma = \int_V \nabla \cdot J_i dx, i = 1, \dots, n \quad (2.2.4)$$

ceci implique

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i - f_i \right) dx = 0, i = 1, \dots, n. \quad (2.2.5)$$

Puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, le théorème de l'intégrale nulle nous assure

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i - f_i = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, \dots, n. \quad (2.2.6)$$

Le phénomène de la diffusion est régi par la loi de Fick, D'après cette loi (seconde loi de Fick), J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et donné par :

$$J_i = - \sum_{j=1}^m a_{ij} \nabla u_j, i = 1, \dots, n. \quad (2.2.7)$$

où les a_{ij} sont les coefficients d'auto-diffusion, $A = (a_{ij})_{1 < i, j < n}$ est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion.

De ce qui précède, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \Delta u = f(u), \quad (2.2.8)$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ avec $d_i > 0, \forall i = 1, \dots, m$. (le cas où l'écoulement de la matière se fait des milieux les plus concentrés vers les moins concentrés).

D'où on retrouve finalement le système

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D \Delta v = g(v), \quad v = v(x, t), \quad x \in \Omega, t \geq 0. \quad (2.2.9)$$

Remarque 2.2.1. *Le système de réaction-diffusion s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords.*

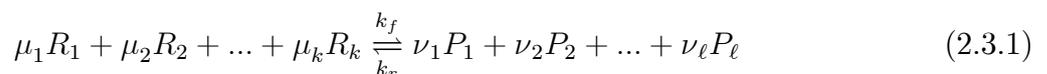
Remarque 2.2.2. *Remarquant que, pour établir (2.2.8), on a simplifié plusieurs termes, si non on aboutirait à des équations très compliquées et difficiles à étudier.*

2.3 Quelques exemples

Exemple. En chimie

Peut-être la plus grande source de problèmes intéressants dans ce domaine est la modélisation des réactions chimiques multispécifiques.

Nous considérons un mécanisme général de réaction de la forme :



Ici, les R_i et P_i représentent les réactifs et les espèces produits respectivement, et $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i . Maintenant, si nous mettons $u_i = [R_i]$ et $v_i = [P_i]$ et laissons $k_f; k_r$ nous faire (l'entier non négatif) avant et arrière des taux de réaction, respectivement, alors nous pouvons modéliser le processus par l'application de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Fick (débit) par le système de Réaction-Diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_i \nabla u_i) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} - k_f \prod_{j=1}^k u_j^{\mu_j} \right), & i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_{k+i} \nabla v_i) = \nu_i \left(k_f \prod_{j=1}^k u_j^{\mu_j} - k_r \prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} \right), & i = 1, \dots, \ell \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$.

Remarque 2.3.1. La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u , comme il peut ne pas être diagonale (c'est le cas lorsque la diffusion d'une espèce affecte le rythme de production des autres).

Par exemple, considérons la réaction réversible suivante apparemment simple, dont laquelle le dioxyde de soufre réagit avec l'oxygène pour former le tri-oxyde de soufre :



Si nous nous fixons $u = [SO_2], v = [O_2]$, et $w = [SO_3]$, puis cette réaction, dans l'hypothèse d'une action massive cinétique, peut être modélisée par le système de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = 2(k_r w^2 - k_f u^2 v) \quad (2.3.4)$$

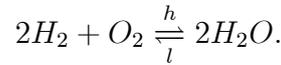
$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = k_r w^2 - k_f u^2 v \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_3 \Delta w = 2(k_f u^2 v - k_r w^2) \quad (2.3.6)$$

Avec conditions initiales non négatives L^∞ et conditions aux bords homogènes de Neumann. Ici, les d_i sont les coefficients positifs de diffusion et k_f, k_r sont respectivement les coefficients positifs avant et arrière de réaction et nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière suffisamment régulière (voir Hollis et Morgan [20]).

Pour la réaction de l'eau, par exemple, on prend dans (2.3.1)

$p = 3, I = \{1, 2\}, J = \{3\}, n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1, R_1 = \text{hydrogène } (H_2), R_2 = \text{oxygène } (O_2)$ et $R_3 = \text{l'eau } (H_2O)$, on obtient la réaction classique



Les équations décrivant cette réaction s'écrivent alors d'après (2.3.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [H_2] = 2(-h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2) \\ \frac{\partial [O_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [O_2] = -h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2, \\ \frac{\partial [H_2O]}{\partial t} - d_3 \Delta [H_2O] = 2(h [H_2]^2 [O_2] - l [H_2O]^2), \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0,$$

avec les conditions aux bords appropriées, par exemple

$$\frac{\partial [H_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [O_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [H_2O]}{\partial \eta} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0$$

et les conditions initiales positives, i.e.

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0, [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0, [H_2O]_{t=0} = [H_2O]_0 > 0.$$

Les coefficients h et l sont supposés des constantes positives, quoi qu'ils peuvent dépendre de la température :

$$h, l \approx cT^\beta \exp\left(\frac{E}{R}T\right), 1 \leq \beta \leq 2,$$

(voir Hollis [17] et Morgan [35]) avec différentes conditions aux bords.

Exemple. Physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(av - b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + cv \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty), \quad (2.3.7)$$

avec conditions aux bords homogènes de Neumann et conditions initiales positives. On montre que (voir Pao [37]), pour $a > 0, b \geq 0$ et $c > 0$, la solution du système (2.3.7) avec conditions

aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister).

Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \sigma u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} + \sigma v \end{cases} \quad \text{sur : } (0, 1) \times (0, +\infty), \quad (2.3.8)$$

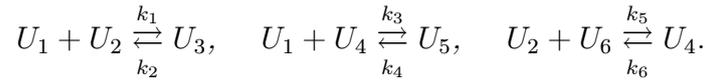
avec les conditions aux bords et conditions initiales positives

$$\begin{cases} u_x(0, t) = ag_1(v(0, t)), \quad u_x(1, t) = 0 \\ v_x(1, t) = ag_2(u(1, t)), \quad v_x(0, t) = 0 \end{cases}, t > 0. \quad (2.3.9)$$

Ce modèle a été étudié par (Pao [37]), (Thomas & Aronson [43]) et (Turner & Ames [44]).

Exemple. Biochimie

On a les réactions biochimiques suivantes :



La modélisation donne le système de réaction-diffusion comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 &= -k_1 u_1 u_2 - k_3 u_1 u_4 + k_2 u_3 + k_4 u_5, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 &= -k_1 u_1 u_2 + k_2 u_3 - k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3 \Delta u_3 &= -k_1 u_1 u_2 - k_2 u_3 + k_5 u_2 u_6 - k_6 u_4, \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} - d_4 \Delta u_4 &= -k_3 u_1 u_4 + k_4 u_5 + k_5 u_2 u_6 - k_6 u_4, \\ \frac{\partial u_5}{\partial t} - d_5 \Delta u_5 &= k_3 u_1 u_4 - k_4 u_5 - k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4, \\ \frac{\partial u_6}{\partial t} - d_6 \Delta u_6 &= -k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Dans le cas spécial $k_5 = k_6 = 0$, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 peuvent représenter l'Hémoglobine Hb, O_2 ; HbO₂; CO₂ et HbCO₂, Hollis [17] établit l'existence globale pourvu que :

(i) u_3 satisfait le même type des conditions aux bords comme l'un ou l'autre u_1 ou u_2 ,

et

(ii) u_5 satisfait le même type de conditions aux bords comme u_1 ou u_4 .

2.4 Existence des solutions

2.4.1 Existence locale et caractérisation du temps maximal

Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière, Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u, v) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (2.4.2)$$

$$\lambda_1 u + (1 - \lambda_1) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta_1 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_2 v + (1 - \lambda_2) \frac{\partial v}{\partial \nu} = \beta_2 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées

(H1) $a, b, \lambda_i, \beta_i, i = 1, 2$ sont des constantes avec $a, b > 0, \beta_i \geq 0$ et soit $0 < \lambda_i < 1, \lambda_i = 0$ où $\lambda_i = 1$. Aussi $\beta_i = 0$ si $\lambda_i = 0$.

(H2) f et g sont deux fonctions continûment différentiables de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 avec $f(0, \eta), g(\xi, 0) \geq 0$ pour tout $\xi, \eta \geq 0$.

(H3) $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega))^2$ avec $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 2.4.1. *Sous les hypothèses (H1) – (H3), le système (2.4.1)-(??) admet une unique solution locale et classique (u, v) sur $\Omega \times [0, T_{\max})$, et il existe deux fonctions*

$N_1, N_2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continue telles que

$$0 \leq u(x, t) \leq N_1(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq v(x, t) \leq N_2(t) \quad \text{pour tout } \Omega \times (x, t) \in [0, T_{\max})$$

De plus le temps maximal d'existence T_{\max} est caractérisé par :

$$\text{si } T_{\max} < \infty \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|u(\cdot, t)\|_\infty + \|v(\cdot, t)\|_\infty) = \infty \quad (2.4.3)$$

où T_{\max} est le temps maximal d'existence des solution.

Démonstration. (Voir Hollis, Martin et Pierre [18]). □

Remarque 2.4.1. Pour étudier l'existence globale de la solution du système (2.4.1)-(??), c'est-à-dire déterminer si $T_{\max} = +\infty$, nous utilisons la contraposée de la caractérisation (2.4.3) du temps maximal d'existence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s'il existe une fonction } M : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ continue} \\ \text{telle que } \|u(\cdot, t)\|_{\infty} + \|v(\cdot, t)\|_{\infty} \leq M(t), t \in [0, T_{\max}) \\ \text{alors } T_{\max} = \infty \end{array} \right. \quad (2.4.4)$$

c'est-à-dire, si les fonction $u(t)$ et $v(t)$ sont bornées pour tout $t \in [0, T]$, $T < T_{\max}$, alors $T_{\max} = +\infty$.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montre que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

2.4.2 Positivité des solutions

Théorème 2.4.2. Une fonction $F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite quasi-positve si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $f_i(v) \geq 0$ si $v_i = 0$ pour tout $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^m$.

Proposition 2.4.1. Si $F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est quasi-positve, la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (S1)$$

est non négative.

Démonstration. On pose $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \min(u, 0)$, et on désigne par $(S)^+$ le système $(S1)$ où on a remplacé $f(u)$ par $f(u^+)$.

On travaille sur la $i^{\text{ème}}$ équation du système, qu'on intègre sur $]0, t[\times \Omega$ après l'avoir multiplié par u_i^- .

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_i^- \frac{\partial u_i}{\partial t} dxdt - \int_0^t \int_{\Omega} d_i u_i^- \Delta u_i dxdt = \int_0^t \int_{\Omega} u_i^- f_i(u^+) dxdt,$$

en utilisant le fait que $(u_i)_t = -(-u_i^-)_t$ et que $\Delta u_i = -\Delta u_i^-$ si $u_i^- > 0$ et par intégration par

parties, on obtient :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_i^-)^2 dx - d_i \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_i^-|^2 dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} u_i^- f_i(u^+) dx dt,$$

comme f_i est quasi-positive, on a

$$\begin{cases} u_i^- f_i(u^+) = 0 & \text{si } u \geq 0, \\ \text{et} \\ u_i^- f_i(u^+) = 0 & \text{si } u \leq 0, \end{cases}$$

ainsi

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_i^-)^2 dx - d_i \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_i^-|^2 dx dt \geq 0,$$

par conséquent : $u_i^- = 0$ et $u = u_i^+$ qui est solution de (S1). Il s'en suit, par unicité de la solution, que toutes ses composantes sont non négatives. \square

2.4.3 Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 2.4.1. *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de m équations, toute fonction*

$$\mathbf{L}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \tag{2.4.5}$$

telle que

$$\frac{dL(u(t, \cdot))}{dt} \leq 0 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout solution } u(t, \cdot) = (u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)).$$

Nous pouvons utiliser seulement une fonctionnelle bornée pour démontrer l'existence globale de solutions.

Utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov

D'après D. Henry [16] il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|f(u)\|_p$ sur $[0, T^*[$ pour prouver l'existence globale des solutions.

2.4.4 Régions invariantes

Définition 2.4.2. Un sous-ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ est appelé une région invariante pour le système défini par (S1), si toute solution $u(x, t)$ ayant ses valeurs initiales et aux limites dans Σ , reste dans Σ pour toute $x \in \Omega$ et pour toute $t \in [0, t^*)$ où $t^* < T_{\max}$.

Théorème 2.4.3. On suppose que Σ est une région de \mathbb{R}^m définie par :

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^k \{u : G_i(u) \leq 0\},$$

où les G_i désignent des fonctions définies sur \mathbb{R}^m à valeurs dans \mathbb{R} , deux fois continûment dérivables telles que le gradient ∇G_i ne s'annule pas. Alors on a les propriétés suivantes :

(i) On suppose que pour tout $v \in \partial\Sigma$, $\nabla G_i(v)$ est vecteur propre de la matrice D et que si la valeur propre correspondante n'est pas nulle, la fonction $\Delta G_i(v)$ est positive. On suppose d'autre part que

$$\nabla G_i(v) \cdot F(v) < 0, \text{ pour tout } v \in \partial\Sigma. \quad (2.4.6)$$

Alors Σ est une région invariante pour le système (S1).

(ii) Inversement si Σ est une région invariante pour le système (S1), alors pour tout $v \in \partial\Sigma$, $\nabla G_i(v)$ est vecteur propre de la matrice D , la fonction $\Delta G_i(v)$ est positive dès que la valeur propre correspondante à $G_i(v)$ n'est pas nulle et on a

$$\nabla G_i(v) \cdot F(v) \leq 0.$$

Démonstration. Voir Smoller [41] □

Remarque 2.4.2. Le théorème ci-dessus donne des conditions presque nécessaire et suffisantes (remplacer $<$ par \leq) et il indique que lorsque D est diagonale, les seules régions invariantes sont les rectangles.

Corollaire 2.4.1. On suppose que la matrice D est diagonale. Alors, toute région de la forme :

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{u : a_i \leq u_i \leq b_i\},$$

est invariante dès que la fonction F pointe à l'intérieur de Σ sur $\partial\Sigma$, i.e., dès que la fonction F satisfait la condition (2.4.6.)

Corollaire 2.4.2. *On suppose que la matrice D est diagonale. Alors, toute région de la forme :*

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{u : u_i \geq 0\},$$

est invariante dès que la fonction F satisfait

$$\{f_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m) \geq 0, \text{ pour tout } u_j \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, m \ (i \neq j).\}$$

Lemme 2.4.1. *(voir Smoller [41]) Considérons le système (S1) avec conditions initiales $u_0 \in BC_0$, si le système admet une région invariante bornée Σ et $u_0(x) \in \Sigma$ pour toute $x \in \mathbb{R}$. Alors la solution existe pour toute $t > 0$.*

2.4.5 Existence globale

On considère principalement des problèmes paraboliques semi-linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.4.7)$$

où f est une fonction de classe C^1 avec une croissance superlinéaire.

Proposition 2.4.2. *Soit X un espace de Banach des fonctions définies dans Ω . On suppose que le problème (2.4.7) possède pour tout $u_0 \in X$ une solution unique u dans l'intervalle $[0, T]$, où $T = T(u_0)$.*

Alors il existe $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, \infty]$ avec les propriétés suivantes :

- i)** *La solution u est continue dans l'intervalle $[0, T_{\max})$.*
- ii)** *Si $T_{\max} < \infty$, alors u ne peut être continue dans $[0, \tau)$ pour tout $\tau < T_{\max}$. On appelle u la solution maximale et T_{\max} est son temps maximal d'existence.*
- iii)** *D'autre côté on considère que $T = T(\|u_0\|_X)$. Alors l'un des deux :*

(a) $T_{\max} = \infty$,

ou

(b) $T_{\max} < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$ est satisfait.

Démonstration. Soit $u_0 \in X$ est fixé. Si u_1 et u_2 sont des solutions de (2.4.7) dans $[0, T_1)$ et $[0, T_2)$ respectivement, alors $u_1 = u_2$ dans $[0, \min(T_1, T_2))$ due à l'unicité. Soit $\{u_\alpha : [0, T_\alpha) \rightarrow X\}$ l'ensemble de toutes les solutions de (2.4.7) et $\tilde{T} = \sup T_\alpha$. On définit $u : [0, \tilde{T}) \rightarrow X$ par $u(t) = u_\alpha(t)$, où α un indice tel que $T_\alpha > t$. Alors u est évidemment une solution de (2.4.7) dans $[0, \tilde{T})$, et les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.

Sous l'hypothèse dans la propriété (iii), on suppose que :

$$\tilde{T} < \infty \text{ et } \liminf_{t \rightarrow \tilde{T}} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Choisissons $C > 0$ et $t_k \rightarrow \tilde{T}$ tel que $\|u(t_k)\|_X < C$ pour tout $k = 1, 2, \dots$. A cause de notre hypothèse il existe $T > 0$ indépendant de k tel que le problème (2.4.7) avec les conditions initiales $u(t_k)$ possède une solution unique $u_k : [0, T] \rightarrow X$, $k = 1, 2, \dots$. Par l'unicité, $u_k(t) = u(t + t_k)$ pour tout t petit. Fixons k tel que $t_k \in (\tilde{T} - T, \tilde{T})$ et mettons

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_k] \\ u(t - t_k), & t \in [t_k, t_k + T]. \end{cases}$$

Alors \tilde{u} est une solution de (2.4.7) dans $[0, t_k + T]$ et $t_k + T > \tilde{T}$ dont on a une contradiction avec la définition de \tilde{T} . □

Remarque 2.4.3. On note que (2.4.7) possède une solution globale si $T_{\max} = \infty$. La proposition (2.4.2) nous fournit un simple critère pour l'existence globale.

Si $\|u(t)\|_X$ reste borné, alors $T_{\max} = \infty$. Puisque les hypothèses de la proposition (2.4.2) sont satisfaites avec $X = L^\infty(\Omega)$ si $f \in C^1$, on remarque que la solution est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et suffisante pour son existence globale. Notons que la même déclaration est juste pour plusieurs autres classes générales d'équations et systèmes.

Si la propriété (a) est satisfaite, on dit que la solution u est globale. Si la propriété (b) est satisfaite, on dit que u explose en temps fini. L'alternative (a)-(b) signifie en d'autres termes que l'existence globale de la solution u est équivalente à l'existence d'une estimation à-priori de $\|u(t)\|$ sur $[0, T_{\max}[$.

On peut appliquer la proposition sur l'exemple suivant :

Exemple. *Considérons le problème bien posé*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{p-1} u, & t > 0, x \in \Omega \\ u = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

avec $p = 1 + \frac{4}{n}$ soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et on suppose $T = T_{\max}(u_0) < \infty$. alors

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq C(n, p) |\log(T-t)|^{\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow T.$$

Maintenant nous revenons à l'étude de l'existence globale.

Théorème 2.4.4. (*Existence Globale par effet régularisant*) : Soit l'équation (2.1.1), si

$$f(t, x, u) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega)) \text{ pour } p > \frac{n}{2}, \text{ où } n = \dim \Omega,$$

(i.e)

$$\begin{aligned} f(t, x, u) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega)) &\Leftrightarrow \sup_{0 < t < T^*} \|f(t, x, u)\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0, \int_{\Omega} |f(t, x, u)|^p dx \leq C, \quad \forall t \in [0, T[, \end{aligned}$$

alors la solution de l'équation est globale (voir Henry [16]).

Théorème 2.4.5. Il existe un $T_{\max} \in (0, \infty]$ tel que (2.1.1) possède une solution unique dans $[0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$, en outre si $T_{\max} < \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u\|_{\infty, \Omega} = \infty$.

Démonstration. (Voir Ryan [40] page (40)), ce théorème semble à être bien connu (Henry [16]), mais il est intouvable dans la littérature sous la forme énoncée ici et étudié dans le livre de Rothe ([39] avec démonstration pages (111) – (118)). □

Chapitre 3

Existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion diagonale

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence globale d'une solution moyennant d'une unique inégalité sur les termes de réaction à croissance polynômiale. Notre technique est basée sur la construction d'une fonctionnelle polynômiale. Ce résultat généralise ce qui est obtenu par Kouachi, Abdelmalek et Rebiai [29], Kouachi ([25], [24]) et indépendamment par Malham et Xin [32].

Soit le système (voir [4]) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \Delta u_i = f_i(U) \text{ dans } \Omega \times \{t > 0\}, \quad (3.1.1)$$

avec les conditions aux bords

$$\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i) \partial_\eta u_i = \beta_i \text{ sur } \partial\Omega \times \{t > 0\}, \quad (3.1.2)$$

et les conditions initiales, pour tout $i = 1, \dots, m$

$$u_i(0, x) = u_i^0(x) \text{ sur } \Omega. \quad (3.1.3)$$

Avec les conditions aux bords :

(i) Pour les conditions aux bords nonhomogènes de Robin, on utilise

$$0 < \lambda_i < 1, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

(ii) Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, on utilise

$$\lambda_i = \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

(iii) Pour les conditions aux bords homogènes de Dirichlet, on utilise

$$1 - \lambda_i = \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

(iv) Pour les conditions mêlées : conditions homogènes de Dirichlet et conditions nonhomogènes de Robin, on utilise

$$\exists i = 1, \dots, m \text{ tel que } 1 - \lambda_i = \beta_i = 0, \text{ et } 0 < \lambda_j < 1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, m \text{ avec } i \neq j$$

Où $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ et $(a_i)_{i=1}^m$ sont des constantes positives, et pour $i = 1, \dots, m$: $0 < \lambda_i < 1$, $\beta_i \geq 0$, sont dans $C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

Les conditions initiales sont supposées non négatives.

On suppose que :

(A1) Les fonctions f_i sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_m^+ pour tout $i = 1, \dots, m$, elles satisfont $f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m) \geq 0$, pour tout $u_i \geq 0$; $i = 1, \dots, m$.

(A2) On suppose que les fonctions f_i sont à croissance polynômiale (voir Hollis et Morgan [20]) i.e., pour tout et pour un entier tel que

$$|f_i(U)| \leq C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^m u_i \right)^N \quad \text{sur } (0, +\infty)^m, i = 1, \dots, m, N \geq 1 \quad (3.1.4)$$

(A3)

$$\sum_{i=1}^{m-1} D_i f_i(U) + f_m(U) \leq C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^m u_i \right), \quad (3.1.5)$$

pour tout $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, et toutes les constantes $D_i \geq \overline{D}_i$, $i = 1, \dots, m$, où \overline{D}_i , $i = 1, \dots, m$, sont des constantes positives suffisamment larges, où C_1 et C_2 sont des fonctions positives et uniformément bornées et définies sur \mathbb{R}_m^+ .

Posons, pour tout $i, j = 1, \dots, m$.

$$A_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2\sqrt{a_i a_j}}$$

Soient $\theta_i; i = 1, \dots, m - 1$ des constantes positives telles que

$$K_l^l > 0; \quad l = 2, \dots, m, \quad (3.1.6)$$

où

$$\begin{aligned} K_l^r &= K_{r-1}^{r-1} \cdot K_l^{r-1} - [H_l^{r-1}]^2, \quad r = 3, \dots, l, \\ H_l^r &= \det_{1 \leq i, j \leq l} \left((a_{i,j})_{\substack{i \neq l, \dots, r+1 \\ j \neq l-1, \dots, r}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det k)^{2(r-k-2)}, \quad r = 3, \dots, l-1, \\ K_l^2 &= \underbrace{a_1 a_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)^2} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2 \right] \end{aligned}$$

et

$$H_l^2 = \underbrace{a_1 \sqrt{a_2 a_l} \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2 + (p_k+1)^2} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot [\theta_1^2 A_{2l} - A_{12} A_{1l}],$$

l'expression $\det_{1 \leq i, j \leq l} \left((a_{i,j})_{\substack{i \neq l, \dots, r+1 \\ j \neq l-1, \dots, r}} \right)$ dénote le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r

obtenue à partir de $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$ en supprimant les $(r+1), (r+2), \dots, l$ lignes et les $r, (r+1), \dots, (l-1)$ colonnes.

Les éléments de la matrice sont :

$$a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} \dots \theta_{j-1}^{(p_{(j-1)+1})^2} \theta_j^{(p_j+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)+2})^2}, \quad (3.1.7)$$

Remarque 3.1.1. *L'hypothèse (A1) implique les conditions de la régularité et la quasi-positivité qui assurent l'existence locale des solutions et la non-négativité des solutions aussi longues qu'elles existent via le principe de maximum (voir Smoller [41]). L'hypothèse (A3) implique la croissance polynômiale usuelle qui est une condition nécessaire pour obtenir une forme dépendant de P et uniformément bornée par les estimations de L^p (voir Hollis et Morgan [21]).*

3.2 Quelques résultats précédents

Dans le cas de deux composantes où $f_1(u_1, u_2) = -f_2(u_1, u_2) = -u_1 u_2^\beta$, Alikakos [6] a établi l'existence globale de la solution et sa bornitude dans L^∞ où $1 \leq \beta \leq \frac{n+2}{n}$. Masuda [34] a montré que les solutions de ce système existent globalement pour chaque $\beta \geq 1$. Haraux et Youkana [15] ont simplifié la démonstration de Masuda [34] en utilisant des techniques basées sur les fonctionnelles de Lyapunov avec le second membre non-linéaire

$f_1(u_1, u_2) = -f_2(u_1, u_2) = -u_1 F(u_2)$ satisfont la condition

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(1 + F(s))}{s} \right] = 0,$$

i.e., $F(s)$ est à croissance exponentielle. Kouachi et Youkana [30] généralisent les résultats de Haraux et Youkana [15]; ils ajoutent $-c\Delta u_1$ au membre droit de la seconde équation du système avec le terme de réaction $f_1(u_1, u_2) = -\lambda f(u_1, u_2)$ et $f_2(u_1, u_2) = +\mu f(u_1, u_2)$ en posant

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(1 + f(r + s))}{s} \right] < \alpha^* \quad \text{pour } r > 0$$

avec

$$\alpha^* = \frac{2a_1 a_2}{n(a_1 - a_2)^2 \|u_1^0\|_\infty} \min \left\{ \frac{\lambda}{\mu}, \frac{(a_1 - a_2)}{c} \right\},$$

où les coefficients de diffusion a_1, a_2 satisfont $a_1 > a_2$ et c, λ, μ sont des constantes positives.

Cette condition reflète la faiblesse de la croissance exponentielle de la réaction f .

Dans [18] Hollis, Martin, et Pierre établissent l'existence globale des solutions positives pour un système avec les conditions aux bords

$$\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i) \partial_\eta u_i = \beta_i \quad \text{sur } \partial\Omega \times \{t > 0\},$$

$i = 1, 2$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ et $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Aussi $\beta_1 = \beta_2 = 0$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Encore les termes de réaction sont des fonctions continûment différentiables et satisfont les conditions suivantes :

Pour chaque $r > 0$ il existe des nombres $L_0(r)$ et $\mu_0(r)$ tels que

$$\begin{cases} \gamma \geq 1, |f_2(u_1, u_2)| \leq L_0(r) (1 + u_2)^\gamma \\ f_1(u_1, u_2) + f_2(u_1, u_2) \leq \mu_0(r) \end{cases}$$

avec $r \leq u_2$. ($L_0(r)$ et $\mu_0(r)$ sont indépendants de $t > 0$).

De plus la solution est uniformément bornée en t .

Mais sous les conditions des termes de réaction dont on utilise dans l'étude de m -composantes, S. Kouachi a étudié deux-composantes (voir Kouachi [24]), et indépendamment par Malham et Xin [32], trois composantes (voir Kouachi [25]), mais il n'a pas réussi de généraliser le cas m -composantes. Après Kouachi, Abdelmalek et Rebiai (voir [29]) ont étudié quatre-composantes, l'algorithme modifié de Dodgson avec démonstration (voir Kouachi, Abdelmalek et Rebiai [28]), ils ont réussi à étudier cinq composantes et de déduire m -composantes.

Beaucoup d'auteurs s'intéressent au système de m -composantes. Voir [[6], [19], [21], [17], [35], [36], [20], [11], [10]].

Morgan [35] généralise les résultats de Hollis, Martin et Pierre (appliqué premièrement au système de réaction diffusion de deux composantes [18]) pour établir l'existence globale des solutions des systèmes de m -composantes ($m \geq 2$) avec les conditions aux bords (3.1.2), où

$$0 < \lambda_i < 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2.1)$$

ou

$$\lambda_i = \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2.2)$$

où les termes de réaction sont polynômialement bornés et satisfont les conditions suivantes :

$$\sum_{j=1}^k \alpha_{kj} f_j(U) \leq C_3(1 + \sum_{i=1}^m u_i), \quad \text{pour} \quad U \in \mathbb{R}_+^m, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.2.3)$$

où α_{kj} sont des réels positifs, C_3 est une constante indépendante de U .

$|f_i(\cdot, \cdot, U)| \quad i = 1, \dots, m$ est majoré par des polynômes en u_1, u_2, \dots, u_m .

Sous les mêmes conditions, Martin et Pierre [33] et Hollis [17] ont généralisé les résultats, aux conditions aux bords (3.1.2) où dans (3.2.1) ils prennent

$$0 < \lambda_i < 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Mais ils ont imposé des conditions de la forme (3.2.3); en même temps, aux termes de réaction dont les composantes correspondantes de la solution satisfont des conditions aux bords de Neumann et aux autres qui satisfont des conditions aux bords de Dirichlet.

3.3 Existence locale et globale

Les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $C(\overline{\Omega})$ sont notées respectivement par :

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx, \\ \|u\|_\infty &= \max_{x \in \Omega} |u(x)|, \\ \|u\|_{C(\overline{\Omega})} &= \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.\end{aligned}$$

Il est connu que pour prouver l'existence globale des solutions de (3.1.1) – (3.1.3) (voir Henry [16], page 35 – 62), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|f_i(u_1, u_2, \dots, u_m)\|_p$, $i = 1, \dots, m$ sur $[0, T_{max}[$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$. Notre but est de construire une fonctionnelle de Lyapunov polynômiale qui nous permet d'obtenir la bornitude des u_i dans L^p et son existence globale pour tout $i = 1, \dots, m$. Puisque les fonctions f_i sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m pour tout $i = 1, \dots, m$, alors pour toute condition initiale dans $C(\overline{\Omega})$, il est facile de vérifier directement leur continuité Lipschitzienne sur un sous-ensemble borné du domaine de la puissance fractionnelle de l'opérateur

$$O = - \begin{pmatrix} a_1 \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \Delta \end{pmatrix}$$

Sous ses hypothèses, l'existence locale du résultat est classique (voir Friedman [12] et Pazy [38]).

Proposition 3.3.1. *Le système (3.1.1)–(3.1.3) admet une solution classique unique (u_1, u_2, \dots, u_m) sur $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$. De plus*

$$\text{Si } T_{max} < \infty \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{max}} \sum_{i=1}^m \|u_i(\cdot, t)\|_\infty = \infty. \quad (3.3.1)$$

où $T_{max}(\|u_1^0\|_\infty, \|u_2^0\|_\infty, \dots, \|u_m^0\|_\infty)$ est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

Théorème 3.3.1. *Supposons que les fonctions f_i , $i = 1, \dots, m$ sont à croissance polynômiale et satisfont la condition (3.1.5) pour certaines constantes positives D_i , $i = 1, \dots, m$ suffisamment*

larges. Soit

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_m(x,t)) dx, \quad (3.3.2)$$

où

$$H_{p_m}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-p_{m-1}},$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_j}^{p_i} = \frac{p_j!}{p_i!(p_j-p_i)!}$. Où $(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot))$ des solutions de système (3.1.1) – (3.1.3).

Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{max}$.

Corollaire 3.3.1. Selon les hypothèses du théorème (3.3.1) toutes les solutions du système (3.1.1) – (3.1.3) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ pour un certain $p \geq 1$.

Proposition 3.3.2. Sous les hypothèses du théorème (3.3.1) et la condition (3.1.5) toutes les solutions du système (3.1.1) – (3.1.3) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont globales pour un certain $p > \frac{Nn}{2}$.

Démonstration

Pour la démonstration du théorème (3.3.1), on a besoin des Lemmes.

Lemme 3.3.1. Soit H_{p_m} le polynôme homogène défini par (3.3.2). Alors

$$\begin{aligned} \partial_{u_1} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(p_1+1)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} \dots u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

pour tout $i = 2, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \partial_{u_i} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{i-1}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} \dots u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{u_m} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_3}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} \dots u_m^{(p_{m-1})-p_{m-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Démonstration. (Voir Abdelmalek et Kouachi [4]) □

Lemme 3.3.2. *Les dérivées partielles secondes de H_{p_m} sont données par :*

$$\begin{aligned} \partial_{u_1^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_2=0}^{p_3} \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \\ &\quad \times \theta_1^{(p_1+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{(p_{m-2})-p_{m-1}} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

pour tout $i = 2, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \partial_{u_i^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \\ &\quad \times \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} \dots \theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{(p_{m-2})-p_{m-1}} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

pour tout $2 \leq i < j \leq m$

$$\begin{aligned} \partial_{u_i u_j} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \\ &\quad \times \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{i-1}^{p_{i-1}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} \dots \theta_{j-1}^{(p_{j-1}+1)^2} \theta_j^{(p_j+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{(p_{m-2})-p_{m-1}} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Enfin

$$\begin{aligned} \partial_{u_m^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{(p_{m-2})-p_{m-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Démonstration. (Voir Abdelmalek et Kouachi [4]) □

Lemme 3.3.3. Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ alors on a :

$$\begin{cases} K_m^m = \det [m] \cdot \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det k)^{2^{(m-k-2)}}, m > 2 \\ K_2^2 = \det 2 \end{cases} \quad (3.3.10)$$

où

$$\begin{aligned} K_m^l &= K_{l-1}^{l-1} \cdot K_m^{l-1} - (H_m^{l-1})^2, \quad l = 3, \dots, m, \\ H_m^l &= \det_{1 \leq i, j \leq m} \left((a_{i,j})_{\substack{i \neq m, \dots, l+1 \\ j \neq m-1, \dots, l}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2^{(l-k-2)}}, \quad l = 3, \dots, m-1, \\ K_m^2 &= a_{11}a_{mm} - (a_{1m})^2, \quad H_m^2 = a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}. \end{aligned}$$

Démonstration. (Voir Abdelmalek et Kouachi [4]) □

Démonstration du Théorème (3.3.1). Dérivons L par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_{\Omega} \partial_t H_{p_m} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} (a_i \Delta u_i + f_i) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \Delta u_i dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} f_i dx = I + J \end{aligned}$$

où

$$I = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \Delta u_i dx, \quad (3.3.11)$$

et

$$J = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} f_i dx. \quad (3.3.12)$$

Utilisons la formule de Green, on obtient $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \partial_{\eta} u_i ds \quad (3.3.13)$$

et

$$I_2 = - \int_{\Omega} \left[\left(\left(\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{u_j u_i} H_{p_m} \right)_{1 \leq i, j \leq m} \right) T \right] \cdot T dx, \quad (3.3.14)$$

pour $p_1 = 0, \dots, p_2, p_2 = 0, \dots, p_3 \dots p_{m-1} = 0, \dots, p_m - 2$ et $T = (\nabla u_1, \nabla u_2, \dots, \nabla u_m)^T$.

Appliquons les lemmes (3.3.1) et (3.3.2) on obtient :

$$\left(\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{u_j u_i} H_{p_m} \right)_{1 \leq i, j \leq m} = p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_m-1} \dots C_{p_2}^{p_1} \left((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \right) u_1^{p_1} \dots u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}} \quad (3.3.15)$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ est une matrice définie par la formule (3.1.7).

On démontre qu'il existe une constante positive C_4 indépendante de $t \in [0, T_{max})$ telle que

$$I_1 \leq C_4 \quad \text{pour tout } t \in [0, T_{max}), \quad (3.3.16)$$

et que

$$I_2 \leq 0, \quad (3.3.17)$$

pour certaines conditions aux bords :

(i) Si $i = 1, \dots, m : 0 < \lambda_i < 1$, utilisant la condition aux bords (3.1.2) on obtient :

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} (\gamma_i - \alpha_i u_i) ds,$$

où $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}$ et $\gamma_i = \frac{\beta_i}{1-\lambda_i}, i = 1, \dots, m$. Puisque

$$H(U) = \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} (\gamma_i - \alpha_i u_i) = P_{n-1}(U) - Q_n(U),$$

où P_{n-1} et Q_n sont des polynômes avec des coefficients positifs et de degré $n - 1$ et n respectivement et puisque la solution est positive, alors

$$\limsup_{\sum_{i=1}^m |u_i| \rightarrow +\infty} H(U) = -\infty, \quad (3.3.18)$$

ce qui prouve que H est uniformément borné sur \mathbb{R}_+^m et par conséquent (3.3.16).

(ii) Si $\forall i = 1, \dots, m : \lambda_i = 0$, alors $I_1 = 0$ sur $[0, T_{max})$

(iii) Le cas de la condition homogène de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas la positivité de la solution sur $\Omega \times [0, T_{max})$ implique $\partial_\eta u_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$ sur $\partial\Omega \times [0, T_{max})$. Par conséquent on obtient encore (3.3.16) avec $C_4 = 0$.

(iv) Si quelques conditions aux bords sont homogènes de Dirichlet et d'autres sont non-homogènes de Robin, par exemple $u_1 = 0$, $\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i) \partial_\eta u_i = \beta_i$, $i = 2, \dots, m$ sur $\partial\Omega \times [0, T_{max})$ avec $0 < \lambda_i < 1, \beta_i \geq 0, i = 2, \dots, m$.

Alors, suivant le même raisonnement on obtient :

$$\limsup_{\sum_{i=2}^m |u_i| \rightarrow +\infty} H(0, u_2, \dots, u_m) = -\infty, \quad (3.3.19)$$

et donc (3.3.16).

Maintenant on démontre (3.3.17).

$(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ est une matrice définie dans la formule (3.1.7). Les formes quadratiques (par rapport à ∇u_i , $i = 1, \dots, m$) associées aux matrices $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, $p_1 = 0, \dots, p_2, p_2 = 0, \dots, p_3 \dots p_{m-1} = 0, \dots, p_m - 2$, sont positives puisque leurs déterminants $\det 1, \det 2, \dots, \det m$ sont positifs :

$$(*) \det 1 = a_1 \theta_1^{(p_1+2)^2} \theta_2^{(p_2+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} > 0 \text{ pour } p_1 = 0, \dots, p_2, p_2 = 0, \dots, p_3 \dots p_{m-1} = 0, \dots, p_m - 2.$$

(**) Selon le lemme (3.3.3), on obtient :

$$\det 2 = K_2^2 = a_1 a_2 \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} [\theta_1^2 - A_{12}^2].$$

en utilisant (3.1.6) pour $l = 2$ on obtient $\det 2 > 0$.

(***) Encore selon le lemme (3.3.3), on a

$$K_3^3 = \det 3 \det 1,$$

mais $\det 1 > 0$ ainsi $\text{sign}(K_3^3) = \text{sign}(\det 3)$, en utilisant (3.1.6) pour $l = 3$ on obtient $\det 3 > 0$.

(****) on suppose que

$$\det k > 0, k = 1, \dots, (l-1) \Rightarrow \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2(l-k-2)} > 0. \quad (3.3.20)$$

à partir du lemme (3.3.3) $K_l^l = \det l \cdot \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2(l-k-2)}$, et à partir de (3.3.20), on obtient : $\text{sign}(K_l^l) = \text{sign}(\det l)$. mais $K_l^l > 0$, à partir de (3.1.6) ainsi $\det[l] > 0$. On obtient (3.3.17).

Maintenant on montre que J est bornée (3.3.12). Substituons l'expression des dérivées partielles donnée par le lemme (3.3.1) dans le second membre de l'intégrale (3.3.12), on obtient :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_m-1} \cdots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \cdots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
 &\times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2} f_j + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} f_m \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_m-1} \cdots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \cdots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
 &\times \left(\frac{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2}}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2}} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{\prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2}}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2}} f_j + f_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_m-1} \cdots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \cdots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
 &\times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{\theta_i^{(p_i+1)^2}}{\theta_i^{p_i^2}} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \prod_{i=j}^{m-1} \frac{\theta_i^{(p_i+1)^2}}{\theta_i^{p_i^2}} f_j + f_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} dx.
 \end{aligned}$$

Utilisons la condition (3.1.5) on déduit

$$J \leq C_5 \int_{\Omega} \left[\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \cdots C_{p_{m-1}}^{p_m-1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \cdots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^m u_i \right) \right] dx.$$

Pour démontrer que la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, on écrit

$$\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \cdots C_{p_{m-1}}^{p_m-1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \cdots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^m u_i \right) = R_{p_m}(U) + S_{p_m-1}(U),$$

où $R_{p_m}(U)$ et $S_{p_m-1}(U)$ sont deux polynômes homogènes de degré p_m et p_m-1 , respectivement.

Pour commencer, puisque les polynômes H_{p_m} et R_{p_m} sont de degré p_m , il existe une constante positive C_6 telle que

$$\int_{\Omega} R_{p_m}(U) dx \leq C_6 \int_{\Omega} H_{p_m}(U) dx. \quad (3.3.21)$$

alors appliquons l'inégalité de Hölder à l'intégrale $\int_{\Omega} S_{p_m-1}(U) dx$, on obtient :

$$\int_{\Omega} S_{p_m-1}(U) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{p_m}} \left(\int_{\Omega} (S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}} dx \right)^{\frac{p_m-1}{p_m}}.$$

Puisque pour tout $u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \geq 0$ et $u_m > 0$

$$\frac{(S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(U)} = \frac{(S_{p_m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1)},$$

où $\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\} : x_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$ et

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \frac{(S_{p_m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1)} < +\infty,$$

on affirme qu'il existe une constante positive C_7 telle que

$$\frac{(S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(U)} \leq C_7, \text{ pour tout } u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \geq 0. \quad (3.3.22)$$

Donc, la fonctionnelle L satisfait l'inégalité différentielle

$$L'(t) \leq C_8 L(t) + C_9 L^{\frac{p_m-1}{p_m}}(t),$$

qui s'écrit

$$p_m Z' \leq C_8 Z + C_9. \quad (3.3.23)$$

où $Z = L^{\frac{1}{p_m}}$. Une intégration simple donne la bornétude uniforme de la fonctionnelle L sur l'intervalle $[0, T^*]$, ce qui termine la démonstration du théorème (3.3.1).

Démonstration du corollaire (3.3.1). La démonstration de ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème (3.3.1) et l'inégalité

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m u_i(x, t) \right)^p dx \leq C_{10} L(t) \text{ sur } [0, T^*].$$

Démonstration de la proposition (3.3.2). A partir du corollaire (3.3.1), il existe une constante positive C_{11} telle que

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m u_i(x, t) + 1 \right)^p dx \leq C_{11} \text{ sur } [0, T_{\max}). \quad (3.3.24)$$

De (3.1.4) on a $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$

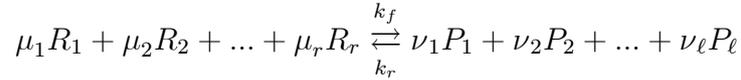
$$|f_i(U)|^{\frac{p}{N}} \leq C_{12}(U) \left(\sum_{i=1}^m u_i(x, t) \right)^p \text{ sur } \Omega \times [0, T_{\max}[. \quad (3.3.25)$$

Puisque u_1, u_2, \dots, u_m sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ et $\frac{p}{N} > \frac{n}{2}$; alors à partir des observations préliminaires la solution est globale.

3.4 Applications

Dans cette section nous appliquons le corollaire (3.3.1) et la proposition (3.3.2) au modèles chimiques.

Exemple. Une réaction chimique en général, s'écrit



ici les R_i et P_j représentent respectivement les réactants et les espèces produits, et μ_i, ν_i sont des constantes positives pour chaque i . Maintenant, si on note par $u_i = [R_i]$ et $v_j = [P_j]$ les concentrations respectives des R_i et P_j alors on peut modéliser le processus par l'application de la loi de conservation de masse et la seconde loi de Fick (flot) (voir Kouachi [23]) pour obtenir le système de réaction-diffusion (2.3.2) suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_i \nabla u_i) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} - k_f \prod_{j=1}^r u_j^{\mu_j} \right), & i = 1, \dots, r \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_{r+i} \nabla v_i) = \nu_i \left(k_f \prod_{j=1}^r u_j^{\mu_j} - k_r \prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} \right), & i = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

avec les conditions aux bords (3.1.2) et les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$. Le cas spécial quand $r = 2$ et $\ell = 1$, le cas spécial $\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = 1$ a été étudié par

Rothe (voir [39] pp (157)) sous les conditions aux bords homogènes de Neumann où il a montré que $T_{\max} = \infty$ si $n \leq 5$.

Morgan [35] a généralisé les résultats de Rothe pour tout entier $n \geq 1$ et quand toutes les composantes satisfont les mêmes conditions aux bords (Neumann ou Dirichlet).

Hollis [17] a complété le travail de Morgan et a établi l'existence globale si u_3 satisfait le même type des conditions aux bords comme u_1 ou u_2 . Mais si les conditions aux bords de différent type sont imposées sur u_1 et u_2 , l'existence globale se poursuit sans tenir compte de type de condition au bord qui est imposé sur u_3 . Récemment Kouachi a prouvé dans [26], l'existence globale des solutions avec les conditions aux bords (5.1.2) quand $\mu_1 + \mu_2 \leq 1$ ou $\nu_1 \leq 1$ et comme un achèvement de ce travail, S. Kouachi, S. Abdelmalek et B. Rebiai [29] ont prouvé l'existence globale du système quand $r = 2$ et $\ell = 2$, si $\mu_1 + \mu_2 \leq 1$ ou $\nu_1 + \nu_2 \leq 1$.

En appliquant les résultats obtenus à notre système, on obtient la proposition :

Proposition 3.4.1. *Les solutions de système (3.1.1) avec des conditions initiales non négatives uniformément bornées (3.1.3) et les conditions aux bords (3.1.2) non-homogènes sont positives et existent globalement pour toute constante positive μ_i $i = 1, \dots, r$ et $\nu_i = 1, \dots, \ell$ telle que $\min \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i, \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \right\} \leq 1$.*

Démonstration. On remarque que (3.1.4) pour ce système, est satisfaite pour toutes constantes positives μ_i $i = 1, \dots, r$ et ν_i $i = 1, \dots, \ell$, chaque fois que

$$N = \max \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i, \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \right\}$$

et la condition (3.1.5) est triviale si $\sum_{i=1}^r \mu_i \leq 1$ en choisissant $\sum_{i=r+1}^{r+\ell-1} D_i + 1 \gg \sum_{i=1}^r D_i$, et appliquant l'inégalité de Young au terme $\prod_{j=1}^r u_j^{\mu_j}$. Dans le cas où $\sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \leq 1$, elle est encore une application triviale de l'inégalité de Young au terme $\prod_{j=1}^r v_j^{\nu_j}$ et on choisit $\sum_{i=1}^r D_i \gg \sum_{i=r+1}^{r+\ell-1} D_i + 1$ (voir Kouachi [24]). Alors le corollaire (3.3.1) implique que toutes les composantes de la solution sont dans $L^\infty(0, T^*, L^n(\Omega))$ pour tout $n \geq 1$, alors $T_{\max} = +\infty$. \square

Chapitre 4

Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous construisons les régions invariantes pour les systèmes de réaction-diffusion à m -composante avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz avec des conditions aux bords non-homogènes et prouver l'existence globale de solutions utilisant la fonctionnelle de Lyapunov. Les termes de réaction non linéaires sont supposés être de croissances polynômiales. Ces résultats est un généralisation de [4].

Soit le système : (voir [3])

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a\Delta u_1 - b\Delta u_2 &= f_1(U), \\ \frac{\partial u_\ell}{\partial t} - b\Delta u_{\ell-1} - a\Delta u_\ell - b\Delta u_{\ell+1} &= f_\ell(U), \quad \ell = 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} - b\Delta u_{m-1} - a\Delta u_m &= f_m(U), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

avec les conditions aux bords

$$\alpha u_\ell + (1 - \alpha) \partial_\eta u_\ell = \beta_\ell, \quad \ell = 1, \dots, m \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times \{t > 0\}, \quad (4.1.2)$$

et les conditions initiales

$$u_\ell(x, 0) = u_\ell^0(x), \quad \ell = 1, \dots, m \quad \text{sur} \quad \Omega. \quad (4.1.3)$$

avec les trois types de conditions aux bords

(i) Pour les conditions aux bords non-homogènes de Robin, nous utilisons

$$0 < \alpha < 1, \quad \beta_\ell \in \mathbb{R}, \quad \ell = 1, \dots, m;$$

(ii) Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, nous utilisons

$$\alpha = \beta_\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, m;$$

(iii) Pour les conditions aux bord homogènes de Dirichlet, nous utilisons

$$1 - \alpha = \beta_\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, m.$$

Où $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, les constantes a, b sont strictement positives et satisfaire la condition :

$$2b \cos \frac{\pi}{m+1} < a. \quad (4.1.4)$$

Les données initiales sont supposées être dans les régions :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \left\{ (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L} \\ \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \leq 0, \quad z \in \mathfrak{Z} \end{array} \right. \right\}, \quad (4.1.5)$$

avec

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, & \ell \in \mathfrak{L}, \\ \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \leq 0, & z \in \mathfrak{Z}, \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Par conséquent, nous pouvons voir qu'il y a 2^m régions. Examinons maintenant la première région et commentenons ensuite les cas restants. La région choisie est le cas où $\mathfrak{L} = \{1, 2, \dots, m\}$ et $\mathfrak{Z} = \emptyset$, nous avons :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \emptyset} = \left\{ (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \ell \in \mathfrak{L} \right\} \quad (4.1.6)$$

avec

$$\sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}.$$

Pour étudier l'existence globale des solutions pour le système de réaction-diffusion (4.1.1) dans cette région, il faut diagonaliser la matrice de diffusion.

Tout d'abord, définissons les fonctions de réaction-diffusion comme suit :

$$F_\ell(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{k=1}^m f_k(U) \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1}, \quad (4.1.7)$$

où

$$w_\ell = \sum_{k=1}^m u_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1}. \quad (4.1.8)$$

Les fonctions F_ℓ doivent satisfaire les trois conditions

(A1) Les fonctions F_ℓ sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m et F est quasi-positive *i.e.*, pour tout $\ell = 1, \dots, m$,

$$F_\ell(w_1, \dots, w_{\ell-1}, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m) \geq 0,$$

pour tout $w_\ell \geq 0$; $\ell = 1, \dots, m$.

(A2) Les fonctions F_ℓ sont à croissance polynômiale (voir Hollis et Morgan [20]), *i.e.*, pour tout $\ell = 1, \dots, m$ et pour un entier $N \geq 1$,

$$|F_\ell(W)| \leq C_1 \left(1 + \sum_{\ell=1}^m w_\ell \right)^N \quad \text{sur } (0, +\infty)^m, \quad (4.1.9)$$

(A3) L'inégalité

$$\sum_{\ell=1}^{m-1} D_\ell F_\ell(W) + F_m(W) \leq C_2 \left(1 + \sum_{\ell=1}^m w_\ell \right), \quad (4.1.10)$$

pour tout $w_\ell \geq 0$, $\ell = 1, \dots, m$, et toutes les constantes $D_\ell \geq \bar{D}_\ell$, $\ell = 1, \dots, m$, où \bar{D}_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$, sont des constantes positives suffisamment larges, C_1 et C_2 sont des fonctions positives et uniformément bornées et définies sur \mathbb{R}_+^m .

Définissons

$$K_l^r = K_{r-1}^{r-1} \cdot K_l^{r-1} - [H_l^{r-1}]^2, \quad r = 3, \dots, l, \quad (4.1.11)$$

où

$$H_l^r = \det_{1 \leq \ell, \kappa \leq l} \left((a_{\ell, \kappa})_{\substack{\ell \neq l, \dots, r+1 \\ \kappa \neq l-1, \dots, r}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det k)^{2^{(r-k-2)}}, \quad r = 3, \dots, l-1,$$

$$K_l^2 = \underbrace{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)^2} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2 \right]$$

et

$$H_l^2 = \underbrace{\bar{\lambda}_1 \sqrt{\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_l} \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{l-1} \theta_k^{(p_k+2)^2 + (p_k+1)^2} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot [\theta_1^2 A_{2l} - A_{12} A_{1l}],$$

l'expression $\det_{1 \leq \ell, \kappa \leq l} \left((a_{\ell, \kappa})_{\substack{\ell \neq l, \dots, r+1 \\ \kappa \neq l-1, \dots, r}} \right)$ dénote le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r

obtenue à partir de $(a_{\ell, \kappa})_{1 \leq \ell, \kappa \leq m}$ en supprimant les $(r+1), (r+2), \dots, l$ lignes et les $r, (r+1), \dots, (l-1)$ colonnes.

Les éléments de la matrice sont :

$$a_{\ell\kappa} = \frac{\bar{\lambda}_\ell + \bar{\lambda}_\kappa}{2} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} \dots \theta_{j-1}^{(p_{(j-1)}+1)^2} \theta_j^{(p_j+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2}, \quad (4.1.12)$$

où $\bar{\lambda}_\ell$ est défini dans (4.2.2). Rappeler que, pour tout $\ell, \kappa = 1, \dots, m$.

$$A_{\ell\kappa} = \frac{\bar{\lambda}_\ell + \bar{\lambda}_\kappa}{2\sqrt{\bar{\lambda}_\ell \bar{\lambda}_\kappa}}$$

et $\theta_\ell; \ell = 1, \dots, m-1$ des constantes positives.

Remarque 4.1.1. *L'hypothèse (A1) implique les conditions de la régularité et la quasi-positivité qui assurent l'existence locale des solutions et la non-négativité des solutions tant qu'elles existent, via le principe de maximum (voir Smoller [41]). L'hypothèse (A3) implique la croissance polynômiale usuelle qui est une condition nécessaire pour obtenir une forme dépendant de P et uniformément bornée par les estimations de L^p (voir Hollis et Morgan [21]).*

4.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Lemme 4.2.1. *Considérant le système de réaction-diffusion (4.1.1), la matrice de diffusion ($m \times m$) résultante est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Cette matrice est dite définie positive si la condition (4.1.4) est satisfaite.

Démonstration. La démonstration de ce lemme peut être trouvée dans [22]. Rappelons que si la matrice est définie positive, il en résulte que $\det A > 0$. □

Lemme 4.2.2. *Les valeurs propres ($\lambda_\ell < \lambda_{\ell-1}$, $\ell = 2, \dots, m$) de la matrice A sont positives et sont donnés par :*

$$\lambda_\ell = a + 2b \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right), \quad (4.2.1)$$

avec les vecteurs propres correspondants

$$v_\ell = \left(\sin \frac{\ell\pi}{m+1}, \sin \frac{2\ell\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{m\ell\pi}{m+1} \right)^T,$$

pour $\ell = 1, \dots, m$. Par conséquent, nous concluons que A est diagonalisable. Pour la simplicité, nous écrivons

$$\bar{\lambda}_\ell = \lambda_{m+1-\ell} = a + 2b \cos\left(\frac{(m+1-\ell)\pi}{m+1}\right), \quad \ell = 1, \dots, m, \quad (4.2.2)$$

donc $\bar{\lambda}_\ell < \bar{\lambda}_{\ell+1}$, $\ell = 2, \dots, m$.

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

Démonstration. Rappeler que la matrice de diffusion est définie positive, donc ses valeurs propres sont nécessairement positives. Les composantes de $(A - \lambda I)X = 0$ sont :

$$bx_{k-1} + (a - \lambda)x_k + bx_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

avec $x_0 = x_{m+1} = 0$, équivalent

$$x_{k+2} + \left(\frac{a - \lambda}{b}\right)x_{k+1} + x_k = 0, \quad k = 0, \dots, m - 1.$$

Nous cherchons des solutions sous la forme $x_k = \xi r^k$ pour les constantes ξ et r . Cela conduit à l'équation quadratique

$$r^2 + \left(\frac{a - \lambda}{b}\right)r + 1 = 0,$$

avec les racines r_1 et r_2 . La solution générale de $x_{k+2} + \left(\frac{a-\lambda}{b}\right)x_{k+1} + x_k = 0$ est

$$x_k = \begin{cases} \alpha r_1^k + \beta r_2^k, & \text{si } r_1 \neq r_2, \\ \alpha \rho^k + \beta k \rho^k, & \text{si } r_1 = r_2 = \rho, \end{cases}$$

où α et β sont des constantes arbitraires.

Pour le problème de valeur propre, r_1 et r_2 sont distinct, autrement $x_k = \alpha \rho^k + \beta k \rho^k$, et $x_0 = x_{m+1} = 0$ implique que chaque $x_k = 0$, ce qui est impossible parce que X est un vecteur propre.

Par conséquent, $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$, et $x_0 = x_{m+1} = 0$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha r_1^{m+1} + \beta r_2^{m+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m+1} = \frac{-\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = e^{\frac{2i\pi\ell}{m+1}},$$

donc $r_1 = r_2 e^{\frac{2i\pi\ell}{m+1}}$ pour certains $1 \leq \ell \leq m$. Cela couplé avec

$$r^2 + \left(\frac{a - \lambda}{b}\right)r + 1 = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1 r_2 = 1, \\ r_1 + r_2 = -\left(\frac{a - \lambda}{b}\right), \end{cases}$$

alors $r_1 = e^{\frac{i\pi\ell}{m+1}}$, $r_2 = e^{-\frac{i\pi\ell}{m+1}}$, et

$$\lambda = a + b \left(e^{\frac{i\pi\ell}{m+1}} + e^{-\frac{i\pi\ell}{m+1}} \right) = a + 2b \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right).$$

Les valeurs propres de A sont données par :

$$\lambda_\ell = a + 2b \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right), \text{ pour } \ell = 1, \dots, m.$$

Puisque ces λ_ℓ sont tous distincts ($\cos \theta$ est une fonction strictement décroissante de θ sur $(0, \pi)$, et $b \neq 0$), A est nécessairement diagonalisable.

Enfin, le composant ℓ de tout vecteur propre associé à λ_ℓ satisfait $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$ avec $\alpha + \beta = 0$, ainsi

$$x_k = \alpha \left(e^{\frac{2i\pi k}{m+1}} - e^{-\frac{2i\pi k}{m+1}} \right) = 2i\alpha \sin \left(\frac{k}{m+1} \pi \right).$$

On pose $\alpha = \frac{1}{2i}$ on obtient un vecteur propre particulier associé à λ_ℓ donné par :

$$v_\ell = \left(\sin \left(\frac{1\ell\pi}{m+1} \right), \sin \left(\frac{2\ell\pi}{m+1} \right), \dots, \sin \left(\frac{m\ell\pi}{m+1} \right) \right)^T.$$

Parce que les λ_ℓ sont distincts, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sont linéairement indépendants, donc $(v_1 | v_2 | \dots | v_m)$ est la forme diagonale de A .

Maintenant, nous prouvons que

$$\lambda_\ell < \lambda_{\ell-1}, \quad \ell = 2, \dots, m.$$

Nous avons $\ell > \ell - 1$, alors

$$\frac{\ell\pi}{m+1} > \frac{(\ell-1)\pi}{m+1},$$

La fonction $(\cos \theta)$ est strictement décroissante dans θ sur $(0, \pi)$, alors

$$\cos \left(\frac{\ell\pi}{m+1} \right) < \cos \left(\frac{(\ell-1)\pi}{m+1} \right).$$

Enfin, en multipliant les deux côtés de l'inégalité par $2b$ et en ajoutant a on obtient

$$\lambda_\ell = a + 2b \cos \left(\frac{\ell\pi}{m+1} \right) < a + 2b \cos \left(\frac{(\ell-1)\pi}{m+1} \right) = \lambda_{\ell-1}.$$

□

4.3 Régions invariantes

Supposons que les hypothèses (A1) – (A3) sont satisfaites. Alors pour tout U_0 dans $\Sigma_{\mathcal{E},3}$ la solution classique U du problème (4.1.1)-(4.1.3) sur $\Omega \times [0, T_{max})$ reste dans $\Sigma_{\mathcal{E},3}$ pour tout t dans $[0, T_{max})$, où T_{max} est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

Proposition 4.3.1. *Les vecteurs propres de la matrice de diffusion associée aux valeurs propres $\bar{\lambda}_\ell$ sont définis comme $\bar{v}_\ell = (\bar{v}_{\ell 1}, \bar{v}_{\ell 2}, \dots, \bar{v}_{\ell m})^T$. Ils satisfont les équations :*

$$\frac{\partial w_\ell}{\partial t} - \bar{\lambda}_\ell \Delta w_\ell = F_\ell(w_1, w_2, \dots, w_m), \quad (4.3.1)$$

$$\alpha w_\ell + (1 - \alpha) \partial_\eta w_\ell = \rho_\ell \quad \text{sur } \partial\Omega \times \{t > 0\}, \quad (4.3.2)$$

où les termes de réaction F et w sont donnés dans (4.1.7) et (4.1.8) respectivement.

Rappeler que la condition (4.1.4) garantit la parabolicité du système (4.1.1) – (4.1.3), ce qui implique qu'il est équivalent à (4.3.1) – (4.3.2) dans la Région

$$\sum_{\mathfrak{L}, \emptyset} = \left\{ (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : w_\ell^0 = \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L} \right\}$$

avec

$$\rho_\ell^0 = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L}.$$

Cela implique que les composants w_ℓ sont nécessairement positives.

dans ce qui suit, nous présentons une généralisation de la région choisie (4.1.6).

Rappelons que les vecteurs propres de la matrice de diffusion associés à la valeur propre $\bar{\lambda}_\ell$ sont définis comme $\bar{v}_\ell = (\bar{v}_{\ell 1}, \bar{v}_{\ell 2}, \dots, \bar{v}_{\ell m})^T$. Il est important de noter que si \bar{v}_ℓ est un vecteur propre, il en est de même pour $(-1)\bar{v}_\ell$. Dans la région considérée précédentes, nous avons utilisé uniquement le positif \bar{v}_ℓ . Le reste des régions de 2^m peut être formé en utilisant des versions négatives des vecteurs propres. Dans chaque région, le système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion diagonalisée est formé en multipliant chacune des m -équations de (4.1.1) par l'élément correspondant de \bar{v}_ℓ ou de $(-1)\bar{v}_\ell$ puis en additionnant les m équations. Les équations multipliées par des éléments de \bar{v}_ℓ forment un ensemble \mathfrak{L} , alors que les équations multipliées par des éléments de $(-1)\bar{v}_\ell$ forment un ensemble \mathfrak{Z} . On peut donc définir les régions sous la forme

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \left\{ (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m : \left\{ \begin{array}{l} w_\ell^0 = \sum_{k=1}^m u_k^0 \bar{v}_{\ell k} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L} \\ w_z^0 = (-1) \sum_{k=1}^m u_k^0 \bar{v}_{zk} \geq 0, \quad z \in \mathfrak{Z} \end{array} \right. \right\}, \quad (4.3.3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\ell^0 = \sum_{k=1}^m \beta_k v_{(m+1-\ell)k} \geq 0, \quad \ell \in \mathfrak{L}, \\ \rho_z^0 = \sum_{k=1}^m \beta_k v_{(m+1-z)k} \leq 0, \quad z \in \mathfrak{Z}. \end{array} \right.$$

En utilisant le lemme (4.2.2) on obtient :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \left\{ (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m : \left\{ \begin{array}{ll} w_\ell^0 = \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, & \ell \in \mathfrak{L} \\ w_z^0 = (-1) \sum_{k=1}^m u_k^0 \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \geq 0, & z \in \mathfrak{Z} \end{array} \right. \right\}, \quad (4.3.4)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_\ell^0 = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-\ell)k\pi}{m+1} \geq 0, & \ell \in \mathfrak{L}, \\ \rho_z^0 = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin \frac{(m+1-z)k\pi}{m+1} \leq 0, & z \in \mathfrak{Z}. \end{array} \right.$$

où

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

4.4 Existence locale et globale

Il est bien connu que pour prouver l'existence globale de solutions à un système de réaction-diffusion (voir Henry [16], page 35 – 62), il suffit de trouver une estimation uniforme du terme de réaction associé sur $[0, T_{max})$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour certains $p > \frac{n}{2}$. Notre but est de construire des fonctionnelles polynomiales de Lyapunov permettant d'obtenir des limites de composants sur $L^p(\Omega)$, ce qui conduit à une existence globale. Puis que les termes de réaction sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m pour tout $i = 1, \dots, m$ alors pour toute condition initiale dans $C(\overline{\Omega})$, il est facile de vérifier directement leur continuité Lipschitzienne sur un sous-ensemble borné du domaine de la puissance fractionnelle de l'opérateur :

$$O = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \Delta \end{pmatrix}$$

Sous ses hypothèses, l'existence locale du résultat est classique (voir Friedman [12], Henry [16] Pazy [38]).

Proposition 4.4.1. *Le système (4.3.1)-(4.3.2) admet une solution classique unique (w_1, w_2, \dots, w_m)*

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

sur $[0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$. De plus

$$\text{Si } T_{\max} < \infty \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sum_{i=1}^m \|w_i(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty. \quad (4.4.1)$$

où $T_{\max}(\|w_1^0\|_{\infty}, \|w_2^0\|_{\infty}, \dots, \|w_m^0\|_{\infty})$ est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

Théorème 4.4.1. *Supposons que les fonctions $F_i, i = 1, \dots, m$ sont à croissance polynômiale et satisfont la condition (4.1.10) pour certaines constantes positives $D_i, i = 1, \dots, m$ suffisamment larges. Soit*

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_m(t, x)) dx, \quad (4.4.2)$$

où

$$H_{p_m}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} w_1^{p_1} w_2^{p_2 - p_1} \dots w_m^{p_m - p_{m-1}},$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_k}^{p_\ell} = \frac{p_k!}{p_\ell!(p_k - p_\ell)!}$. Aussi supposons que la condition suivante soit satisfaite

$$k_l^l > 0, \quad l = 2, \dots, m$$

où k_l^l était défini dans (4.1.11).

Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*], T^* < T_{\max}$.

Corollaire 4.4.1. *Selon les hypothèses du théorème (4.4.1) toutes les solutions du système (4.3.1) – (4.3.2) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ pour un certain $p \geq 1$.*

Proposition 4.4.2. *Sous les hypothèses du théorème (4.4.1) et la condition (4.1.4) toutes les solutions du système (4.3.1) – (4.3.2) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont globales pour un certain $p > \frac{Nn}{2}$.*

Lemme 4.4.1. *Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par $A = (a_{\ell\kappa})_{1 \leq \ell, \kappa \leq m}$ alors on a :*

$$\begin{cases} K_m^m = \det[m] \cdot \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det k)^{2(m-k-2)}, & m > 2 \\ K_2^2 = \det 2 \end{cases} \quad (4.4.3)$$

où

$$K_m^l = K_{l-1}^{l-1} \cdot K_m^{l-1} - (H_m^{l-1})^2, \quad l = 3, \dots, m,$$

$$H_m^l = \det_{1 \leq \ell, \kappa \leq m} \left((a_{\ell, \kappa})_{\substack{\ell \neq m, \dots, l+1 \\ \kappa \neq m-1, \dots, l}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2^{(l-k-2)}}, \quad l = 3, \dots, m-1,$$

$$K_m^2 = a_{11}a_{mm} - (a_{1m})^2, \quad H_m^2 = a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}.$$

Démonstration du Théorème (4.4.1), corollaire (4.4.1) et proposition (4.4.2) (voir [3])

4.5 Etude d'un système généralisé

Cette partie représente une généralisation de l'étude que nous avons fait (dans la partie précédente).

Soit le système : (voir [1])

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D\Delta U = F(U) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.5.1)$$

avec les conditions aux bords

$$\alpha U + (1 - \alpha) \partial_\eta U = B, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (4.5.2)$$

or

$$\alpha U + (1 - \alpha) D\partial_\eta U = B, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (4.5.3)$$

et les conditions initiales

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \text{sur } \Omega. \quad (4.5.4)$$

Où les vecteurs U, F et B sont définis comme :

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T,$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T.$$

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

Avec les trois types de conditions aux bords

(i) Pour les conditions aux bords non-homogènes de Robin, nous utilisons

$$0 < \alpha < 1, B \in \mathbb{R}^m,$$

(ii) Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, nous utilisons

$$\alpha = 0 \text{ et } B \equiv 0,$$

(iii) Pour les conditions aux bord homogènes de Dirichlet, nous utilisons

$$1 - \alpha = 0 \text{ et } B \equiv 0.$$

La matrice de diffusion est définie comme :

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{m \times m},$$

où a, b et c sont des constantes strictement positives satisfaisant la condition de parabolicité :

$$\cos \frac{\pi}{m+1} < \frac{a}{b+c}. \quad (4.5.5)$$

Dans le cas $b = c$ on trouve la condition de parabolicité (4.1.4).

Les données initiales sont supposées être dans les régions

$$\sum_{\mathfrak{L}, \mathfrak{Z}} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, U_0 \rangle, z \in \mathfrak{Z}, \ell \in \mathfrak{L}\}, \quad (4.5.6)$$

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (4.5.7)$$

vérifiant

$$\langle V_z, B \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, B \rangle, z \in \mathfrak{Z}, \ell \in \mathfrak{L}.$$

Le vecteur $V_\ell = (v_{1\ell}, \dots, v_{m\ell})^T$ est défini comme :

$$v_{k\ell} = \sqrt{\mu^k} \sin \frac{k(m+1-\ell)\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

avec

$$\mu = \frac{b}{c}.$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^m . De (4.5.7), nous pouvons voir qu'il y en a fait 2^m régions.

En 2002 S. Kouachi [26] a étudié le cas $m = 2$, où la condition de parapoliticité est $2a \geq (b + c)$. Ceci résulte directement du remplacement de $m = 2$ dans (4.5.5), il a étudié 2 régions seulement, bien qu'il y ait $2^2 = 4$ régions en fait.

Dans [2] S. Abdelmalek où il a considéré des systèmes de trois équations ($m = 3$) où

$$U = (u_1, u_2, u_3)^T, F = (f_1, f_2, f_3)^T, B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T.$$

Si on remplace $m = 3$ dans (4.5.5) on trouve la même condition de parapoliticité utilisée dans [2], $\sqrt{2}a \geq (b + c)$. Le nombre total des régions dans ce cas est $2^3 = 8$, seulement 4 régions ont été étudiés dans [2].

Les preuves nécessaires sont similaires pour toutes les régions invariantes. Par conséquent, nous nous concentrons uniquement sur l'une des régions et présentons une généralisation plus tard.

La région choisie est le cas où $\mathfrak{L} = \{1, 2, \dots, m\}$ et $\mathfrak{J} = \emptyset$, nous avons :

$$\sum_{\mathfrak{L}, \emptyset} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}\}, \quad (4.5.8)$$

vérifiant

$$\langle V_\ell, B \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}.$$

Afin d'établir l'existence globale de solutions dans la région (4.5.8), nous diagonalisons la matrice de diffusion D .

Nous définissons les fonctions de réaction-diffusion comme :

$$F(W) = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T, F_\ell = \langle V_\ell, F \rangle,$$

où $\ell = 1, \dots, m$, le variable W est donnée par :

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T, w_\ell = \langle V_\ell, U \rangle.$$

Les fonctions F_ℓ doivent satisfaire les conditions :

(A1) Les fonctions F_ℓ sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m et F est quasi-positive *i.e.*, pour

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

tout $\ell = 1, \dots, m$,

$$F_\ell(w_1, \dots, w_{\ell-1}, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m) \geq 0,$$

pour tout $w_\ell \geq 0$; $\ell = 1, \dots, m$.

(A2) Les fonctions F_ℓ sont à croissance polynômiale (voir Hollis et Morgan [20]), i.e., pour tout $\ell = 1, \dots, m$ et pour un entier $N \geq 1$,

$$|F_\ell(W)| \leq C_1 (1 + \langle W, 1 \rangle)^N \quad \text{sur } (0, +\infty)^m, \quad (4.5.9)$$

(A3) L'inégalité

$$\langle S, F(W) \rangle \leq C_2 (1 + \langle W, 1 \rangle), \quad (4.5.10)$$

où

$$S = (d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, 1)^T,$$

pour tout $w_\ell \geq 0$, $\ell = 1, \dots, m$, et toutes les constantes $d_\ell \geq \bar{d}_\ell$, $\ell = 1, \dots, m$, où \bar{d}_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$, sont des constantes positives suffisamment larges, C_1 et C_2 sont des fonctions positives et uniformément bornées et définies sur \mathbb{R}_+^m .

Définissons :

$$K_l^r = K_{r-1}^{r-1} \cdot K_l^{r-1} - [H_l^{r-1}]^2, \quad r = 3, \dots, l, \quad (4.5.11)$$

où

$$H_l^r = \det_{\substack{1 \leq \ell, \kappa \leq l \\ \ell \neq l, \dots, r+1 \\ \kappa \neq l-1, \dots, r}} \left((a_{\ell, \kappa}) \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det k)^{2^{(r-k-2)}}, \quad r = 3, \dots, l-1,$$

$$K_l^2 = \underbrace{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} \cdot \left[\prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2 \right]$$

et

$$H_l^2 = \underbrace{\bar{\lambda}_1 \sqrt{\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_l} \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{l-1} \theta_k^{(p_k+2)^2 + (p_k+1)^2}}_{\text{valeur positive}} \cdot \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} \cdot [\theta_1^2 A_{2l} - A_{12} A_{1l}],$$

l'expression $\det_{\substack{1 \leq \ell, \kappa \leq l \\ \ell \neq l, \dots, r+1 \\ \kappa \neq l-1, \dots, r}} \left((a_{\ell, \kappa}) \right)$ dénote le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r

obtenue à partir de $(a_{\ell, \kappa})_{1 \leq \ell, \kappa \leq m}$ en supprimant les $(r+1), (r+2), \dots, l$ lignes et les $r, (r+1), \dots, (l-1)$

colonnes.

Les éléments de la matrice sont :

$$a_{\ell\kappa} = \frac{\bar{\lambda}_\ell + \bar{\lambda}_\kappa}{2} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} \dots \theta_{j-1}^{(p_{(j-1)}+1)^2} \theta_j^{(p_j+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2}, \quad (4.5.12)$$

où λ_ℓ est défini en (4.5.13)-(4.5.14). Rappelons que, pour tout $\ell, \kappa = 1, \dots, m$.

$$A_{\ell\kappa} = \frac{\bar{\lambda}_\ell + \bar{\lambda}_\kappa}{2\sqrt{\bar{\lambda}_\ell \bar{\lambda}_\kappa}}$$

et $\theta_\ell; \ell = 1, \dots, m - 1$ des constantes positives.

Proposition 4.5.1. *A Une forme quadratique $Q = \langle X, AX \rangle = X^T AX$, où A est une matrice symétrique, est définie positive en chaque vecteur-colonne X si tous les déterminants principaux situés dans le coin supérieur gauche de A sont positive. Si A n'est pas symétrique, Q est définie positive si et seulement si tous les déterminants principaux situés dans le coin supérieur gauche de la matrice $\frac{1}{2}(A + A^T)$ sont positive.*

4.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Lemme 4.5.1. *Le système de réaction-diffusion (4.5.1) satisfait la condition de parabolicité si (4.5.5) est satisfait.*

Démonstration. Le système (4.1.1) satisfait à la condition de parabolicité si la matrice $(D + D^T)$ est définie positive. La matrice $(D + D^T)$ est symétrique et tri-diagonale avec des coefficients non diagonaux de la forme $\frac{1}{2}(b + c)$. □

Lemme 4.5.2. *Les valeurs propres $\bar{\lambda}_\ell < \bar{\lambda}_{\ell-1} : \ell = 2, \dots, m$, de D^T sont positifs et sont donnés par :*

$$\bar{\lambda}_\ell = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right), \quad (4.5.13)$$

avec les vecteurs propres correspondants $\bar{V}_\ell = V_{m+1-\ell}$, pour $\ell = 1, \dots, m$. Par conséquent, D^T est diagonalisable.

Afin de simplifier les indices dans les formules à venir, nous définissons

$$\lambda_\ell = \bar{\lambda}_{m+1-\ell} = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{(m+1-\ell)\pi}{m+1}\right); \ell = 1, \dots, m, \quad (4.5.14)$$

ainsi $\lambda_\ell < \lambda_{\ell-1}, \ell = 1, \dots, m$.

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

Démonstration. Rappeler que la matrice de diffusion est définie positive, implique que ses valeurs propres sont nécessairement positives. Les composants de $(D^T - \bar{\lambda}I)X = 0$ sont

$$bx_{k-1} + (a - \bar{\lambda})x_k + cx_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

avec $x_0 = x_{m+1} = 0$, équivalent,

$$x_{k+2} + \left(\frac{a - \bar{\lambda}}{c}\right)x_{k+1} + \mu x_k = 0, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

les solutions sont

$$x_k = \begin{cases} \alpha r_1^k + \beta r_2^k, & \text{si } r_1 \neq r_2, \\ \alpha \rho^k + \beta k \rho^k, & \text{si } r_1 = r_2 = \rho, \end{cases}$$

où α et β sont des constantes arbitraires, r_1 et r_2 doit être distinct.

on pose $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$, et $x_0 = x_{m+1} = 0$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha r_1^{m+1} + \beta r_2^{m+1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m+1} = \frac{-\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = e^{\frac{2i\pi\ell}{m+1}}.$$

Donc $r_1 = r_2 e^{\frac{2i\pi\ell}{m+1}}$ pour $1 \leq \ell \leq m$. Avec

$$r^2 + \left(\frac{a - \bar{\lambda}}{c}\right)r + \mu = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1 r_2 = \mu \\ r_1 + r_2 = -\frac{a - \bar{\lambda}}{c} \end{cases}$$

conduit à $r_1 = \sqrt{\mu} e^{\frac{i\pi\ell}{m+1}}$, $r_2 = \sqrt{\mu} e^{-\frac{i\pi\ell}{m+1}}$, et

$$\bar{\lambda} = a + 2\sqrt{cb} \left(e^{\frac{i\pi\ell}{m+1}} + e^{-\frac{i\pi\ell}{m+1}} \right) = a + 2a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right).$$

Alors, les valeurs propres de D^T sont données par

$$\bar{\lambda}_\ell = a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right),$$

pour $\ell = 1, \dots, m$. Puisque les valeurs propres sont toutes distinctes ($\cos \alpha$ est strictement décroissant sur $(0, \pi)$, et $b \neq 0 \neq c$), alors D est nécessairement diagonalisable. Le composant ℓ de tout vecteur propre associé à λ_ℓ satisfait $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$, avec $\alpha + \beta = 0$. donc

$$x_k = \alpha \mu^{\frac{k}{2}} \left(e^{\frac{2i\pi k}{m+1}} - e^{-\frac{2i\pi k}{m+1}} \right) = 2i\alpha \mu^{\frac{k}{2}} \sin\left(\frac{k}{m+1}\pi\right).$$

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

On pose $\alpha = \frac{1}{2i}$ on obtient un vecteur propre particulier associé à $\bar{\lambda}_\ell$

$$\bar{V}_\ell = \left(\mu^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1\ell\pi}{m+1}\right), \mu^{\frac{2}{2}} \sin\left(\frac{2\ell\pi}{m+1}\right), \dots, \mu^{\frac{m}{2}} \sin\left(\frac{m\ell\pi}{m+1}\right) \right)^T.$$

Puisque les vecteurs propres sont tous distincts alors $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_m\}$ est un ensemble linéairement indépendant complet, par conséquent $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_m)$ diagonaliser D . Maintenant, nous allons prouver que

$$\bar{\lambda}_\ell < \bar{\lambda}_{\ell-1}; \ell = 2, \dots, m;$$

nous avons

$$\ell > \ell - 1 \Rightarrow \frac{\ell\pi}{m+1} > \frac{(\ell-1)\pi}{m+1},$$

puisque $\cos \theta$ est strictement décroissant sur $(0, \pi)$, alors

$$\cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right) < \cos\left(\frac{(\ell-1)\pi}{m+1}\right),$$

donc

$$\bar{\lambda}_\ell = a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{\ell\pi}{m+1}\right) < a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{(\ell-1)\pi}{m+1}\right) = \bar{\lambda}_{\ell-1}.$$

□

Lemme 4.5.3. *Les valeurs propres de la matrice D sont positives, c'est-à-dire $\lambda_\ell > 0$ et*

$$\det D > 0.$$

Démonstration. Rappel que $\lambda_\ell < \lambda_{\ell+1}; \ell = 1, \dots, m-1$; i.e.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m.$$

Nous voulons montrer que $\lambda_1 > 0$. D'abord, nous avons

$$\lambda_1 = a + 2\sqrt{cb} \cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right) > 0, \tag{4.5.15}$$

implique

$$a > 2\sqrt{cb} \left[-\cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right) \right]. \tag{4.5.16}$$

De la condition (4.5.5), on obtient

$$a > (b + c) \cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right).$$

Remarquer que

$$\frac{m}{m+1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right) < \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (4.5.17)$$

d'autre part

$$(c + b) > 2\sqrt{bc}, \quad (4.5.18)$$

on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right) = 0, \quad (4.5.19)$$

puisque

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right) + \cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right) &= 2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{m+1} + \frac{m}{m+1}\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{m+1} - \frac{m}{m+1}\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m-1}{m+1}\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

De (4.5.17), (4.5.18) et (4.5.19), on obtient

$$(c + b) \cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right) \geq 2\sqrt{bc} \left[-\cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right)\right], \quad (4.5.20)$$

et de (4.5.16) et (4.5.20), nous obtenons

$$a > 2\sqrt{cb} \left[-\cos\left(\frac{m}{m+1}\pi\right)\right].$$

qui s'est terminée la démonstration de (4.5.15) et garantissent que toutes les valeurs propres de D^T sont positives. De plus puisque les valeurs propres de D sont les mêmes de D^T , nous concluons donc que $\det D > 0$. □

4.5.2 Régions invariantes

Le résultat principal de cette section est présenté dans la proposition suivante :

Proposition 4.5.2. : *Supposons que les hypothèses (A1) – (A3) sont satisfaites. Alors pour tout U_0 dans $\sum_{\mathcal{L},3}$ la solution classique U du problème (4.5.1)-(4.5.4) sur $\Omega \times [0, T_{max})$ reste dans*

$\sum_{\mathcal{E},3}$ pour tout t dans $[0, T_{max})$, où T_{max} est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

Diagonaliser Le système (4.5.1) on obtient :

$$W_t - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \Delta W = F(W) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (4.5.21)$$

avec les conditions aux bords

$$\alpha W + (1 - \alpha) \partial_\eta W = \Lambda \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty),$$

or

$$\alpha W + D(1 - \alpha) \partial_\eta W = \Lambda \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (4.5.22)$$

et les conditions initiales

$$W(x, 0) = W_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.5.23)$$

Démonstration. Les vecteurs propres de la matrice de diffusion associée aux valeurs propres λ_ℓ sont définis par $V_\ell = (v_{\ell 1}, v_{\ell 2}, \dots, v_{\ell m})^T$. Considérons la matrice de diagonalisation dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres $P = (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_m)$. U est le vecteur solution et F le vecteur des termes de réaction. En multipliant le système (4.5.1) par P^T , on obtient

$$\begin{aligned} U_t - D\Delta U &= F \\ P^T U_t - \Delta P^T D U &= P^T F \\ P^T U_t - \Delta P^T D (P^T)^{-1} P^T U &= P^T F. \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

Maintenant, simplifions les expressions $P^T D (P^T)^{-1}$, $P^T U$ et $P^T F$

$$\begin{aligned} P^T D (P^T)^{-1} &= P^T (D^T)^T (P^{-1})^T \\ &= (D^T P)^T (P^{-1})^T \\ &= (P^{-1} D^T P)^T \\ &= (\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m))^T \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

$$\begin{aligned} P^T U &= (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_m)^T U \\ &= (\langle V_1, U \rangle, \langle V_2, U \rangle, \dots, \langle V_m, U \rangle)^T \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_m)^T = W. \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

donc $P^T U_t = W_t$.

$$\begin{aligned}
 P^T F &= (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_m)^T F \\
 &= (\langle V_1, F \rangle, \langle V_2, F \rangle, \dots, \langle V_m, F \rangle)^T \\
 &= (F_1, F_2, \dots, F_m)^T = F.
 \end{aligned} \tag{4.5.27}$$

En remplaçant (4.5.25), (4.5.26) et (4.5.27) dans (4.5.24), on obtient le système équivalent (4.5.21). En multipliant (4.5.2) par P^T on obtient les conditions aux bords (4.5.22)

$$\begin{aligned}
 \alpha U + (1 - \alpha) \partial_\eta U &= B, \\
 \alpha P^T U + (1 - \alpha) \partial_\eta P^T U &= P^T B.
 \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

où

$$\begin{aligned}
 P^T B &= (V_1 \mid V_2 \mid \dots \mid V_m)^T B \\
 &= (\langle V_1, B \rangle, \langle V_2, B \rangle, \dots, \langle V_m, B \rangle)^T \\
 &= (\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0) = \Lambda.
 \end{aligned} \tag{4.5.29}$$

En remplaçant (4.5.26) et (4.5.29) dans (4.5.28) on obtient les conditions aux bords (4.5.22) pour l'équivalent système.

Rappeler que la condition (4.5.5) garantit le parabolicité du système (4.5.1), ce qui implique qu'elle est équivalente à (4.5.21)-(4.5.23) dans la région

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathfrak{L}, \emptyset} &= \{U_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}\} \\
 &= \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_\ell^0 = \langle V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}\}
 \end{aligned}$$

avec

$$\rho_\ell^0 = \langle V_\ell, B \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}.$$

Ceci implique que les composantes w_ℓ sont nécessairement positifs. □

En général, la matrice de diagonalisation peut être écrite comme :

$$P = ((-1)^{i_1} V_1 \mid (-1)^{i_2} V_2 \mid \dots \mid (-1)^{i_m} V_m)$$

avec les puissances i_ℓ

$$i_\ell = 1 \text{ or } 2, \text{ pour } \ell = 1, \dots, m.$$

On peut subdiviser les indices ℓ en deux ensembles disjoints \mathfrak{J} et \mathfrak{L} , tels que

$$\begin{cases} i_\ell = 1 \Rightarrow \ell \in \mathfrak{J} \\ i_\ell = 2 \Rightarrow \ell \in \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{J} = \emptyset, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{J} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Le nombre de permutations possibles pour \mathfrak{J} et \mathfrak{L} est 2^m . Rappelons que

$$W_0 = P^T U_0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0)^T.$$

Puisque nous avons 2^m matrices de diagonalisation différentes P^T ; nous pouvons écrire

$$W_0 = \begin{cases} w_\ell^0 = \langle V_\ell, U_0 \rangle, \ell \in \mathfrak{L}, \\ w_\ell^0 = \langle (-1) V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{J}. \end{cases}$$

Ceci avec [\(4.5.8\)](#) garantit que les éléments de W_0 sont positifs, (c-à-d)

$$\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{J}} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_\ell^0 = \langle V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{L}, \quad w_\ell^0 = \langle (-1) V_\ell, U_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathfrak{J}\}.$$

4.5.3 Existence locale et globale

Il est bien connu que pour prouver l'existence globale de solutions à un système de réaction-diffusion (voir Henry [\[16\]](#), page 35 – 62), il suffit de trouver une estimation uniforme du terme de réaction associé sur $[0, T_{max})$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour certains $p > \frac{n}{2}$. Notre but est de construire des fonctionnelles polynomiales de Lyapunov permettant d'obtenir des limites de composants sur $L^p(\Omega)$, ce qui conduit à une existence globale. Puis que les termes de réaction sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m pour tout $i = 1, \dots, m$ alors pour toute condition initiale dans $C(\overline{\Omega})$, il est facile de vérifier directement leur continuité Lipschitzienne sur un sous-ensemble borné du

Chapitre 4. Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -équations avec une matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique

domaine de la puissance fractionnelle de l'opérateur :

$$O = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \Delta \end{pmatrix}$$

Sous ses hypothèses, l'existence locale du résultat est classique (voir Friedman [12], Henry [16] Pazy [38]).

Proposition 4.5.3. *Le système (4.5.21)-(4.5.23) admet une solution classique unique (w_1, w_2, \dots, w_m) sur $[0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$. De plus*

$$\text{Si } T_{\max} < \infty \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sum_{i=1}^m \|w_i(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty. \quad (4.5.30)$$

où $T_{\max}(\|w_1^0\|_{\infty}, \|w_2^0\|_{\infty}, \dots, \|w_m^0\|_{\infty})$ est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

Théorème 4.5.1. *Supposons que les fonctions $F_i, i = 1, \dots, m$ sont à croissance polynômiale et satisfont la condition (4.5.10) pour certaines constantes positives $D_i, i = 1, \dots, m$ suffisamment larges. Soit*

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_m(t, x)) dx, \quad (4.5.31)$$

où

$$H_{p_m}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} w_1^{p_1} w_2^{p_2 - p_1} \cdots w_m^{p_m - p_{m-1}},$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_k}^{p_\ell} = \frac{p_k!}{p_\ell!(p_k - p_\ell)!}$. Aussi supposons que la condition suivante soit satisfaite

$$k_l^l > 0, \quad l = 2, \dots, m$$

où k_l^l était défini dans (4.5.11).

Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*], T^* < T_{\max}$.

Corollaire 4.5.1. *Selon les hypothèses du théorème (4.5.1) toutes les solutions du système (4.5.21) – (4.5.23) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ pour un certain $p \geq 1$.*

Proposition 4.5.4. *Sous les hypothèses du théorème (4.5.1) et la condition (4.5.5) toutes les solutions du système (4.5.21) – (4.5.23) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont globales pour un certain $p > \frac{Nn}{2}$.*

Lemme 4.5.4. *Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par $A = (a_{\ell\kappa})_{1 \leq \ell, \kappa \leq m}$ alors on a :*

$$\begin{cases} K_m^m = \det[m] \cdot \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det k)^{2(m-k-2)}, m > 2 \\ K_2^2 = \det 2 \end{cases} \quad (4.5.32)$$

où

$$\begin{aligned} K_m^l &= K_{l-1}^{l-1} \cdot K_m^{l-1} - (H_m^{l-1})^2, \quad l = 3, \dots, m, \\ H_m^l &= \det_{1 \leq \ell, \kappa \leq m} \left((a_{\ell, \kappa})_{\substack{\ell \neq m, \dots, l+1 \\ \kappa \neq m-1, \dots, l}} \right) \cdot \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2(l-k-2)}, \quad l = 3, \dots, m-1, \\ K_m^2 &= a_{11}a_{mm} - (a_{1m})^2, \quad H_m^2 = a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}. \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème (4.5.1), corollaire (4.5.1) et proposition (4.5.4) (voir [I])

Chapitre 5

Régions invariantes et existence globale pour un système de réaction-diffusion à m -composantes avec une matrice de diffusion tri-diagonale symétrique

Dans ce chapitre [4], nous généraliserons les résultats obtenus dans [3]. Nous construirons les régions invariantes d'un système de réaction-diffusion à m -composants avec une matrice de diffusion tri-diagonale symétrique avec des conditions aux bords non-homogènes et une croissance polynômiale pour les termes de réaction non-linéaire. Nous utilisons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de diffusion et la condition de parabolicité. Nous prouvons donc l'existence globale de solutions utilisant la fonctionnelle de Lyapunov.

5.1 Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes concernant des constituants localement transformés les uns en les autres suite à des réactions chimiques et transportés dans l'espace

¹Article publié dans le journal : Advances in Pure and Applied Mathematics (APAM) 2021, vol 12, n°1, 1 – 15, voir [5]

par diffusion. Ils apparaissent dans de nombreuses applications, en chimie en génie chimique et en biologie. Ils ont fait l'objet d'innombrables études au cours des dernières décennies. L'un des aspects les plus importants de ce vaste domaine est de prouver l'existence globale de solutions sous certaines hypothèses et sous certaines restrictions.

En 2001, S. Kouachi [24] a montré que les solutions de systèmes de réaction-diffusion à 2 composants avec une matrice de diffusion diagonale et des conditions aux bords homogènes existent globalement via une fonctionnelle de Lyapunov. Plus tard dans [26] il a généralisé son résultat au cas de 2×2 matrice de diffusion de Toeplitz et dans [25] il a montré l'existence globale de solutions en supposant que les termes de réaction d'un système diagonal 3×3 montrent une croissance polynômiale. En 2007 S. Abdelmalek [2] a prouvé l'existence globale de solutions pour des systèmes (trois équations) de réaction-diffusion avec une matrice tri-diagonale à coefficients de diffusion et des conditions aux bords non homogènes.

L'un des principaux résultats de ces études a été obtenu en 1989 par Morgan [35], où toutes les composantes satisfont les mêmes conditions aux bords (Neumann ou Dirichlet), avec des termes de réaction sont polynômialement bornés et satisfont certaines inégalités. En 1993, Hollis [17] a complété le travail de Morgan et a établi l'existence globale en présence de conditions aux bords mixtes si certaines exigences de la structure sont placées sur le système. En 2007, S. Abdelmalek et S. Kouachi [4] ont démontré la présence de solutions de systèmes de réaction-diffusion à m -composants ($m \geq 2$) avec des conditions aux bords non homogènes de Neumann, Dirichlet ou Robin, où les termes de réaction sont à croissance polynômiale avec une matrice de diffusion diagonale. En 2014, S. Abdelmalek [3] a généralisé le résultat de [4] au cas de la matrice de diffusion tri-diagonale de Toeplitz symétrique et pour une matrice tri-diagonale de Toeplitz arbitraire [1].

Considérons les m -équations du système de réaction-diffusion, avec $m \geq 2$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - A_m \Delta U = F(U) \text{ dans } \{0, +\infty\} \times \Omega, \quad (5.1.1)$$

Où les vecteurs U , F et la matrice A_m sont définis comme :

$$U = ((u_s)_{s=1}^m)^T,$$

$$F = ((F_s)_{s=1}^m)^T,$$

$$A_m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} & a_m \end{pmatrix}, \quad (5.1.2)$$

$(a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^{m-1}$ sont des constantes strictement positives et satisfaisant la condition

$$4b_i^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{m+1} \right) < a_i a_{i+1}, \quad (5.1.3)$$

qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion A_m est définie positive. Cela signifie que les valeurs propres $(\lambda_s)_{s=1}^m$ où $(\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m)$ de la matrice A_m sont positive.

Les conditions aux bords et les conditions initiales (respectivement) pour le système proposé sont supposées satisfaire :

$$\alpha U + (1 - \alpha) \partial_\eta U = B \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (5.1.4)$$

et

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (5.1.5)$$

Où les vecteurs B et U_0 sont définis comme suit :

$$B = ((\beta_s)_{s=1}^m)^T, \\ U_0 = ((u_s^0)_{s=1}^m)^T.$$

Considérons trois types de conditions aux bords :

(i) Pour les conditions aux bords non-homogènes de Robin, on utilise

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}^m,$$

(ii) Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, on utilise

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad B \equiv 0,$$

(iii) Pour les conditions aux bords homogènes de Dirichlet, on utilise

$$1 - \alpha = 0 \quad \text{et} \quad B \equiv 0.$$

Les données initiales sont supposées être dans les régions :

$$\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}} = \left\{ U_0 \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} w_z^0 = \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 \text{ si } \langle V_z, B \rangle \leq 0, z \in \mathfrak{Z} \\ w_s^0 = \langle V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \langle V_s, B \rangle \geq 0, s \in \mathfrak{S} \end{cases} \right\}, \quad (5.1.6)$$

où

$$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^m et $V_s = (v_{s1}, \dots, v_{sm})^T$ un vecteur propre de la matrice A_m associée à sa valeur propre $(\lambda_s)_{s=1}^m$. Par conséquent, nous pouvons voir qu'il y a 2^m régions.

Remarque 5.1.1. *Si on remplace $(b_i)_{i=1}^{m-1} = b$ et $(a_i)_{i=1}^m = a$ dans (5.1.2) et dans (5.1.3), nous obtenons la matrice de diffusion et la condition de parabolicité utilisée dans [3].*

Nous définissons les fonctions de réaction-diffusion comme :

$$\Psi(W) = (\Psi_s)_{s=1}^m)^T, \quad \Psi_s = \langle (-1)^{i_s} V_s, F \rangle, \quad i_s = 1, 2.$$

où les fonctions Ψ_s doivent satisfaire les trois conditions suivantes :

(A1) Ψ_s sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_m^+ et Ψ est quasi-positif i.e., $\Psi_s(W) \geq 0$ pour tout $W = (w_1, \dots, w_{s-1}, w_s, w_{s+1}, \dots, w_m) \geq 0$, avec $w_s = 0$. Ces conditions sur Ψ garantissent l'existence locale des solutions uniques, non négatives, solutions classiques sur un intervalle de temps maximal $[0, T_{max}[$ (voir Hollis et Morgan [20])

(A2) L'inégalité

$$\langle S, \Psi(W) \rangle \leq C_2 (1 + \langle W, 1 \rangle) \quad \text{tel que } S = (d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, 1)^T \quad (5.1.7)$$

pour tout $w_s \geq 0, s = 1, \dots, m$ et toutes les constantes $d_s \geq \bar{d}_s, s = 1, \dots, m$, où $C_2 \geq 0$ et \bar{d}_s sont des constantes positives suffisamment larges.

(A3) On suppose que les fonctions Ψ_s sont à croissance polynômiale (voir Hollis et Morgan [20]), i.e., il y a des constantes $C_1 \geq 0$ et $N \geq 0$

$$|\Psi_s(W)| \leq C_1 (1 + \langle W, 1 \rangle)^N \quad \text{sur } (0, +\infty)^m, \quad (5.1.8)$$

pour tout $W \in \mathbb{R}_+^m$ et $s = 1, \dots, m$. où C_1 est une fonction positive uniformément bornée définie sur \mathbb{R}_+^m .

5.2 Existence de solutions locales

Les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $C(\overline{\Omega})$ sont notées respectivement par :

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx;$$

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \text{ et } \|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour toute donnée initiale dans $C(\overline{\Omega})$ ou dans $L^\infty(\Omega)$ l'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées partielles (5.1.1) est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaire abstraites (voir Friedman [13], Henry [16] et Pazy [38]). Par conséquent, le système (5.1.1) avec les conditions (5.1.4)-(5.1.5) admet une solution classique unique U sur $]0, T_{max}[\times \Omega$, où $T_{max}(\|u_1^0\|_\infty, \|u_2^0\|_\infty, \dots, \|u_m^0\|_\infty)$, est le temps éventuel d'explosion (blow-up).

De plus, si $T_{max} < +\infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \sum_{s=1}^m \|u_s(t, \cdot)\|_\infty = +\infty.$$

Donc, s'il existe une constante positive C telle que

$$\sum_{s=1}^m \|u_s(t, \cdot)\|_\infty \leq C \text{ pour tout } t \in [0, T_{max}),$$

alors, $T_{max} = +\infty$.

5.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Le but de cette section est d'obtenir une relation de récurrence à trois termes de polynôme caractéristique de la matrice A de dimension $m \times m$ en termes de matrices de dimensions $(m-1) \times (m-1)$ et $(m-2) \times (m-2)$ aussi les vecteurs propres de cette matrice. Les valeurs propres λ de la matrice A_m sont liés par les solutions du polynôme caractéristique $\det(A_m - \lambda I_m) = 0$. Notons $\Phi_m(\lambda)$, $\Phi_{m-1}(\lambda)$, $\Phi_{m-2}(\lambda)$ les polynômes caractéristique des matrices A_m, A_{m-1}, A_{m-2} (respectivement).

Lemme 5.3.1. (Voir [31]) Soit A_m une matrice tri-diagonale définie dans (5.1.2), les valeurs propres de A_m sont distinctes et s'entrelacent strictement avec les valeurs propres de A_{m-1}, A_{m-2} pour tout $m \geq 2$.

$$\phi_0(\lambda) = 1, \phi_1(\lambda) = a_1 - \lambda, \phi_m(\lambda) = a_m \phi_{m-1}(\lambda) - b_{m-1}^2 \phi_{m-2}(\lambda). \quad (5.3.1)$$

Lemme 5.3.2. (Voir Andelic [7]) Soit A_m une matrice tri-diagonale symétrique réelle définie dans (5.1.2), avec des entrées diagonales positives. Si

$$4b_i^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{m+1}\right) < a_i a_{i+1}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, m-1$$

alors A_m est définie positive.

Lemme 5.3.3. (Voir Andelic [7]) La matrice A_m tri-diagonale symétrique réelle définie dans (5.1.2), est définie positive si et seulement si ses déterminants principaux $\det A_s$, pour $s = 1, \dots, m$, sont positifs.

Nous remarquons que la caractérisation générale en termes de valeurs propres, c'est-à-dire, A_m est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Lemme 5.3.4. Les vecteurs propres de la matrice A_m donnés dans (5.1.2) associée aux valeurs propres λ_s , pour $s = 1, \dots, m$ sont donné par $V_s = (v_{s1}, \dots, v_{sm})^T$ où $v_{s\ell}$, ($\ell = 1, \dots, m$) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} v_{sm} = 1, \\ v_{s(m-1)} = \frac{\lambda_s - a_m}{b_{m-1}}, \\ v_{s(\ell-1)} = -\frac{b_\ell v_{s(\ell+1)} + (a_\ell - \lambda_s) v_{s\ell}}{b_{\ell-1}}, \quad \ell = m-1, \dots, 2. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Démonstration. Rappeler que la matrice de diffusion est définie positive, par conséquent ses valeurs propres sont nécessairement positives. Les vecteurs propres de la matrice de diffusion associés aux valeurs propres λ_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$ sont définis comme $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$. Pour (λ, V) , les composants dans $A_m V = \lambda V$ sont

$$\begin{cases} a_1 v_1 + b_1 v_2 = \lambda v_1, \\ b_{\ell-1} v_{\ell-1} + a_\ell v_\ell + b_\ell v_{\ell+1} = \lambda v_\ell, \quad 2 \leq \ell \leq m-1, \\ b_{m-1} v_{m-1} + a_m v_m = \lambda v_m. \end{cases}$$

Si $v_m = 0$ l'hypothèse $b_\ell \neq 0$ pour tout $\ell = 1, \dots, m - 1$ nous avons que tous les v_ℓ sont nuls. On peut donc prendre $v_m = 1$ et $V = (v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$ comme une solution du système triangulaire supérieur

$$\begin{cases} b_{\ell-1}v_{\ell-1} + (a_\ell - \lambda)v_\ell + b_\ell v_{\ell+1} = 0, & 2 \leq \ell \leq m-2, \\ b_{m-2}v_{m-2} + (a_{m-1} - \lambda)v_{m-1} = -b_{m-1}, \\ b_{m-1}v_{m-1} = \lambda - a_m. \end{cases}$$

La solution de ce système est donné par

$$\begin{cases} v_{m-1} = \frac{\lambda - a_m}{b_{m-1}}, \\ v_{\ell-1} = -\frac{b_\ell v_{\ell+1} + (a_\ell - \lambda)v_\ell}{b_{\ell-1}}, & \ell = m-1, \dots, 2. \end{cases}$$

□

5.4 Régions invariantes

Habituellement, pour construire des régions invariantes pour des systèmes comme (5.1.1), nous faisons un changement linéaire de variables u_s pour obtenir un nouveau système équivalent avec une matrice de diffusion diagonale pour laquelle des techniques standard peuvent être appliquées pour déduire l'existence globale (voir Kouachi [27]).

Puis que les conditions initiales sont dans $\sum_{\mathfrak{E},3}$, alors sous les hypothèses (A1) – (A2), la proposition suivante dit que la solution classique du système (5.1.1) avec les conditions aux bords (5.1.4) et les conditions initiales (5.1.5) sur $[0, T_{max})$ reste dans $\sum_{\mathfrak{E},3}$ pour tout t dans $[0, T_{max})$.

Proposition 5.4.1. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) sont satisfaites. Alors pour tout U_0 dans $\sum_{\mathfrak{E},3}$ la solution classique U du problème (5.1.1) sur $\Omega \times [0, T_{max})$ reste dans $\sum_{\mathfrak{E},3}$ pour tout t dans $[0, T_{max})$.*

Démonstration. Soit $V_s = (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sm})^T$ est le vecteur propre de la matrice de diffusion A_m associée aux valeurs propres $(\lambda_s)_{s=1}^m$ où $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. En multipliant la $k^{\text{ème}}$ équation de (5.1.1) par $(-1)^{i_s} V_{sk}, i_s = 1, 2$ et $k = 1, \dots, m$ et en ajoutant les équations résultantes, nous obtenons

$$W_t - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \Delta W = \Psi(W) \text{ dans } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (5.4.1)$$

avec les conditions aux bords et les conditions initiales (respectivement)

$$\alpha W + (1 - \alpha) \partial_\eta W = \Gamma \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (5.4.2)$$

et

$$W(x, 0) = W_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (5.4.3)$$

où

$$\begin{aligned} W &= ((w_s)_{s=1}^m)^T, & w_s &= \langle (-1)^{i_s} V_s, U \rangle, \\ \Psi &= ((\Psi_s)_{s=1}^m)^T, & \Psi_s &= \langle (-1)^{i_s} V_s, F \rangle, \\ \Gamma &= ((\rho_s^0)_{s=1}^m)^T, & \rho_s^0 &= \langle (-1)^{i_s} V_s, B \rangle, \\ W_0 &= ((w_s^0)_{s=1}^m)^T, & w_s^0 &= \langle (-1)^{i_s} V_s, U_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Rappeler que la condition (5.1.3) garantit la parabolicité du système proposé (5.1.1), qui avec les conditions (5.1.4)-(5.1.5), est équivalent à (5.4.1)-(5.4.3) dans la région :

$$\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_s^0 = \langle (-1)^{i_s} V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \rho_s^0 = \langle (-1)^{i_s} V_s, B \rangle \geq 0\},$$

où $s = 1, \dots, m$ et $i_s = 1, 2$.

Cette région écrite comme suite :

$$\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}} = \left\{ U_0 \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} w_s^0 = \langle V_s, U_0 \rangle \geq 0 & \text{si } \rho_s^0 = \langle V_s, B \rangle \geq 0, s \in \mathfrak{S} \\ w_z^0 = \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 & \text{si } \rho_z^0 = \langle V_z, B \rangle \leq 0, z \in \mathfrak{Z} \end{cases} \right\}$$

où

$$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Cela implique que les composantes w_s sont nécessairement positives. \square

Une fois les régions invariantes construites, on peut appliquer la technique de Lyapunov et établir l'existence globale.

5.5 Existence globale

Pour prouver l'existence globale de solutions à un système de réaction-diffusion (voir Henry [16] et Rothe [39]), il suffit de dériver une estimation uniforme du terme de réaction associé sur $[0, T_{max})$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour certains $p > \frac{n}{2}$. Notre but est de construire des fonctionnelles polynômiales de Lyapunov permettant d'obtenir des limites de les composants sur $L^p(\Omega)$, qui mène à l'existence globale. Puis que les termes de réaction Ψ_s , $s = 1, \dots, m$ sont continûment différentiables sur \mathbb{R}_+^m , alors pour toute condition initiale sur $C(\overline{\Omega})$, il est facile de vérifier directement leur continuité Lipschitzienne sur un sous ensemble borné du domaine de la puissance fractionnelle de l'opérateur

$$\mathfrak{D} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \Delta \end{pmatrix}. \quad (5.5.1)$$

Sous ses hypothèses, le résultat de l'existence locale est bien connu (voir Friedman [12], Henry [16], Pazy [38]).

L'hypothèse (A1) implique les conditions de la régularité et la quasi-positivité qui assurent l'existence locale des solutions et la nonnégativité des solutions tant qu'elles existent, via le principe de maximum (voir Smoller [41]). L'hypothèse (A3) implique la croissance polynômiale usuelle qui est une condition nécessaire pour obtenir une forme dépendant de P et uniformément bornée par les estimations de L^p . (voir Abdelmalek et Kouachi [4], Hollis et Morgan [21]).

Avant de présenter le résultat principal de ce chapitre, définissons

$$K_l^r = K_{r-1}^{r-1} K_l^{r-1} - [H_l^{r-1}]^2, \quad r = 3, \dots, l, \quad (5.5.2)$$

où

$$H_l^r = \det_{1 \leq s, k \leq l} \left((a_{s,k})_{\substack{s \neq l, \dots, r+1 \\ k \neq l-1, \dots, r}} \right) \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det [k])^{2(r-k-2)}, \quad r = 3, \dots, l-1$$

$$K_l^2 = \underbrace{\lambda_1 \lambda_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)} \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{valeur positive}} \left[\prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2 \right]$$

et

$$H_l^2 = \underbrace{\lambda_1 \sqrt{\lambda_2 \lambda_l} \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{l-1} \theta_k^{(p_k+2)^2 + (p_k+1)^2}}_{\text{valeur positive}} \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} [\theta_1^2 A_{2l} - A_{12} A_{ll}],$$

Où $\det_{1 \leq s, k \leq l} \begin{pmatrix} (a_{s,k})_{s \neq l, \dots, r+1} \\ k \neq l-1, \dots, r \end{pmatrix}$ dénote le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r obtenue à partir de $(a_{s,k})_{1 \leq s, k \leq m}$ en supprimant les $(r+1)^{th}$, $(r+2)^{th}$, \dots , l^{th} lignes et les r^{th} , $(r+1)^{th}$, \dots , $(l-1)^{th}$ colonnes, et $\det [1], \dots, \det [m]$ sont les déterminants de la matrice $(a_{s,k})_{1 \leq s, k \leq m}$. Les éléments de la matrice sont :

$$a_{sk} = \frac{\lambda_s + \lambda_k}{2} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(s-1)}^{p_{(s-1)}^2} \theta_s^{(p_s+1)^2} \dots \theta_{k-1}^{(p_{(k-1)+1})^2} \theta_k^{(p_k+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)+2})^2}, \quad (5.5.3)$$

où λ_s est défini dans (5.3.1).

Rappeler que $A_{sk} = \frac{\lambda_s + \lambda_k}{2\sqrt{\lambda_s \lambda_k}}$ pour tout $s, k = 1, \dots, m$, et $\theta_s, s = 1, \dots, (m-1)$ sont constantes positives.

Proposition 5.5.1. *Supposons que les fonctions $\Psi_s, s = 1, \dots, m$, sont à croissance polynômiale et satisfont les conditions (5.1.7) et (5.1.8).*

Soit $(w_1(t, \cdot), w_2(t, \cdot), \dots, w_m(t, \cdot))$ des solutions de système (5.4.1)-(5.4.3) et

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(w_1(x, t), w_2(x, t), \dots, w_m(x, t)) dx, \quad (5.5.4)$$

où

$$H_{p_m}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} w_1^{p_1} w_2^{p_2 - p_1} \dots w_m^{p_m - p_{m-1}},$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_k}^{p_s} = \frac{p_k!}{p_s!(p_k - p_s)!}$.

Supposons aussi que la condition suivante est satisfaite

$$K_l^l > 0, \quad l = 2, \dots, m, \quad (5.5.5)$$

où k_l^l était défini dans (5.5.2). Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{max}$.

Avant de prouver cette proposition, nous avons besoin des lemmes suivants, voir Kouachi [24], Abdelmalek et Kouachi [4]

Lemme 5.5.1. Soit H_{p_m} le polynôme homogène défini par (5.5.4). Alors

$$\begin{aligned} \partial_{w_1} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(p_1+1)^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\times w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} w_3^{p_3-p_2} \cdots w_m^{(p_{(m-1)}-p_{m-1})}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

pour tout $s = 2, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \partial_{w_s} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \cdots \theta_{s-1}^{p_{(s-1)}^2} \theta_s^{(p_s+1)^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\times w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} w_3^{p_3-p_2} \cdots w_m^{(p_{(m-1)}-p_{m-1})}, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{w_m} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_3}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} w_3^{p_3-p_2} \cdots w_m^{(p_{(m-1)}-p_{m-1})}. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Lemme 5.5.2. Les dérivées partielles secondes de H_{p_m} sont données par :

$$\begin{aligned} \partial_{w_1^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \cdots \sum_{p_2=0}^{p_3} \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \\ &\times \theta_1^{(p_1+2)^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{(p_{(m-2)}-p_{m-1})} \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

pour tout $s = 2, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \partial_{w_s^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \\ &\theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} \cdots \theta_{(\ell-1)}^{p_{(\ell-1)}^2} \theta_\ell^{(p_\ell+2)^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{(p_{(m-2)}-p_{m-1})} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

pour tout $2 \leq s < k \leq m$

$$\begin{aligned} \partial_{w_s w_k} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \cdots C_{p_2}^{p_1} \\ &\theta_1^{p_1^2} \cdots \theta_{\ell-1}^{p_{\ell-1}^2} \theta_\ell^{(p_\ell+1)^2} \cdots \theta_{k-1}^{(p_{k-1}+1)^2} \theta_k^{(p_k+2)^2} \cdots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{(p_{(m-2)}-p_{m-1})} \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_{w_m^2} H_n &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \dots w_m^{(p_m-2)-p_{m-1}} \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Lemme 5.5.3. Soit A_m une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par $A_m = (a_{sk})_{1 \leq s, k \leq m}$ alors on a :

$$\begin{cases} K_m^m = \det [m] \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det [k])^{2(m-k-2)}, m > 2, \\ K_2^2 = \det [2] \end{cases} \quad (5.5.13)$$

où

$$\begin{aligned} K_m^l &= K_{l-1}^{l-1} K_m^{l-1} - (H_m^{l-1})^2, \quad l = 3, \dots, m, \\ H_m^l &= \det_{1 \leq s, k \leq m} \left((a_{s,k})_{\substack{s \neq m, \dots, l+1 \\ k \neq m-1, \dots, l}} \right) \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det [k])^{2(l-k-2)}, \quad l = 3, \dots, m-1, \\ K_m^2 &= a_{11} a_{mm} - (a_{1m})^2, \quad H_m^2 = a_{11} a_{2m} - a_{12} a_{1m}. \end{aligned}$$

Démonstration du proposition (5.5.1) Le but est de prouver que $L(t)$ est uniformément borné sur l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{max}$. Dérivons L par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_{\Omega} \partial_t H_{p_m} dx = \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \partial_{w_s} H_{p_m} \frac{\partial w_s}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \partial_{w_s} H_{p_m} (\lambda_s \Delta w_s + F_s) dx \\ &= I + J \end{aligned}$$

où

$$I = \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \lambda_s \partial_{w_s} H_{p_m} \Delta w_s dx, \quad (5.5.14)$$

et

$$J = \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \partial_{w_s} H_{p_m} F_s dx. \quad (5.5.15)$$

Utilisons la formule de Green, on obtient $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{\partial \Omega} \sum_{s=1}^m \lambda_s \partial_{w_s} H_{p_m} \partial_{\eta} w_s dx \quad (5.5.16)$$

et

$$I_2 = - \int_{\Omega} \left\langle T, \left(\left(\frac{\lambda_s + \lambda_k}{2} \partial_{w_k w_s} H_{p_m} \right)_{1 \leq s, k \leq m} \right) T \right\rangle dx. \quad (5.5.17)$$

Appliquons les lemmes (5.5.1) et (5.5.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_s + \lambda_k}{2} \partial_{w_k w_s} H_{p_m} \right)_{1 \leq s, k \leq m} &= p_m (p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-2}}^{p_{m-1}} \cdots \\ &C_{p_2}^{p_1} \left((a_{sk})_{1 \leq s, k \leq m} \right) w_1^{p_1} \cdots w_m^{(p_m-2)-p_{m-1}} \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

où $(a_{sk})_{1 \leq s, k \leq m}$ est une matrice définie par la formule (5.5.3). On démontre qu'il existe une constante positive C_4 indépendante de $t \in [0, T_{max})$ telle que

$$I_1 \leq C_4 \text{ pour tout } t \in [0, T_{max}), \quad (5.5.19)$$

et que

$$I_2 \leq 0, \quad (5.5.20)$$

pour certaines conditions aux bords :

(i) Si $0 < \alpha < 1$, utilisant la condition aux bords (5.1.4) on obtient :

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{s=1}^m \lambda_s \partial_{w_s} H_{p_m} (\gamma_s - \sigma_s w_s) ds,$$

où $\sigma_s = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\gamma_s = \frac{\rho_s^0}{1-\alpha}$, $s = 1, \dots, m$.

Puisque

$$H(W) = \sum_{\ell=1}^m \lambda_s \partial_{w_s} H_{p_m} (\gamma_s - \sigma_s w_s) = P_{n-1}(W) - Q_n(W),$$

où P_{n-1} et Q_n sont des polynômes avec des coefficients positifs et de degré $n-1$ et n respectivement et puisque la solution est positive, alors

$$\limsup_{\sum_{s=1}^m |w_s| \rightarrow +\infty} H(W) = -\infty, \quad (5.5.21)$$

ce qui prouve que H est uniformément borné sur \mathbb{R}_+^m et par conséquent (5.5.19).

(ii) Si $\forall s = 1, \dots, m : \alpha = \beta_s = 0$, alors les conditions aux bords (5.1.4) devient $\partial_{\eta} w_s = 0, \forall s = 1, \dots, m$ sur $[0, T_{max}) \times \partial\Omega$. de (5.5.16), alors $I_1 = 0$ sur $[0, T_{max})$

(iii) Le cas de la condition homogène de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas la positivité de la solution sur $[0, T_{max}) \times \Omega$ implique $\partial_\eta w_s \leq 0, \forall s = 1, \dots, m$ sur $[0, T_{max}) \times \partial\Omega$ Par conséquent on obtient encore (5.5.19) avec $C_4 = 0$. Alors la démonstration de (5.5.19) est complete.

Maintenant on démontre (5.5.20). Les formes quadratiques (par rapport à $\nabla w_s, s = 1, \dots, m$) associées aux matrices $(a_{sk})_{1 \leq s, k \leq m}$ qui définie dans (5.5.3) sont positives puisque leurs déterminants $det[1], det[2], \dots, det[m]$ sont positifs :

$$\det [1] = \lambda_1 \theta_1^{(p_1+2)^2} \theta_2^{(p_2+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} > 0$$

pour $p_1 = 0, \dots, p_2, p_2 = 0, \dots, p_3 \dots p_{m-1} = 0, \dots, p_m - 2$. Pour $det[2]$, selon le lemme (5.5.3), on obtient :

$$\det[2] = K_2^2 = \lambda_1 \lambda_2 \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} [\theta_1^2 - A_{12}^2].$$

En utilisant (5.5.5) pour $l = 2$ on obtient : $\det[2] > 0$. Pour $det[3]$, encore selon le lemme (5.5.3), on a

$$K_3^3 = \det [3] \det [1].$$

mais $\det[1] > 0$ ainsi

$$sign(K_3^3) = sign(\det[3]).$$

En utilisant (5.5.5) pour $l = 3$ on obtient $\det[3] > 0$. On suppose que

$$\det[k] > 0, k = 1, \dots, (l-1) \Rightarrow \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det[k])^{2^{(l-k-2)}} > 0. \quad (5.5.22)$$

à partir du lemme (5.5.3) $K_l^l = \det[l] \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det[k])^{2^{(l-k-2)}}$, et à partir de (5.5.22), on obtient :

$$sign(K_l^l) = sign(\det[l])$$

puisque $K_l^l > 0$, à partir de (5.5.5) alors $\det[l] > 0$. On obtient (5.5.20). Maintenant on montre que J est bornée (5.5.15). Substituons les expressions des dérivées partielles donnée par le lemme (5.5.1) dans le second membre de l'intégrale (5.5.15), on obtient :

$$J = \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_{m-1}} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_2} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \dots w_m^{p_{m-1}-p_{m-1}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{s=1}^{m-1} \theta_s^{(p_s+1)^2} F_1 + \sum_{k=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{k-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{s=k}^{m-1} \theta_s^{(p_s+1)^2} F_k + \prod_{s=1}^{m-1} \theta_s^{p_s^2} F_m \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_m-1} \cdots C_{p_2}^{p_1} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
& \left(\prod_{s=1}^{m-1} \frac{\theta_s^{(p_s+1)^2}}{\theta_s^{p_s^2}} F_1 + \sum_{k=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{k-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{s=k}^{m-1} \frac{\theta_s^{(p_s+1)^2}}{\theta_s^{p_s^2}} F_k + F_m \right) \prod_{s=1}^{m-1} \theta_s^{p_s^2} dx \\
&= \int_{\Omega} \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_m-1} \cdots C_{p_2}^{p_1} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
& \left\langle \left(\prod_{s=1}^{m-1} \frac{\theta_s^{(p_s+1)^2}}{\theta_s^{p_s^2}}, \theta_1^{p_1^2} \prod_{s=2}^{m-1} \frac{\theta_s^{(p_s+1)^2}}{\theta_s^{p_s^2}}, \dots, \prod_{k=1}^{m-2} \theta_k^{p_k^2} \frac{\theta_{m-1}^{(p_{m-1}+1)^2}}{\theta_{m-1}^{p_{m-1}^2}}, 1 \right), F \right\rangle \prod_{s=1}^{m-1} \theta_s^{p_s^2} dx.
\end{aligned}$$

Utilisons la condition (5.1.7)

$$J \leq C_5 \int_{\Omega} \left[\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \cdots C_{p_{m-1}}^{p_m-1} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{p_m-1-p_{m-1}} (1 + \langle W, 1 \rangle) \right] dx.$$

Pour démontrer que la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, on écrit

$$\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \cdots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \cdots C_{p_{m-1}}^{p_m-1} w_1^{p_1} w_2^{p_2-p_1} \cdots w_m^{p_m-1-p_{m-1}} (1 + \langle W, 1 \rangle) = R_{p_m}(W) + S_{p_{m-1}}(W),$$

où $R_{p_m}(W)$ et $S_{p_{m-1}}(W)$ sont deux polynômes homogènes de degré p_m et p_{m-1} , respectivement.

Puisque les polynômes H_{p_m} et R_{p_m} sont de degré p_m , alors il existe une constante positive C_6 telle que

$$\int_{\Omega} R_{p_m}(W) dx \leq C_6 \int_{\Omega} H_{p_m}(W) dx. \quad (5.5.23)$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à l'intégrale $\int_{\Omega} S_{p_{m-1}}(W) dx$, on obtient :

$$\int_{\Omega} S_{p_{m-1}}(W) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{p_m}} \left(\int_{\Omega} (S_{p_{m-1}}(W))^{\frac{p_m}{p_m-1}} dx \right)^{\frac{p_m-1}{p_m}}.$$

Puisque pour tout $w_1, w_2, \dots, w_{m-1} \geq 0$ et $w_m > 0$,

$$\frac{(S_{p_{m-1}}(W))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(W)} = \frac{(S_{p_{m-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1)},$$

où $\forall s \in \{1, 2, \dots, m-1\} : x_s = \frac{w_s}{w_{s+1}}$ et

$$\lim_{x_s \rightarrow +\infty} \frac{(S_{p_{m-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1)} < +\infty,$$

on affirme qu'il existe une constante positive C_7 telle que

$$\frac{(S_{p_m-1}(W))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(W)} \leq C_7, \text{ pour tout } w_1, w_2, \dots, w_{m-1} \geq 0. \quad (5.5.24)$$

Donc, la fonctionnelle L satisfait l'inégalité différentielle

$$L'(t) \leq C_6 L(t) + C_8 L^{\frac{p_m-1}{p_m}}(t),$$

qui s'écrit

$$p_m Z' \leq C_6 Z + C_8.$$

où $Z = L^{\frac{1}{p_m}}$. Une intégration simple donne la bornitude uniforme de la fonctionnelle L sur l'intervalle $[0, T^*]$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Nous pouvons maintenant établir les principaux résultats de ce chapitre.

Théorème 5.5.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A3), toutes les solutions du système (5.4.1)-(5.4.3) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ pour un certain $p \geq 1$.*

Corollaire 5.5.1. *Sous les hypothèses du théorème (5.5.1) et la condition (5.1.3), toutes les solutions du système (5.4.1)-(5.4.3) avec les conditions initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont globales pour un certain $p > \frac{Nn}{2}$.*

Démonstration de théorème (5.5.1) La démonstration est une conséquence immédiate du Proposition (5.5.1) et l'inégalité

$$\int_{\Omega} \langle W, 1 \rangle^p dx \leq C_9 L(t) \quad \text{sur } [0, T^*],$$

pour un certain $p \geq 1$

Démonstration de la Corollaire (5.5.1). A partir du théorème (5.5.1), il existe une constante positive C_{10} telle que

$$\int_{\Omega} \langle W, 1 \rangle^p dx \leq C_{10} \quad \text{sur } [0, T_{\max})$$

De (5.1.8) on a $\forall s \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$|\Psi_s(W)|^{\frac{p}{N}} \leq C_{11}(W) (1 + \langle W, 1 \rangle)^p.$$

Puisque w_1, w_2, \dots, w_m sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ et $\frac{p}{N} > \frac{n}{2}$, alors la solution est globale.

5.6 Remarques finales

Rappeler que si $V = (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sm})^T$ est un vecteur propre de la matrice de diffusion A_m^T associé à la valeur propre λ_s , il en est de même pour $(-1)V$. Considérons la matrice de diagonalisation des vecteurs propres

$$P = ((-1)^{i_1} V_1 \mid (-1)^{i_2} V_2 \mid \dots \mid (-1)^{i_m} V_m),$$

avec les puissances i_s

$$i_s \in \{1, 2\}, s = 1, \dots, m.$$

En multipliant le système (5.1.1) par P^T , on obtient :

$$\begin{aligned} P^T(U_t - A_m \Delta U) &= P^T F \\ P^T U_t - \Delta P^T A_m U &= P^T F \\ P^T U_t - \Delta P^T A_m (P^T)^{-1} P^T U &= P^T F. \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Maintenant, simplifions les expressions $P^T A_m (P^T)^{-1}$, $P^T U$ et $P^T F$

$$\begin{aligned} P^T A_m (P^T)^{-1} &= P^T (A_m^T)^T (P^{-1})^T \\ &= (A_m^T P)^T (P^{-1})^T \\ &= (P^{-1} A_m^T P)^T \\ &= (\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m))^T \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

$$\begin{aligned} P^T U &= ((-1)^{i_1} V_1 \mid (-1)^{i_2} V_2 \mid \dots \mid (-1)^{i_m} V_m)^T U \\ &= (\langle (-1)^{i_s} V_1, U \rangle, \langle (-1)^{i_s} V_2, U \rangle, \dots, \langle (-1)^{i_s} V_m, U \rangle)^T \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_m)^T = W. \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Alors, $P^T U_t = W_t$. De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} P^T F &= ((-1)^{i_1} V_1 \mid (-1)^{i_2} V_2 \mid \dots \mid (-1)^{i_m} V_m)^T F \\ &= (\langle (-1)^{i_1} V_1, F \rangle, \langle (-1)^{i_2} V_2, F \rangle, \dots, \langle (-1)^{i_m} V_m, F \rangle)^T \\ &= (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m)^T = \Psi. \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

En remplaçant (5.6.2)-(5.6.4) dans (5.6.1), on obtient le système équivalent (5.4.1). En multipliant (5.1.4) par P^T on obtient les conditions aux bords (5.4.2)

$$\alpha P^T U + (1 - \alpha) \partial_\eta P^T U = P^T B, \quad (5.6.5)$$

où

$$\begin{aligned} P^T B &= ((-1)^{i_1} V_1 \mid (-1)^{i_2} V_2 \mid \dots \mid (-1)^{i_m} V_m)^T B \\ &= (\langle (-1)^{i_1} V_1, B \rangle, \langle (-1)^{i_2} V_2, B \rangle, \dots, \langle (-1)^{i_m} V_m, B \rangle)^T \\ &= (\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0) = \Gamma \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

En remplaçant (5.6.3) et (5.6.6) dans (5.6.5) donne les conditions aux bords pour l'équivalent système (5.4.2).

Rappeler que la condition (5.1.3) garantit le parabolicity du système de réaction-diffusion proposée dans (5.1.1) avec les conditions (5.1.4)-(5.1.5), ce qui implique qu'elle est équivalente à (5.4.1)-(5.4.3) dans la région

$$\sum_{\mathfrak{S},3} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_s^0 = \langle (-1)^{i_s} V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \rho_s^0 = \langle (-1)^{i_s} V_s, B \rangle \geq 0\},$$

où $i_s \in \{1, 2\}$, $s = 1, \dots, m$.

1. Si $i_s = 1$, on obtient :

$$\sum_{\mathfrak{S},3} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_s^0 = \langle (-1) V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \rho_s^0 = \langle (-1) V_s, B \rangle \geq 0\},$$

équivalent à

$$\sum_{\mathfrak{S},3} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_z^0 = \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 \text{ si } \rho_z^0 = \langle V_z, B \rangle \leq 0, z \in \mathfrak{Z}\}.$$

2. Si $i_s = 2$, on obtient :

$$\sum_{\mathfrak{S},3} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_s^0 = \langle V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \rho_s^0 = \langle V_s, B \rangle \geq 0\},$$

équivalent à

$$\sum_{\mathfrak{S},3} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : w_s^0 = \langle V_s, U_0 \rangle \geq 0 \text{ si } \rho_s^0 = \langle V_s, B \rangle \geq 0, s \in \mathfrak{S}\}.$$

Alors pour $s = 1, \dots, m$ les régions $\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}}$ sont équivalentes aux régions suivantes :

$$\sum_{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}} = \left\{ U_0 \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} w_s^0 = \langle V_s, U_0 \rangle \geq 0 & \text{si } \rho_s^0 = \langle V_s, B \rangle \geq 0, s \in \mathfrak{S} \\ w_z^0 = \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 & \text{si } \rho_z^0 = \langle V_z, B \rangle \leq 0, z \in \mathfrak{Z} \end{cases} \right\}$$

où

$$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{Z} = \emptyset, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Conclusion

Nous avons présenté dans cette thèse quelques résultats d'existence globale des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion formés de m -équations dans les cas où la matrice de diffusion est diagonale, la matrice de diffusion est de Toeplitz tri-diagonale symétrique et tri-diagonale plus générale que celle de Toeplitz, où les termes de réaction sont supposés de croissance polynômiale.

La technique suivie pour prouver l'existence globale des solutions est basée sur la construction des régions invariantes et sur la construction d'une fonctionnelle polynômiale de Lyapunov. Le problème en question reste ouvert dans le cas où la matrice de diffusion est tri-diagonale arbitraire ou lorsque la croissance sur les termes non-linéaires est plus rapide qu'un polynôme.

Bibliographie

- [1] S. Abdelmalek, Existence of global solutions via invariant regions for a generalized reaction diffusion system with a tridiagonal Toeplitz matrix of diffusion coefficients, *Functional Analysis. Theory, Methods and applications*, pp12 – 27(2016).
- [2] S. Abdelmalek, Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a tri-diagonal matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Journal of Applied Mathematics*, pp1 – 15 (2007).
- [3] S. Abdelmalek, Invariant regions and global solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal symmetric Toeplitz matrix of diffusion coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 247, pp.1 – 14, Vol.2014(2014).
- [4] S. Abdelmalek and S. Kouachi, Proof of existence of global solutions for m-component reaction-diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method, *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical* vol. 40, 12335 – 12350 (2007).
- [5] K. Abdelmalek, B. Rebiai and S. Abdelmalek, Invariant region and existence of global solutions to a generalized m-component reaction-diffusion system with tridiagonal symmetric Toeplitz diffusion matrix, *Advances in Pure and Applied Mathematics (APAM)*, vol 12, n°1, 1 – 15 (2021).
- [6] N. D. Alikakos, L^p -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Comm, In *Partial Differential Equation*, pp 827 – 868, 4(8)(1979).
- [7] M. Andelic and C. M. da Fonseca, Sufficient conditions for positive definiteness of tridiagonal matrices revisited, *Positivity*, Volume 15, Issue 1, pp 155 – 159 (2011).

Bibliographie

- [8] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle théorie et applications*. Masson, Paris, (1983).
- [9] R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Volume 3 Masson (1987).
- [10] L. Desvillettes et K. Fellner, *Entropy Methods for Reaction-Diffusion Systems : Degenerate Diffusion*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. Supplement Volume (2007).
- [11] W. B. Fitzgibbon, S. L. Hollis et J. J. Morgan, *Stability and Lyapunov functions for reaction-diffusion systems*, *SIAM J. Math. J. Anal.* Vol. 28, *No.3*, pp.595 – 610, May(1997).
- [12] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall (1964).
- [13] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*. Krieger Pub (1983).
- [14] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices. / Tome 1, Théorie générale*. Paris. Dunod, (1966).
- [15] A. Haraux et A. Youkana, *On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations*. *Tohoku Mathematical Journal*, Volume 40, Number 1, 159 – 163, (1988).
- [16] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, *Lecture Notes in Mathematics* 840, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1981).
- [17] S. L. Hollis, *On the question of global existence for reaction-diffusion systems with mixed boundary conditions*, *Quarterly of Applied Mathematics* *LI*, number 2, pp. 241 – 250, June (1993).
- [18] S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre, *Global Existence and Boundedness in Reaction-Diffusion Systems*, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* Vol. 18, number 3, May (1987).
- [19] S. L. Hollis et J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from L^1 a priori estimates*, *Journal of Differential Equations*, Volume 98, Issue 2, pp. 260 – 276(1992).
- [20] S. L. Hollis and J. J. Morgan, *On the Blow-up of Solutions to Some Semilinear and Quasilinear Reaction-diffusion Systems*, *Rocky Mountain J.Math.* vol 14. no 4, pp. 1447 – 1465(1994).
- [21] S. L. Hollis and J. J. Morgan, *Partly dissipative reaction-diffusion systems and a model of phosphorus diffusion in silicon*, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 19 pp. 427 – 440(1992).

- [22] C. R. Johnson, M. Neumann, M. J. Tsatsomeros, Conditions for the positivity of determinants, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol 40, pp 241 – 248(1996).
- [23] S. Kouachi, Existence globale et explosion des solutions des certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, these de doctorat d'état, Université Badji Mokhtar Annaba, (1999).
- [24] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional, *Electronic Journal of Differential Equations*, No.68, pp. 1 – 10, Vol.2001(2001).
- [25] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional, *Electronic Journal of Differential Equations*, No.88, pp.1 – 13 Vol 2002(2002).
- [26] S. Kouachi, Global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No.2, pp.1 – 10(2002).
- [27] S. Kouachi, Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Georgian Math. J.*11, 349 – 359(2004).
- [28] S. Kouachi, S. Abdelmalek, and B. Rebiai, A Mathematical Proof of Dodgson's Algorithm, arXiv :0712.0362.e-print.
- [29] S. Kouachi, S. Abdelmalek and B. Rebiai, Existence of global solutions to reaction- diffusion systems with non-homogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional, *Arch. Math.* (Paper 1534) Accepté.
- [30] S. Kouachi and A. Youkana, Global existence for a class of reaction-diffusion systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Vol. 49, Number 3(2001).
- [31] D. Kulkarni, D. Schmidt, S. Tsui. Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices, *Linear Algebra and its Applications* 63 – 80, 297(1999).
- [32] S. Malham et J. Xin, Global solutions to a reactive Boussinesq system with front data on an infinite domain. *Communications in Mathematical Physics*, Volume 193, Issue 2, pp 287 – 316, April(1998).

- [33] R. H. Martin et M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion systems, Nonlinear equations in the applied sciences. Math. Sci. Engrg, 185, Academic Press, Boston, MA, pp. 363 – 398, (1992).
- [34] K. Masuda, On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Hokkaido Mathematical Journal, Volume 12, Number 3, 360 – 370(1983).
- [35] J. Morgan, Global Existence for Semilinear Parabolic Systems, SIAM Journal on Mathematical Analysis. 20(5), 1128 – 1144. (17 pages)(1989).
- [36] J. J. Morgan et S. L. Hollis, The Existence of Periodic Solutions to Reaction-Diffusion Systems with Periodic Data. SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 26, No5, pp.1225 – 1232, September(1995).
- [37] C. V. Pao, Reaction diffusion equations with nonlinear boundary conditions. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications Volume 5, Issue 10, Pages 1077 – 1094 (1981) .
- [38] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, (1983).
- [39] F. Rothe, Global solutions of reaction-diffusion systems,(Lecture Notes in Mathematics) 1072, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984).
- [40] J. Ryan, Global existence of reaction-diffusion equations over multiple domains, Thesis Texas A& M University (2004).
- [41] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1983) .
- [42] M. R. Spiegel, Théorie et Applications de l'analyse. Serie Schaum, (1982).
- [43] H. D. Thomas et D. G. Aronson, Oscillation in a Nonlinear Parabolic Model of Separated Cooperatively Coupled Enzymes, Nonlinear Systems and Applics, Academi Press. New York (1977).
- [44] Turner and Ames, Twi-Sided Bounds for Linked Unknown Nonlinear Boundary Conditions of Reaction-Diffusion Systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications,pp 336 – 378, 71(1979).