



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de
la Vie*



Département : Sciences de la Matière

N d'ordre :.....

Série :.....

Mémoire

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Master

Domain : **Physique**

Option : **Physique de la matière condensée**

Thème

**Analyse de l'oscillateur relativiste et du paradoxe de Klein d'une
particule de spin-0 via le formalisme de Feshbach-Villars (FV) dans
un espace plat**

par :

Hamla Assia

Devant le jury

Prof. Chemam Fayçal **Président** *Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa*

Prof. Abdelmalek Boumali **Rapporteur** *Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa*

Prof. Bouhelal Mouna **Examineur** *Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa*

Date de Soutenance : 09 / Juin/ 2024

© *Mémoire effectué au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



Analyse de l'oscillateur relativiste et du paradoxe de Klein d'une particule de spin-0
via le formalisme de Feshbach-Villars (FV) dans un espace plat

Hamba Assia

24 juillet 2024

ملخص

تُظهر تَشْتُّت الجسيمات النسبية عند مواجهتها لجهود قوية جداً سلوكاً غير متوقع، يُعرف باسم مفارقة كلاين. لقد قمنا بدراسة هذا الظاهرة في إطار معادلات فيشباخ-فيلارس. تمت دراسة نسختي المفارقة المتعلقة بحالات التشتت والحالات المرتبطة. كشفت تحليلاتنا أنه في الصياغة الرياضية لفيشباخ-فيلارس، تُظهر الحالات الكمية مزيجاً من الخصائص الشبيهة بالجسيمات وتلك الشبيهة بالجسيمات المضادة. بناءً على ذلك، فإن مفارقة كلاين تبدو طبيعية تماماً في هذا السياق. تحديداً، بالنسبة لحالة كمية معينة، قد تهيمن الخصائص الشبيهة بالجسيمات في منطقة ما، بينما يمكن ملاحظة سلوك شبيه بالجسيمات المضادة في مناطق أخرى. هذا التداخل بين الخصائص الشبيهة بالجسيمات وتلك الشبيهة بالجسيمات المضادة هو أمر جوهري لفهم مفارقة كلاين. عندما تواجه الجسيمات النسبية حاجزاً جهدياً أعلى بكثير من طاقتها الكلية في حالة السكون، تصبح عملية إنشاء أزواج من الجسيمات والجسيمات المضادة مواتية من الناحية الطاقية. يؤدي هذا الآلية إلى النتيجة المناقضة للتوقعات بأن الجسيمات يمكنها عبور الحاجز بدلاً من أن تُعكس، كما قد تقترح البديهة الكلاسيكية. يوفر صياغة فيشباخ-فيلارس إطاراً رياضياً قوياً لوصف وتحليل هذه التفاعلات المعقدة، مما يبرز الانتقال السلس بين حالات الجسيمات والجسيمات المضادة مع عبور الجسيمات لمناطق مختلفة متأثر بالجهود. باستخدام نفس الاطار النظري، قمنا أيضاً بحساب بعض معايير المعلومات الكمية، وهي معيار فيشر وانتروبيا شانون.

Abstract

The scattering of relativistic particles by very strong potentials exhibits unexpected behavior, known as the Klein paradox. We investigated this phenomenon within the framework of the Feshbach-Villars equations. Both the scattering and bound state versions of the paradox were studied. Our analysis revealed that, in the Feshbach-Villars formalism, quantum states exhibit a mix of particle-like and antiparticle-like characteristics. Consequently, the Klein paradox appears quite natural in this context. Specifically, for a given quantum state, particle-like features may dominate in one region, while antiparticle-like behavior may prevail in another. This interplay between particle-like and antiparticle-like properties is crucial for understanding the Klein paradox. When relativistic particles encounter a potential barrier significantly higher than their rest mass energy, the creation of particle-antiparticle pairs becomes energetically favorable. This mechanism leads to the counterintuitive result that particles can pass through the barrier, rather than being reflected, as classical intuition might suggest. The Feshbach-Villars formalism provides a robust mathematical framework to describe and analyze these complex interactions, highlighting the seamless transition between particle and antiparticle states as the particles traverse different regions influenced by the potential. Using the same formalism, we also calculated certain quantum information parameters, namely the Fisher parameter and Shannon entropy.

Résumé

La diffusion de particules relativistes par des potentiels très forts présente un comportement inattendu, connu sous le nom de paradoxe de Klein. Nous avons étudié ce phénomène dans le cadre des équations de Feshbach-Villars. Les versions du paradoxe concernant les états de diffusion et les états liés ont été examinées. Notre analyse a révélé que, dans le formalisme de Feshbach-Villars, les états quantiques présentent un mélange de caractéristiques semblables à des particules et à des antiparticules. Par conséquent, le paradoxe de Klein apparaît tout à fait naturel dans ce contexte. En particulier, pour un état quantique donné, des caractéristiques semblables à des particules peuvent dominer dans une région, tandis qu'un comportement similaire à des antiparticules peut prévaloir dans une autre. Cette interaction entre les propriétés de type particule et de type antiparticule est essentielle pour comprendre le paradoxe de Klein. Lorsque des particules relativistes rencontrent une barrière de potentiel significativement plus élevée que leur énergie de masse au repos, la création de paires particule-antiparticule devient énergétiquement favorable. Ce mécanisme conduit au résultat contre-intuitif que les particules peuvent traverser la barrière, au lieu d'être réfléchies, comme le suggérerait l'intuition classique. Le formalisme de Feshbach-Villars fournit un cadre mathématique robuste pour décrire et analyser ces interactions complexes, mettant en lumière la transition fluide entre les états de particule et d'antiparticule à mesure que les particules traversent différentes régions influencées par le potentiel. Grâce au même formalisme, nous avons également calculé certains paramètres de l'information quantique, à savoir le paramètre de Fisher et l'entropie de Shannon.

Dédicace

*A mes chers parents, ma mère et mon père .
A mes sœurs ,
A mes frères ,
A ma famille ,
A tous mes amis ,
A tous mes collègues ,
A tous mes enseignants,*

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, je dédie ce modeste travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de master en physique des matériaux à l'Université Echahid Chikh Larbi Tébessi-Tébessa. Avant tout, je remercie ALLAH tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadrant, le Professeur *Abdelmalek Boumali*, pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant que riche, et pour m'avoir guidé tout au long de cette année. Je le remercie pour son expertise, ses conseils avisés, sa disponibilité et sa patience, ainsi que pour ses discussions agréables et encourageantes qui ont enrichi mon travail. J'adresse également mes remerciements à M. *Chemam Fayçal*, Professeur à l'Université Echahid Chikh Larbi Tébessi-Tébessa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.

Je remercie chaleureusement Melle *Bouhelal Mouna*, Professeur à l'Université Echahid Chikh Larbi Tébessi-Tébessa, pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse. Ses remarques et critiques seront grandement appréciées. Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Je ne peux terminer sans remercier ma famille pour leur soutien constant et précieux, tant moral que matériel, qu'ils m'ont apporté tout au long de mes études. À l'âme de mon père, qui m'a inculqué les valeurs d'honneur, de respect, de modestie, de sincérité et d'amour du savoir, illuminant ainsi le chemin de ma vie. À ma mère, qui m'a soutenue chaque jour durant cette thèse, qui a respecté mes décisions et qui m'a constamment encouragée dans les moments difficiles. MERCI! MERCI!

TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	vii
Liste des Figures	viii
1 La forme Hamiltonienne de l'équation de Klein-Gordon	5
1.1 L'équation de Klein-Gordon	5
1.2 Formalism de Feshbach-Villars pour les particules de spin-0	8
1.2.1 Configuration $\{x\}$	8
1.2.1.1 Sans interaction	8
1.2.1.2 Avec interaction	9
1.2.1.3 Aspect physique	11
1.2.2 Configuration $\{p\}$	12
2 Paradoxe de Klein pour les particules de spin-0	14
2.1 Préambule	14
2.2 Paradoxe de Klein	15
2.2.1 L'équation de Klein-Gordon dans un potentiel lisse (smooth potential)	15

3 Détermination des paramètres de Fisher et l'entropie de Shannon pour l'oscillateur de FV	23
3.1 Préambule	23
3.2 L'oscillateur de FV dans un espace plat	24
3.2.1 Les solutions propres à une dimension	24
3.2.2 Le paramètre de Fisher et l'entropie de Shannon pour l'oscillateur FV	25
3.2.2.1 Introduction	25
3.2.2.2 Détermination numérique des deux paramètres	27
3.3 Paradoxe de Klein dans le formalise de FV	28
3.3.1 Introduction	28
3.3.2 Paradoxe de Klein	31
A L'équation de Schrödinger dans un potentiel échelle	41
B Les fonctions hypergéométriques	43
B.1 Le cercle de convergence de la série hypergéométrique de Gauss	43
B.2 Cas élémentaires de la série de Gauss	44
B.3 Valeurs particulières de la fonction hypergéométrique	44
B.4 L'équation différentielle de Riemann	45
B.4.1 Cas spéciaux de la fonction de Riemann P	45

LISTE DES TABLEAUX

3.1 Les valeurs de F et S en fonction de n	29
--	----

LISTE DES FIGURES

2.1	Differents termes R , T et $R + T = 1$	21
2.2	La limite ou $d \rightarrow 0$	22
3.1	La fonction d'onde pour ceratines niveaux d'énergies	27
3.2	La densité de probalite ρ en fonction de x pour ceratines niveaux d'énergies	28
3.3	Densité de Fisher	28
3.4	Densité de Shannon	29
3.5	Le paramètre de Fisher F en fonction de nombre quantique n	30
3.6	Le paramètre de Fisher S en fonction de nombre quantique n	30
3.7	La limite ou $d \rightarrow 0$	37
A.1	Potentiel d'échelle (step potential)	42

INTRODUCTION

En 1928, Dirac introduisit une équation d'onde pour un électron relativiste dans un champ électromagnétique externe. En plus de prendre en compte le spin de l'électron de manière naturelle, l'équation de Dirac a abouti à une équation de continuité avec une expression positive définie pour la fonction de densité, permettant ainsi une interprétation probabiliste similaire à celle de la théorie de Schrödinger. Cependant, un problème majeur de l'équation de Dirac était l'existence d'états d'énergie négative, ce qui impliquait que la matière était instable. Le spectre de l'atome d'hydrogène dérivé de l'équation de Dirac n'a pas d'état fondamental et présente des états avec une énergie négative infinie [1].

Le paradoxe de Klein illustre un autre aspect étrange de ces états. Klein résolut l'équation de Dirac pour un potentiel de saut électrostatique unidimensionnel $V(x) = V_0\theta(x)$ et découvrit que pour $V_0 > 2mc^2$, un électron venant de la gauche dans la gamme d'énergie $mc^2 < E < V_0 - mc^2$ a une probabilité d'apparaître à droite avec une énergie cinétique négative $E - V_0 < -mc^2$. Sauter démontra que le paradoxe de Klein peut être atténué en permettant au potentiel de changer continuellement de 0 à gauche à V_0 à droite. La probabilité pour les électrons d'apparaître à droite avec une énergie cinétique négative devient très faible si le champ électrique, qui est proportionnel à la dérivée du potentiel, est faible.

La théorie des trous de Dirac résolut certains des problèmes liés aux états d'énergie négative. Dans cette théorie, l'état d'énergie le plus bas, appelé "vide", est celui où tous les états d'énergie négative sont occupés par des électrons. Si un électron supplémentaire est placé dans un état d'énergie positive, il est empêché de passer à un état d'énergie négative par le principe de Pauli, ce qui rétablit la stabilité de l'atome d'hydrogène. De plus, comme il est bien connu, l'absence d'un électron dans le vide peut être interprétée comme la présence d'un positron. La théorie des trous, qui est manifestement une théorie multiparticulaire, fut finalement transformée en un formalisme de seconde quantification où les fonctions d'onde spinorielles devinrent des opérateurs de champ.

Cette équation fut proposée avant celle de Dirac, mais elle tomba en disgrâce parce que la fonction de densité dans l'équation de continuité n'est pas positive, empêchant ainsi une interprétation probabiliste conven-

tionnelle. En 1934, Pauli et Weisskopf montrèrent qu'il n'y a pas de difficulté d'interprétation si l'équation de Klein-Gordon est considérée comme l'équation de mouvement d'un champ et quantifiée de manière habituelle. Ils démontrèrent que le courant quadrivectoriel doit être interprété comme un courant de charge, la composante temporelle étant alors vue comme une densité de charge plutôt qu'une densité de probabilité [2, 3].

Le travail de Pauli et Weisskopf traite clairement d'une interprétation multiparticule de l'équation de Klein-Gordon. Il existe cependant une interprétation monoparticulaire de cette équation utilisant une fonction d'onde à deux composants dans un espace de charge bidimensionnel avec une métrique indéfinie. La norme du vecteur d'état est de +1 pour une particule chargée positivement et de -1 pour une particule chargée négativement. Les deux composants résultent du traitement de la fonction d'onde et de sa première dérivée temporelle comme entités indépendantes. Cela mène à une équation linéaire en $\partial/\partial t$ et permet ainsi la détermination d'un Hamiltonien pour le système. Cette forme de l'équation de Klein-Gordon est largement discutée dans les manuels modernes [4].

Le formalisme de Feshbach-Villars [5] propose une manière alternative de traiter le paradoxe de Klein [6, 7]. En linéarisant l'équation de Klein-Gordon, ce formalisme permet de séparer les solutions en composants d'énergie positive et négative, facilitant ainsi une meilleure compréhension des phénomènes associés aux potentiels élevés. Le paradoxe de Klein, qui pose des défis en termes d'interprétation des états d'énergie négative, peut être revisité dans ce cadre pour fournir des solutions plus intuitives. En effet, le formalisme de Feshbach-Villars traite explicitement les composantes φ et χ de la fonction d'onde, offrant une analyse plus détaillée des densités de probabilité et des courants associés. Cette approche permet également de calculer des densités de probabilité plus précises et d'interpréter les flux de particules à travers des barrières de potentiel de manière cohérente avec la physique relativiste.

L'incorporation des paramètres d'information de Fisher et de Shannon dans le formalisme de Feshbach-Villars enrichit notre compréhension des systèmes quantiques. L'information de Fisher, qui mesure la sensibilité d'une distribution de probabilité aux changements de paramètres, et l'entropie de Shannon, qui quantifie l'incertitude ou le contenu d'information de la distribution, fournissent des outils puissants pour analyser les états quantiques. Dans le contexte du formalisme de Feshbach-Villars, ces paramètres peuvent être utilisés pour évaluer la précision des mesures des états quantiques et la localisation des particules. Une information de Fisher élevée indique des états plus localisés, réduisant ainsi l'incertitude de la position. En parallèle, l'entropie de Shannon offre une mesure globale de l'incertitude, essentielle pour la théorie de l'information quantique [8–24].

Le formalisme de Feshbach-Villars présente plusieurs avantages significatifs par rapport à l'équation de Klein-Gordon. Premièrement, en linéarisant l'équation de Klein-Gordon, il permet une séparation claire entre les composantes d'énergie positive et négative, ce qui simplifie l'interprétation des états quantiques. Cela est particulièrement utile pour aborder des problèmes tels que le paradoxe de Klein, où la distinction entre ces états est cruciale. De plus, le formalisme de Feshbach-Villars offre une meilleure compatibilité avec les approches standard de la mécanique quantique relativiste, en alignant les équations sur celles de la théorie de Dirac. En

conséquence, il fournit un cadre unifié pour traiter les particules de spin-0 et de spin-1/2, facilitant ainsi les comparaisons et les extensions théoriques.

Afin de structurer cette thèse de manière cohérente, chaque chapitre sera organisé de la manière suivante :

- Chapitre 1 : Fournit le contexte historique et présente les problématiques principales de la mécanique quantique relativiste, notamment l'équation de Dirac, l'existence d'états d'énergie négative et le paradoxe de Klein.
- Chapitre 2 : Introduit et compare les deux principaux formalismes. Discute des avantages et des limitations de chaque approche, en mettant en lumière les aspects théoriques et les interprétations probabilistes.
- Chapitre 3 : Analyse le paradoxe de Klein en utilisant l'équation de Klein-Gordon dans le contexte d'un potentiel électrostatique lisse. Explore les solutions et les probabilités associées aux états d'énergie négative et discute des méthodes pour atténuer le paradoxe.
- Chapitre 4 : Réexamine le paradoxe de Klein en utilisant le formalisme de Feshbach-Villars. Offre une analyse détaillée des composantes de la fonction d'onde et calcule les paramètres d'information de Fisher et de Shannon pour l'oscillateur de Feshbach-Villars, fournissant des insights sur la précision des mesures et l'incertitude des états quantiques.
- Chapitre 5 : Résume les contributions principales de mémoire, discute des résultats obtenus et de leur impact sur la compréhension des systèmes quantiques relativistes. Présente des perspectives de recherche future, notamment des extensions potentielles du formalisme de Feshbach-Villars, des applications pratiques des paramètres d'information et des possibilités d'expérimentation.

CHAPITRE 1

LA FORME HAMILTONIENNE DE L'ÉQUATION DE KLEIN-GORDON

1.1 L'équation de Klein-Gordon

Nous débutons en utilisant la relation relativiste entre l'énergie et l'impulsion pour les particules libres [25] :

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (1.1)$$

Et en utilisant la correspondance

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1.2)$$

où ∇ est l'opérateur nabla défini par :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3)$$

En insérant (1.2) dans (1.1), on trouve

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \quad (1.4)$$

En multipliant par la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$, nous obtenons l'équation de Klein-Gordon (K-G) pour les particules relativistes de spin 0 :

$$-\hbar \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = (-c^2 \hbar^2 \hat{\nabla}^2 + m^2 c^4) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

où $\nabla^2 = \Delta$ est le Laplacien donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

Les unités naturelles (UN) sont définies de manière à ce que les constantes fondamentales, c'est-à-dire la constante de Planck et la vitesse de la lumière, soient $\hbar = c = 1$. Elles sont particulièrement utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou impliquant des effets quantiques mesurables.

En utilisant ces unités, l'équation 1.5 se simplifie en :

$$-\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = (-\hat{\nabla}^2 + m^2)\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

L'équation de Klein-Gordon pour les particules relativistes de spin 0 peut être exprimée par :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

ou encore

$$(\square + m^2)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.9)$$

où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.10)$$

est l'opérateur d'Alembertien, également noté :

$$\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (1.11)$$

Ainsi, l'équation de Klein-Gordon dans un espace unidimensionnel s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.12)$$

Il est possible de calculer la densité de probabilité et la densité de courant de la manière suivante :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (1.14)$$

Pour calculer la densité de probabilité et la densité de courant à partir de l'équation de Klein-Gordon.

Nous commençons avec l'équation 1.8 de Klein-Gordon pour une particule de spin 0 dans des unités naturelles ($\hbar = c = 1$) :

$$(\square + m^2)\Psi = 0 \quad (1.15)$$

Pour la démonstration, nous avons besoin de l'équation de Klein-Gordon et de son conjugué complexe :

$$(\square + m^2)\Psi = 0 \quad (1.16)$$

et

$$(\square + m^2)\Psi^* = 0 \quad (1.17)$$

Nous multiplions la première équation par Ψ^* et la seconde par Ψ , et soustrayons l'une de l'autre :

$$\Psi^*(\square + m^2)\Psi - \Psi(\square + m^2)\Psi^* = 0 \quad (1.18)$$

Cela donne :

$$\Psi^*\square\Psi + m^2\Psi^*\Psi - \Psi\square\Psi^* - m^2\Psi\Psi^* = 0 \quad (1.19)$$

Les termes en m^2 se simplifient, ce qui donne :

$$\Psi^*\square\Psi - \Psi\square\Psi^* = 0 \quad (1.20)$$

En développant \square , nous avons :

$$\Psi^* \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi \right) - \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi^* \right) = 0 \quad (1.21)$$

Cela peut être réécrit comme :

$$\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} - \Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi \nabla^2 \Psi^* = 0 \quad (1.22)$$

Maintenant, réorganisons les termes :

$$\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (1.23)$$

Nous reconnaissons que les deux termes du côté droit peuvent être réécrits comme une divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (1.24)$$

Nous définissons la densité de probabilité ρ et la densité de courant J par :

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.25)$$

et

$$J = \frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (1.26)$$

En utilisant ces définitions, nous pouvons réécrire notre équation précédente comme une équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \quad (1.27)$$

Cette équation de continuité exprime la conservation de la probabilité, où ρ est la densité de probabilité et J est la densité de courant associée à la fonction d'onde Ψ .

1.2 Formalism de Feshbach-Villars pour les particules de spin-0

1.2.1 Configuration $\{x\}$

1.2.1.1 Sans interaction

On peut écrire l'équation de Klein-Gordon sous forme hamiltonienne en divisant Ψ de manière telle [5,26]

$$\psi = \varphi + \chi \quad (1.28)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V\right)\psi = m(\varphi - \chi) \quad (1.29)$$

Après cela, les deux composants φ et χ sont donnés par :

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{V}{m}\right)\psi + \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right] \quad (1.30)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{V}{m}\right)\psi - \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right] \quad (1.31)$$

En introduisant φ et χ dans l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V\right)(\varphi + \chi) = m(\varphi - \chi), \quad (1.32)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V\right)(\varphi - \chi) = \left[\frac{P^2}{m} + m\right](\varphi + \chi) \quad (1.33)$$

En manipulant légèrement ces équations, on obtient un système d'équations linéaires dépendantes qui sont des dérivées de premier ordre dans le temps :

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{P^2}{2m}(\varphi + \chi) + (m + V)\varphi \quad (1.34)$$

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{P^2}{2m}(\varphi + \chi) - (m - V)\chi \quad (1.35)$$

Ces équations sont appelées les équations de Feshbach-Villars des particules de spin-0 où FV-0. On observe une accentuation de la forme hamiltonienne avec un vecteur à deux composants

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Puis l'équation (1.34) devient :

$$\mathcal{H}_{FV0} = (\tau_3 + i\tau_2) \frac{p^2}{2m} + \tau_3 m + V \quad (1.37)$$

où $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli 2x2 conventionnelles données par :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Enfin on écrit la probabilité et la densité de courant comme suit :

$$\rho(r, t) = \varphi\varphi^* - \chi\chi^* = \Psi\tau_3\Psi^\dagger \quad (1.39)$$

$$j(r, t) = \frac{i}{2m} (\Psi^*\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\tau_3(\tau_3 + i\tau_2))\Psi \quad (1.40)$$

1.2.1.2 Avec interaction

Cette section aborde la description quantique relativiste d'une particule de spin-0 se propageant dans l'espace-temps de Minkowski en utilisant le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. L'équation de Klein-Gordon covariante habituelle pour une particule scalaire massive Φ avec une masse $m > 0$ est la suivante :

$$(\eta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + m^2)\Psi(x, t) = 0 \quad (1.41)$$

Le dérivé covariant minimalement couplé est noté $D_\mu = -i(p_\mu - ieA_\mu)$. Le quadrivecteur classique de la quantité de mouvement est $p_\mu = (E, -P)$, tandis que le quadrivecteur électromagnétique est $A_\mu = (A_0, A)$. La magnitude de la charge de la particule est donnée par e .

Il est à noter à ce stade que l'équation peut être exprimée sous une forme hamiltonienne avec la première dérivée par rapport au temps, c'est-à-dire sous la forme d'une équation de type Schrödinger :

$$\mathcal{H}\Psi(x, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t) \quad (1.42)$$

L'Hamiltonien \mathcal{H} peut être défini en utilisant le processus de linéarisation de Feshbach-Villars (FV), qui consiste à convertir l'équation 1.41 en une équation différentielle du premier ordre par rapport à La fonction d'onde à deux composantes est introduite :

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) \\ \chi(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{m}\mathcal{D} \\ 1 - \frac{i}{m}\mathcal{D} \end{pmatrix} \Psi(x, t) \quad (1.43)$$

Ici, $\Psi(x, t)$ obéit à l'équation d'onde de Klein-Gordon, et \mathcal{D} est défini de telle manière que :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + ieA_0(x) \quad (1.44)$$

La transformation mentionnée 1.43 implique l'insertion de fonctions d'onde qui satisfont aux exigences :

$$\psi = \varphi + \chi, \quad (1.45)$$

$$i\mathcal{D}\psi = m(\varphi + \chi), \quad (1.46)$$

Il est plus pratique d'écrire que

$$\varphi = \frac{1}{2m} \left[m + i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] \psi, \quad (1.47)$$

$$\chi = \frac{1}{2m} \left[m - i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] \psi \quad (1.48)$$

L'équation 1.41 devient équivalente à :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\varphi + \chi) = m(\varphi - \chi), \quad (1.49)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] (\varphi - \chi) = \left[\frac{(p_i - eA_i)^2}{m} + m \right] (\varphi + \chi) \quad (1.50)$$

L'addition et la soustraction de ces deux équations donnent un système d'équations différentielles couplées du premier ordre

$$i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla - eA \right)^2 (\varphi + \chi) + (eV_0 + m) \varphi, \quad (1.51)$$

$$i \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \nabla - eA \right)^2 (\varphi + \chi) + (eV_0 - m) \chi. \quad (1.52)$$

L'Hamiltonien de FV d'une particule scalaire en présence de l'interaction électromagnétique peut être exprimé en utilisant les équations ci-dessus comme suit :

$$\mathcal{H}_{FV} = (\tau_3 + i\tau_2) \frac{(p_i - eA_i)^2}{2m} + m\tau_3 + eA_0(x) \quad (1.53)$$

où $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli 2x2 conventionnelles données par :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Il est à noter que l'Hamiltonien (1.53) satisfait à l'exigence de généralité hermitienne .

$$\mathcal{H}_{FV} = \tau_3 \mathcal{H}_{FV}^\dagger \tau_3, \quad \mathcal{H}_{FV}^\dagger = \tau_3 \mathcal{H}_{FV} \tau_3 \quad (1.55)$$

L'Hamiltonien de FV unidimensionnel se réduit à celui de la propagation de la particule libre , c'est-à-dire qu'aucune interaction n'est supposée ($A_\mu = 0$)

$$H_0 = (\tau_3 + i\tau_2) \frac{p_x^2}{2m} + m\tau_3 \quad (1.56)$$

Les solutions de l'hamiltonien libre indépendant du temps sont simplement des états stationnaires.

En supposant la solution

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp(-iEt) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \exp(-iEt) \quad (1.57)$$

avec E représentant l'énergie du système . Par conséquent ,l'équation (1.56) peut être représentée comme

$$H_0\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1.58)$$

Il s'agit de l'équation de FV unidimensionnelle de la particule relativiste libre de spin-0 ,et elle est réalisée afin d'obtenir une équation de type Schrodinger alternative à l'équation de KG. Enfin on écrit la probabilité et la densité de courant comme suit :

$$\rho(r, t) = \varphi\varphi^* - \chi\chi^* = \Psi\tau_3\Psi^\dagger \quad (1.59)$$

$$J(r, t) = \frac{i}{2m} (\Psi^*\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)) - (e/m)\Lambda\Psi^*\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\Psi \quad (1.60)$$

1.2.1.3 Aspect physique

Les avantages de l'utilisation de la combinaison particulière φ et χ sont les suivants : Tout d'abord, la densité ρ apparaît comme la différence de deux densités définies positives, comme on pourrait s'y attendre dans une théorie décrivant simultanément des particules avec les deux signes de charge. Deuxièmement, lorsque φ et χ sont utilisés comme composants de la fonction d'onde, la symétrie fondamentale de la charge du formalisme relativiste devient apparente. Cela se voit le plus facilement en regardant le conjugué complexe de (1.52) :

$$i\frac{\partial\chi^*}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i}\nabla + e\Lambda \right)^2 (\varphi^* + \chi^*) + (m - eV_0)\chi^*, \quad (1.61)$$

$$i\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i}\nabla + e\Lambda \right)^2 (\varphi^* + \chi^*) - (mc^2 + eV_0)\varphi^*, \quad (1.62)$$

ce qui montre que, si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

satisfait l'équation

$$H(e)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (1.64)$$

, il existe une fonction d'onde de « conjugaison de charge »

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \chi^* \\ \varphi^* \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

qui satisfait l'équation

$$H(-e)\Psi_c = i\left(\frac{\partial\Psi_c}{\partial t}\right) \quad (1.66)$$

. $H(-e)$ diffère de $H(e)$ par un changement de signe de la charge électrique. Notez que si Ψ est un état propre d'énergie positive de $H(e)$, l'état propre associé Ψ_c est un état propre d'énergie négative de $H(-e)$, et vice versa. Nous voyons également que (1.58)

$$\rho_c = \Psi^* \tau_3 \Psi_c = -\rho, \quad (1.67)$$

et

$$j_c = j. \quad (1.68)$$

La densité de courant j ne change pas de signe parce que, selon l'équation (1.65), Ψ_c décrit un système dans lequel tous les moments sont inversés en plus. Le point important maintenant est que, dans la limite $e \rightarrow 0$, la solution de conjugaison de charge Ψ est également une solution de l'équation de sorte que ses deux solutions indépendantes sont Ψ et Ψ_c . De plus, nous voyons à partir des équations (1.12) et (1.39) que, si Ψ est normalisée de sorte que la charge,

$$\int \Psi^* \tau_3 \Psi d^3x = \pm 1, \quad (1.69)$$

La normalisation pour la solution de conjugaison de charge est de signe opposé, à savoir :

$$\int \Psi_c^* \tau_3 \Psi_c d^3x = \mp 1. \quad (1.70)$$

Ainsi, pour le cas sans champ, il existe une correspondance un-à-un entre les solutions "positives" et "négatives" de l'équation d'onde (1.52), la solution positive, normalisée à +1, décrivant une charge positive, et la négative, une charge négative. Cette correspondance doit subsister si un champ électromagnétique est introduit. La principale clarification obtenue jusqu'à présent est l'aperçu que l'augmentation des "degrés de liberté" liée à l'apparition d'une dérivée temporelle de second ordre dans l'équation de Klein-Gordon correspond à la description simultanée d'une particule de charge soit positive soit négative; c'est-à-dire que la valeur de la charge devient un degré de liberté du système. La solution décrivant une particule de charge positive peut être normalisée à +1; la solution de conjugaison de charge sera automatiquement normalisée à -1 et décrira ainsi une charge négative.

1.2.2 Configuration $\{p\}$

Comme le Hamiltonien d'une particule libre ne peut être diagonal que dans l'espace des moments, nous écrivons d'abord l'équation (1.31) dans l'espace p . Nous devons simplement effectuer les remplacements,

$$x \rightarrow i\hbar\nabla_p, \quad \hbar/i\nabla \rightarrow p \quad (1.71)$$

dans l'équation (1.52) pour obtenir l'équation transformée. L'équation transformée se lit donc comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(p, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left[p - \frac{e\mathbf{A}}{c} (i\hbar \nabla_p) \right]^2 (\tau_3 + i\tau_2) + mc^2 \tau_3 + eV_0(i\hbar \nabla_p) \right\} \Psi(p, t). \quad (1.72)$$

L'opérateur $\phi(i\hbar \nabla_p)$ est plus facilement défini en termes de sa transformée de Fourier $\Phi(q)$, où

$$\phi(x) = \int e^{iq \cdot x / \hbar} \Phi(q) d^3 q. \quad (1.73)$$

Ensuite,

$$\phi(i\hbar \nabla_p) = \int \exp(-q \cdot \nabla_p) \Phi(q) d^3 q. \quad (1.74)$$

De plus, à partir des propriétés de l'opérateur exponentielle,

$$\exp(-q \cdot \nabla_p) f(p) = f(p - q), \quad (1.75)$$

alors

$$\phi(i\hbar \nabla_p) f(p) = \int \Phi(q) f(p - q) d^3 q, \quad (1.76)$$

soit

$$\phi(i\hbar \nabla_p) f(p) = \int \Phi(p - q) f(q) d^3 q, \quad (1.77)$$

un résultat bien connu. Enfin, L'Hamiltonien de la particule libre dans la configuration $\{p\}$ est donc

$$H_0 = (\tau_3 + i\tau_2) \left(\frac{p^2}{2m} \right) + \tau_3 m. \quad (1.78)$$

CHAPITRE 2

PARADOXE DE KLEIN POUR LES PARTICULES DE SPIN-0

2.1 Préambule

Le paradoxe de Klein est un phénomène en mécanique quantique qui concerne le comportement des particules relativistes, telles que les électrons, lorsqu'elles rencontrent une barrière de potentiel élevée. Découvert par Oskar Klein en 1929, ce paradoxe met en lumière des aspects contre-intuitifs de la théorie quantique relativiste.

- Comportement classique vs quantique : Dans la mécanique classique, lorsqu'une particule rencontre une barrière de potentiel plus haute que son énergie, elle est réfléchi. En mécanique quantique, une particule non relativiste peut également être partiellement transmise à travers une barrière de potentiel, même si son énergie est inférieure à la hauteur de la barrière, grâce à l'effet tunnel.
- Cas relativiste : Pour une particule relativiste, comme un électron, gouvernée par l'équation de Dirac, le comportement change radicalement. Si l'énergie de la barrière de potentiel dépasse deux fois la masse de la particule multipliée par la vitesse de la lumière au carré ($2mc^2$ pour un électron), alors une situation paradoxale survient.
- Transmission totale : Le paradoxe de Klein prédit que, dans ces conditions, la particule ne sera pas seulement partiellement transmise, mais complètement transmise à travers la barrière, quelle que soit la hauteur de celle-ci. Cela signifie qu'au lieu d'être réfléchi ou de s'arrêter à la barrière, la particule continue à travers celle-ci comme si elle n'existait pas.
- Production de paires : Une des explications du paradoxe est que, en présence d'une barrière de potentiel très élevée, des paires particule-antiparticule peuvent être créées. Dans ce cas, la barrière de potentiel peut "créer" un électron et un positron à partir de l'énergie du champ, permettant ainsi à l'électron de traverser la barrière en se combinant avec l'antiparticule créée.

En résumé, le paradoxe de Klein révèle que, dans des conditions extrêmes de potentiel, les règles intuitives de la mécanique quantique non relativiste ne s'appliquent plus, et des phénomènes nouveaux comme la production de paires de particules deviennent importants. Ce paradoxe a des implications profondes pour notre compréhension des interactions fondamentales des particules dans les champs de haute énergie. Le paradoxe de Klein est un phénomène en mécanique quantique qui concerne le comportement des particules relativistes, telles que les électrons, lorsqu'elles rencontrent une barrière de potentiel élevée. Découvert par Oskar Klein en 1929, ce paradoxe met en lumière des aspects contre-intuitifs de la théorie quantique relativiste. L'électron initial peut "traverser" la barrière en créant une antiparticule de l'autre côté, et ainsi se reconstituer de l'autre côté de la barrière. Ceci explique la transmission totale prédite par le paradoxe de Klein.

En résumé, le paradoxe de Klein révèle que, dans des conditions extrêmes de potentiel, les règles intuitives de la mécanique quantique non relativiste ne s'appliquent plus, et des phénomènes nouveaux comme la production de paires de particules deviennent importants. Ce paradoxe a des implications profondes pour notre compréhension des interactions fondamentales des particules dans les champs de haute énergie.

2.2 Paradoxe de Klein

2.2.1 L'équation de Klein-Gordon dans un potentiel lisse (smooth potential)

Nous considérons ici la solution de l'équation de Klein-Gordon unidimensionnelle et dépendante du temps avec l'un des potentiels électrostatiques de Sauter. L'équation est [25, 27, 28]

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - m^2 + (E - V(x))^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

avec :

$$V(x) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{d}\right) \right) \quad (2.2)$$

Ce potentiel tend vers zéro pour des valeurs négatives importantes de x et augmente de manière monotone jusqu'à V_0 pour des valeurs positives importantes de x . Pour résoudre l'équation (2.1), nous effectuons la transformation suivante :

$$Z = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)} \quad (2.3)$$

Pour cela, on a

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{dZ}{dZ} = \frac{dZ}{dx} \frac{d}{dZ} \quad (2.4)$$

où

$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d \left(1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)\right)^2} = -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 \quad (2.5)$$

En insérant (2.5) dans (2.4), on trouve :

$$\frac{d}{dx} = -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 \frac{d}{dZ} \quad (2.6)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 \frac{d}{dZ} \right) \\ &= -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d^2} Z^2 \frac{d}{dZ} - \frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} \frac{d}{dx} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

En premier lieu, on calcule le terme $\frac{d}{dx} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right)$ comme suit: on a que :

$$\frac{d}{dx} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right) = \frac{d}{dZ} \frac{d}{dx} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right) = \frac{dZ}{dx} \frac{d}{dZ} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{dZ}{dx} \frac{d}{dZ} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right) = \frac{dZ}{dx} \left(2Z \frac{d}{dZ} + Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \right) = \frac{dZ}{dx} 2Z \frac{d}{dZ} + \frac{dZ}{dx} Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \quad (2.9)$$

alors, on trouve :

$$\frac{d}{dx} \left(Z^2 \frac{d}{dZ} \right) = -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 2Z \frac{d}{dZ} - \frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \quad (2.10)$$

Injections ce terme dans l'équation(2.7), on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d^2} Z^2 \frac{d}{dZ} - \frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} \left[-\frac{2\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 Z \frac{d}{dZ} - \frac{\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{d} Z^2 Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \right] \quad (2.11)$$

De (2.3), on trouve

$$\exp\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{1-Z}{Z} \quad (2.12)$$

En substituant (2.12) dans l'équation (2.11)

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{1-Z}{d^2} Z^2 \frac{d}{dZ} - \frac{1-Z}{d} \left[-\frac{1-Z}{d} Z^2 2Z \frac{d}{dZ} - \frac{1-Z}{d} Z^2 Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \right] \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{1-Z}{d^2} Z \frac{d}{dZ} + \frac{(1-Z)^2}{d^2} 2Z \frac{d}{dZ} + \frac{(1-Z)^2}{d^2} Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \quad (2.14)$$

Après un calcul simple et direct, on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{1-Z}{d^2} Z [2Z - 1] \frac{d}{dZ} + \frac{(1-Z)^2}{d^2} Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \quad (2.15)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\sinh \frac{x}{2d} = \exp\left(\frac{x}{2d}\right) - \exp\left(-\frac{x}{2d}\right) \quad (2.16)$$

$$\cosh \frac{x}{2d} = \exp\left(\frac{x}{2d}\right) + \exp\left(-\frac{x}{2d}\right) \quad (2.17)$$

$$\tanh \frac{x}{2d} = \frac{\sinh \frac{x}{2d}}{\cosh \frac{x}{2d}} = \frac{\exp\left(-\frac{x}{2d}\right) [\exp\left(\frac{x}{d}\right) - 1]}{\exp\left(-\frac{x}{2d}\right) [\exp\left(\frac{x}{d}\right) + 1]} \quad (2.18)$$

$$\tanh \frac{x}{2d} = 1 - 2Z \quad (2.19)$$

Alors :

$$V(x) = \frac{V_0}{2}(1 + 1 - 2Z) = V_0(1 - Z) \quad (2.20)$$

Remplaçons (2.15) et (2.20) dans l'équation (2.1) on trouve :

$$\left[-\frac{1-Z}{d^2} Z [2Z - 1] \frac{d}{dZ} + \frac{(1-Z)^2}{d^2} Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} - m^2 + (E - V_0(1 - Z))^2 \right] \varphi(Z) = 0 \quad (2.21)$$

Multipliez les deux cotés de l'équation par $\left(\frac{d^2}{(1-Z)^2 Z^2}\right)$, on obtient :

$$\frac{d^2}{dZ^2} \varphi(Z) - \frac{(2Z - 1)}{(1 - Z)Z} \frac{d}{dZ} \varphi(Z) + [-m^2 + (E - V_0(1 - Z))^2] \frac{d^2}{(1 - Z)^2 Z^2} \varphi(Z) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2}{dZ^2} \varphi(Z) + \frac{(2Z - 1)}{(Z - 1)Z} \frac{d}{dZ} \varphi(Z) + [-m^2 + (E - V_0(1 - Z))^2] \frac{d^2}{(1 - Z)^2 Z^2} \varphi(Z) = 0 \quad (2.23)$$

Pour le deuxième term $[-m^2 + (E - V_0(1 - Z))^2] \frac{d^2}{(1-Z)^2 Z^2} \varphi(Z)$, on a:

$$[-m^2 + (E + V_0(Z - 1))^2] \frac{d^2}{(1 - Z)^2 Z^2} \varphi(Z) = [-m^2 + (E + V_0(Z - 1))^2] \frac{d^2}{(Z - 1)^2 Z^2} \varphi(Z) \quad (2.24)$$

Alors :

$$[-m^2 + (E + V_0(Z - 1))^2] \frac{d^2}{(Z - 1)^2 Z^2} \varphi(Z) = \left[\frac{-m^2 + E^2 + V_0^2(Z - 1)^2 + 2EV_0(Z - 1)}{(Z - 1)Z} \right] \frac{d^2}{(Z - 1)Z} \varphi(Z) \quad (2.25)$$

Nous faisons quelques dérivations et simplifications, on obtient :

$$[-m^2 + (E - V_0(1 - Z))^2] \frac{d^2}{(1 - Z)^2 Z^2} \varphi(Z) = \left[V_0^2 d^2 - \frac{((E - V_0)^2 - m^2)d^2}{Z} + \frac{(E^2 - m^2)d^2}{(Z - 1)} \right] \frac{\varphi(Z)}{(Z - 1)Z} \quad (2.26)$$

Injections ce terme dans l'équation(2.23), on trouve:

$$\frac{d^2}{dZ^2} \varphi(Z) + \frac{2Z - 1}{Z(Z - 1)} \frac{d}{dZ} \varphi(Z) + \left[-\frac{q^2 d^2}{Z} + V_0^2 d^2 + \frac{k^2 d^2}{(Z - 1)} \right] \frac{\varphi(Z)}{(Z - 1)Z} = 0 \quad (2.27)$$

Avec

$$k^2 = E^2 - m^2, \quad (2.28)$$

$$q^2 = (E - V_0)^2 - m^2, \quad (2.29)$$

$$q^2 = [E - (V_0 + m)] [E - (V_0 - m)] \quad (2.30)$$

On reconnaît l'équation transformée comme une équation différentielle de Riemann avec des points réguliers à $Z = 0, 1, \infty$. Dans la notation d'Abramowitz et Stegun [29, 30], cette équation est :

$$\frac{d^2}{dZ^2}\varphi(Z) + \left(\frac{1 - \alpha - \alpha'}{Z} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{Z - 1} \right) \frac{d}{dZ}\varphi(Z) + \left[-\frac{\alpha\alpha'}{Z} + \beta\beta' + \frac{\gamma\gamma'}{(Z - 1)} \right] \frac{\varphi(Z)}{(Z - 1)Z} = 0 \quad (2.31)$$

avec la condition

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1 \quad (2.32)$$

En comparant les deux équations ([2.27]) et (2.31), on trouve :

$$\alpha\alpha' = q^2 d^2, \quad \beta\beta' = V_0^2 d^2, \quad \gamma\gamma' = k^2 d^2 \quad (2.33)$$

comme

$$1 - \alpha - \alpha' = 1, \quad 1 - \beta - \beta' = 0, \quad 1 - \gamma - \gamma' = 1 \quad (2.34)$$

on a :

$$\beta\beta' = V_0^2 d^2 \beta(1 - \beta) \Rightarrow V_0^2 d^2 \beta^2 - \beta + V_0^2 d^2 = 0 \quad (2.35)$$

Après un calcul simple, les coefficients $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ et γ' sont déterminés comme suit :

$$\alpha = -\alpha' = iqd, \quad (2.36)$$

$$\beta = \beta' = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4V_0^2 d^2}), \quad (2.37)$$

$$\gamma = -\gamma' = ikd \quad (2.38)$$

La solution de cette équation est :

$$\Psi = NZ^\alpha (Z - 1)^\gamma F(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma; 1 + \alpha - \alpha'; Z) \quad (2.39)$$

où N est une constante arbitraire et dont

$$a = \alpha + \beta + \gamma = -iqd + ikd + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s, \quad (2.40)$$

$$b = \alpha + \beta' + \gamma = -iqd + ikd + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s, \quad (2.41)$$

$$c = 1 + \alpha - \alpha' = 1 - 2iqd, \quad (2.42)$$

$$s = (1 - 4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

Enfin

$$\Psi(x) = NZ^\alpha (Z - 1)^\gamma F(a, b; c; Z) \quad (2.44)$$

Nous pouvons calculer les coefficients de réflexion et de transmission R et T relatifs au potentiel lisse. Pour cela, nous devons d'abord discuter du comportement asymptotique de la fonction d'onde lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

Soit

$$Z = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)} \quad (2.45)$$

alors

$$Z - 1 = \frac{-\exp\left(\frac{x}{d}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)} \quad (2.46)$$

- Dans le cas où $x \rightarrow +\infty$ ($Z \rightarrow 0$), et en utilisant

$$\lim_{Z \rightarrow 0} Z^\alpha \simeq \left(\exp\left(-\frac{x}{d}\right)\right)^\alpha \simeq \exp\left(-\alpha \frac{x}{d}\right) \simeq \exp(iqx) \quad (2.47)$$

$$\lim_{Z \rightarrow 0} (1 - Z)^\gamma \simeq \left(1 - \left(1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)\right)^{-1}\right)^\gamma \simeq (1)^\gamma \simeq 1 \quad (2.48)$$

dont

$$\lim_{Z \rightarrow 0} F(a, b; c; 0) = 1 \quad (2.49)$$

Alors

$$\Psi(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{iqx}. \quad (2.50)$$

- le cas où $x \rightarrow -\infty$ ($Z \rightarrow 1$), et en utilisant

$$\lim_{Z \rightarrow 1} Z^\alpha \simeq (1)^\alpha \simeq 1 \quad (2.51)$$

$$\lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z)^\gamma \simeq \exp\left(\frac{\gamma x}{d}\right) \quad (2.52)$$

$$F(a, b, c; Z) = A \times F(a, b; a+b-c+1; 1-Z) + B(1-Z)^{c-a-b} \times F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-Z) \quad (2.53)$$

$$\Psi(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad (2.54)$$

avec

$$A = \Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/\Gamma(c-a)\Gamma(c-b), \quad (2.55)$$

$$B = \Gamma(c)\Gamma(a+b-c)/\Gamma(a)\Gamma(b). \quad (2.56)$$

Le courant quadrivectoriel pour l'équation de Klein-Gordon est

$$j_{(\mu, t)} = \frac{i}{2m} (\Psi^* \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \Psi) \quad (2.57)$$

En utilisant la composante $\mu = 1$, nous trouvons pour les coefficients de réflexion et de transmission

$$R = j_{\text{ref}}/j_{\text{inc}} = |B/A|^2, \quad (2.58)$$

$$T = j_{\text{trans}}/j_{\text{inc}} = q/k |A|^2 \quad (2.59)$$

D'après (2.30), nous voyons que q est purement imaginaire

- si $V_0 - m < E < V_0 + m$, ce qui conduit à

$$R = 1, \quad T = 0 \quad (V_0 - m < E < V_0 + m). \quad (2.60)$$

C'est un résultat attendu, puisque l'énergie cinétique est en dessous du sommet de la barrière (voir figure. 2.1).

- Si $E > V_0 + m$ ou $E < V_0 - m$, q est réel. Dans le premier cas, l'énergie cinétique est au-dessus du sommet de la barrière. La deuxième situation, qui est paradoxale, ne se produit que si $V_0 > 2m$, car nous devons avoir $E > m$. Dans les deux cas, si l'on suppose $2V_0 d < 1$, les coefficients peuvent être simplifiés en utilisant les identités bien connues

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= \pi \csc \pi z, \\ \Gamma(z+1) &= z \Gamma(z). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Les résultats pour $2V_0 d > 1$ peuvent être obtenus par continuation analytique. Nous trouvons [28]

$$R = \frac{\cosh[2\pi(k-q)d] + \cos(\pi s)}{\cosh[2\pi(k+q)d] + \cos(\pi s)}, \quad T = 2 \frac{\sinh(2\pi qd) \sinh(2\pi kd)}{\cosh[2\pi(k+q)d] + \cos(\pi s)}, \quad (2.62)$$

où $E > V_0 + m$ ou $E < V_0 - m$ avec $V_0 > 2m$. Il est facile de vérifier que $0 < R < 1$ pour tous les k et q positifs, également, puisque $R + T = 1$, $0 < T < 1$ pour tous les k et q positifs. Il n'est pas vraiment clair comment choisir le signe de q pour $m < E < V_0 - m$, car c'est le régime paradoxal.

- Si $q < 0$, $R > 1$ et $T < 0$. Dans l'analyse de Bjorken et Drell [3] du paradoxe de Klein pour l'équation de Dirac, ils concluent que $R > 1$ et $T < 0$ pour $m < E < V_0 - m$. Nous pensons que cela est simplement ambigu. En fait, pour le régime paradoxal, il n'est même pas clair si (3.11) donne la condition aux limites correcte. Ce point mérite une investigation plus approfondie.

Nous examinons maintenant R et T pour le cas extrême, $d \rightarrow 0$. D'après (2.2), le premier cas correspond à la limite de la barrière rectangulaire, et le second cas à la limite du champ électrique faible. Il est trivial de

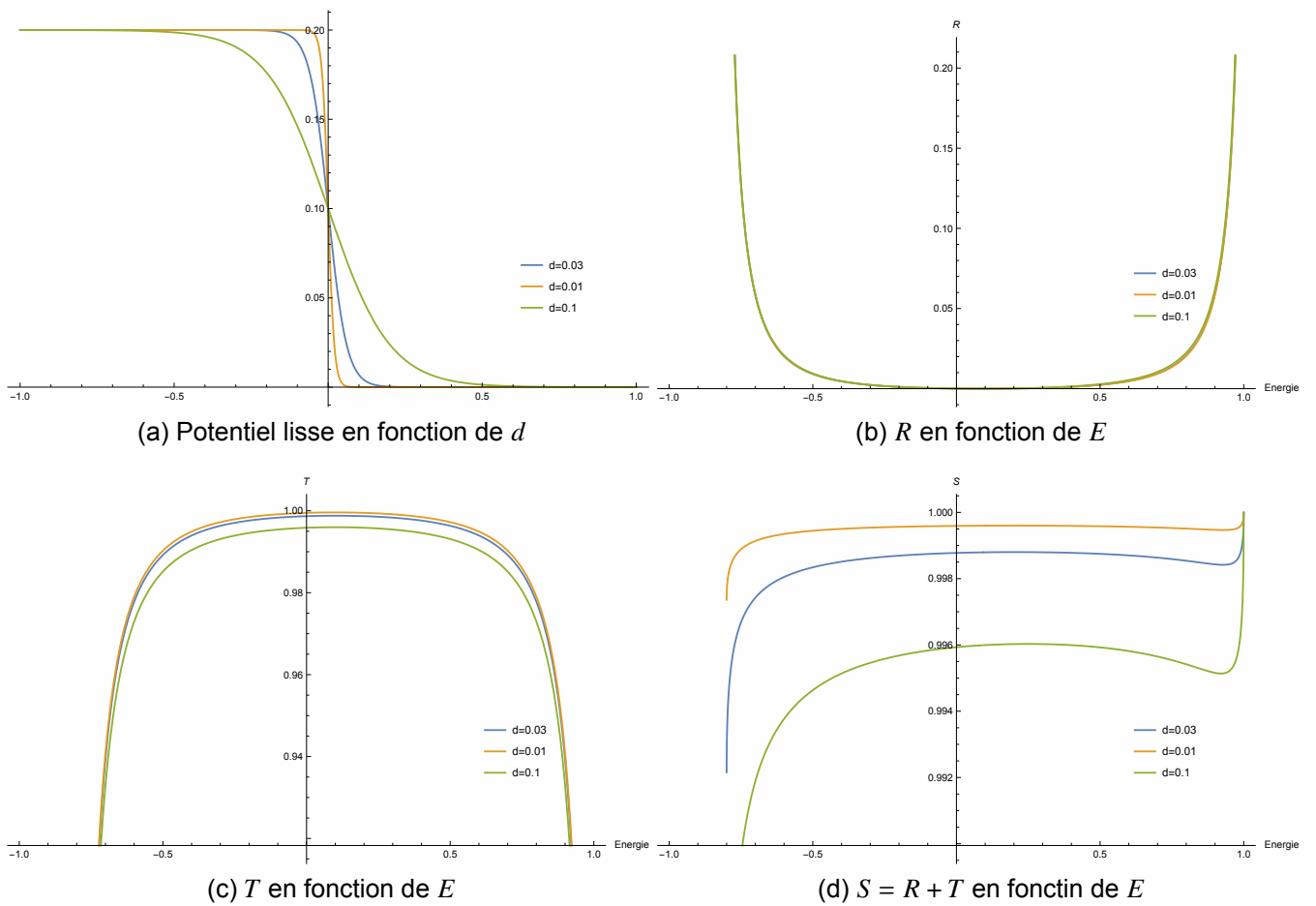


Fig. 2.1 : Différents termes R , T et $R + T = 1$

montrer que (voir figure. 2.2)

$$R \rightarrow \left[\frac{k - q}{k + q} \right]^2, \quad T \rightarrow \frac{4kq}{(k + q)^2}. \quad (2.63)$$

Ces résultats peuvent être facilement vérifiés en supposant une barrière rectangulaire dès le départ.

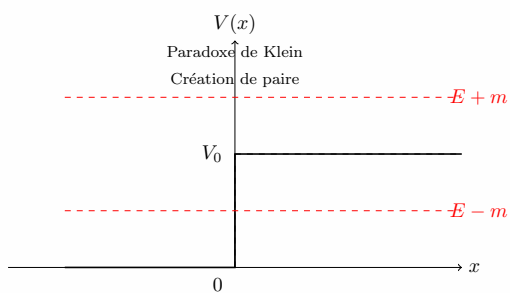


Fig. 2.2 : La limite ou $d \rightarrow 0$

CHAPITRE 3

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DE FISHER ET L'ENTROPIE DE SHANNON POUR L'OSCILLATEUR DE FV

3.1 Préambule

En 1925, Erwin Schrödinger a développé son équation d'onde pour décrire le mouvement des électrons dans un champ coulombien, visant initialement une version relativiste. Cependant, comme elle ne correspondait pas aux spectres observés de l'atome d'hydrogène, il l'a révisée pour en faire l'équation de Schrödinger non relativiste. Malgré son succès pour décrire l'hydrogène, elle ne pouvait pas prendre en compte les effets relativistes. À la recherche d'une solution, Vladimir Fock, Johann Kudar, Théophile de Donder, Frans-H. van den Dungen et Louis de Broglie ont poursuivi leurs travaux sur le sujet, ce qui a conduit à la dérivation par Oskar Klein en 1926 de l'équation d'onde relativiste, plus tard nommée équation de Klein-Gordon (équation de KG). Walter Gordon a étendu l'applicabilité de l'équation à l'effet Compton [26].

L'équation de Klein-Gordon pose deux problèmes majeurs : (i) premièrement, elle est de second ordre en temps, violant ainsi le postulat fondamental de la mécanique quantique selon lequel l'état d'un système est décrit par une fonction d'onde satisfaisant une équation d'onde du premier ordre en temps. (ii) Deuxièmement, sa densité de probabilité associée n'est pas définie positivement, ce qui rend difficile son interprétation physique probabiliste. Cependant, Wolfgang Pauli et Victor Weisskopf ont proposé en 1934 une solution à ce problème en affirmant que l'équation de Klein-Gordon est une équation de champ, et que dans le cadre de la théorie des champs, les degrés de liberté supplémentaires résultant de la dérivée temporelle de second ordre peuvent être interprétés comme des états de charge positive et négative. Cette interprétation permet de contourner le besoin d'une interprétation probabiliste et ouvre la voie à une compréhension plus approfondie de l'équation de Klein-Gordon. Bien qu'elle ne soit pas sans problèmes, elle reste essentielle pour décrire les particules de spin nul.

Feshbach et Villars ont proposé une formulation alternative en 1958, divisant la fonction d'onde en deux

composantes pour fournir des solutions énergétiques appropriées et une interprétation probabiliste. L'avantage de la formulation de Feshbach-Villars (FV) par rapport à l'équation de Klein-Gordon (KG) réside dans sa capacité à surmonter certaines limitations de l'équation KG :

- Premier Ordre en Temps : La formulation de FV aboutit à des équations différentielles du premier ordre par rapport à la dérivée temporelle, ce qui est plus conforme aux postulats fondamentaux de la mécanique quantique. Cela résout le problème de la violation du principe selon lequel l'état d'un système doit être décrit uniquement par une fonction d'onde satisfaisant une équation d'onde du premier ordre en temps.
- Densité de Probabilité Positivement Définie : Contrairement à l'équation KG, qui produit une densité de probabilité non définie positivement, la formulation de FV fournit des solutions permettant une interprétation physique probabiliste. Cela est crucial pour maintenir la cohérence des principes de la mécanique quantique et assurer une interprétation significative des phénomènes physiques.

Dans l'ensemble, la formulation de Feshbach-Villars offre une approche plus robuste et cohérente par rapport à l'équation de Klein-Gordon, en particulier pour résoudre les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique et garantir l'interprétation physique des solutions.

3.2 L'oscillateur de FV dans un espace plat

Bouzenada et Boumali [19, 31] ont récemment présenté une version modifiée de l'oscillateur de Klein-Gordon, qu'ils ont nommé l'oscillateur de Feshbach-Villars. Cette variation de l'oscillateur bénéficie de tous les avantages du formalisme de FV par rapport à l'équation de Klein-Gordon.

3.2.1 Les solutions propres à une dimension

Pour la prochaine discussion, il est préférable d'analyser l'oscillateur quantique relativiste (KGO) dans l'espace-temps de Minkowski en utilisant la méthode décrite ci-dessus. Pour examiner l'oscillateur de Feshbach-Villars (FV), nous commençons par la substitution minimale $p \rightarrow p - im\omega x$ de l'opérateur moment. Ici, ω est la fréquence d'oscillation et $x_\mu = (0, x, 0, 0)$. Ainsi, en généralisant l'opérateur moment, l'Hamiltonien de FV unidimensionnel devient :

$$\mathcal{H}_{FV0} = \frac{1}{2m} (\tau_z + i\tau_y)(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) + m\tau_z \quad (3.1)$$

De cette manière ,la formulation de Schrodinger de l'oscillateur quantique harmonique unidimensionnel est obtenue en remplaçant l'ansatz dans (3.1) par ce qui suit :

$$\begin{aligned} E\varphi &= \frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2x^2 + m\omega \right] (\varphi + \chi) + m\varphi \\ E\chi &= -\frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2x^2 + m\omega \right] (\varphi + \chi) - m\chi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Après avoir effectué un calcul similaire à celui réalisé dans l'équation précédente pour l'oscillateur quantique harmonique non relativiste, on obtient que

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - m^2\omega^2x^2 + (E^2 - m + m\omega) \right] \psi(x) = 0 \quad (3.3)$$

où

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1x^2 + \lambda_2 \right] \psi(x) = 0 \quad (3.4)$$

où nous avons défini,

$$\lambda_1 = m^2\omega^2, \lambda_2 = E^2 - m + m\omega \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) est une équation différentielle du second ordre pour le champ ψ décrivant la dynamique du FVO dans un espace-temps plat de Minkowski à une dimension. La solution de l'équation ci-dessus peut être trouvée dans la littérature ,et une condition de quantification de l'énergie découle de cette solution ,ce qui donne

$$\frac{E^2 - m + m\omega}{2m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Après avoir arrangé et simplifié la condition (3.2) , nous trouvons l'expression suivante pour le spectre d'énergie

$$E = \pm \sqrt{2m\omega n + m^2} \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) montre le spectre d'énergie relativiste de l'oscillateur de FV dans un espace-temps de Minkowski , qui est le même que celui obtenu pour l'oscillateur de Klein-Gordon dans un espace-temps plat.

Les fonctions propres d'un oscillateur harmonique s'écrivent comme suit [1, 25] :

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{(\sqrt{\pi}2^n n!)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \quad (3.8)$$

3.2.2 Le paramètre de Fisher et l'entropie de Shannon pour l'oscillateur FV

3.2.2.1 Introduction

La théorie de l'information quantique est une extension de la théorie de l'information de Claude Shannon qui exploite les propriétés de la mécanique quantique, notamment le principe de superposition et l'intrication.

L'intrication est un phénomène où deux particules (ou groupes de particules) forment un système lié, présentant des états quantiques interdépendants, quelle que soit la distance les séparant. Un tel état est dit « intriqué » car il existe des corrélations entre les propriétés physiques observées de ces particules distinctes. Ce phénomène est au cœur des discussions philosophiques sur l'interprétation de la mécanique quantique et a des applications potentielles dans des domaines tels que la cryptographie quantique, la téléportation quantique et l'ordinateur quantique.

Parmi les paramètres pertinents en information quantique, on trouve l'information de Fisher et l'entropie de Shannon. L'information de Fisher mesure la qualité d'une procédure de mesure efficace utilisée pour estimer les limites quantiques ultimes. Elle évalue la précision intrinsèque dans la théorie de l'estimation statistique. L'étude des propriétés et des applications de l'information de Fisher à divers problèmes de physique théorique est principalement due aux travaux pionniers de Frieden et al. [32–37] qui ont reformulé les lois bien connues de la physique à partir de l'information de Fisher. En une dimension, pour les configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$, l'information de Fisher est donnée par les expressions suivantes :

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) \left[\frac{d \ln(\rho_n(x))}{dx} \right]^2 dx, \quad (3.9)$$

$$F_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(p) \left[\frac{d \ln(\rho_n(p))}{dp} \right]^2 dp. \quad (3.10)$$

Ces équations montrent que l'information de Fisher a un caractère local dû à l'opérateur gradient : plus cette quantité est élevée, plus la densité est concentrée et plus l'incertitude de position de la particule est réduite. Ainsi, elle permet de détecter les changements locaux de la densité afin de mieux décrire le système dans une théorie de l'information quantique. L'information de Fisher a été utilisée pour une grande variété de concepts et phénomènes mécaniques.

Le deuxième paramètre, l'entropie de Shannon, a des applications dans plusieurs branches de la physique en raison de son utilité dans un large éventail de domaines [38, 39]. Cette quantité fournit des outils analytiques aidant à comprendre les corrélations dans des systèmes quantiques et est également utilisée pour mesurer l'incertitude. Elle est définie par les relations suivantes :

$$S_x = - \int \rho_n(x) \ln(\rho_n(x)) dx, \quad (3.11)$$

$$S_p = - \int \rho_n(p) \ln(\rho_n(p)) dp. \quad (3.12)$$

Ces équations montrent que l'entropie de Shannon dépend fortement de la densité de probabilité. Elle a un caractère global, étant peu sensible aux changements de distribution sur de petites régions, et peut être utilisée comme mesure de la délocalisation. Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour les mesures théoriques de l'information dans les systèmes quantiques. En tant qu'alternative à la relation d'incertitude de Heisenberg

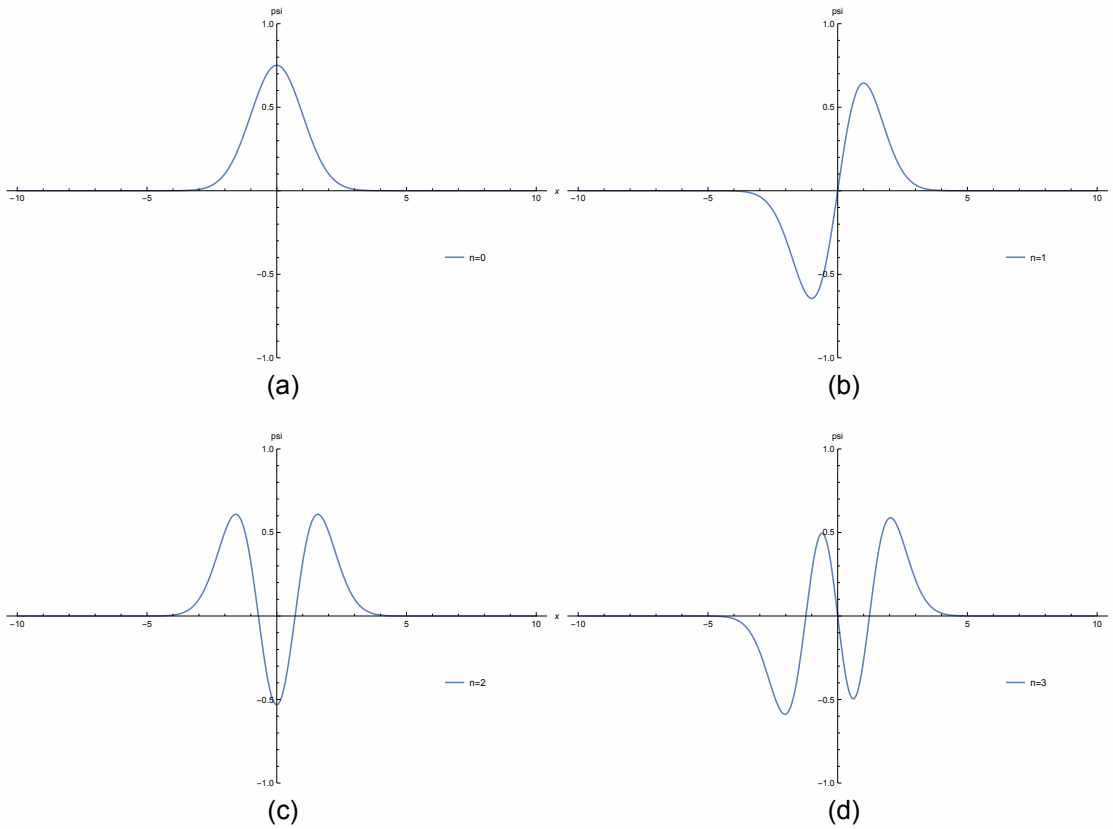


Figure 3.1: La fonction d'onde pour certaines niveaux d'énergies

(HUR), l'entropie de Shannon joue un rôle très important dans la mesure de l'incertitude.

3.2.2.2 Détermination numérique des deux paramètres

Ce qui suit suppose que $\hbar = m = \omega = c = 1$. Alors, la fonction d'onde $\psi_n(x)$ est donnée par :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}2^n n!)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x), \quad (3.13)$$

où $H_n(x)$ est un polynôme hermitien, et l'énergie est $E = \pm\sqrt{2n+1}$.

Dans la figure. 3.1 , nous montrons l'apparence de ces fonctions d'onde pour certains niveaux d'énergie.

Pour calculer ces deux paramètres, nous commençons par la probabilité :

$$\rho = \varphi\varphi^* - \chi\chi^* = \frac{1}{4} [(1 + |E_+|)^2 - (1 - |E_-|)^2] \psi_n^2. \quad (3.14)$$

La figure. 3.2 montre la densité de probabilité ρ pour certains niveaux d'énergie. On constate que cette probabilité, contrairement au cas de l'équation de Klein-Gordon, est toujours positive, ce qui nous permet d'accéder au calcul des deux paramètres F et S .

Il est intéressant de noter que, contrairement à l'équation de Klein-Gordon où la probabilité peut prendre des

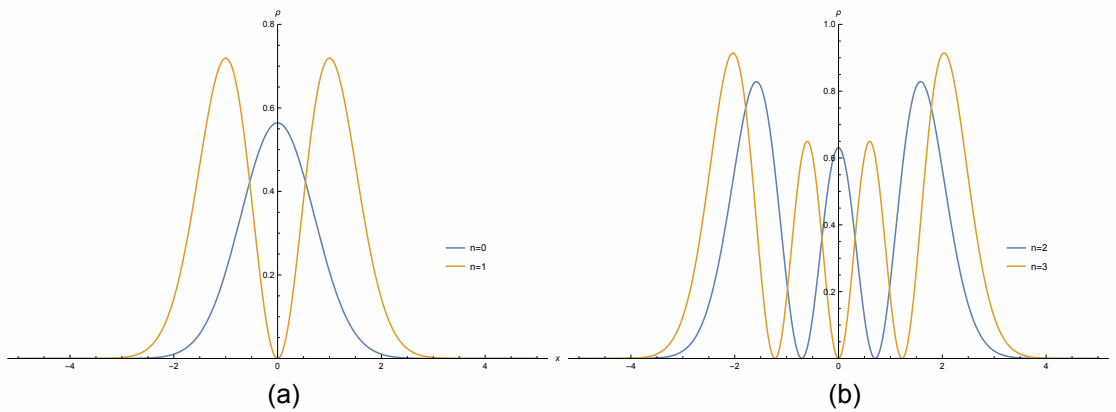
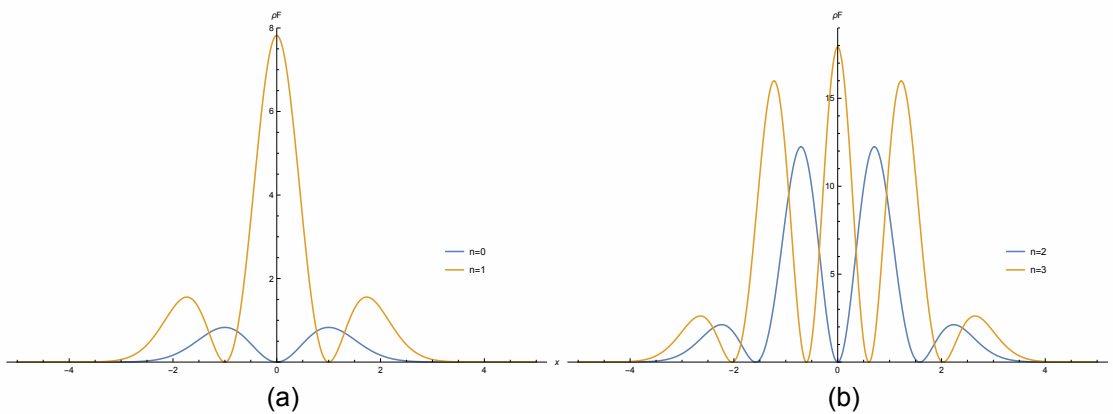
Figure 3.2: La densité de probabilité ρ en fonction de x pour certains niveaux d'énergie

Figure 3.3: Densité de Fisher

valeurs négatives, notre formulation garantit une probabilité toujours positive. Cette différence fondamentale permet non seulement une interprétation plus intuitive de la densité de probabilité, mais aussi une simplification dans le calcul des paramètres F et S . En effet, l'équation de Klein-Gordon présente des défis supplémentaires en raison de la nature oscillatoire et parfois négative de la densité de probabilité, ce qui complique les calculs et l'interprétation des résultats physiques.

Le tableau présente quelques valeurs de ces deux paramètres pour certains niveaux d'énergie. Ces valeurs illustrent les variations des paramètres en fonction des niveaux d'énergie et sont représentées graphiquement dans les figures 3.5 et 3.6. Ces figures permettent de visualiser clairement les tendances et les comportements des paramètres F et S en relation avec l'énergie via le niveau quantique n .

3.3 Paradoxe de Klein dans le formalisme de FV

3.3.1 Introduction

Le paradoxe de Klein est un phénomène contre-intuitif prédit par la mécanique quantique relativiste, en particulier lorsqu'on applique l'équation de Dirac à des scénarios impliquant des barrières de potentiel. Il a été

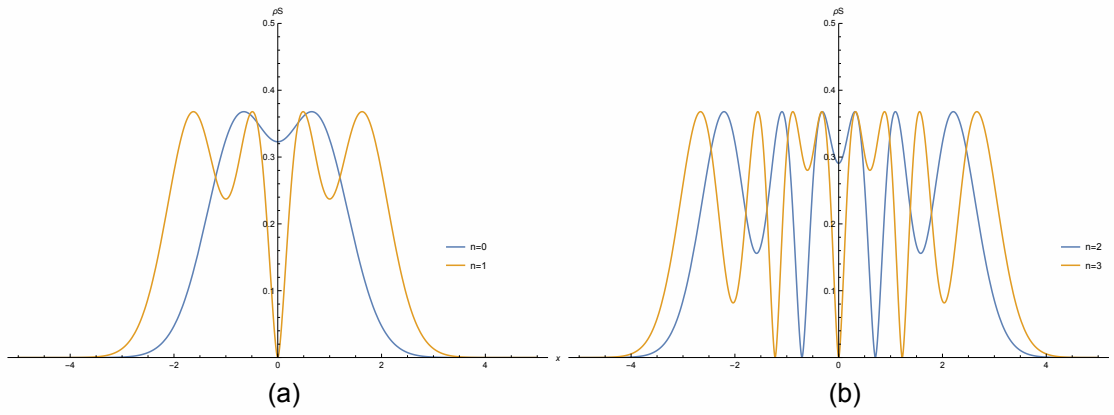


Figure 3.4: Densité de Shannon

Table 3.1: Les valeurs de F et S en fonction de n

n	$F_x(n)$	$S_x(n)$
1	2	1.07236
2	10.3923	1.37425
3	22.3607	1.55159
4	37.0405	1.6847
5	54	1.79382
6	72.9657	1.88754
7	93.7443	1.97041
8	116.19	2.04517
9	140.186	2.11357
10	165.638	2.17686
11	192.468	2.23592
12	220.608	2.2914
13	250	2.34384
14	280.592	2.39362
15	312.34	2.44107
16	345.201	2.48646
17	379.141	2.53001
18	414.126	2.57191
19	450.124	2.61235
20	487.11	2.65134
21	525.056	2.68909

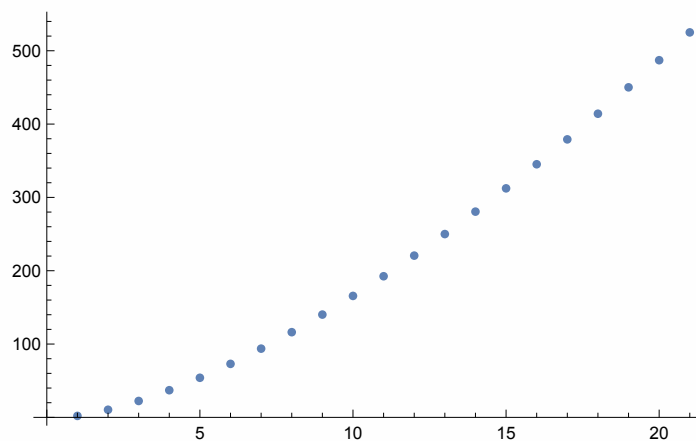


Figure 3.5: Le paramètre de Fisher F en fonction de nombre quantique n

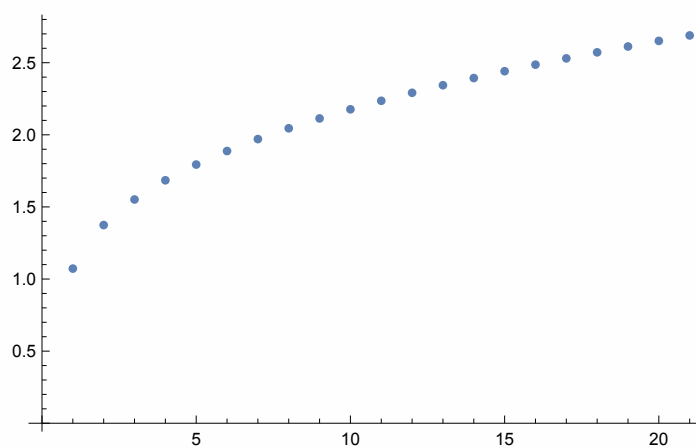


Figure 3.6: Le paramètre de Fisher S en fonction de nombre quantique n

identifié pour la première fois par Oskar Klein en 1929. Ce paradoxe survient lorsqu'on considère le comportement des particules relativistes, comme les électrons, rencontrant une barrière de potentiel dont la hauteur est supérieure à deux fois l'énergie de masse au repos de la particule ($V_0 > 2mc^2$).

En mécanique quantique non relativiste, une particule rencontrant une barrière de potentiel plus haute que son énergie totale ($E < V_0$) est typiquement réfléchi, avec une fonction d'onde qui décroît exponentiellement à l'intérieur de la barrière. Cependant, dans le cas relativiste décrit par l'équation de Dirac, si l'énergie de la particule (E) est telle que $E + mc^2 < V_0$, la barrière peut devenir "transparente" pour la particule, ce qui conduit à des résultats surprenants :

- Coefficient de réflexion supérieur à un : Au lieu d'être majoritairement réfléchi, la particule peut présenter un coefficient de réflexion supérieur à un, ce qui implique que plus de particules sont réfléchies que celles initialement incidentes sur la barrière.
- Coefficient de transmission négatif : Le coefficient de transmission peut devenir négatif, suggérant que les particules semblent être transmises à travers la barrière d'une manière qui défie l'intuition classique.

Ces résultats suggèrent que lorsqu'une barrière de potentiel suffisamment élevée est présente, elle peut entraîner la création de paires particule-antiparticule. En effet, le potentiel élevé fournit suffisamment d'énergie pour la production de paires, permettant à un électron d'apparaître de l'autre côté de la barrière, tandis qu'un positron (l'antiparticule de l'électron) est réfléchi.

Le paradoxe de Klein met en évidence la nécessité d'un traitement relativiste de la mécanique quantique pour décrire avec précision de tels scénarios et souligne les différences entre les théories quantiques non relativistes et relativistes. Ce phénomène a fait l'objet d'études approfondies et a des implications importantes pour la compréhension du comportement des particules dans des champs intenses, tels que ceux rencontrés à proximité de noyaux atomiques lourds ou dans les expériences de physique des particules à haute énergie.

3.3.2 Paradoxe de Klein

L'Hamiltonien de FV d'une particule libre scalaire en l'absence d'interaction électromagnétique peut être exprimé comme suit :

$$\mathcal{H}_{FV0} = (\tau_3 + i\tau_2) \frac{p^2}{2m} + \tau_3 m + V \quad (3.15)$$

La forme Hamiltonienne devient plus visible avec le vecteur à deux composantes :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Nous considérons maintenant le paradoxe de Klein dans le formalisme FV-0. Rappelons que les composants φ et χ qui se réfèrent aux parties particule et antiparticule d'une onde sont initialement donnés par

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{V}{m} \right) \psi + \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right], \quad (3.17)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{V}{m} \right) \psi - \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right] \quad (3.18)$$

L'équation de FV-0 écrire comme :

$$\mathcal{H}\Psi(x, t) = E\Psi(x, t) \quad (3.19)$$

Alors :

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ sont les matrices de pauli 2x2 conventionnelles données par

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

on calcule $i\tau_2$ et $\tau_3 + i\tau_2$ on trouve :

$$i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_3 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

on peut maintenant réécrire l'équation (3.20) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{P_x^2}{2m} + m + V & \frac{P_x^2}{2m} \\ -\frac{P_x^2}{2m} & -\frac{P_x^2}{2m} - m + V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Après un simple calcul :

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + m + V \right) \varphi + \frac{P_x^2}{2m} \chi = E\varphi \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + m - V \right) \chi + \frac{P_x^2}{2m} \varphi = -E\chi \quad (3.25)$$

En additionnant les deux équations (3.24) et (3.25), on trouve :

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + m \right) (\varphi + \chi) + \left(\frac{P_x^2}{2m} \right) (\varphi + \chi) + V(\varphi - \chi) = E(\varphi - \chi) \quad (3.26)$$

soustraire les deux équations(3.24) et (3.25) ,et injectons dans l'équation (3.26) :

$$\varphi - \chi = \frac{i}{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} + iV \right) \psi = \frac{1}{m} (E - V) \psi \quad (3.27)$$

Alors , l'équation (3.23) écrire sous la forme :

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + m\right)\psi + \left(\frac{P_x^2}{2m}\right)\psi = \frac{1}{m}(E - V)^2\psi \quad (3.28)$$

ou :

$$(p_x^2 + m^2 - (E - V)^2)\psi = 0 \quad (3.29)$$

En presence d'un potentiel liss (smooth potential) de type

$$V(x) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{x}{2d}\right)\right) \quad (3.30)$$

the solutions are

$$\psi = NZ^\alpha(Z - 1)^\gamma F(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma; 1 + \alpha - \alpha'; Z) \quad (3.31)$$

dont

$$Z = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)}. \quad (3.32)$$

Suivant la meme méthode que dans le chapitre 2, nous trouvons

- Dans le cas où $x \rightarrow +\infty$ ($Z \rightarrow 0$), et en utilisant

$$\lim_{Z \rightarrow 0} Z^\alpha \simeq \left(\exp\left(-\frac{x}{d}\right)\right)^\alpha \simeq \exp\left(-\alpha\frac{x}{d}\right) \simeq \exp(iqx) \quad (3.33)$$

$$\lim_{Z \rightarrow 0} (1 - Z)^\gamma \simeq \left(1 - \left(1 + \exp\left(\frac{x}{d}\right)\right)^{-1}\right)^\gamma \simeq (1)^\gamma \simeq 1 \quad (3.34)$$

dont

$$\lim_{Z \rightarrow 0} F(a, b; c; 0) = 1 \quad (3.35)$$

Alors

$$\Psi(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{iqx}. \quad (3.36)$$

- le cas où $x \rightarrow -\infty$ ($Z \rightarrow 1$), et en utilisant

$$\lim_{Z \rightarrow 1} Z^\alpha \simeq (1)^\alpha \simeq 1, \quad \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z)^\gamma \simeq \exp\left(\frac{\gamma x}{d}\right) \quad (3.37)$$

on trouve

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, y) &= A {}_2F_1(a, b, a + b - c + 1, 1 - Z) \\ &+ B(1 - Z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b, c - a - b + 1, 1 - Z), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\Psi(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (3.39)$$

avec

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad B = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad (3.40)$$

dont

$$a = \alpha + \beta + \gamma = -iqd + ikd + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

$$b = \alpha + \beta' + \gamma = -iqd + ikd + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

$$c = 1 + \alpha - \alpha' = 1 - 2iqd \quad (3.43)$$

La réflexion et les coefficients de transmission peuvent être calculés à partir de la densité de courant dans le système unidimensionnel.

$$j(x, t) = \frac{i}{2m} (\Psi^* \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \Psi) \quad (3.44)$$

Alors, nous trouvons pour les coefficients de réflexion et de transmission

$$R = |j_{ref}/j_{inc}|^2 \quad (3.45)$$

$$T = |j_{trans}/j_{inc}|^2 \quad (3.46)$$

avec

$$\Psi_{inc} = \begin{pmatrix} \varphi_{inc} \\ \chi_{inc} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ref} = \begin{pmatrix} \varphi_{ref} \\ \chi_{ref} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{trans} = \begin{pmatrix} \varphi_{trans} \\ \chi_{trans} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

dont

$$\varphi_{inc} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_+}{m}\right) \psi_{inc}, \quad \varphi_{ref} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_+}{m}\right) \psi_{ref}, \quad \varphi_{trans} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_+ - V_0}{m}\right) \psi_{trans} \quad (3.48)$$

$$\chi_{inc} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_-}{m}\right) \psi_{inc}, \quad \chi_{ref} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_-}{m}\right) \psi_{ref}, \quad \chi_{trans} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_- - V_0}{m}\right) \psi_{trans} \quad (3.49)$$

dont

$$\psi_{inc} = A e^{ikx}, \quad \psi_{ref} = B e^{-ikx}, \quad \psi_{trans} = C e^{iqx} \quad (3.50)$$

avec

$$k^2 = E^2 - m^2, \quad (3.51)$$

$$q^2 = [E - (V_0 + m)] [E - (V_0 - m)] \quad (3.52)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
J_{\text{inc}} &= \frac{i}{2m} \left(\Psi_{\text{inc}}^* \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \nabla \Psi_{\text{inc}} - (\nabla \Psi_{\text{inc}}^*) \tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) \Psi_{\text{inc}} \right), \\
&= \frac{i}{2m} \left((\varphi_{\text{inc}}^* + \chi_{\text{inc}}^*) \partial_x (\varphi_{\text{inc}} + \chi_{\text{inc}}) - (\varphi_{\text{inc}} + \chi_{\text{inc}}) \partial_x (\varphi_{\text{inc}}^* + \chi_{\text{inc}}^*) \right), \\
&= \frac{i}{2m} \left(\psi_{\text{inc}}^* \partial_x \psi_{\text{inc}} - \psi_{\text{inc}} \partial_x \psi_{\text{inc}}^* \right),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

de la même façon, on trouve

$$J_{\text{ref}} = \frac{i}{2m} \left(\psi_{\text{ref}}^* \partial_x \psi_{\text{ref}} - \psi_{\text{ref}} \partial_x \psi_{\text{ref}}^* \right), \tag{3.54}$$

$$J_{\text{trans}} = \frac{i}{2m} \left(\psi_{\text{trans}}^* \partial_x \psi_{\text{trans}} - \psi_{\text{trans}} \partial_x \psi_{\text{trans}}^* \right), \tag{3.55}$$

Ici,

$$\tau_3 (\tau_3 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

En utilisant les équations (3.45) et (3.46), nous trouvons les coefficients de réflexion et de transmission comme suit :

$$\begin{aligned}
R &= \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(a+b-c) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-a-b)} \right|^2, \\
&= \left| \frac{\Gamma(2idk) \Gamma(1-id(k+q) - \frac{1}{2}(1+4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}}) \Gamma(1-id(k+q) - \frac{1}{2}(1+4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(-iqd + ikd + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}}) \Gamma(-iqd + ikd + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}}) \Gamma(-2idk)} \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{q}{k} |A|^2, \\
&= \frac{q}{k} \left| \frac{\Gamma(1-2iqd) \Gamma(-2idk)}{\Gamma(1-id(k+q) - \frac{1}{2}(1+4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}}) \Gamma(1-id(k+q) - \frac{1}{2}(1+4V_0^2 d^2)^{\frac{1}{2}})} \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

D'après l'équation (3.52), nous voyons que q est purement imaginaire si $V_0 - m < E < V_0 + m$, ce qui conduit à :

$$R = 1, \quad T = 0. \tag{3.59}$$

C'est un résultat attendu, puisque l'énergie cinétique est inférieure au sommet de la barrière.

Maintenant, si $E > V_0 + m$ ou $E < V_0 - m$, q est réel. Dans le premier cas, l'énergie cinétique est supérieure au sommet de la barrière. Le second cas, qui est paradoxal, ne survient que si $V_0 > 2m$, puisque nous devons avoir $E > m$.

Dans les deux cas, si l'on suppose $2V_0 d < 1$, les coefficients peuvent être simplifiés en utilisant les

identités bien connues :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc(\pi z), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (3.60)$$

Les résultats pour $2V_0d > 1$ peuvent être obtenus par continuation analytique. Nous trouvons :

$$R = \frac{\cosh[2\pi(k-q)d] + \cos(\pi s)}{\cosh[2\pi(k+q)d] + \cos(\pi s)}, \quad (3.61)$$

$$T = 2 \frac{\sinh(2\pi qd) \sinh(2\pi kd)}{\cosh[2\pi(k+q)d] + \cos(\pi s)}, \quad (3.62)$$

où $E > V_0 + m$ ou $E < V_0 - m$ avec $V_0 > 2m$. Il est facile de vérifier que $0 < R < 1$ pour tous les k et q positifs. De plus, puisque $R + T = 1$, nous avons $0 < T < 1$ pour tous les k et q positifs. Il n'est pas vraiment clair comment choisir le signe de q (3.52) pour $m < E < V_0 - m$, puisque c'est le régime paradoxal. Si $q < 0$, $R > 1$ et $T < 0$. Dans l'analyse du paradoxe de Klein par Bjorken et Drell pour l'équation de Dirac, ils concluent que $R > 1$ et $T < 0$ pour $m < E < V_0 - m$.

Pour la région du potentiel où $z > 0$, l'énergie de l'onde transmise doit être mesurée par rapport au potentiel local V_0 , avec $E' = E - V_0 < 0$. La fonction d'onde est redéfinie comme

$$\psi_{trans} \rightarrow \tilde{\psi}_{trans} = C' e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar qx - E't)}, \quad (3.63)$$

La densité de charge conservée devient

$$\rho_{trans}(x) = |\tilde{\varphi}_{trans}|^2 - |\tilde{\chi}_{trans}|^2 = \frac{E'}{mc^2} |C'|^2 < 0. \quad (3.64)$$

Ensuite, $|\tilde{\chi}|$ devient dominant, ce qui caractérise une propriété d'antiparticule. La fonction d'onde peut être écrite comme

$$\tilde{\psi}_{trans} = C' e^{-\frac{i}{\hbar}(\hbar|q|x - |E'|t)}, \quad (3.65)$$

où $\hbar q = -|\hbar q| < 0$, $E' = -|E'| < 0$, et $|\hbar q|, E' > 0$ sont l'impulsion et l'énergie de l'antiparticule (voir figure. 3.7).

En résumé, en étudiant le paradoxe de Klein dans l'état de diffusion, nous avons découvert que pour ce qui devrait être une colline de potentiel complètement répulsive, il y avait une transmission de l'onde incidente plus grande que prévu, plutôt qu'une réflexion totale. Nous avons également observé des propriétés inhabituelles dans les composantes de Feshbach-Villars. Alors que la fonction d'onde totale incidente était principalement composée de la composante particule φ et que la composante antiparticule χ était très faible, une fois sous la colline et en interaction avec le potentiel, ces rôles s'inversaient. La composante antiparticule χ devenait beaucoup plus dominante que φ , et la fonction d'onde totale ressemblait presque entièrement à χ . Après l'interaction, lorsque la fonction d'onde se dispersait, la composante φ redevenait dominante.

Ces comportements observés en interaction avec des potentiels forts, aboutissant à des états liés ou de diffusion, suggèrent que la fonction d'onde totale est toujours composée d'une composante particule et

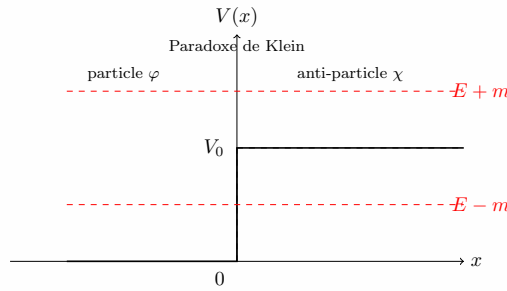


Fig. 3.7 : La limite ou $d \rightarrow 0$

d'une composante antiparticule. La composante dominante observée dépend de l'interaction avec le potentiel considéré. Cela implique que, plutôt que le potentiel crée des paires à partir de l'onde incidente, il "décompose" ce qui est déjà présent - les composantes particule et antiparticule qui se combinent pour former le paquet d'ondes total. Cette interprétation montre que, sous des potentiels suffisamment forts, les propriétés quantiques des particules et antiparticules deviennent particulièrement significatives. En effet, lorsque la particule traverse un potentiel intense, l'interaction avec ce potentiel peut faire en sorte que l'aspect antiparticule de la fonction d'onde devienne prédominant, illustrant une transformation des caractéristiques de la particule en réponse au champ externe. Cela renforce l'idée que les particules quantiques doivent être comprises non seulement comme des entités individuelles, mais aussi en termes de leurs composantes intrinsèques de particules et d'antiparticules.

Enfin, nous examinons maintenant R et T pour deux cas extrêmes, $d \rightarrow 0$. Il est trivial de montrer que

$$R = \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2, \quad T = \frac{4kq}{(k + q)^2}. \tag{3.66}$$

Ces résultats peuvent être facilement vérifiés en supposant une barrière rectangulaire dès le départ.

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

L'analyse du paradoxe de Klein, ainsi que des paramètres de Fisher et de Shannon, en utilisant le formalisme de Feshbach-Villars pour les particules de spin 0, offre une compréhension approfondie de la mécanique quantique relativiste et de ses implications pour la théorie de l'information. Cette étude éclaire les subtilités des équations d'onde relativistes et leurs applications dans divers cadres théoriques.

Le paradoxe de Klein, un phénomène où les particules semblent traverser des barrières de potentiel élevées sans réflexion, présente un problème conceptuel difficile en mécanique quantique relativiste. Ce paradoxe se manifeste lors de l'examen de l'équation de Klein-Gordon, qui décrit les particules de spin 0. Le paradoxe met en évidence la nature non intuitive de la théorie quantique relativiste, où les états d'énergie négative et la création de paires particule-antiparticule entrent en jeu.

En utilisant le formalisme de Feshbach-Villars, nous pouvons réexaminer le paradoxe de Klein sous un angle différent. L'approche de Feshbach-Villars linéarise l'équation de Klein-Gordon de deuxième ordre en une forme de premier ordre, semblable à l'équation de Dirac pour les particules de spin 1/2. Ce formalisme sépare la fonction d'onde en deux composantes, φ et χ , correspondant aux solutions d'énergie positive et négative. En traitant ces composantes de manière explicite, le formalisme fournit des perspectives plus claires sur la dynamique des particules et des antiparticules près des barrières de potentiel.

Le formalisme de Feshbach-Villars offre également une analyse plus détaillée des densités de probabilité et des courants, essentielle pour comprendre le flux de particules à travers les barrières de potentiel. Cette approche aide à résoudre certaines des ambiguïtés présentes dans l'interprétation de Klein-Gordon et fournit un cadre plus cohérent pour analyser le paradoxe de Klein. Les formulations détaillées de la densité de probabilité et du courant permettent de mieux suivre le comportement des particules, en particulier dans les scénarios impliquant des barrières de potentiel élevées.

L'intégration des paramètres d'information de Fisher et de Shannon dans le formalisme de Feshbach-Villars ajoute une couche supplémentaire de compréhension aux systèmes quantiques. L'information de Fisher mesure la sensibilité d'une distribution de probabilité aux changements de paramètres, tandis que l'entropie

de Shannon quantifie l'incertitude ou le contenu d'information de la distribution.

Dans le contexte du formalisme de Feshbach-Villars, l'information de Fisher fournit des insights sur la précision des mesures des états quantiques et la localisation des particules. Une information de Fisher plus élevée indique des états plus localisés, correspondant à une incertitude plus faible dans les mesures de position. L'approche de Feshbach-Villars, en fournissant une séparation claire des composantes d'énergie positive et négative, permet un calcul précis de l'information de Fisher pour chaque composante, offrant une vue nuancée de la localisation des états quantiques.

L'entropie de Shannon, quant à elle, mesure l'incertitude globale dans le système. Dans le formalisme de Feshbach-Villars, les calculs d'entropie pour les composantes φ et χ fournissent une image complète du contenu d'information du système. L'interaction entre l'information de Fisher et l'entropie de Shannon illustre les compromis entre localisation et incertitude globale, essentiels pour les applications de la théorie de l'information quantique.

La comparaison des résultats obtenus en utilisant le formalisme de Feshbach-Villars avec ceux de l'équation de Klein-Gordon révèle des différences et des avantages significatifs. Alors que l'équation de Klein-Gordon fournit une équation différentielle de deuxième ordre directe pour les particules de spin 0, elle ne distingue pas intrinsèquement les solutions d'énergie positive et négative. Cette absence de distinction peut entraîner des défis d'interprétation, notamment dans le contexte du paradoxe de Klein et des calculs de courant de probabilité.

Le formalisme de Feshbach-Villars, avec sa séparation explicite des composantes d'énergie, résout ces problèmes, offrant une interprétation physique plus claire des solutions. Cette séparation est particulièrement bénéfique lors de l'analyse des interactions particule-antiparticule et de la pénétration des barrières de potentiel, comme observé dans le paradoxe de Klein. La nature de premier ordre des équations de Feshbach-Villars s'aligne également plus étroitement avec le traitement des autres équations d'onde relativistes, fournissant une approche plus unifiée de la mécanique quantique relativiste.

À l'avenir, le formalisme de Feshbach-Villars ouvre plusieurs voies de recherche et d'exploration :

- Extensions à la théorie quantique des champs : Étendre l'approche de Feshbach-Villars à la théorie quantique des champs pourrait fournir de nouvelles perspectives sur les processus de création et d'annihilation de particules, notamment en physique des hautes énergies et en cosmologie.
- Applications à l'information quantique : L'analyse détaillée de l'information de Fisher et de Shannon dans le cadre de Feshbach-Villars peut être étendue à des systèmes quantiques plus complexes, y compris les états intriqués et les applications en informatique quantique. Comprendre la localisation et l'incertitude des états quantiques est crucial pour développer des techniques robustes de traitement de l'information quantique.
- La mise en œuvre de simulations numériques des équations d'onde relativistes en utilisant le formalisme

de Feshbach-Villars pourrait offrir des insights pratiques sur le comportement des particules dans divers paysages de potentiel. Ces simulations peuvent être précieuses pour concevoir des expériences en physique des hautes énergies et en science des matériaux.

- Vérification expérimentale : Les configurations expérimentales conçues pour tester les prédictions du formalisme de Feshbach-Villars, en particulier dans le contexte du paradoxe de Klein et des paramètres de théorie de l'information, pourraient fournir une validation empirique des modèles théoriques. Cela pourrait impliquer des accélérateurs de particules, des puits de potentiel et des expériences en optique quantique.

En conclusion, le formalisme de Feshbach-Villars pour les particules de spin 0 offre un cadre robuste et perspicace pour analyser les systèmes quantiques relativistes. Sa capacité à résoudre le paradoxe de Klein, combinée à l'intégration des paramètres d'information de Fisher et de Shannon, fournit un outil complet pour les avancées théoriques et pratiques en mécanique quantique et en théorie de l'information quantique.

ANNEXE A

L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DANS UN POTENTIEL ÉCHELLE

Dans le cadre de l'étude d'une particule libre se déplaçant dans un potentiel échelle, l'équation de Schrödinger est résolue dans deux régions distinctes : $x < 0$ et $x \geq 0$. Pour $x < 0$, où le potentiel est nul ($V(x) = 0$), la solution de l'équation de Schrödinger est une superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, donnée par :

$$\Psi_I(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad (\text{A.1})$$

où $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Pour $x \geq 0$, où le potentiel est constant ($V(x) = V_0$), la solution est une onde transmise, donnée par :

$$\Psi_{II}(x) = C \exp(ik_2x) \quad (\text{A.2})$$

où $k_2^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$. Les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première à $x = 0$ imposent que :

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d\Psi_I}{dx}(0) = \frac{d\Psi_{II}}{dx}(0) \Rightarrow k_1(A - B) = k_2C \quad (\text{A.4})$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve :

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad (\text{A.5})$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (\text{A.6})$$

Les densités de courant correspondantes pour les ondes incidente, réfléchie et transmise sont définies par :

$$J_{\text{inc}} = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \quad (\text{A.7})$$

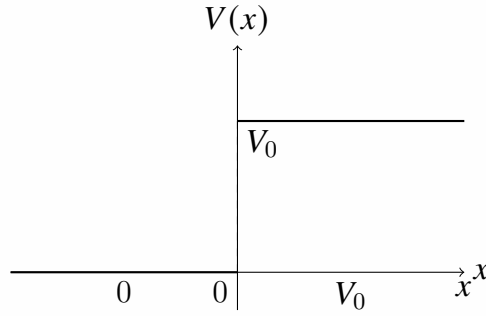


Fig. A.1 : Potentiel d'échelle (step potential)

$$J_{\text{ref}} = -\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \quad (\text{A.8})$$

$$J_{\text{trans}} = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2 \quad (\text{A.9})$$

Les coefficients de réflexion R et de transmission T sont alors donnés par :

$$R = \left| \frac{J_{\text{ref}}}{J_{\text{inc}}} \right| = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

$$T = \left| \frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} \right| = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

Discussion :

- Cas classique : Dans le cadre classique, une particule possédant une énergie E supérieure au potentiel V_0 traverse la barrière sans être réfléchi. Il n'y a pas de réflexion et toute l'énergie est transmise.
- Cas quantique : En mécanique quantique, même si l'énergie E de la particule est supérieure à V_0 , une partie de l'onde incidente est réfléchi en raison de la nature ondulatoire de la particule. Cela se traduit par un coefficient de réflexion non nul, contrairement au cas classique. Les coefficients de réflexion et de transmission quantiques satisfont toujours la relation $R + T = 1$, assurant ainsi la conservation de la probabilité.

Cette différence fondamentale entre les comportements classique et quantique met en évidence la dualité onde-particule et les phénomènes de réflexion et de transmission des ondes de matière, illustrant des concepts essentiels de la mécanique quantique tels que la superposition et l'interférence des ondes.

Cette différence fondamentale entre les comportements classique et quantique met en évidence la dualité onde-particule et les phénomènes de réflexion et de transmission des ondes de matière, illustrant des concepts essentiels de la mécanique quantique tels que la superposition et l'interférence des ondes.

ANNEXE B

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

B.1 Le cercle de convergence de la série hypergéométrique de Gauss

La série hypergéométrique de Gauss est définie comme suit :

$$F(a, b; c; Z) = {}_2F_1(a, b; c; Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{Z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)} \frac{Z^n}{n!} \quad (\text{B.1})$$

où $(a)_n$, $(b)_n$, et $(c)_n$ sont les symboles de Pochhammer, des notations compactes utilisées dans les séries hypergéométriques et définis comme des produits croissants. Plus précisément, pour un entier n , les symboles de Pochhammer sont définis comme suit :

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (\text{B.2})$$

où Γ est la fonction gamma, qui généralise la notion de factorielle à des arguments non entiers. En particulier, pour $n = 0$, le symbole de Pochhammer est défini comme suit :

$$(a)_0 = 1 \quad (\text{B.3})$$

Ces symboles permettent de représenter succinctement les coefficients dans les séries hypergéométriques.

Par exemple :

$$\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \quad (\text{B.4})$$

Les symboles de Pochhammer jouent un rôle crucial dans la définition et l'analyse des séries hypergéométriques, facilitant les manipulations algébriques et les développements asymptotiques.

Le cercle de convergence de cette série est donné par $|Z| = 1$, qui correspond au cercle unité dans le plan complexe. À l'intérieur de ce cercle, le comportement de la série hypergéométrique peut être décrit comme

suit :

- Divergence : lorsque $\Re(c - a - b) \leq -1$
- Convergence absolue : lorsque $\Re(c - a - b) > 0$
- Convergence conditionnelle : lorsque $-1 < \Re(c - a - b) \leq 0$

Le point $Z = 1$ est exclu du cercle de convergence. La série de Gauss se réduit à un polynôme de degré n en Z lorsque a ou b est égal à $-n$ (avec $n = 0, 1, 2, \dots$). La série n'est pas définie lorsque c est égal à $-m$ (avec $m = 0, 1, 2, \dots$), à moins que a ou b ne soit pas un entier négatif n avec $n < m$ et $c = -m$. En particulier :

$$\lim_{c \rightarrow -m} F(a, b; c; Z) = \frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(m+1)!} Z^{m+1} F(a+m+1, b+m+1; m+2; Z) \quad (\text{B.5})$$

B.2 Cas élémentaires de la série de Gauss

Quelques cas spéciaux de la série hypergéométrique de Gauss sont :

$$F(1, 1; 2; Z) = -Z^{-1} \ln(1 - Z) \quad (\text{B.6})$$

$$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; Z^2\right) = \frac{1}{2} Z^{-1} \ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -Z^2\right) = Z^{-1} \arctan(Z) \quad (\text{B.8})$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; Z^2\right) = (1 - Z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.9})$$

$$F(1, 1; \frac{3}{2}; Z^2) = Z^{-1} \arcsin(Z) \quad (\text{B.10})$$

$$F(a, b; b; Z) = (1 - Z)^{-a} \quad (\text{B.11})$$

B.3 Valeurs particulières de la fonction hypergéométrique

Certaines valeurs particulières pour des arguments spécifiques sont :

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots, \Re(c-a-b) > 0) \quad (\text{B.12})$$

$$F(a, b; a-b+1; -1) = 2^{-a} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)}, \quad (1+a-b \neq 0, -1, -2, \dots, \Re(c-a-b) > 0) \quad (\text{B.13})$$

$$F\left(a, \frac{1}{2}+a; \frac{3}{2}-2a; -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^{-2a} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{3}{2}-2a)}{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{4}{3}-2a)}, \quad \left(\frac{3}{2}-2a \neq 0, -1, -2, \dots\right) \quad (\text{B.14})$$

B.4 L'équation différentielle de Riemann

L'équation différentielle hypergéométrique avec des points singuliers réguliers en 0, 1, et ∞ est un cas particulier de l'équation différentielle de Riemann, qui est une forme plus générale décrivant les fonctions hypergéométriques et leurs propriétés. L'équation de Riemann se présente avec trois points singuliers :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial Z^2} + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{Z - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{Z - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{Z - c} \right] \frac{\partial \omega}{\partial Z} + \left[\frac{\alpha \alpha' (a - b)(a - c)}{Z - a} + \frac{\beta \beta' (a - b)(a - c)}{Z - b} + \frac{\gamma \gamma' (a - b)(a - c)}{Z - c} \right] \frac{\omega}{(Z - a)(Z - b)(Z - c)} = 0 \quad (\text{B.15})$$

où

$$\omega = \left(\frac{Z - a}{Z - b} \right)^\alpha \left(\frac{Z - c}{Z - b} \right)^\gamma F \left[\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma; 1 + \alpha - \alpha'; \frac{(Z - a)(c - b)}{(Z - b)(c - a)} \right] \quad (\text{B.16})$$

Les paires d'exposants aux points singuliers $(a; b; c)$ sont $(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma')$ respectivement, soumis à la condition $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$. Cette forme générale permet d'analyser les propriétés de la fonction hypergéométrique sous divers cas particuliers. L'ensemble complet de solutions est indiqué par le symbole :

$$\omega = P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} ; Z \right\} \quad (\text{B.17})$$

B.4.1 Cas spéciaux de la fonction de Riemann P

Quelques cas spéciaux de la fonction de Riemann P sont :

- La fonction hypergéométrique généralisée :

$$\omega = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} ; Z \right\} \quad (\text{B.18})$$

- La fonction hypergéométrique :

$$\omega = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 - c & b & c - a - b \end{array} ; Z \right\} \quad (\text{B.19})$$

- La fonctions de Legendre :

$$\omega = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{1}{2}\nu & \frac{1}{2}\mu & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu & -\frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2} \end{array} (1 - Z^2)^{-1} \right\} \quad (\text{B.20})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. Greiner, *Quantum Mechanics : An Introduction*, S. V. 4th ed (Ed.), Spinger-Verlag, Berlin., **2001**.
- [2] W.Greiner, *Relativistic quntum mechanics*,, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, **1990**.
- [3] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic quantum theory*, **1964**.
- [4] M. W. Robert, *Green's function solution to relativistic Feshbach-Villars wave equations for spin zero particles*, California State University, Long Beach, **2012**.
- [5] H. Feshbach, F. M. H. Villars, *Rev. Modern Phys.* **1958**, *30*, 24–45.
- [6] O. Klein, *Zeitschrift f .ur Physik* **1926**, *37*, 895–906.
- [7] O. Klein, *Z. Phys* **1929**, *53*, 157.
- [8] A. Boumali, L. Malika, *Modern Phys. Lett. A* **2018**, *33*, 1850033.
- [9] A.Boumali, F.Serdouk, S.Dilmi, *Physica. A.* **2020**, *533*, 124207.
- [10] A.Boumali, H.Aounallah, *Rev. Mex. Fis.* **2020**, *66*, 192–208.
- [11] A.Bouzenada, A.Boumali, *Nucl.phys.B* **2023**.
- [12] A.Bouzenada, A.Boumali **2023**.
- [13] A. Boumali, *Mécanique quantique (en arabe)*, open source (researchgate ; academia) (Ed.), Boumali, **2019**.
- [14] A. Boumali, L. Chetouani, *Physics Letters A* **2005**, *346*, 261–268.

- [15] A. Boumali, *Solutions de l'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour certaines formes d'interactions*, U. of Annaba (Ed.), Department of physics, **2006**.
- [16] A. Boumali, *Turk. J. Phys.* **2007**, *31*, 307–316, 307.
- [17] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2009**, *42*, 235301, 235301.
- [18] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur Phys. J Plus.* **2013**, *128*, 124.
- [19] A. Bouzenada, A. Boumali, *Ann. Physics* **2023**, *452*, 169302.
- [20] A. Bouzenada, A. Boumali, A. R. Marwan, *arXiv preprint arXiv :2302.13805* **2023**.
- [21] A. Guvendi, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus* **2021**, *136*, 1–18.
- [22] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*, L817–L819.
- [23] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publishers, **1996**.
- [24] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, *23*, 2263–2272.
- [25] W. Greiner, L. Neise, H. Stocker, *Thermodynamique et mécanique statistique*, Springer, **1995**.
- [26] S. Rawal, Master's thesis, B.S., 2014, California State University, Long Beach, **2020**.
- [27] F.Sauter, *Z.Phys* **1932**, *73*, 547.
- [28] M.Fauda, E. Furlani, *Am.J.phys* **1982**, *50*, 545.
- [29] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [30] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, Vol. 55*, Dover Publications, New York, **1970**.
- [31] A.Bouzenada, phdthesis, Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi–Tébessa-, **2024**.
- [32] B. R. Frieden, *Am. J. Phys* **1989**, *57*, 1004.
- [33] B. R. Frieden, *Opt. Lett* **1989**, *14*, 199.
- [34] B. R. Frieden, *Phys. Rev. A* **1990**, *41*, 4265.
- [35] B. R. Frieden, *Physica. A* **1992**, *180*, 359.

- [36] R. Frieden, R. A. Gatenby, *Exploratory data analysis using fisher Information*, Springer-Verlag, **2007**, chapter 7, p. 219.
- [37] B. R. Frieden, B. H. Soifer, *Phys. Rev. E* **1995**, *52*, 2274.
- [38] V. Aguiar, I. Guedes, *Physica. A* **2014**, *401*, 159.
- [39] V. Aguiar, I. Guedes, *Phys. Scr* **2015**, *90*, 045207.



République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
F.E.S.R.V

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Larbi Tébessi -Tébessa-

جامعة العربي التبسي - تبسة -
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Déclaration sur l'honneur de non-plagiat

(À joindre obligatoirement au mémoire, remplie et signée)

Je soussigné(e).

Nom, prénom : HAMLA Assia

Régulièrement inscrit (e) oui

N° de carte d'étudiant : 14 14 34018075

Année universitaire : 2023 / 2024

Domaine : physique

Filière : physique

Spécialité : physique de la matière condensée

Intitulé du mémoire :

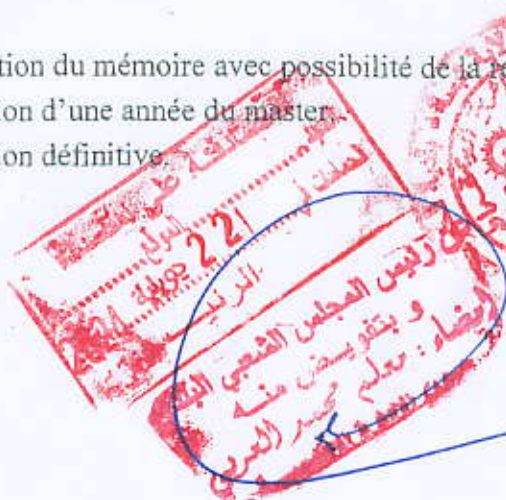
..... Analyse de l'oscillateur relativiste et du paradoxe de K. Klein d'une particule de spin=0 via le formalisme de F.V dans un espace plat.

Atteste que mon mémoire est un travail original et que toutes les sources utilisées ont été indiquées dans leur totalité .je certifie également que je n'ai ni recopié ni utilisé des idées ou des formulations tirées d'un ouvrage, article ou mémoire ,en version imprimée ou électronique, sans mentionner précisément leur origine et que les citations intégrales sont signalées entre guillemets.

Sanctions en cas de plagiat prouvé :

L'étudiant sera convoqué de vent le conseil de discipline, les sanctions prévues selon la gravité de plagiat sont :

- L'annulation du mémoire avec possibilité de la refaire sur un sujet différent.
- L'exclusion d'une année du master.
- L'exclusion définitive.



Fait Tébessa, le 22-07-2024.

Signature de l'étudiant(e).



Département : Sciences de la matière.

Filière : physique

Spécialité : physique de la matière condensée

Année universitaire 2023/2024

Formulaire de levée de réserves après soutenance d'un Mémoire de Master

Données d'identification du candidats(es) :

Nom et prénom du candidat : HAMPLA Assia

Intitulé du Sujet : **Analyse de l'oscillateur relativiste et du paradoxe de Klein d'une particule de spin-0 via le formalisme de Feshbach-Villars (FV) dans un espace plat**

Données d'identification du membre de jury :

Nom et prénom : CHEMAM Faïçal

Grade : Professeur

Lieu d'exercice : Université Larbi Tebessi- Tébessa

Vu le procès-verbal de soutenance de la thèse sus citée comportant les réserves suivantes :

R.A.S

Et après constatation des modifications et corrections suivantes :

R.A.S

Je déclare en ma qualité de président de jury de soutenance que le mémoire cité remplit toutes les conditions exigées et permet au candidat de déposer son mémoire en vue de l'obtention de l'attestation de succès.

Le 24/07/2024

Président de jury de soutenance : (Nom/Prénom et signature)

Prof.Dr. Chemam Faïçal

