

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ECHAHID CHEIKH LARBI TEBESSI- TEBESSA



Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de mathématiques et informatique

Analyse 4

Un polycopié destiné aux étudiants de licence 2 Mathématiques

Réalisé par :

Dr :Toualbia Abdelatif

Avril 2024

Table des matières

1	Topologie de \mathbb{R}^n	5
1.1	Notion de norme	5
1.2	Parties ouvertes et fermées de \mathbb{R}^d	9
1.2.1	Parties ouvertes de \mathbb{R}^d	9
1.2.2	Parties fermées de \mathbb{R}^d	11
1.3	Voisinage- Intérieur- Adhérence	12
1.3.1	Voisinage	12
1.3.2	Intérieur	12
1.3.3	Adhérence	13
1.4	Compacité	13
1.4.1	Définition. Caractérisation. Premières propriétés	13
2	Fonctions de plusieurs variables	17
2.1	Définitions	17
2.1.1	Les fonctions de deux variables	17
2.1.2	Les fonctions de trois variables ou plus	19
2.2	Les limites et la continuité	20
2.2.1	Limite en un point de \mathbb{R}^p	20
2.2.2	La continuité	26
2.3	Les dérivées partielles	28
2.3.1	Cas des fonctions de deux variables	28
2.3.2	Situation pour les fonctions avec plus de deux variables	33
2.3.3	Les dérivées d'ordre supérieur	34
2.3.4	Lemme de Schwartz	35
2.3.5	Les équations aux dérivées partielles	36

2.3.6	Fonctions différentiables	37
2.3.7	Différentielle d'une fonction	40
2.3.8	Formule de Taylor	42
2.4	Dérivée d'une fonction composée	43
2.4.1	La règle de dérivation des fonctions composées	43
2.4.2	Théorème des fonctions implicites	47
2.5	Les dérivées Partielles suivant un vecteur et le vecteur gradient	49
2.5.1	Les dérivées Partielles suivant un vecteur	49
2.5.2	Le vecteur gradient	51
2.5.3	Les fonctions de trois variables	53
2.5.4	Maximiser la dérivée dans une direction	54
2.5.5	Les plans tangents aux surfaces de niveau	56
2.5.6	La signification du vecteur gradient	58
2.6	Extrémums	59
2.6.1	Calcul du minimum et du maximum d'une fonction	59
2.6.2	Maximum et minimum absolus	65
3	Les intégrales multiples	68
3.1	Les intégrales doubles sur des rectangles	68
3.1.1	Révision de l'intégrale définie	68
3.1.2	Des volumes et des intégrales doubles	69
3.1.3	Les propriétés des intégrales doubles	73
3.2	Les intégrales itérées	74
3.3	Les intégrales doubles sur un domaine D borné.	79
3.3.1	Calcul d'une intégrale double sur un domaine D	79
3.3.2	Propriétés générales de l'intégrale double	88
3.4	Les intégrales doubles en coordonnées polaires	89
3.5	Des applications des intégrales doubles	94
3.5.1	Des densités et des masses	94
3.5.2	Des moments et des centres de masse	97
3.5.3	Probabilité	100
3.6	Les intégrales triples	102
3.6.1	Calcul d'une intégrale triple sur un parallépipède	102
3.6.2	Calcul de l'intégrale triple sur un domaine E	105
3.6.3	Des applications des intégrales triples	109

3.7	Des intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques	112
3.7.1	En coordonnées cylindriques	113
3.7.2	En coordonnées sphériques	116
3.8	Le changement de variables dans les intégrales multiples	119
3.8.1	Le changement de variables dans un intégrale double	119
3.8.2	Le changement de variables dans une intégrale triple	125

L'ouvrage actuel reprend avec plusieurs ajouts un cours de Licence en mathématiques dispensé à l'Université de Tébessa entre 2018 et 2022. Ce cours avait pour objectif de donner aux étudiants quelques concepts théoriques fondamentaux sur les fonctions de plusieurs variables.

Dans le **premier chapitre**, on va donner quelques rappels et définitions concernant la topologie de \mathbb{R}^n . Il est essentiel de bien la comprendre afin de pouvoir lire les chapitres suivants.

Dans le **deuxième chapitre**, Nous étendons les notions de base du calcul différentiel et intégral à des fonctions de deux ou plusieurs variables, on se propose d'étudier et de présenter les fonctions de deux et trois variables. En particulier, nous introduisons les dérivées partielles, les dérivées dans une direction, les valeurs extrêmes.

Dans le **troisième chapitre** La notion d'intégrale définie est étendue à l'intégrale double et triple des fonctions de deux et trois variables. ces concepts sont utilisés afin de déterminer des volumes, des surfaces, des masses et des centres de gravité. Enfin, les intégrales doubles servent encore à calculer des probabilités dans le cas où deux variables aléatoires sont en jeu.

Chapitre 1

Topologie de \mathbb{R}^n

1.1 Notion de norme

La norme est définie comme l'association d'une taille à un objet, plus précisément d'un réel positif à un vecteur

Définition 1.1 Une norme sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que

1. $\forall \nu \in E, \quad \|\nu\| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \nu = 0_E$
2. $\forall \nu, w \in E, \quad \|\nu + w\| \leq \|\nu\| + \|w\|$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \nu \in E, \quad \|\lambda\nu\| = |\lambda| \|\nu\|$

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel qui possède une norme

Remarque 1.1 1. En réalité, il ne faut pas demander que $0_E = 0_{\mathbb{R}}$: on aura automatiquement $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}}0_E\| = 0_{\mathbb{R}}\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.

2. Il est également inutile de demander que $\|\nu\| \geq 0$: on aura automatiquement

$$\|\nu\| = \frac{\|\nu\| + \|\nu\|}{2} = \frac{\|\nu\| + \|-\nu\|}{2} \geq \frac{\|\nu - \nu\|}{2} = 0$$

3. On a toujours $\|-\nu\| = \|\nu\|$: en effet,

$$\|-\nu\| = \|(-1)\nu\| = |-1| \|\nu\| = \|\nu\|$$

4. On aura toujours

$$\|\|\nu\| - \|w\|\| \leq \|v - w\|$$

quitte à échanger ν et w , il suffit de remarquer que

$$\|\nu\| = \|\nu - w + w\| \leq \|\nu - w\| + \|w\|$$

5. Lorsque E est un espace vectoriel complexe (et pas seulement réel), on demande par fois que l'égalité $\|\lambda\nu\| = |\lambda| \|\nu\|$ soit aussi satisfaite pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Rappel : si X est un ensemble quelconque et E un e v, alors l'ensemble $F(X, E)$ de toutes les applications $f : X \rightarrow E$ est un e v pour les lois

1. $\forall f, g \in F(X, E), \forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $\forall f \in F(X, E), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Exemple 1.1 1. La valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} . De même, le module est une norme sur \mathbb{C} . Tout ce qui suit a un analogue avec \mathbb{C} à la place de \mathbb{R} .

2. On munira toujours \mathbb{R}^n de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Mais on dispose aussi sur \mathbb{R}^n de la norme euclidienne

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

(bien utile en géométrie) et plus généralement la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Par exemple, si $\nu = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$, on aura $\|\nu\|_\infty = 4, \|\nu\|_2 = 5$ et $\|\nu\|_1 = 7$.

3. On peut définir différentes norme sur $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ comme les normes $\|\cdot\|_p$ (en considérant les $m \times n$ coefficients) mais on préférera

$$\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{bmatrix} \right\| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m a_{ij}$$

4. On peut munir l'espace (de dimension infinie) des polynômes $\mathbb{R}[t]$ de la norme

$$\left\| \sum_{i=0}^d a_i t^i \right\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |a_i|$$

5. Sur l'espace $l_\infty(\mathbb{R})$ des suites bornées de nombres réels, on pose

$$\|(x_1, \dots, x_n, \dots)\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

6. Prenons E comme un e - v normé et X comme un ensemble donné. Une application $f : X \rightarrow E$ est dite bornée s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq k$. Les applications bornées forment un sous espace vectoriel $F^b(X, E)$ de $F(X, E)$ que l'on munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

Il sera possible de constater que $l_\infty(\mathbb{R}) = F^b(X, E)$ et que l'exemple précédent n'est donc qu'un cas spécifique de celui précédent.

7. On peut munir l'espace $C([ab], \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [ab] \rightarrow \mathbb{R}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{ou} \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Par exemple, avec $[a, b] = [0, 1]$ et $f(t) = t$, on aura $\|f\|_\infty = 1$, $\|f\|_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\|f\|_1 = \frac{1}{2}$

Remarque 1.2 1. L'inégalité triangulaire est la condition 2 de la définition 1.1. Ce sont les conditions délicates, mais il est facile de les vérifier pour les $\|\cdot\|_\infty$.

2. L'inégalité de Minkovski est une inégalité triangulaire pour les $\|\cdot\|_p$. Son fondement est l'inégalité de Hölder où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ou

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \left(\int_a^b (f(t))^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (g(t))^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lorsque $p = 2$, l'inégalité de Hölder s'appelle aussi inégalité de Cauchy-Schwarz.

- On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels, leur produit

$$E \times F = \{(u, \nu), u \in E, \nu \in F\}$$

est muni des lois (terme à terme)

1. $\forall (u_1, \nu_1), (u_2, \nu_2) \in E \times F, (u_1, \nu_1) + (u_2, \nu_2) = (u_1 + u_2, \nu_1 + \nu_2)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (u, \nu) \in E \times F, \lambda(u, \nu) = (\lambda u, \lambda \nu)$.

Proposition 1.1 1. Si F est un s - e - v d'un espace vectoriel normé E , alors la norme de E induit une norme sur F .

2. Si E et F sont deux e - v normés, alors l'application

$$(u, \nu) \rightarrow \max(\|u\|, \|\nu\|)$$

est une norme sur $E \times F$.

Preuve. La première affirmation découle directement de la définition, tandis que la seconde n'est pas plus complexe, mais nous pouvons tout de même approfondir. Si $u \in E$ et $\nu \in F$, on a $\|u\| \geq 0$ et $\|\nu\| \geq 0$ si bien que

$$\begin{aligned} (u, \nu) = (0, 0) &\Leftrightarrow u = 0 \text{ et } \nu = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\| = 0 \text{ et } \|\nu\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \max \{\|u\|, \|\nu\|\} \\ &\Leftrightarrow \|(u, \nu)\| = 0 \end{aligned}$$

Si on se donne $u_1, u_2 \in E$ et $\nu_1, \nu_2 \in F$, on a

$$\begin{aligned} \|(u_1, \nu_1) + (u_2, \nu_2)\| &= \|(u_1 + u_2, \nu_1 + \nu_2)\| \\ &= \max \{\|u_1 + u_2\|, \|\nu_1 + \nu_2\|\} \\ &\leq \max \{\|u_1\| + \|u_2\|, \|\nu_1\| + \|\nu_2\|\} \\ &\leq \max \{\|u_1\| + \|u_2\|\} + \max \{\|\nu_1\| + \|\nu_2\|\} \\ &= \|(u_1, \nu_1)\| + \|(u_2, \nu_2)\|. \end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité $\max \{(a + b, c + d)\} \leq \max \{a + c\} + \max \{b + d\}$. Enfin si on se donne $u \in E, \nu \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on aura

$$\begin{aligned} \|\lambda(u, \nu)\| &= \|(\lambda u, \lambda \nu)\| \\ &= \max \{\|\lambda u\|, \|\lambda \nu\|\} \\ &= \max \{|\lambda| \|u\|, |\lambda| \|\nu\|\} \\ &= |\lambda| \max \{\|u\|, \|\nu\|\} \\ &= |\lambda| \|(u, \nu)\|. \end{aligned}$$

■

Définition 1.2 Si E est un e - β v normé, on définit la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre $v_0 \in E$ et de rayon $R \geq 0$:

$$\begin{aligned} \beta^-(v_0, R) &= \{v \in E, \|v - v_0\| < R\} \\ \beta^+(v_0, R) &= \{v \in E, \|v - v_0\| \leq R\} \end{aligned}$$

et

$$S(v_0, R) = \{v \in E, \|v - v_0\| = R\}$$

Lorsque $v_0 = 0_E$ et $R = 1$, on dit boule unité ou sphère unité.

Exemple 1.2 1. Dans \mathbb{R} , une boule ouverte est un intervalle $]a, b[$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$ (et une boule fermée est un intervalle $[a, b]$) :

$$B^-(c, R) =]c - R, c + R[\text{ et }]a, b[= B^-\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$$

2. Dans \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne, une boule est un disque et une sphère est un cercle. Dans \mathbb{R}^3 muni de la norme euclidienne, une boule (resp. sphère) est ce qu'on appelle communément une boule (resp. sphère).

3. Attention, dans \mathbb{R}^2 muni de la norme infinie, la sphère unité est un carré

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

(de côté 2) et dans \mathbb{R}^3 , c'est le cube. Avec la norme 1, on trouve un carré de côté $\sqrt{2}$ dans \mathbb{R}^2 et un octaèdre dans \mathbb{R}^3 .

1.2 Parties ouvertes et fermées de \mathbb{R}^d

1.2.1 Parties ouvertes de \mathbb{R}^d

Définition 1.3 La partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est considérée comme ouverte lorsque :

$$\forall x \in A, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset A$$

Il est également dit que A est un ouvert

Remarque 1.3 L'ensemble vide \emptyset est ouvert. L'ensemble $A = \mathbb{R}^d$ est également ouvert.

De manière informelle, A est ouverte si tout point $x \in A$ possède tous ses « voisins » suffisamment proches qui sont également dans A .

Exemple 1.3 1. La définition est cohérente car la boule ouverte avec un centre a et un rayon $R > 0$ est un ouvert.

En effet, soit $x \in B(a, R)$. On a donc $\|x - a\|_\infty < R$. On a alors

$$B(x, R - \|x - a\|_\infty) \subset B(a, R)$$

Selon l'inégalité triangulaire pour $y \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$y \in B(x, R - \|x - a\|_\infty) \Rightarrow \|y - x\|_\infty < R - \|x - a\|_\infty \Rightarrow \|y - a\|_\infty = \|y - x + x - a\|_\infty < R.$$

Il est clair que $B(a, R)$ est un ouvert.

Plus précisément, dans la dimension 1, les intervalles ouverts de \mathbb{R} sont largement ouverts selon la déf 3.1.

2. Si x est tel que $\|x\|_\infty = R$, alors on ne peut pas trouver de $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \overline{B}(0, R)$.

Supposons qu'un tel $\delta > 0$ existe. On a alors

$$\left\| \left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) x - x \right\|_\infty \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

ce qui prouve que $\left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) x \in B(x, \delta)$ et donc que $\left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) x \in \overline{B}(0, R)$ ce qui signifie que

$$\left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) \underbrace{\|x\|_\infty}_R \leq R,$$

c'est une contradiction.

Évidemment, il en va de même pour les boules qui ne sont pas centrées en 0

Proposition 1.2 - Chaque réunion d'une famille quelconque (même infinie) d'ouverts est toujours ouverte.

- Chaque intersection finie d'ouvertures reste ouverte.

Preuve. Soit V une famille d'ouverts de \mathbb{R}^d . L'objectif est de démontrer que $A = \cup_{v \in V} v$ est un ouvert. Soit donc $x \in A$. Selon la définition de l'union, au moins un $v \in V$ existe tel que $x \in v$. Comme ce v est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset v$, mais comme $v \subset A$, on a bien

$$B(x, \delta) \subset A$$

Cela démontre l'ouverture de A .

Le nombre fini d'ouverts de \mathbb{R}^d est ν_1, \dots, ν_n . On note $A = \nu_1 \cap \dots \cap \nu_n$. Nous souhaitons démontrer que A est ouvert.

Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $x \in \nu_k$ et ν_k est un ouvert donc il existe $\delta_k > 0$ tel que $B(x, \delta_k) \subset \nu_k$.

On pose maintenant $\delta = \min \delta_1, \dots, \delta_n$. On a bien $\delta > 0$ et de plus pour tout $1 \leq k \leq n$ on a

$$B(x, \delta) \subset B(x, \delta_k) \subset \nu_k$$

et donc

$$B(x, \delta) \subset \nu_1 \cap \dots \cap \nu_n = A$$

ce qui montre bien que A est ouvert. ■

Remarque 1.4 - Il est important de noter que toute intersection d'ouvertures n'est pas forcément un ouvert.

Il est possible de calculer $A = \cap_{k=1}^{\infty} U_k =]0, 1]$, ce qui ne correspond pas à un intervalle ouvert.

1.2.2 Parties fermées de \mathbb{R}^d

Définition 1.4 On considère qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée uniquement si son complémentaire $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$ est un ouvert.

La description suivante, plus pratique, est celle des fermés

Proposition 1.3 (Définition des fermés en utilisant les suites)

$A \subset \mathbb{R}^d$ est une partie fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$

Preuve. - Prenons le cas où A est fermée. Supposons que $(x_n)_n$ soit une série d'éléments de A qui se rapprochent d'une limite $l \in \mathbb{R}^d$. On souhaite démontrer que $l \in A$. En utilisant l'absurde, supposons que $l \notin A$. Cela implique que l est dans A^c et que, par hypothèse, A^c est ouvert. Il existe $\delta > 0$ tel que $B(l, \delta) \subset A^c$. Cependant, en termes de limite, il y a un nombre suffisamment élevé tel que $\|x_n - l\|_\infty < \delta$, ce qui signifie que $x_n \in B(l, \delta) \subset A^c$, ce qui remet en question le fait que $x_n \in A$. D'où le résultat.

- Maintenant, supposons que toute série d'éléments de A qui se rejoignent à sa limite dans A . Notre objectif est de démontrer que A est fermé, c'est-à-dire que A^c est ouvert.

Prenons le cas où A^c n'est pas ouvert. Il existe alors $x \in A^c$ tel qu'aucune boule $B(x, \delta)$ ne soit contenue dans A^c . Ainsi, pour tout $n \geq 1$, la boule $B(x, \frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans A^c , Cela implique qu'il y a au moins une composante $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$.

Nous avons donc $\|x_n - x\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que $(x_n)_n$ converge vers x . Il s'agit, par hypothèse, de $x \in A$, ce qui est en contradiction avec $x \in A^c$. ■

Proposition 1.4 1. Soit F_i est fermé ($i = 1, 2, \dots, k$), alors $\cup_{i=1}^k F_i$ est fermé.

2. Soit F_i est fermé ($i = 1, 2, \dots, k$), alors $\cap_{i=1}^k F_i$ est fermé.

Preuve. 1. Soient F_1, \dots, F_k des fermés de \mathbb{R}^d . Montrons que $A = F_1 \cup \dots \cup F_k$ est encore fermé.

On utilise la formule

$$A^c = F_1^c \cap \dots \cap F_k^c,$$

Cela démontre que A^c est un ouvert à l'intersection finie d'ouverts, ce qui signifie qu' A est un fermé.

2. Il en est de même de l'union des complémentaires d'une intersection, complémentaire d'une intersection. ■

1.3 Voisinage- Intérieur- Adhérence

1.3.1 Voisinage

Supposons $\|\cdot\|$ une norme pour \mathbb{R}^d . Toutes les boules en question sont conformes à cette norme.

Définition 1.5 Si un élément a de \mathbb{R}^d exist. Le voisinage de a (dans \mathbb{R}^d) désigne toute partie U de \mathbb{R}^d dans laquelle se trouve une boule ouverte non vide au centre a .

Proposition 1.5 - . Toute partie de \mathbb{R}^d ayant un voisinage de a est considérée comme un voisinage de a

- Il existe un voisinage de a à chaque intersection finie de voisinages de a .

- Étant donnés deux éléments distincts a et a' de \mathbb{R}^d , Il existe toujours un voisinage de a et un voisinage de a' qui ne se rencontrent pas

Preuve. * Supposons que D une composante de \mathbb{R}^d contenant un voisinage v de a .

Étant donné que v est un voisinage de a , il renferme une boule ouverte non vide au centre a , comme $\mathfrak{B}(a, \varepsilon)$. Alors $\mathfrak{B}(a, \varepsilon) \subset v \subset D$, Donc, D comprend une boule ouverte non vide avec un centre a (c'est-à-dire $\mathfrak{B}(a, \varepsilon)$), ce qui signifie qu'elle est proche de a .

* Soit une famille de voisinages de a , indexée par K fini, appelée $(v_i)_{i \in K}$.

Notons $v = \bigcap_{i \in K} v_i$.

Pour tout $i \in K$, soit ε_i tel que $\mathfrak{B}(a, \varepsilon_i) \subset v_i$ (il en existe car v_i est un voisinage de a). Alors, pour $\varepsilon = \min_{i \in K} \varepsilon_i$, on a $\forall i \in K, \mathfrak{B}(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon_i) \subset v_i$. (En effet, pour tout $i \in K$, si $x \in \mathfrak{B}(a, \varepsilon)$, alors $\|x - a\| < \varepsilon$, donc $\|x - a\| < \varepsilon \leq \varepsilon_i$, soit $x \in \mathfrak{B}(a, \varepsilon_i)$)

Donc $\mathfrak{B}(a, \varepsilon) \subset \bigcap_{i \in K} v_i$, Donc $\mathfrak{B}(a, \varepsilon) \subset v$, donc v est un voisinage de a .

* Soient deux éléments distincts de \mathbb{R}^d .

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{\|a - a'\|}{2}$.

Alors $\mathfrak{B}(a, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}(a', \varepsilon) = \emptyset$.

En effet, supposons que $\mathfrak{B}(a, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}(a', \varepsilon) \neq \emptyset$.

Soit alors $x \in \mathfrak{B}(a, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}(a', \varepsilon)$.

Alors $\|x - a\| < \varepsilon$ soit $\|a - x\| < \varepsilon$ et $\|x - a'\| < \varepsilon$. Donc $\|a - a'\| \leq \|a - x\| + \|x - a'\|$ ce qui est impossible car $\varepsilon < \frac{\|a - a'\|}{2}$.

Pour la suite, on notera $v(a)$ l'ensemble des voisinages, dans \mathbb{R}^d , d'un point a de \mathbb{R}^d . ■

1.3.2 Intérieur

Soit A une partie de \mathbb{R}^d

Définition 1.6 Étant donné $a \in \mathbb{R}^d$, on dit que a est intérieur à A lorsque A est un voisinage de a , c'est-à-dire lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Les points situés à l'intérieur de A sont connus sous le nom d'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 1.6 Soit A une partie de \mathbb{R}^d . L'intérieur de A est un ouvert qui se trouve dans A ; et il représente le plus grand, au point de vue de l'inclusion, des ouverts présents dans A .

Exemple 1.4 Dans \mathbb{R}^2 , l'intérieur de $[0, 1] \times]1, 2[$ est $]0, 1[\times]1, 2[$

1.3.3 Adhérence

Définition 1.7 Étant donné $a \in \mathbb{R}^d$, on dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A , c'est-à-dire lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A , noté \bar{A} .

Proposition 1.7 Soit A une partie de \mathbb{R}^d . L'adhérence de A est un fermé contenant A , et c'est le plus petit, au sens de l'inclusion, des fermés contenant A .

Preuve. Déjà, \bar{A} contient bien A .

Posons maintenant $\Omega = C_{\mathbb{R}^d} \bar{A}$. Montrons que Ω est ouvert.

Soit $\varkappa \in \Omega$. Alors $\varkappa \notin \bar{A}$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(\varkappa, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Alors $B(\varkappa, \varepsilon) \subset \Omega$. En effet : soit $y \in B(\varkappa, \varepsilon)$. Alors $B(\varkappa, \varepsilon)$ est un voisinage de y , et il ne rencontre pas A , donc $y \in \Omega$.

Donc Ω est un voisinage de \varkappa . C'est valable pour tout \varkappa de Ω , donc Ω est ouvert. Donc \bar{A} est fermé.

Soit enfin F un fermé contenant A . Montrons qu'alors $\bar{A} \subset F$.

Soit $\varkappa \in \bar{A}$, montrons que $\varkappa \in F$. Supposons que $\varkappa \notin F$. Alors $x \in C_{\mathbb{R}^d} F$, qui est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(\varkappa, \varepsilon) \subset C_{\mathbb{R}^d} F$. Ainsi, $B(\varkappa, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mais alors $B(\varkappa, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (puisque $A \subset F$), ce qui est impossible car $\varkappa \in \bar{A}$. Donc $\varkappa \in F$. Donc $\bar{A} \subset F$. Donc \bar{A} est bien le plus petit des fermés contenant A .

Ainsi, il résulte de la définition que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$ ■

1.4 Compacité

1.4.1 Définition. Caractérisation. Premières propriétés

Définition 1.8 Supposons que A soit une partie de \mathbb{R}^d . A est considérée comme compacte si : pour toute suite $(\varkappa_n)_n$ d'éléments de A , il existe au moins une sous-suite $(\varkappa_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un

élément de A

Un compact est donc un ensemble où toutes les suites présentent des propriétés de convergence satisfaisantes, à l'exception de la sous-suite.

Commençons par présenter quelques caractéristiques essentielles des compacts..

Proposition 1.8 Prenons A comme un compact de \mathbb{R}^d . Si A contient un fermé F , alors F est compact.

Preuve. Supposons que $(x_n)_n$ soit une suite quelconque d'éléments de F . La suite $(x_n)_n$ est également une suite d'éléments de A , car $F \subset A$. En fonction de la compacité de A , il y a une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ et un élément $l \in A$ tels que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers l . Cependant, d'un autre côté, tous les $x_{\varphi(n)}$ se trouvent dans le fermé F , ce qui signifie que leur limite l est également liée à F ■

Proposition 1.9 Lorsque A est un compact de \mathbb{R}^p et B est un compact de \mathbb{R}^q , alors $A \times B$ est un compact de \mathbb{R}^{p+q} .

Preuve. Il s'agit d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A \times B$. Le produit cartésien est défini comme $x_n = (a_n, b_n)$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$.

La suite $(a_n)_n$, qui est une suite d'éléments de A , est prise en compte. Étant donné que A est considéré comme compact, il y a une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_n$ et un élément $a \in A$ tels que $(a_{\varphi(n)})_n$ converge vers a .

Il s'agit maintenant de prendre en compte la suite $(b_{\varphi(n)})_n$, qui est une suite d'éléments du compact B . Une nouvelle sous-suite $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ et un élément $b \in B$ tels que $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge vers b peuvent donc être trouvés.

De plus, étant donné que $(a_{\varphi(\psi(n))})_n$ est une suite extraite de $(a_{\varphi(n)})_n$, elle tend vers a .

Donc, nous avons bien

$$x_{n\varphi(\psi(n))} = (a_{\varphi(\psi(n))}, b_{\varphi(\psi(n))}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a, b)$$

en d'autres termes, une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_n$ a été découverte, ce qui devait être démontré. ■

Proposition 1.10 1. Tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ est un compact de \mathbb{R} .

2. Tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ est de la forme $I = [\alpha, \beta]$.

Preuve. 1. Supposons donc que $(x_n)_n$ soit une série de réels de $[\alpha, \beta]$.

Pour tout $k \geq 0$, on note

$$y_k = \sup_{n \geq k} x_n.$$

Étant donné que la suite $(x_n)_n$ est bornée, ce suprême est clairement défini et vérifie $\alpha \leq y_k \leq \beta$ pour tout k .

En outre, il existe la propriété suivante.

$$\forall k \geq 0, y_{k+j} \leq y_k,$$

Ainsi, la suite $(y_k)_k$ est diminuée et décroissante, ce qui signifie qu'elle est convergente et que sa limite est égale à la borne inférieure de la suite que l'on observe

$$l = \inf_k \left(\sup_{n \geq k} x_n \right)$$

- Selon la définition $l \leq y_0 = \sup_{n \geq 0} x_n$, ce qui signifie qu'il y a un indice noté $\varphi(1)$ tel que $x_{\varphi(1)} \geq l - 1$.

- Prenons l'hypothèse d'avoir établi des indices $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(m)$ tels que

$$\forall 1 \leq k \leq m, x_{\varphi(k)} \geq l - \frac{1}{k}.$$

En termes de définition $l \leq y_{\varphi(m)+1} = \sup_{n \geq \varphi(m)+1} x_n$ et il y a donc un indice noté $\varphi(m+1)$ tel que $\varphi(m+1) > \varphi(m)$ et tel que $x_{\varphi(m+1)} \geq l - \frac{1}{m+1}$.

En utilisant cette construction, une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ est obtenue qui vérifie

$$\forall m \geq 1, x_{\varphi(m)} \geq l - \frac{1}{m}.$$

Mais en outre, nous avons

$$x_{\varphi(m)} \leq \sup_{n \geq \varphi(m)} x_n = y_{\varphi(m)}.$$

D'où

$$\forall m \geq 1, y_{\varphi(m)} \geq x_{\varphi(m)} \geq l - \frac{1}{m}$$

La convergence des deux quantités qui encadrent $x_{\varphi(m)}$ vers la même limite l , est prouvée par le théorème des gendarmes.

2. Prenons I comme un intervalle compact de \mathbb{R} . Il est possible de constater que $\beta = \sup I$ et $\alpha = \inf I$ (ces deux bornes peuvent sembler infinies, mais nous allons voir qu'il n'en est rien).

La borne supérieure d'un ensemble non vide peut être définie comme une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers $\beta = \sup I$. Étant donné que I est considéré comme compact, il y a une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui convergent vers un élément de I . Cela démontre que, inévitablement, $\beta \in I$, et plus précisément, est donc achevé.

De même, il est démontré que $\alpha \in I$.

Étant donné que I est un intervalle, il est inévitable que $[\alpha, \beta] \subset I$. En outre, $\forall x \in I$, on a $\alpha \leq x \leq \beta$, c'est-à-dire $I \subset [\alpha, \beta]$. Finalement, nous avons l'égalité des deux ensembles $I = [\alpha, \beta]$.

■

On peut tirer de tous les résultats précédents le résultat essentiel de ce paragraphe.

Théorème 1.1 Une partie A de \mathbb{R}^d est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

Il est rappelé qu'un ensemble est considéré comme borné lorsqu'il y a $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$. Il existe également la description suivante

$$A \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists R > 0 \text{ tel que } A \subset [-R, R]^d.$$

Preuve. \Rightarrow Supposons A soit un compact et démontrons qu'il est fermé et bornée. Afin d'établir que A est fermée, nous allons démontrer que $A = \bar{A}$. Puisque l'inclusion $A \subset \bar{A}$ est toujours présente, il n'est qu'à montrer l'inclusion inverse. Soit donc $l \in \bar{A}$. Ainsi, en définissant l'adhérence, il y a une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui se rapprochent de l . Cependant, étant donné que A est compacte, une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergent vers un élément de A . Cependant, cette sous-suite conduit également à l , ce qui démontre que $l \in A$ et donc que A est fermé.

Maintenant, démontrons que A est bornée. Prenons le cas où cela ne se produit pas. Dans ce cas, on a

$$\forall n \geq 1, \exists x_n \in A, \text{ tel que } \|x_n\|_\infty \geq n.$$

Étant donné que A est considéré comme compact, il est possible de trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui convergent vers un élément $l \in A$.

Cependant, nous avons alors

$$\|x_{\varphi(n)}\|_\infty \geq \varphi(n),$$

Cependant, il est impossible que $\|x_{\varphi(n)}\|_\infty$ converge vers $\|l\|_\infty$ tandis que $x_{\varphi(n)}$ tend vers l'infini, ce qui n'est pas possible.

\Leftarrow Comme A est borné, il existe $R > 0$ tel que $A \subset [-R, R]^d$. Selon la proposition 1.10, $[-R, R]$ est considéré comme un compact de \mathbb{R} , et donc $[-R, R]^d$ est un produit cartésien de compacts, ce qui en fait un compact de \mathbb{R}^d d'après la proposition 1.9.

Enfin, A est un fermé (selon l'hypothèse) qui se trouve dans un compact, ce qui en fait un compact selon la proposition 1.8. ■

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Définitions

2.1.1 Les fonctions de deux variables

Définition 2.1 Une fonction f de deux variables est une règle qui assigne à chaque couple nombres réels (x, y) d'un ensemble D un unique nombre réel, noté $f(x, y)$. L'ensemble D est le **domaine de définition** de f et l'ensemble des valeurs atteintes par f , c'est-à-dire $\{f(x, y)/(x, y) \in D\}$, est l'**ensemble image** de f

Exemple 2.1 Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Solution 2.1 Le domaine où f est défini est

$$\beta = \{(x, y) / 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\},$$

c'est-à-dire le disque centré en $(0, 0)$ de rayon 3.

L'ensemble image de f est

$$\{z / z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in \beta\}.$$

Comme z est une racine carrée positive, $z \geq 0$. De plus,

$$9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

D'où, l'ensemble image est

$$\{z / 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3].$$

Définition 2.2 Les courbes d'équations $f(x, y) = k$ sont les courbes de niveau, où k est une constante (de l'ensemble image de f).

Exemple 2.2 Dessinez les graphiques de niveau de la fonction $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ pour les valeurs $k = -6, 0, 6, 12$.

Solution 2.2 L'équation des courbes de niveau est

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k - 6) = 0.$$

Il s'agit d'une famille de droites de pentes $-\frac{3}{2}$. Les quatre courbes de niveau $k = -6, 0, 6$ et 12 demandées sont $3x + 2y - 12 = 0, 3x + 2y - 6 = 0, 3x + 2y = 0$ et $3x + 2y + 6 = 0$. Elles sont dessinées dans la figure 1. Ces courbes de niveau sont parallèles et équidistantes parce que le graphique de f est un plan.

Exemple 2.3 Dessinez les courbes de niveau de la fonction

$$g(x, y) = \sqrt{(9 - x^2 - y^2)} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3.$$

Solution 2.3 Les équations des courbes de niveau sont

$$\sqrt{(9 - x^2 - y^2)} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

C'est une famille de cercles concentriques, centrés en $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{9 - k^2}$. Les cas $k = 0, 1, 2, 3$ sont représentés dans la figure 2.

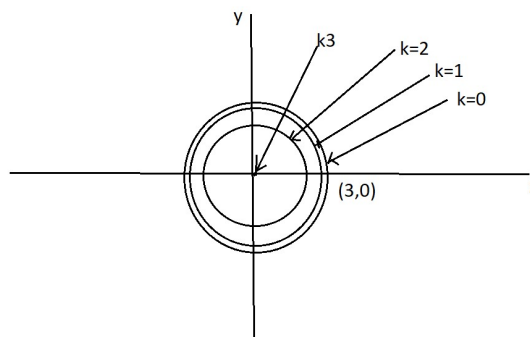


Figure 2. Carte de courbes de niveau de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Exemple 2.4 Dessinez quelques courbes de niveau de la fonction $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Solution 2.4 Les courbes de niveau sont

$$4x^2 + y^2 = k \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

Il s'agit, pour $k > 0$; d'une famille d'ellipses dont les demi-axes sont $\sqrt{k}/2$ et \sqrt{k} .

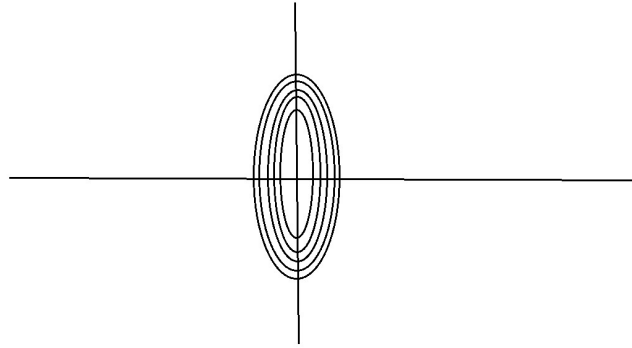


Figure 3. Carte de courbes de niveau

2.1.2 Les fonctions de trois variables ou plus

Une structure à trois variables. Chaque triplet ordonné (x, y, z) dans le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}^3$ est attribué un seul nombre réel, appelé $f(x, y, z)$. Prenons l'exemple de la température d'un point de la Terre qui est influencée par la longitude x , la latitude y du point et le moment t . On peut donc écrire $T = f(x, y, t)$.

Il est extrêmement complexe de représenter graphiquement une fonction de trois variables, étant donné que celle-ci devrait être située dans un espace à quatre dimensions.

Exemple 2.5 Déterminez le domaine de définition de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

Solution 2.5 Comme l'expression de $f(x, y, z)$ est définie à condition que $(z - y > 0)$, le domaine de définition de f est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > y\}.$$

Ce domaine est le **demi-espace** fait de tous les points qui se trouvent au-dessus du plan $z = y$.

Exemple 2.6 Quelles sont les surfaces de niveau de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Solution 2.6 Les surfaces de niveau ont pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = k$, où $k > 0$. Une telle équation représente une famille de sphères concentriques de rayon \sqrt{k} . Lorsque (x, y, z) se meut sur une quelconque de ces sphères centrées en 0, la valeur de $f(x, y, z)$ reste la même.

* Il est possible de concevoir des fonctions d'un nombre infini de variables. Un nombre $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction de n variables qui attribue un nombre z à un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de nombres réels. Les n -uplets sont tous notés \mathbb{R}^n . Par exemple, si n ingrédients interviennent dans la fabrication d'un aliment, si c_i est le coût par unité de l'ingrédient i et si x_i est la quantité nécessaire du $i^{\text{ième}}$ ingrédient, alors la fonction de coût total \check{C} est une fonction des n variables x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\check{C} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2, \dots + c_nx_n. \quad (1)$$

La fonction f est une fonction à valeur réelle dont le domaine de définition est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Nous allons parfois adopter la notation vectorielle pour écrire de telles fonctions sous une forme plus compacte : au lieu de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nous écrirons souvent $f(\vec{x})$ où $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dans ces notations, la fonction (1) s'écrit

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x},$$

où $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ et $\vec{c} \cdot \vec{x}$ est le produit scalaire des vecteurs \vec{c} et \vec{x} .

En vue de la correspondance bijective entre points (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n et leur vecteurs positions $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, il y a trois façons de regarder une fonction f définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n :

1. comme une fonction de n variables réelles x_1, x_2, \dots, x_n ,
2. comme une fonction d'une seule variable, le point (x_1, x_2, \dots, x_n) .
3. comme une fonction d'une seule variable, le vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.2 Les limites et la continuité

2.2.1 Limite en un point de \mathbb{R}^p

Comparons le comportement des fonctions

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

lorsque x et y tendent tous les deux vers 0 (et par conséquent le point (x, y) s'approche de l'origine).

Les tables 1 et 2 montrent les valeurs de $f(x, y)$ et $g(x, y)$, avec trois décimales correctes, en des points proches de l'origine. (Remarquez qu'aucune des deux fonctions n'est définie à l'origine.) Il semble que lorsque (x, y) s'approche de $(0, 0)$, les valeurs de $f(x, y)$ deviennent proches de 1 tandis que celle de $g(x, y)$ ne deviennent proches d'aucun nombre.

x \ y	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5
-0,5	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959
-0,2	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986
0	0,990	1,000		1,000	0,990
0,2	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986
0,5	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959

Table 1 Valeurs de $f(x, y)$

x \ y	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5
-0,5	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000
-0,2	-0,724	0,999	1,000	0,000	-0,724
0	-1,000	-1,000		-1,000	-1,000
0,2	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724
0,5	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000

Table 2 Valeurs de $g(x, y)$

Il se fait que ces conjectures basées sur des observations numériques évidentes sont correctes et on écrit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ n'existe pas}$$

En général, on utilise la notation

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

Définition 2.3 *Étant donné une partie D de \mathbb{R}^p , une fonction f de D dans \mathbb{R} , un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \overline{D}$, et un élément L de \mathbb{R} . On écrit*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Selon la théorie, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ est L si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proches que possible de L en choisissant x à un point a suffisamment proche, mais pas égal à a .

D'autres notations sont encore employées pour la limite de la définition 2.3

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_p \rightarrow a_p}} f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow L \quad \text{et} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow L \text{ lorsque } (x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

*

$$\lim_{\mathcal{x} \rightarrow a} f(\mathcal{x}) = L \Leftrightarrow \forall V \in V_n(L), \exists U \in V_1(a), f(U \cap D) \subset V$$

Étant donné la nature des voisinages, cela signifie que f tend vers L en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{x} \in D, \|\mathcal{x} - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dans le cas des fonctions d'une seule variable (fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), quand x tendait vers a , il n'y avait que deux provenances possibles, soit la gauche, soit la droite. Et on se souvient que si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.

Dans le cas des fonctions de deux variables la situation est beaucoup moins simple parce que (x, y) peut s'approcher de (a, b) en provenance d'un nombre infini de directions et de toutes sortes de manières (voyez la figure1), pourvu que (x, y) appartienne au domaine de définition de f .

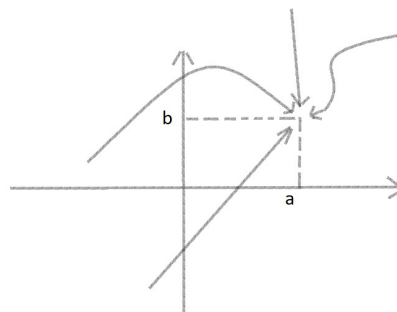


Figure 1

La définition 2.3 affirme que la distance entre $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et L peut être rendue arbitrairement petite en rendant la distance entre (x_1, x_2, \dots, x_p) et (a_1, a_2, \dots, a_p) suffisamment petite (mais non

nulle). La définition ne porte que sur la distance entre (x_1, x_2, \dots, x_p) et (a_1, a_2, \dots, a_p) . Elle ne dit rien sur la direction de l'approche. Par conséquent, si la limite existe, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ doit tendre vers la même limite quelle que soit la manière selon laquelle (x_1, x_2, \dots, x_p) s'approche de (a_1, a_2, \dots, a_p) . Il s'ensuit que $\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_p)} f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ n'existe pas dès que peut mettre en évidence deux chemins différents vers (a, b) le long desquels $f(x, y)$ a des limites différentes.

Théorème 2.1 (Théorème des gendarmes) :

Si f et h tendent vers L en a , et si $f \leq g \leq h$, alors g tend vers L en a .

Remarque 2.1 Si $f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow L_1$ lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_p)$ le long d'un chemin C_1 , et $f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow L_2$ lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_p)$ le long d'un chemin C_2 , avec $L_1 \neq L_2$, alors $\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_p)} f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ n'existe pas.

Exemple 2.7 Démontrez que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas

Solution 2.7 Soit $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Sur l'axe Ox , on peut arriver à $(0, 0)$ par des points de la forme $(x, 0)$ et, sur ce chemin, $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$, quel que soit $x \neq 0$.

D'où

$$f(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{le long de l'axe } Ox.$$

Maintenant, on emprunte l'axe Oy pour arriver à $(0, 0)$. Là, $x = 0$ et $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$, quel que soit $y \neq 0$.

$$f(x, y) \rightarrow -1 \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{le long de l'axe } Oy.$$

(Voyez la figure 2). Comme f a deux limites différentes sur deux droites différentes, la limite demandée n'existe pas, confirmation de la conjecture que nous avons faite sur la base d'évidences numériques, au début de cette section.

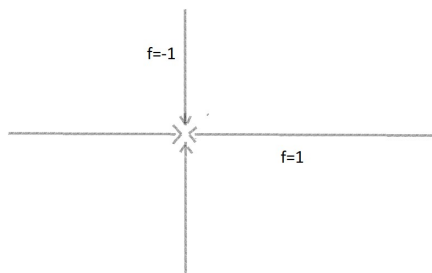


Figure 2

Exemple 2.8 Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe, si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$?

Solution 2.8 Quand $y = 0$, $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. D'où

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ le long de l'axe } Ox.$$

Quand $x = 0$, $f(0, y) = 0/y^2 = 0$. D'où

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ le long de l'axe } Oy.$$

Bien que les limites soient égales le long des axes, cela ne prouve pas que la limite demandée est 0. Approchons encore $(0, 0)$ le long d'une autre droite, $y = x$. Quel que soit $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

D'où

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ le long de l'axe } y = x.$$

(Voyez la figure 3). Désormais, deux chemins différents conduisent à des limites différentes. La limite n'existe donc pas.

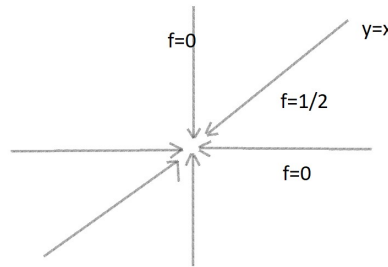


Figure 3

Exemple 2.9 Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe, si $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$?

Solution 2.9 En faisant tendre (x, y) vers $(0, 0)$ le long de toutes les droites (non verticales) qui passent par l'origine, celles d'équation $y = mx$, où m est la pente. Sur ces chemins,

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2}.$$

Ainsi,

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{le long de } y = mx.$$

Le long de toutes les droites non verticales passant par l'origine, f tend donc vers la même limite. Mais cela ne suffit pas à démontrer que la limite demandée vaut 0. En effet, faisons tendre (x, y) vers $(0, 0)$ le long de la parabole $x = y^2$:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{lorsque} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{le long de} \quad x = y^2.$$

Comme des chemins différents mènent à des limites différentes, la limite demandée n'existe pas.

Exemple 2.10 Déterminez $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ si cette limite existe.

Solution 2.10 Comme dans l'exemple 2.9, nous pourrions vérifier que la limite est 0 le long de toutes les droites qui passent par l'origine. Ceci ne prouve pas que la limite vaut 0, mais il se fait que les limites le long des paraboles

$$y = x^2$$

et

$$x = y^2$$

valent aussi 0. Aussi, nous commençons à suspecter que la limite existe et est égale à 0.

Pour le démontrer, nous évaluons la distance entre $f(x, y)$ et 0 :

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2}$$

Remarquons que $x^2 \leq x^2 + y^2$ parce que $y^2 \geq 0$. Ainsi,

$$\frac{x^2}{x^2+x^2} \leq 1$$

D'où,

$$0 \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+x^2} \leq 3|y|$$

C'est le moment d'employer le théorème du gendarmes (Théorème 2.1). Comme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$$

nous arrivons à la conclusion que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

2.2.2 La continuité

Rappelez-vous qu'il était facile de calculer les limites des fonctions continues car il suffisait de substituer, conformément à la propriété de définition des fonctions continues $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. La continuité des fonctions de deux variables est aussi définie par cette propriété de substitution.

Définition 2.4 Une fonction f de deux variables est dite **continue** en (a, b) si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Si f est continue en tout point (a, b) de D , on dit que f est **continue sur** D .

L'interprétation intuitive de la continuité est que si le point (x, y) change de peu, alors la valeur de $f(x, y)$ change aussi de peu. Cela signifie qu'une surface qui représente une fonction continue n'a ni trou, ni fracture.

Les propriétés des limites impliquent que les sommes, différences, produits et quotients de fonctions continues sont continues sur leur domaine. Appuyons-nous sur ce résultat pour donner quelques exemples de fonctions continues.

- Une **fonction polynomiale de deux variables** (ou plus brièvement polynôme) est la somme de termes de la forme $cx^m y^n$, où c est une constante et où m et n sont des entiers positifs ou nuls. Une **fonction rationnelle** est un rapport de polynômes. Par exemple,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3 y^2 + 6xy^4 - 7y + 6,$$

est un polynôme, tandis que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

est une fonction rationnelle.

N'importe quel polynôme peut être construit par multiplication et addition des simples fonctions $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ et $h(x, y) = c$. Par conséquent, tous les polynômes sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^2 . Semblablement, toute fonction rationnelle, en tant que quotient de fonctions continues, est continue sur son domaine de définition.

Exemple 2.11 Calculez $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y)$.

Solution 2.11

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Exemple 2.12 Où la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est-elle continue ?

Solution 2.12 La fonction f est discontinue en $(0, 0)$ parce qu'elle n'y est pas définie. Mais pour le reste, étant une fonction rationnelle, f est continue sur tout son domaine de définition qui est l'ensemble

$$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Exemple 2.13 Soit

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ici, g est définie en $(0, 0)$ mais elle reste malgré tout discontinue en $(0, 0)$ parce que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y)$ n'existe pas (voyez l'exemple 2.7).

Exemple 2.14 Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nous savons que f est continue pour $(x, y) \neq (0, 0)$ puisqu'elle est une fonction rationnelle. De plus, de l'exemple 2.10, nous tenons que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Par conséquent, f est continue en $(0, 0)$ et, de ce fait, continue sur tout \mathbb{R}^2 .

- De même que pour les fonctions d'une seule variable, la composition est une autre façon d'associer deux fonctions continues pour en obtenir une troisième. Il est possible de démontrer que si f est une fonction continue de deux variables et g une fonction continue d'une variable continue sur l'ensemble image de f , alors la fonction composée

$$h = g \circ f$$

définie par

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

est aussi une fonction continue.

Exemple 2.15 Où la fonction $h(x, y) = \text{Arctg}(y/x)$ est-elle continue ?

Solution 2.13 La fonction $f(x, y) = y/x$ est une fonction rationnelle et donc continue sauf sur la droite $x = 0$. La fonction $g(t) = \text{Arctg}t$ est continue partout. Dès lors, la fonction composée

$$g(f(x, y)) = \text{Arctg}(y/x) = h(x, y)$$

est continue sauf quand $x = 0$.

La fonction $h(x, y) = \text{Arctg}(y/x)$ est discontinue quand $x = 0$.

* Tout ce qui a été dit et fait dans cette section est susceptible d'**extension aux fonctions de plus de deux variables**.

La fonction f est continue en (a, b, c) lorsque

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

Par exemple, pour la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

La continuité est présente à chaque point de \mathbb{R}^3 , à l'exception de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

2.3 Les dérivées partielles

2.3.1 Cas des fonctions de deux variables

Lors d'une journée chaude, nous avons l'impression que la température est plus élevée qu'elle n'est en réalité en raison du degré d'humidité. Cependant, lorsque l'air est sec, nous pensons que la température est plus basse que ce que le thermomètre indique. L'indice chaleur (également connu sous le nom d'indice température-humidité) a été créé par les services météorologiques afin de représenter les interactions entre la température et l'humidité. La température de l'air ressentie est connue sous le nom d'indice de chaleur I , tandis que la température réelle est T et l'humidité relative H . Il s'agit donc d'une fonction de T et de H , donc $I = f(T, H)$. La table ci-dessous est obtenue à partir des services météorologiques.

		Humidité relative (%)									
		H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Température réelle (F)	T	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128	
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137	
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146	
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	158	
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168	

TABLE 1 Indice de chaleur I comme fonction de la chaleur et de l'humidité

Si on ne regarde que la colonne surlignée de la table, Avec une humidité relative $H = 70\%$, l'indice de chaleur est considéré comme une fonction unique de la variable T , H étant fixé. Ecrivons $g(T) = f(T, 70)$. Cette fonction décrit comment évolue l'indice chaleur I lorsque la température réelle T augmente, sous une humidité relative de 70% . La dérivée de g quand $T = 96^\circ F$ est le taux de variation de I par rapport à T quand $T = 96^\circ F$:

$$g'(96) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(96 + h) - g(96)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96 + h, 70) - f(96, 70)}{h}.$$

On peut avoir une idée de sa valeur en se servant des valeurs de **la table 1** pour $h = 2$ et $h = -2$:

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3,5.$$

On peut dire que $g'(96)$ vaut à peu près la moyenne de ces deux valeurs, à savoir $3,75$. L'interprétation de ce nombre est que, quand la température réelle est de $96^\circ F$ et le degré d'humidité relative de 70% , la température ressentie (l'indice chaleur) monte d'environ $3,75^\circ F$ à chaque degré supplémentaire de la température réelle !

Tournons-nous maintenant vers la ligne surlignée de **la table 1**, qui correspond à une température fixe de $96^\circ F$. Les nombres de cette ligne sont les valeurs de la fonction $G(H) = f(96, H)$, qui décrit comment l'indice chaleur croit en fonction de l'augmentation de l'humidité relative H , la température réelle restant inchangée à $T = 96^\circ F$. La dérivée de cette fonction quand $H = 70\%$ est le taux de variation de I par rapport à H quand $H = 70\%$:

$$G'(70) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(70 + h) - G(70)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96, 70 + h) - f(96, 70)}{h}$$

Deux valeurs approchées de $G'(70)$ sont calculées en prenant dans la table $h = 5$ et -5 :

$$G'(70) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(75) - G(70)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(65) - G(70)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0,8$$

L'estimation retenue de $G'(70)$ est la moyenne des deux valeurs précédentes, à savoir 0,9. Cette valeur signifie que, quand la température est de $96^\circ F$ et le taux d'humidité relative de 70%, l'indice chaleur augmente de $0,9^\circ F$ à chaque augmentation d'un pour cent de l'humidité.

Traisons du cas général où f est une fonction de deux variables x et y où seule la variable x varie, y étant maintenue fixée à la valeur $y = b$. En réalité, nous sommes devant une fonction d'une seule variable x , à savoir $g(x) = f(x, b)$. si g admet une dérivée en a , elle s'appelle **la dérivée partielle de f par rapport à x en (a, b)** et est notée $f'_x(a, b)$. Donc,

$$f'_x(a, b) = g'(a) \quad \text{où} \quad g(x) = f(x, b) \quad (1)$$

Or, d'après la définition de la dérivée,

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

D'où, l'expression (1) devient :

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - g(a, b)}{h} \quad (2)$$

De même, la **dérivée partielle de f par rapport à y en (a, b)** et notée $f'_y(a, b)$ est obtenue en tenant x fixé ($x = a$) et en prenant la dérivée habituelle en b de la fonction $G(y) = f(a, y)$:

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - g(a, b)}{h} \quad (3)$$

Dans ces notations de dérivée partielle, les taux de variation de l'indice chaleur I par rapport à la température réelle T et l'humidité relative H , quand $T = 96^\circ F$ et $H = 70\%$ peuvent s'écrire :

$$f'_T(96, 70) \approx 3,75 \quad f'_H(96, 70) \approx 0,9$$

Dès le moment où le point (a, b) devient variable dans les équations (2) et (3), f'_x et f'_y deviennent des fonctions de deux variables.

Définition 2.5 Si f est une fonction de deux variables, ses **dérivées partielles** sont les fonctions f'_x et f'_y définies par

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

- D'autres notations sont en usage pour les dérivées partielles. Par exemple, au lieu de f'_x on rencontre f'_1 (pour spécifier que la dérivée concerne la première variable) ou $\partial f / \partial x$. Mais ici, $\partial f / \partial x$ ne peut pas être interprété comme un quotient de différentielles.

* **Notation des dérivées partielles** : Si $z = f(x, y)$, on écrit

$$f'_x(x, y) = f'_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f'_y(x, y) = f'_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 = D_2 f = D_y f.$$

Pour calculer des dérivées partielles, la seule chose dont il faut se souvenir est ce que dit l'équation 1, à savoir que la dérivée partielle par rapport à x n'est autre que la dérivée ordinaire de la fonction g d'une seule variable obtenue en tenant y fixé. la règle est donc la suivante ;

* **Règle de calcul des dérivées partielles de $z = f(x, y)$**

1- Si vous souhaitez calculer f'_x , considérez y comme une constante et dériver $f(x, y)$ par rapport à x .

2- Si vous souhaitez calculer f'_y , considérez x comme une constante et dériver $f(x, y)$ par rapport à y .

Exemple 2.16 Calculez $f'_x(2, 1)$ et $f'_y(2, 1)$ si $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$.

Solution 2.14 En maintenant y constante et en dérivant de x , on peut obtenir

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3,$$

et de là

$$f'_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

En maintenant x constante et en dérivant de y , on peut obtenir

$$f'_y(x, y) = 3x^2 y^2 - 4y,$$

et de là

$$f'_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8.$$

L'analyse géométrique des dérivées partielles implique nécessairement la surface S qui représente f dans l'équation $z = f(x, y)$. Lorsque $f(a, b) = c$, le point $P(a, b, c)$ est situé sur S . La fixation de $y = b$ implique de limiter l'attention à la courbe C_1 qui indique que le plan vertical $y = b$ coupe S . (En d'autres termes, la trace de S dans le plan $y = b$ est C_1). De la même manière, la courbe C_2 coupe le plan vertical $x = a$ en coupe S . Les deux courbes C_1 et C_2 sont traversées par P (Fig. 1).

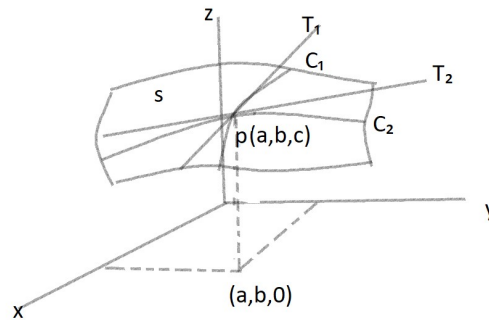


Figure 1. Les pentes des tangentes à C_1 et C_2 sont les dérivées partielles de f en (a, b) .

Remarquez que la courbe C_1 n'est autre que le graphique de la fonction $g(x) = f(x, b)$ et que la pente de la tangente T_1 en P est donnée par $g'(a) = f'_x(a, b)$. La courbe C_2 est le graphe de la fonction $g(y) = f(a, y)$ et la pente de la tangente T_2 en P est $g'(b) = f'_y(a, b)$.

Par conséquent, les dérivées partielles $f'_x(a, b)$ et $f'_y(a, b)$ peuvent être interprétées comme les pentes des tangentes en $P(a, b, c)$ aux traces C_1 et C_2 de S dans les plans $y = b$ et $x = a$.

Ainsi que nous l'avons dit dans l'exemple de l'indice chaleur, les dérivées partielles peuvent aussi être interprétées comme des taux de variation. Si $z = f(x, y)$, alors $\partial z / \partial x$ représente le taux de variation de z par rapport à x , quand y est fixée. De même, $\partial z / \partial y$ représente le taux de variation de z par rapport à y , quand x est fixée.

Exemple 2.17 Soit $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solution 2.15 On fait appel à la Règle de dérivation des fonctions composées à une seule variable et on arrive à :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}.$$

Exemple 2.18 Déterminez $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ si z est définie implicitement comme une fonction de x et y par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Solution 2.16 Pour déterminer $\frac{\partial z}{\partial x}$, on dérive implicitement par rapport à x , attentif traiter y comme une constante :

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

En résolvant cette équation en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$ on obtient :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

Une dérivation implicite analogue par rapport à y donne :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

2.3.2 Situation pour les fonctions avec plus de deux variables

Les dérivées partielles des fonctions de trois variables ou plus peuvent également être définies. Par exemple,

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

et elle calculée en considérant y et z comme des constantes et en dérivant $f(x, y, z)$ par rapport à x . Si $w = f(x, y, z)$, alors $f'_x = \partial w/\partial x$ peut être interprétée comme le taux de variation de w par rapport à x quand y et z sont maintenues fixes. Par contre, ce nombre n'a pas d'interprétation géométrique parce que le graphique de f appartient à un espace de dimension quatre.

En général, si u est une fonction de n variables, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sa dérivée partielle par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable x_i est, définition,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

et elle s'écrit aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = f'_i = D_i f.$$

Exemple 2.19 Calculez f'_x , f'_y et f'_z si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Solution 2.17 En tenant y et z constantes et en dérivant par rapport à x , on obtient

$$f'_x = ye^{xy} \ln z.$$

De même,

$$f'_y = xe^{xy} \ln z$$

et

$$f'_z = \frac{e^{xy}}{z}.$$

2.3.3 Les dérivées d'ordre supérieur

Si f est une fonction de deux variables, alors ses dérivées partielles sont aussi des fonction de deux variables, qui ont à leur tour des dérivées partielles $(f'_x)'_x$, $(f'_x)'_y$, $(f'_y)'_x$ et $(f'_y)'_y$, appelées les **dérivées partielles secondes** de f . Si $z = f(x, y)$, voici les notations adoptées :

$$\begin{aligned} (f'_x)'_x &= f''_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ (f'_x)'_y &= f''_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ (f'_y)'_x &= f''_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ (f'_y)'_y &= f''_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

La notation f''_{xy} (ou $\partial^2 f / \partial y \partial x$) signifie que la dérivée se fait d'abord par rapport à x , puis par rapport à y , tandis que f''_{yx} désigne l'ordre inverse.

Exemple 2.20 Calculez les dérivées secondes partielles de

$$f(x, \gamma) = x^3 + x^2 \gamma^3 - 2\gamma^2$$

Solution 2.18 Dans l'exemple 2.16, on a déjà trouvé

$$f'_x(x, \gamma) = 3x^2 + 2x\gamma^3$$

$$f'_y(x, \gamma) = 3x^2\gamma^2 - 4\gamma.$$

De là,

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2x\gamma^3) = 6x + 2\gamma^3$$

$$f''_{x\gamma} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2x\gamma^3) = 6x\gamma^2$$

$$f''_{\gamma x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2\gamma^2 - 4\gamma) = 6x\gamma^2$$

$$f''_{\gamma\gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (3x^2\gamma^2 - 4\gamma) = 6x^2\gamma - 4$$

2.3.4 Lemme de Schwartz

Vous aurez remarqué dans l'exemple 2.18 que les expressions de f''_{xy} et f''_{yx} sont égales. Ce n'est pas un hasard. On constate que les dérivées partielles mixtes f''_{xy} et f''_{yx} sont égales pour la plupart des fonctions que l'on trouve fréquemment. Le section suivant, qui porte le nom du mathématicien français L. Schwartz énonce les conditions sous lesquelles il est certain que $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Lemme 2.1 (Lemme de Schwartz) On suppose que f est définie sur un disque D contenant le point (a, b) . Si les fonctions f''_{xy} et f''_{yx} sont toutes les deux continues sur D , alors

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Preuve. Considérons, pour de petites valeurs de h ($h \neq 0$), la différence

$$A(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Cette différence s'écrit tout simplement en termes de $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$,

$$A(h) = g(a+h) - g(a).$$

Selon le Théorème des accroissements finis, il existe un nombre c entre a et $a+h$ tel que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h [f'_x(c, b+h) - f'_x(c, b)]$$

Une nouvelle application du Théorème des accroissements finis, à f'_x cette fois, conduit à l'existence d'un nombre d entre b et $b+h$ tel que

$$f'_x(c, b+h) - f'_x(c, b) = f''_{xy}(c, d)h.$$

Ces deux équations mises ensemble donnent

$$\Delta(h) = h^2 f''_{xy}(c, d).$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, alors $(c, d) \rightarrow (a, b)$ et, grâce à la continuité de f''_{xy} en (a, b) ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c,d) \rightarrow (a,b)} f''_{xy}(c, d) = f''_{xy}(a, b)$$

De manière analogue, en écrivant

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)],$$

en appliquant à deux reprises le Théorème des accroissements finis et en exploitant la continuité de f''_{yx} en (a, b) , nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f''_{yx}(a, b)$$

Il s'ensuit que $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$. ■

Remarque 2.2 On peut encore définir des dérivées partielles d'ordre 3 ou plus. Par exemple,

$$f'''_{xyy} = (f''_{xy})'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

et si ces dérivées sont continues, on peut, en s'appuyant sur le Lemme de Schwartz, démontrer que $f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}$.

Exemple 2.21 Calculer $f^{(4)}_{\varkappa\gamma\tau}$ si $f(\varkappa, \gamma, \tau) = \sin(3\varkappa + \gamma\tau)$.

Solution 2.19

$$\begin{aligned} f'_{\varkappa} &= 3 \cos(3\varkappa + \gamma\tau) \\ f''_{\varkappa\varkappa} &= -9 \sin(3\varkappa + \gamma\tau) \\ f'''_{\varkappa\varkappa\gamma} &= -9\tau \cos(3\varkappa + \gamma\tau) \\ f''''_{\varkappa\varkappa\gamma\tau} &= -9 \cos(3\varkappa + \gamma\tau) + 9\gamma\tau \sin(3\varkappa + \gamma\tau) \end{aligned}$$

2.3.5 Les équations aux dérivées partielles

Dans des équations aux dérivées partielles, les dérivées partielles sont utilisées pour exprimer certaines lois de la physique. Prenons l'équation aux dérivées partielles comme exemple.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

Elle est appelée **équation de Laplace**, en l'honneur du marquis Pierre de Laplace (1749-1827).

Exemple 2.22 Démontrez que la fonction $u(x, \gamma) = e^x \sin \gamma$ est une solution de l'équation de Laplace.

Solution 2.20

$$\begin{aligned}u'_x &= e^x \sin \gamma \\u'_\gamma &= e^x \cos \gamma \\u''_{xx} &= e^x \sin \gamma \\u''_{\gamma\gamma} &= -e^x \sin \gamma \\u''_{xx} + u''_{\gamma\gamma} &= e^x \sin \gamma - e^x \sin \gamma = 0\end{aligned}$$

Par conséquent, u satisfait à l'équation de Laplace.

L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

décrit le mouvement ondulatoire, qu'il s'agisse d'une vague dans l'océan, d'une onde sonore, d'une onde lumineuse ...

Exemple 2.23 Vérifiez que la fonction $u(x, \gamma) = \sin(x - a\gamma)$ est une solution de l'équation des ondes.

Solution 2.21

$$\begin{aligned}u'_x &= \cos(x - a\gamma) & u''_{xx} &= -\sin(x - a\gamma) \\u'_\gamma &= -a \cos(x - a\gamma) & u''_{\gamma\gamma} &= -a^2 \sin(x - a\gamma) = a^2 u''_{xx}\end{aligned}$$

Aussi, u satisfait à l'équation des ondes.

2.3.6 Fonctions différentiables

Rappelez-vous que dans le cas d'une fonction d'une variable $y = f(x)$ lorsque x passe de a à $a + \Delta x$, l'accroissement de y est défini par

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Par ailleurs, la définition de la dérivées affirme que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

En appelant ε la différence entre le quotient des différences et la dérivée, on a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Or,

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \implies \Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

D'où, pour une fonction dérivables f , on peut écrire

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x \quad \text{où } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ lorsque } \Delta x \rightarrow 0. \quad (1)$$

* On considère maintenant une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ et on suppose que x passe de a à $a + \Delta x$ et y passe de b à $b + \Delta y$ l'accroissement correspondant de z est alors

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b). \quad (2)$$

Cet accroissement Δz représente donc la variation de la valeur de f quand (x, y) passe de (a, b) à $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ Par analogie avec (1), La différentiabilité d'une fonction de deux variables est définie de la manière suivante.

Définition 2.6 Si $z = f(x, y)$, alors f est **différentiables** en (a, b) si Δz peut être écrit sous la forme

$$\Delta z = f'_x(a, b) \Delta x + f'_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

où ε_1 et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

- Vérifier la différentiabilité d'une fonction directement par la définition 2.6 est parfois difficile, mais heureusement la condition suffisante du théorème suivant vient pallier cette difficulté.

Théorème 2.2 Si les dérivée partielles f'_x et f'_y existent a proximité de (a, b) et sont continues en (a, b) , alors f est différentiables en (a, b) .

Preuve. Soit

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Conformément à la définition 2.6, prouver que f est différentiable revient à montrer que Δz peut s'écrire sous la forme

$$\Delta z = f'_x(a, b) \Delta x + f'_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

où ε_1 et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Au vu de la figure 1, nous écrivons

$$\Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]. \quad (*)$$

Observons que la fonction d'une seule variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

est définie sur l'intervalle $[a, a + \Delta x]$ et que $g'(x) = f'_x(x, b + \Delta y)$. Nous appliquons le Théorème des accroissements finis à g :

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u) \Delta x,$$

où u est un nombre situé entre a et $a + \Delta x$. Pour f , cette équation est écrite comme suit

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f'_x(u, b + \Delta y) \Delta x$$

Ainsi est acquise une expression de la première partie du membre de droite de l'équation (*). En vue de la seconde partie, nous posons $h(y) = f(a, y)$, ce qui fait de h une fonction d'une seule variable définie sur l'intervalle $[b, b + \Delta y]$ et dont la dérivée est $h'(y) = f'_y(a, y)$. Nous appliquons également le Théorème des accroissements finis, à h

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v) \Delta y,$$

où v est un nombre située entre b et $b + \Delta y$. En termes de f , cette équation s'écrit

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f'_y(a, v) \Delta y.$$

Nous substituons maintenant ces expressions dans l'équation (*) et obtenons

$$\begin{aligned} \Delta z &= f'_x(u, b + \Delta y) \Delta x + f'_y(a, v) \Delta y \\ &= f'_x(a, b) \Delta x + \left[f'_x(u, b + \Delta y) - f'_x(a, b) \right] \Delta x + f'_y(a, b) \Delta y \\ &\quad + \left[f'_y(a, v) - f'_y(a, b) \right] \Delta y \\ &= f'_x(a, b) \Delta x + f'_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f'_x(u, b + \Delta y) - f'_x(a, b) \\ \varepsilon_2 &= f'_y(a, v) - f'_y(a, b) \end{aligned}$$

Comme $(u, b + \Delta y) \rightarrow (a, b)$ et $(a, v) \rightarrow (a, b)$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, et comme f'_x et f'_y sont continue en (a, b) , nous voyons que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Par conséquent, f est différentiable en (a, b) . ■

Exemple 2.24 démontrer que $f(x, y) = xe^{xy}$ est différentiable en $(1, 0)$.

Solution 2.22 Les dérivées partielles sont

$$f'_x(x, y) = e^{xy} + xe^{xy} \qquad f'_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f'_x(1, 0) = 1 \qquad f'_y(1, 0) = 1.$$

comme les fonctions f'_x et f'_y sont continues, selon le théorème 2.1, f est différentiable.

2.3.7 Différentielle d'une fonction

La différentielle dx est une variable indépendante dans le cas d'une fonction d'une seule variable $y = f(x)$, la différentielle de y est ensuite définie par

$$dy = f'(x) dx. \tag{1}$$

Dans le cas d'une fonctions de deux variables $z = f(x, y)$, les **différentielles** dx et dy sont définies comme des variables indépendante, qui peuvent donc prendre n'importe quelle valeurs réelles. la **différentielle** dz dit aussi la **différentielle totale**, est définie par

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{2}$$

(Comparer avec l'équation 1). On écrit parfois df au lieu de dz .

En prenant $dx = \Delta x = x - a$ et $dy = \Delta y = y - b$ dans l'équation 2, la différentielle dz s'écrit

$$dz = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

Exemple 2.25 a) Quelle est l'expression de dz pour $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

b) Comparer dz et Δz si x passe de 2 à 2,05 et y , de 3 à 2,96.

Solution 2.23 a) Conformément à l'équation (2)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy.$$

b) les substitutions $x = 2$, $\Delta x = dx = 0,05$, $y = 3$, et $\Delta y = dy = -0,04$ conduisent à

$$\begin{aligned} dz &= [2(2) + 3(3)]0,05 + [3(2) + 2(3)](-0,04) \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

La variation de z est égale à

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2,05, 2,96) - f(2,3) \\ &= [(2,05)^2 + 3(2,05)(2,96) - (2,96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0,6449.\end{aligned}$$

Notez que $dz \approx \Delta z$, mais dz est plus facile à calculer.

Exemple 2.26 Le rayon d'une base d'un cône circulaire droit mesure 10cm et la hauteur, 25cm, avec une incertitude de 0,1cm sur chaque mesure. Estimez, à l'aide des différentielles l'incertitude sur le volume du cône calculé sur ces valeurs.

Solution 2.24 Le volume V du cône de rayon de base r et de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. la différentielle de V est donc

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh.$$

Comme l'erreur ne dépasse pas 0,1cm on a $|\Delta z| \leq 0,1$, $|\Delta h| \leq 0,1$. L'erreur sur le volume est maximale lorsque l'erreur sur le rayon r et l'erreur sur la hauteur h sont maximales. Aussi on prend $dr = 0,1$ et $dh = 0,1$ en même temps que $r = 10$ et $h = 25$.

Avec ses donnée,

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0,1) + \frac{100\pi}{3} (0,1) = 20\pi.$$

l'erreur maximale du volume calculé est d'environ $20\pi \text{cm}^3 \approx 63\text{cm}^3$.

* Cas des fonctions de trois variables ou plus

Toutes ces définitions, que ce soit les approximations linéaire, la différentiabilité où les différentielles permettent de définir les différentielles de manière analogue pour les fonctions de plus de deux variables. Une fonction différentiable est définie par une expression semblable à celle de la définition 2.6. Pour ces fonctions l'**approximation linéaire** est :

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f'_x(a, b, c)(x - a) + f'_y(a, b, c)(y - b) + f'_z(a, b, c)(z - c)$$

est la linéarisation $L(x, y, z)$ est le membre de droite de cette expression

- Si $w = f(x, y, z)$, alors l'**accroissement** de w est

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

- La **différentielle** w est définie en termes de différentielles dx , dy et dz des variables indépendantes par

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Exemple 2.27 Un parallélépipède mesure 75cm de long 60cm de large et de 40cm de haut. Chaque mesure est correcte à 0,2cm près. À l'aide des différentielles, estimez la pire erreur que vous puissiez commettre en calculant le volume de ce parallélépipède.

Solution 2.25 Si x , y et z désigne les dimensions du parallélépipède, son volume est donné par la formule $V = xyz$ de sorte que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz.$$

Il est dit que $|\Delta x| \leq 0,2$, $|\Delta y| \leq 0,2$ et $|\Delta z| \leq 0,2$. Pour que l'erreur sur le volume soit maximale, on prend $dx = 0,2$, $dy = 0,2$ et $dz = 0,2$ en même temps que $x = 75$, $y = 60$ et $z = 40$:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV = (60)(40)(0,2) + (75)(40)(0,2) + (75)(60)(0,2) \\ &= 1980 \end{aligned}$$

Une erreur de 0,2cm dans la mesure de chaque côté peut conduire à une erreur de 1980cm³ dans la mesure de volume. Cela peut paraître une erreur importante, mais en fait, ce n'est jamais qu'une erreur d'environ 1% sur le volume.

2.3.8 Formule de Taylor

D désigne un ouvert de \mathbb{R}^n et soit f une application définie sur D à valeur dans \mathbb{R}

1 Formule des accroissements finis. Si la fonction f est de classe C^1 dans D . quels que soient $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ éléments de D . il existe un nombre réel θ vérifiant $0 < \theta < 1$ et

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0 + \theta h_1, \dots, x_n^0 + \theta h_n)$$

où $h_i = x_i - x_i^0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Autre forme

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h)$$

où $h = (h_1, \dots, h_n)$

Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction de deux variables.

$\exists p \in]M_0, M[$ tel que

$$f(M) - f(M_0) = \sum_{i=1}^2 h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

où $M_0(x_1^0, x_2^0)$, $M(x_1, x_2)$

$$h_1 = x_1 - x_1^0 = \overline{M_0H}$$

$$h_2 = x_2 - x_2^0 = \overline{HM_0}$$

2. Formule de Taylor à l'ordre 2. Si f est de classe C^2 dans D . Il existe un nombre réel θ vérifiant $0 < \theta < 1$ et

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h)$$

2.4 Dérivée d'une fonction composée

2.4.1 La règle de dérivation des fonctions composées

Il convient d'abord de rappeler cette règle dans le cas de la composition de deux fonctions d'une variable : si $y = f(x)$ et $x = g(t)$, où f et g sont des fonctions dérivables, alors y est indirectement une fonction dérivable de t et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Dans le cas des fonctions de plus d'une variable, la Règle de dérivation des fonctions composées comporte plusieurs versions, chacune d'elle expliquant comment calculer la ou les dérivées d'une fonction composée. La première version (théorème 2.4) se rapporte au cas où $f(x, y)$ et où x et y sont à leur tour des fonctions d'une variable t . C'est ainsi que z est indirectement une fonction de t , $z = f(g(t), h(t))$ et la Règle de dérivation des fonctions composées donne une formule de dérivation de z en tant que fonction de t . On suppose que f est différentiable (définition 2.6 de la section 2.3.5). Il suffit pour cela, rappelez-vous, que f'_x et f'_y soient continues.

Théorème 2.3 Règle de dérivation pour les fonctions composées (Cas 1). Il s'agit d'une fonction différentiable de x et y , où $x = g(t)$ et $y = h(t)$ sont des fonctions dérivables de t . Donc, $z = f(x, y)$ peut être dérivable de t et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Preuve. Lorsque t varie de Δt , x varie de Δx et y , de Δy . Ces variations provoquent à leur tour une variation Δz de z , et d'après la définition 2.6 de la section 2.3, on a

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

où $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. [Au cas où les fonctions ε_1 et ε_2 ne seraient pas définies en $(0, 0)$, on peut décider qu'elles valent 0 en $(0, 0)$.] On divise les deux membres de l'équation par Δt . Cela donne

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Si maintenant on fait tendre $\Delta t \rightarrow 0$, alors $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$ parce que g est dérivable et de là continue. De même, $\Delta y \rightarrow 0$. Il s'ensuit alors que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Vu qu'il est fréquent d'écrire $\partial z / \partial x$ au lieu de $\partial f / \partial x$, la Règle de dérivation des fonctions composées peut encore prendre la forme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

■

Exemple 2.28 Calculez dz/dt en $t = 0$ pour $z = x^2y + 3xy^4$, si $x = \sin 2t$ et $y = \cos t$

Solution 2.26 La Règle de dérivation des fonctions composées dicte

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4) (2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3) (-\sin t). \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de substituer les expressions en t de x et y . Il suffit d'observer qu'en $t = 0$, $x = \sin 0$ et $y = \cos 0 = 1$. Dès lors,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3) (2 \cos 0) + (0 + 0) (-\sin 0) = 6$$

La dérivée de l'exemple 2.28 peut être interprétée comme la vitesse de variation par rapport à t lorsque le point (x, y) se meut le long de la courbe C d'équation paramétriques $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. En particulier, quand $t = 0$ le point (x, y) est $(0, 1)$ et $dz/dt = 6$. Telle est la vitesse de déplacement le long de C au point $(0, 1)$. Si, par exemple, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ représente la température au point (x, y) , alors la fonction composée $z = T(\sin 2t, \cos t)$ représente la température aux points de C et la dérivée dz/dt est alors la vitesse à laquelle la température varie le long de C .

* On envisage maintenant la situation où $z = f(x, y)$, mais chacune des variables x et y est une fonction des variables s et t : $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Ainsi, z est indirectement une fonction de s et t et on cherche comment obtenir $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$. Si on se souvient que, pour calculer $\partial z/\partial t$, la variable s est tenue constante et qu'on calcule la dérivée ordinaire de z par rapport à t , on applique le théorème 2.4 et on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Comme le même argument s'applique à $\partial z/\partial s$, on a ainsi démontré la version suivante de la Règle de dérivation des fonctions composées.

Théorème 2.4 Règle de dérivation des fonctions composées (Cas 2). *On suppose que $z = f(x, y)$ est une fonction différentiable de x et y , où $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$ sont toutes les deux des fonctions différentiables de s et t . Alors*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Exemple 2.29 Calculez $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$ pour $z = e^x \sin y$ avec $x = st^2$ et $y = s^2t$.

Solution 2.27 On applique le deuxième cas de la Règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \partial z/\partial s &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sin y) (t^2) + (e^x \cos y) (2st) \\ &= t^2 e^{st^2} \sin(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t) \end{aligned}$$

- La Règle de dérivation des fonctions composées met en présence, dans cette deuxième situation, trois types de variables : les variables **indépendantes** s et t , les variables dites **intermédiaires** x et y et la variable **dépendantes** z . Remarquez que les formules du théorème 2.3, il y a un terme pour chaque variable intermédiaire que celui-ci est de la forme du terme de la Règle de dérivation des fonctions composées¹ à une dimension.

* On envisage maintenant le cas général où une variable indépendante u est une fonction de n variables intermédiaires x_1, \dots, x_n , chacune d'elles étant à son tour une fonction de m variables indépendantes t_1, \dots, t_m . Il y aura donc n termes, un pour chaque variable intermédiaire. La démonstration est la même que celle du cas I.

Théorème 2.5 Règle de dérivation des fonctions composées (Cas général). On suppose que u est une fonction différentiable de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , et que chaque x_j est une fonction différentiable de m variables t_1, t_2, \dots, t_m . Alors, u est une fonction de t_1, t_2, \dots, t_m et

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$.

Exemple 2.30 Ecrivez la Règle de dérivation des fonctions composées dans le cas $w = f(x, y, z, t)$ et $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ et $t = t(u, v)$.

Exemple 2.31 Il faut appliquer le théorème 2.6 avec $n = 4$ et $m = 2$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

Exemple 2.32 Calculez la valeur de $\partial u / \partial s$ pour la fonction $u = x^4 y + y^2 z^3$ où $x = r s e^t$, $y = r s^2 e^{-t}$ et $z = r^2 s \sin t$ quand $r = 2$, $s = 1$ et $t = 0$.

Solution 2.28 On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (4x^3 y) (r e^t) + (x^4 + 2y z^2) (2r s e^{-t}) + (3y^2 z^2) (r^2 \sin t). \end{aligned}$$

Quand $r = 2$, $s = 1$ et $t = 0$, on a $x = 2$, $y = 2$ et $z = 0$, de sorte que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64) (2) + (16) (4) + (0) (0) = 192.$$

Exemple 2.33 Étant donné que $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ et que f est différentiable, montrez que g vérifie l'équation

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Solution 2.29 Soit $x = s^2 - t^2$ et $y = t^2 - s^2$. Alors, $g(s, t) = f(x, y)$ et la Règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s). \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t). \end{aligned}$$

De là,

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(-2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

Exemple 2.34 On suppose que $z = f(x, y)$ a des dérivées partielles secondes continues et que $x = r^2 + s^2$ et $y = 2rs$. Calculez a) $\partial z / \partial r$ b) $\partial^2 z / \partial r^2$.

Solution 2.30 a) La Règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s).$$

b) Pour dériver partiellement par rapport à r cette dernière expression, il faut recourir à la Règle de dérivation du produit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2s \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Or, par la Règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (2s) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à substituer ces expressions dans l'équation 1 et à tenir compte de l'égalité des dérivées partielles secondes mixtes. Il vient finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + 2s \left(2r \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

2.4.2 Théorème des fonctions implicites

Les processus de dérivation implicite, introduits dans la section 2.3 peuvent être complétés à la faveur de la Règle de dérivation des fonctions composées. On suppose qu'une équation de la

forme $F(x, y) = 0$ définit y comme une fonction dérivable de x , notée $y = f(x)$, où $F(x, f(x)) = 0$ quel que soit x en ce qui concerne la définition de f . Si F est différentiable, on peut appliquer le premier cas de la Règle de dérivation des fonctions composées pour dériver les deux membres de l'équation $F(x, y) = 0$ par rapport à x . Vu que x et y sont des fonctions de x , on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Or, $dx/dx = 1$ et si $\partial F/\partial y \neq 0$, on peut résoudre par rapport à dy/dx et obtenir ainsi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (1)$$

Avant d'effectuer les calculs qui mènent à cette formule, il a fallu supposer que $F(x, y) = 0$ définissait implicitement y comme une fonction de x . Le **Théorème de fonctions implicites**, que l'on démontre dans des manuels plus avancés, énonce les conditions sous lesquelles cette hypothèse est vérifiée. Il affirme que si F est définie sur un disque ouvert contenant (a, b) , où $F(a, b) = 0$, si $F'_y(a, b) \neq 0$ et si F'_x et F'_y sont continues sur le disque, alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit y comme une fonction définie dans un voisinage de (a, b) et la dérivée de cette fonction est donnée par la formule 1.

Exemple 2.35 Calculez l'expression de y' si $x^3 + y^3 = 6xy$

Solution 2.31 L'équation donnée peut s'écrire

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0,$$

et alors, par application de la formule 1.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

* L'hypothèse de $z = f(x, y)$ est donc implicitement définie par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$. Cela implique que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tous les (x, y) dans le domaine de définition de f . En cas de différenciation de F et d'existence de f'_x et f'_y . Ainsi, on applique la Règle de dérivation des fonctions composées à l'équation $F(x, y, z) = 0$, on obtient le résultat suivant. :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

A condition que $\partial F/\partial z \neq 0$, on résout par rapport à $\partial z/\partial x$, ce qui conduit à la première formule 2. La deuxième formule, celle de dz/dy , s'obtient de manière analogue.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (2)$$

Il faut à nouveau mentionner la version du **Théorème des fonctions implicites** qui précise les conditions sous lesquelles l'hypothèse initiale est vérifiée. Si F est définie sur une sphère contenant le point (a, b, c) , où $F(a, b, c) = 0$, si $F'_z(a, b, c) \neq 0$, si F'_x, F'_y, F'_z sont des fonctions continues à l'intérieur de la sphère, alors l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit z comme une fonction de x et y dans un voisinage du point (a, b, c) et les dérivées partielles de cette fonction sont données par les formules 2.

Exemple 2.36 Calculez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solution 2.32 Soit $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Alors, selon les équations 2, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}. \end{aligned}$$

2.5 Les dérivées Partielles suivant un vecteur et le vecteur gradient

2.5.1 Les dérivées Partielles suivant un vecteur

On se rappelle que si $z = f(x, y)$, les dérivées partielles f'_x et f'_y sont définies par

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{cases} \quad (1)$$

et représente les taux de changement de z dans les directions Ox et Oy , c'est-à-dire dans les directions des vecteurs \vec{i} et \vec{j}

On voudrait maintenant déterminer le taux de changement de z en (x_0, y_0) dans la direction d'un vecteur unitaire arbitraire $\vec{u} = (a, b)$ (voyez la figure 1).

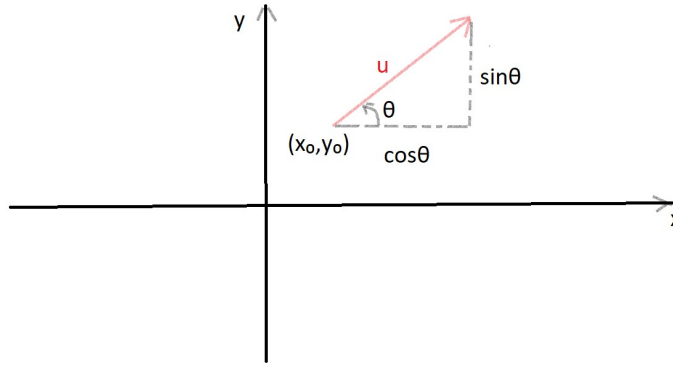


Figure 1 Un vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$

Définition 2.7 La dérivée de f en (x_0, y_0) dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b)$ est

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si cette limite existe

La comparaison de la définition 2.7 avec les expressions 1 fait avoir dans le cas particulier où $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$, $f'_{\vec{i}} = f'_x$ et dans le cas particulier où $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1)$, alors $f'_{\vec{j}} = f'_y$. En d'autres termes, les dérivées partielles à x et à y ne sont que des exemples spécifiques de la dérivée dans une direction.

Théorème 2.6 Dans le cas où f est une fonction différentiable de x et y , sa dérivée dans la direction de n'importe quel vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b)$ est

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b$$

Preuve. Si on désigne par g la fonction d'une seule variable h définie par

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb),$$

on a, suivant la définition d'une dérivée,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) \quad (2)$$

Par ailleurs, on peut écrire $g(h) = f(x, y)$ où $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$ et alors la règle de dérivation des fonctions composées (théorème 2.4 de la section 2.4.1) donne

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b.$$

En $h = 0, x = x_0, y = y_0$ et

$$g'(0) = f'_x(x_0, y_0)a + f'_y(x_0, y_0)b. \quad (3)$$

Il ne reste qu'à comparer les équations (2) et (3) pour obtenir

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b.$$

■

Si θ désigne l'angle que fait le vecteur unitaire \vec{u} avec la partie positive de l'axe Ox (comme dans la figure 1), alors on peut écrire $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et la formule du théorème 2.7 devient

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = f'_x(x, y) \cos \theta + f'_y(x, y) \sin \theta. \quad (4)$$

Exemple 2.37 Déterminez l'expression de la dérivée $f'_{\vec{u}}(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2,$$

et si \vec{u} est le vecteur unitaire d'angle $\theta = \pi/6$. Que vaut $f'_{\vec{u}}(1, 2)$?

Solution 2.33 La formule (4) donne

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(x, y) &= f'_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f'_y(x, y) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} [3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f'_{\vec{u}}(1, 2) = \frac{1}{2} [3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

2.5.2 Le vecteur gradient

On remarque que la formule de la dérivée dans une direction du théorème 2.7 a la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs :

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) &= f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b. \\ &= (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) \cdot (a, b) \\ &= (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (5)$$

Le premier vecteur de ce produit scalaire intervient non seulement dans le calcul des dérivées dans une direction, mais encore dans beaucoup d'autres situations. Aussi, on lui donne un nom particulier (le gradient de f) et une notation spéciale ($\overrightarrow{\text{grad}} f$ ou ∇f).

Définition 2.8 Le gradient de f est la fonction vectorielle ∇f définie par

$$\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}.$$

Exemple 2.38 Si $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$, alors

$$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (\cos x + ye^{xy}, xe^{xy})$$

et

$$\nabla f(0, 1) = (2, 1)$$

* En termes de gradient, l'expression (5) de la dérivée dans une direction s'écrit

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} \quad (6)$$

Cette écriture fait voir la dérivée dans une direction \vec{u} comme la projection scalaire du vecteur gradient sur \vec{u} .

Exemple 2.39 Déterminez la dérivée de la fonction $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ au point $(2, -1)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Solution 2.34 On calcule d'abord le vecteur gradient en $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\vec{i} + (3x^2y^2 - 4)\vec{j}.$$

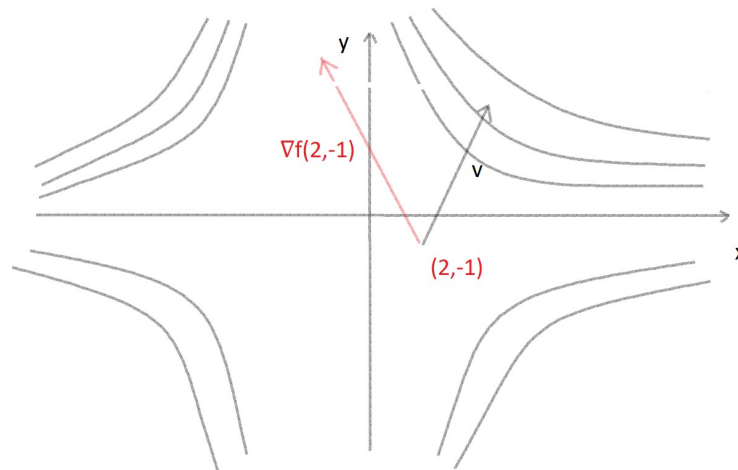
$$\nabla f(2, -1) = -4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

Remarquez que le vecteur \vec{v} n'est pas unitaire, mais puisque $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$, le vecteur unitaire parallèle à \vec{v} est

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}.$$

Par suite, d'après l'équation 6, on a

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot \vec{u} = (-4\vec{i} + 8\vec{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j} \right) \\ &= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$



La figure 2 met en évidence le vecteur gradient $\nabla f(2, -1)$ de l'exemple 2.40 au départ du point $(2, -1)$. Le vecteur v , direction de la dérivée, est aussi tracé. Ces deux vecteurs sont superposés dans le même diagramme de courbes de niveau du graphique de f

2.5.3 Les fonctions de trois variables

Il en est de même pour la dérivée dans une direction pour les fonctions de trois variables. Elle peut à nouveau être interprétée comme le taux de variation de la fonction dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} .

Définition 2.9 La dérivée de f en (x_0, y_0, z_0) dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b, c)$ est

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

pourvu que cette limite existe.

En notation vectorielle, les deux définitions (2.7) et (2.9) des dérivées dans une direction peuvent être écrites sous une même forme plus compacte

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h} \quad (7)$$

où $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ si $n = 2$ et $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ si $n = 3$. Cela semble tout à fait acceptable si on se souvient que l'équation vectorielle d'une droite qui passe par \vec{x}_0 et parallèle au vecteur \vec{u} est donnée par $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{u}$ et donc $f(\vec{x}_0 + h\vec{u})$ représente la valeur de f en un point de cette droite. Sous l'hypothèse que f est différentiable et si $\vec{u} = (a, b, c)$, on est conduit, par la même méthode que celle qui a servi à démontrer le théorème 2.5, à

$$f'_{\vec{u}}(x, y, z) = f'_x(x, y, z)a + f'_y(x, y, z)b + f'_z(x, y, z)c \quad (8)$$

Le **vecteur gradient** d'une fonction f de trois variable, noté ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$, est

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z) + f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z)),$$

ou, plus brièvement,

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (9)$$

Tout comme pour les fonctions de deux variables, la formule 7 de la dérivée dans une direction peut être réécrite

$$f'_{\vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u} \quad (10)$$

Exemple 2.40 Soit $f(x, y, z) = x \sin yz$. Déterminez

1- le gradient de f

2- la dérivée de f en $(1, 3, 0)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Solution 2.35 1- Le gradient de f est

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)) \\ &= (\sin yz, xz \cos yz, xy \cos yz) \end{aligned}$$

2- En $(1, 3, 0)$, $\nabla f(1, 3, 0) = (0, 0, 3)$. Le vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ est

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k}.$$

Dès lors, par l'équation 10,

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \vec{u} \\ &= 3\vec{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k} \right) \\ &= 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

2.5.4 Maximiser la dérivée dans une direction

Pour une fonction f de deux ou trois variables, on considère, en un point donné, ses dérivées dans toutes les directions possibles. Celles-ci donnent la vitesse de variation de f dans chacune de ces directions. On peut se demander dans quelle direction cette vitesse de variation est la plus grande ? La réponse figure dans le théorème suivant

Théorème 2.7 On fait l'hypothèse que f est une fonction différentiable de deux ou trois variables. La valeur maximale de la dérivée dans une direction est $\|\nabla f(\vec{x})\|$ et elle est atteinte dans la direction et le sens du vecteur gradient $\nabla f(\vec{x})$.

Preuve. Des équations (6) ou (10), on a

$$f'_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\nabla f\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les vecteurs ∇f et \vec{u} . Le maximum de $\cos \theta$ vaut 1 et est atteint lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque \vec{u} a même direction et même sens que ∇f ■

Exemple 2.41 1- Déterminez le taux de variation de f , définie par $f(x, y) = xe^y$, au point $P(2, 0)$ dans la direction de P à $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

2- Quelle est la direction de variation la plus rapide de f ? Quelle est cette vitesse de variation maximale?

Solution 2.36 1- On commence par calculer le vecteur gradient :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (f'_x, f'_y) = (e^y, xe^y) \\ \nabla f(2, 0) &= (1, 2)\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{PQ} = (-1.5, 2)$ est $\vec{u} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Le taux de variation de f dans la direction de P à Q est donc

$$\begin{aligned}f'_{\vec{u}}(2, 0) &= \nabla f(2, 0) \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \\ &= 1(-\frac{3}{5}) + 2(\frac{4}{5}) = 1.\end{aligned}$$

b) Conformément au théorème 2.8, f croît le plus vite dans la direction du gradient $\nabla f(2, 0) = (1, 2)$. Ce taux de variation maximum vaut

$$\|\nabla f(2, 0)\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{5}$$

Exemple 2.42 On suppose que la température en un point (x, y, z) de l'espace est donnée par $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, où T est mesurée en degrés Celsius x, y et z en mètres. Dans quelle direction la température augmente-t-elle le plus vite au point $(1, 1, -2)$? Calculez ce taux maximum d'accroissement.

Solution 2.37 L'expression du gradient de T est

$$\begin{aligned}
 \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \\
 &= \frac{\partial T}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \\
 &= -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{i} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{j} - \frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{k} \\
 &= -\frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} (-x \vec{i} - 2y \vec{j} - 3z \vec{k})
 \end{aligned}$$

Au point $(1, 1, -2)$, le vecteur gradient est

$$\nabla T = \frac{160}{256} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) = \frac{5}{8} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

Selon le théorème 2.8, la température augmente le plus vite dans la direction du vecteur gradient $\nabla T = \frac{5}{8} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$ ou, de façon équivalente, dans la direction $(-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$ ou encore, celle du vecteur unitaire $(-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})/\sqrt{41}$. Le taux d'accroissement maximum est la norme du vecteur gradient :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla T\| &= \frac{5}{8} \left\| (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) \right\| \\
 &= \frac{5\sqrt{41}}{8}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la température augmente à la vitesse maximale de $5\sqrt{41}/8 \approx 4^\circ\text{C}/\text{m}$.

2.5.5 Les plans tangents aux surfaces de niveau

Soit S une surface d'équation $F(x, y, z) = k$, c'est-à-dire un surface de niveau d'une fonction F de trois variables et soit $P(x_0, y_0, z_0)$ un point sur S . Soit encore C une courbe quelconque dessinée sur la surface et qui traverse le point P . Rappelez-vous que, la courbe C est décrite par une fonction vectorielle continue $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Le point P est l'image de la valeur t_0 du paramètre, c'est-à-dire que $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Vu que C est tracée sur la surface S , chacun de ses points est un point de S ; les coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ doivent vérifier l'équation de S , à savoir

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k \quad (1)$$

Si x, y et z sont des fonctions dérivables de t et si F est une fonction différentiable, alors on peut dériver les deux membres de cette équation en faisant appel à la Règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (2)$$

L'équation 2 peut s'écrire comme un produit scalaire si on y reconnaît les composantes du vecteur gradient $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ et celles du vecteur $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$:

$$\nabla F \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

En particulier, quand $t = t_0$, on a $\vec{r}'(t) = (x_0, y_0, z_0)$ et donc

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0. \quad (3)$$

L'équation 3 certifie que le vecteur gradient en P , $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, est perpendiculaire au vecteur tangent $\vec{r}'(t_0)$ à n'importe quelle courbe C dessinée sur S et passant par P . Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, il est des lors naturel de définir le plan **tangent à la surface de niveau** $F(x, y, z) = k$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ comme le plan passant par P et normal au vecteur $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Faisant usage de la formule classique de l'équation d'un plan, on a comme équation de ce plan tangent

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (4)$$

La droite perpendiculaire au plan tangent est la droite normale à S en P , qui traverse P . La direction de cette normale est donc donnée par le vecteur gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ et ses équations symétriques sont,

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (5)$$

Dans le cas particulier où l'équation de la surface S se présente sous la forme $z = f(x, y)$ (c'est-à-dire que S est le graphique d'une fonction de deux variables), on se ramène la situation décrite précédemment en écrivant l'équation

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

et en regardant S comme une surface de niveau (avec $k = 0$) de F . Alors,

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0, z_0) &= f'_x(x_0, y_0) \\ F'_y(x_0, y_0, z_0) &= f'_y(x_0, y_0) \\ F'_z(x_0, y_0, z_0) &= -1 \end{aligned}$$

et l'équation 4 devient

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Exemple 2.43 Écrivez les équations du plan tangent et de la droite normale au point $(-2, 1, -3)$ de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Solution 2.38 L'ellipsoïde est la surface de niveau (avec $k = 3$) de la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= \frac{x}{2}, & F'_y(x, y, z) &= 2y, & F'_z(x, y, z) &= \frac{2z}{9} \\ F'_x(-2, 1, -3) &= -1, & F'_y(-2, 1, -3) &= 2, & F'_z(-2, 1, -3) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

La formule 4 fournit alors l'équation du plan tangent en $(-2, 1, -3)$:

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$$

qui se simplifie en $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Selon la formule 5, des équations symétriques de la droite normale sont

$$\frac{(x + 2)}{-1} = \frac{(y - 1)}{2} = \frac{(z + 3)}{-\frac{2}{3}}$$

2.5.6 La signification du vecteur gradient

Nous rapprochons maintenant les diverses situations dans lesquelles le vecteur gradient prend un sens. Dans un premier temps, nous prenons en compte une fonction f composée de trois variables et un point $P(x_0, y_0, z_0)$ dans son domaine de définition. D'une part, nous savons, par le théorème 2.6, que le vecteur gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ indique la direction de la plus forte croissance de f . D'autre part, nous savons que $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est perpendiculaire à la surface de niveau S de f qui traverse P . Ces deux propriétés semblent intuitivement bien s'accorder : si, du point P , lorsque nous nous déplaçons sur la surface de niveau, la valeur de f reste inchangée, il est donc vraisemblable que c'est en quittant la surface perpendiculairement que f croît le plus.

Semblablement, nous considérons une fonction f de deux variables et un point $P(x_0, y_0)$ dans son domaine de définition. Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique à nouveau la direction de la plus forte croissance de f . Aussi, en tenant un raisonnement analogue à celui tenu pour les plans tangents, on peut montrer que $\nabla f(x_0, y_0)$ est perpendiculaire à la courbe de niveau $f(x, y) = k$ qui passe par P . C'est tout aussi vraisemblable intuitivement puisque les valeurs de f restent inchangées si on se déplace le long de la courbe. (Voyez la figure 3)

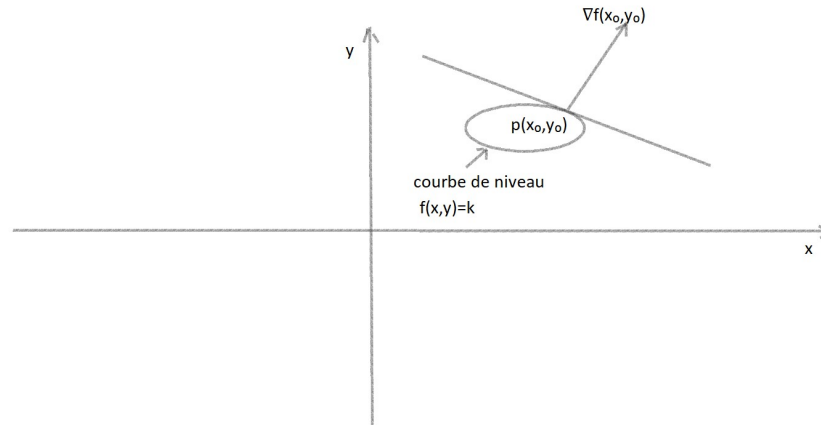


Figure 3

2.6 Extrémums

2.6.1 Calcul du minimum et du maximum d'une fonction

Nous étudierons dans cette section comment les dérivées partielles induisent les valeurs maximales et minimales des fonctions de deux variables. En particulier, dans l'exemple 2.50, nous allons voir comment maximiser le volume d'une boîte sans couvercle si la quantité de carton pour la fabriquer est fixée.

Définition 2.10 si $f(x, y) \leq f(a, b)$ lorsque (x, y) est à proximité de (a, b) , la fonction f de deux variables présente un **maximum local** en (a, b) . [Plus précisément, $f(x, y) \leq f(a, b)$ pour tous les points (x, y) dans un certain disque centré en (a, b)]. Le nombre $f(a, b)$ est la valeur du **maximum local**. Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ lorsque (x, y) est proche de (a, b) , alors $f(a, b)$ est la valeur du **minimum local**.

Théorème 2.8 Si f atteint un maximum ou un minimum local en (a, b) et si les dérivées partielles premières de $f(x, y)$ existent, alors $f'_x(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) = 0$.

Preuve. Soit $g(x) = f(x, b)$. Si f passe par un maximum (ou un minimum) local en (a, b) , alors g passe également par un maximum (ou un minimum) local en a et de ce fait, $g'(a) = 0$ en vertu du Théorème de Fermat. Or, $g'(a) = f'_x(a, b)$ (voyez l'équation 1 dans la section 1.3.1) et donc, $f'_x(a, b) = 0$. De même, en appliquant le théorème de Fermat à la fonction $G(y) = f(a, y)$, on obtient $f'_y(a, b) = 0$. ■

- Il est à noter, qu'en termes de gradient, la conclusion du théorème 2.7 s'écrit tout simplement $\nabla f(a, b) = \vec{0}$. En posant $f'_x(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) = 0$ dans l'équation d'un plan tangent, on arrive à $z = z_0$. Le théorème 2.7 a donc une interprétation géométrique : si le graphique de f admet un plan tangent en un point de maximum ou de minimum local, celui-ci est forcément horizontal.

- Un point (a, b) est dit point **critique** de f si $f'_x(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) = 0$, ou si l'une de ces dérivées n'existe pas. Le théorème 2.7 certifie donc que si f passe par un maximum ou un minimum local en (a, b) , alors (a, b) est un point stationnaire de f . Néanmoins, tout comme pour les fonctions à une variable, tous les points stationnaires ne produisent pas de maxima ou de minima.

Exemple 2.44 Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Alors,

$$f'_x(x, y) = 2x - 2 \quad f'_y(x, y) = 2y - 6$$

Ces dérivées partielles sont nulles quand $x = 1$ et $y = 3$. Le seul point stationnaire es donc $(1, 3)$. En complétant le carré, on trouve que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Vu que $(x - 1)^2 \geq 0$ et $(y - 3)^2 \geq 0$, $f(x, y) \geq 4$ quelles que soient les valeurs de x et y . Par conséquent, $f(1, 3) = 4$ est une valeur minimum locale, et même une valeur minimum absolue de f . La représentation graphique le confirme géométriquement : le graphique de f est le parabolôïde elliptique de sommet $(1, 3, 4)$ de la figure 1.

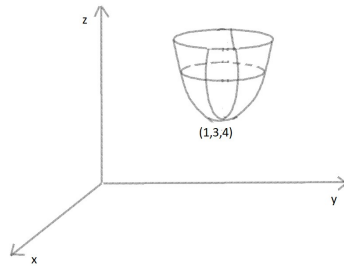


Figure 1 $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Exemple 2.45 Trouvez les extrêmes de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solution 2.39 Puisque $f'_x = -2x$ et $f'_y = 2y$, le seul point critique est $(0, 0)$. Or, en des points de l'axe Ox , $y = 0$ et $f(x, 0) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$) tandis qu'en des points de l'axe Oy , $x = 0$ et $f(0, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Quel que soit le disque centré à l'origine, il y a des points où f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives. Ainsi, il est impossible que $f(0, 0) = 0$ soit une valeur extrême de f et f n'a pas de valeurs extrêmes.

L'exemple 2.46 met en évidence le fait qu'une fonction n'a pas forcément un maximum ou un minimum local à un point critique. Le point $(0, 0)$ est appelé un *point-selle* de f

Théorème 2.9 (Le Test des dérivées secondes) Les dérivées partielles secondes de f sont supposées continues sur un disque centre en (a, b) et que $f'_x(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) = 0$. En d'autres termes, (a, b) représente un point critique de f . Soit

$$\check{D} = D(a, b) = f''_{xx}(a, b) f''_{yy}(a, b) - [f''_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $\check{D} > 0$ et $f''_{xx}(a, b) > 0$, alors $f(a, b)$ est un minimum local.

b) Si $\check{D} > 0$ et $f''_{xx}(a, b) < 0$, alors $f(a, b)$ est un maximum local.

c) Si $\check{D} < 0$, alors $f(a, b)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Preuve. Démonstration de la partie a) Nous calculons la dérivée directionnelle du second ordre de f dans la direction $\vec{u} = (h, k)$. La dérivée du premier ordre dans cette direction est, selon le théorème 2.7 de la section 2.5.1,

$$f'_{\vec{u}} = f'_x h + f'_y k.$$

La dérivée directionnelle d'ordre 2 s'obtient en appliquant une deuxième fois ce théorème :

$$\begin{aligned} f''_{\vec{u}\vec{u}} &= \frac{\partial}{\partial x} (f'_{\vec{u}}) h + \frac{\partial}{\partial y} (f'_{\vec{u}}) k \\ &= (f''_{xx} h + f''_{yx} k) h + (f''_{xy} h + f''_{yy} k) k \\ &= f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} h k + f''_{yy} k^2 \end{aligned}$$

En complétant le carré, nous pouvons donner à cette expression de la dérivée seconde directionnelle la forme suivante :

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = f''_{xx} \left(h + \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} k \right)^2 + \frac{k^2}{f''_{xx}} \left(f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \right) \quad (*)$$

Il est supposé que $f''_{xx}(a, b) > 0$ et que $D(a, b) > 0$. Or, f''_{xx} et $D = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ sont des fonctions continues. Il existe donc un disque B , centré en (a, b) et de rayon $\delta > 0$, tel que $f''_{xx}(x, y) > 0$ et que $D(x, y) > 0$ pour (x, y) dans B . Par conséquent, eu égard à l'équation *, nous constatons que $f''_{\vec{u}\vec{u}} > 0$ quand (x, y) appartient à B . Cela signifie que si C désigne la courbe intersection de la surface représentative de f avec le plan vertical passant par $P(a, b, f(a, b))$ dans la direction de \vec{u} , alors C est convexe sur un intervalle de longueur 2δ . Comme cela se vérifie dans la direction de tout vecteur \vec{u} , le graphique de f se trouve au-dessus de son plan tangent horizontal en P , du moins en ce qui concerne les (x, y) de B . De ce fait, $f(x, y) > f(a, b)$ quand (x, y) appartient à B et $f(a, b)$ est bien un minimum local.

- Les parties b) et c) ont des démonstrations semblables. ■

Remarque 2.3 Dans le cas c), le point (a, b) est un **point-selle** de f et le graphique de f coupe son plan tangent en (a, b) .

Remarque 2.4 Quand $D = 0$, le test n'est pas concluant : f peut avoir un maximum ou un minimum local en (a, b) ou (a, b) peut être un point-selle de f .

Remarque 2.5 La formule de D se retrouve facilement si elle est écrite sous la forme d'un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

Exemple 2.46 Recherchez les valeurs maximales et minimales et les points-selle de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solution 2.40 On localise d'abord les points stationnaires :

$$f'_x = 4x^3 - 4y \quad f'_y = 4y^3 - 4x$$

En égalisant ces dérivées partielles à 0, on obtient un système d'équations

$$x^3 - y = 0 \quad \text{et} \quad y^3 - x = 0$$

On résout ce système en substituant $y = x^3$ de la première équation dans la deuxième. Cela donne

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 + 1)(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

Trois racines existent donc : $x = 0, 1, -1$, Les trois points stationnaires sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$

On calcule maintenant les dérivées secondes partielles et $D(x, y)$:

$$f''_{xx} = 12x^2 \quad f''_{xy} = -4 \quad f''_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puisque $D(0, 0) = -16 < 0$, on peut dire que le point $(0, 0)$ est un point-selle par application du cas c) du Test des dérivées secondes. Puisque $D(1, 1) = 128 > 0$, et $f''_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, on constate en vertu du cas a) du Test que $f(1, 1) = -1$ est aussi un minimum local. Et de même, $D(-1, -1) = 128 > 0$ et $f''_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ entraînent que $f(-1, -1) = -1$ est aussi un minimum local.

Exemple 2.47 Déterminez et classez les points stationnaires de la fonction

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Solution 2.41 Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$f'_x = 20xy - 10x - 4x^3 \quad f'_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Il faut donc résoudre les équations

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0 \quad (1)$$

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0 \quad (2)$$

De l'équation 1, on tire que,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

Dans le premier cas ($x = 0$), l'équation 2 devient $-4y(1 + y^2) = 0$ de sorte que $y = 0$ et le point $(0, 0)$ est un point stationnaire.

Dans le second cas ($10y - 5 - 2x^2 = 0$) on a

$$x^2 = 5y - 2.5 \quad (3)$$

et en substituant cela dans l'équation 2, on arrive à $25y - 12.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Pour résoudre cette équation cubique

$$4y^3 - 21y + 12,5 = 0 \quad (4)$$

on fait tracer par une calculatrice graphique la courbe de la fonction

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5,$$

et, on constate, au vu de la figure 2, que l'équation 4 a trois racines. Le zoom permet à déterminer chacune d'elles avec 4 décimales :

$$y \approx -2,5452 \quad y \approx 0,6468 \quad y \approx 1,8984$$

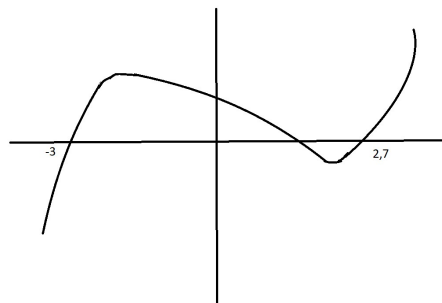


Figure 2

(On aurait pu aussi déterminer ces racines par la Méthode de Newton ou à l'aide d'un outil de recherche de racine.) L'équation 3 donne les valeurs de x correspondant

$$x = \pm\sqrt{5y - 2}, 5$$

Pour $y \approx -2,5452$, il n'y a pas de valeur réelle correspondante de x . Pour $y \approx 0,6468$ $x \approx \pm 0,8567$. Pour $y \approx 1,8984$, $x \approx \pm 2,6442$ Au total, il y a donc 5 points stationnaires.

Exemple 2.48 Quelle est la plus courte distance du point $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$.

Solution 2.42 La distance de n'importe quel point (x, y, z) au point $(1, 0, -2)$ est donnée par

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

mais si (x, y, z) appartient au plan $x + 2y + z = 4$, alors $z = 4 - x - 2y$ et de là,

$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. On peut rendre d minimal en rendant minimale l'expression plus simple

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

La résolution des équations

$$f'_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 6$$

$$f'_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

ne fournit qu'un seul point stationnaire $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$, Comme $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = 4$ et $f''_{yy} = 10$.

$D(x, y) = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 24 > 0$. D'après le Test de la dérivée seconde, $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ est un point de minimum local. On peut ajouter intuitivement qu'il s'agit d'un point de minimum absolu car il ne peut y avoir qu'un point sur un plan donné qui soit le plus proche de $(1, 0, -2)$. Cette distance minimale est calculée en posant $x = \frac{11}{6}$ et $y = \frac{5}{3}$ dans l'expression de d :

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

La plus courte distance de $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$ est égale à $\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

Exemple 2.49 Une boîte rectangulaire sans couvercle doit être construite avec $12m^2$ de carton. Quelle est le volume de cette boîte au maximum ?

Solution 2.43 La longueur, la largeur et la hauteur de la boîte (en mètres) sont respectivement x, y et z . Le volume est ensuite attribué par

$$V = xyz.$$

Il est possible de le calculer en fonction des deux variables x et y en se basant uniquement sur le fait que l'aire des quatre faces et du fond totalise $12m^2$:

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Pour cela, on résout par rapport à z : $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$ et on introduit l'expression de z dans celle de V

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

On calcule maintenant les dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Quand V est maximum, $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$. Mais $x = 0$ ou $y = 0$ conduisent à $V = 0$. Donc, les équations à résoudre sont

$$12 - 2xy - x^2 = 0, \quad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Elles impliquent $x^2 = y^2$, ou, dans ce cas (x et y ne peuvent être que positives), $x = y$. Si on pose $x = y$ dans l'une ou l'autre des équations, on obtient $12 - 3x^2 = 0$, ce qui donne $x = 2, y = 2$ et $z = (12 - 2.2)/(2(2 + 2)) = 1$

Le Test de la dérivée seconde pourrait être utilisé afin de confirmer qu'il s'agit bien d'un maximum local de V . Cependant, il est facile de constater qu'intuitivement, compte tenu du contexte physique du problème, Seul un maximum absolu peut exister, qui se produit en un point stationnaire de V . Il a donc lieu quand $x = 2, y = 2$, et $z = 1$. Dans ce cas, $V = 2.2.1 = 4$. Le volume maximum de la boîte est donc $4m^3$

2.6.2 Maximum et minimum absolus

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, le théorème des valeurs extrêmes pour une fonction d'une variable affirme que f atteint un minimum absolu et un maximum absolu. D'après la Méthode de l'intervalle fermé, on les trouve en calculant f non seulement aux points critiques, mais aussi aux extrémités a et b de l'intervalle.

On observe la même situation pour les fonctions de deux variables. Comme un intervalle fermé englobe ses extrémités, un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 englobe ses points de frontière. Prenez l'exemple du disque.

$$D = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$$

composé de tous les points à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$ ou sur celui-ci, est un ensemble fermé parce qu'il contient tous ses points frontières (qui sont les points du cercle $x^2 + y^2 = 1$).

Un **ensemble borné** de \mathbb{R}^2 est celui qui se trouve dans un disque spécifique, c'est-à-dire qu'il a une étendue limitée. Maintenant, en termes d'ensembles fermés et bornés, on peut énoncer le théorème analogue pour les fonctions de deux variables au Théorème des Valeurs Extrêmes.

Théorème 2.10 *En cas de continuité de f sur un ensemble borné fermé D de \mathbb{R}^2 , f atteint un maximum absolu $f(x_1, y_1)$ et un minimum absolu $f(x_2, y_2)$ en des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de D .*

Pour déterminer ces valeurs extrêmes dont l'existence est garantie par le Théorème 2.11, on remarque que, en vertu du Théorème 2.9, si f atteint une valeur extrême en (x_1, y_1) , alors (x_1, y_1) est soit un point critique de f , soit un point de la frontière de D .

Exemple 2.50 *quelles sont Les valeurs extrêmes absolues de la fonction $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ sur le rectangle $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$?*

Solution 2.44 *Que f ait un maximum absolu et un minimum absolu est garanti par le théorème 8, puisque f est continue et D que est un rectangle borné fermé. En suivant la première étape de la démarche indiquée au-dessus, on cherche d'abord les points critiques. Ils sont obtenus en résolvant les équations*

$$f'_x = 2x - 2y = 0 \quad f'_y = -2x + 2 = 0.$$

Le seul point critique est $(1, 1)$ et la valeur que $f(x, y)$ atteint est $f(1, 1) = 1$.

La deuxième étape consiste à examiner les valeurs que f prend sur la frontière de D , à savoir sur les quatre segments L_1, L_2, L_3 , et L_4 a de la figure 3.

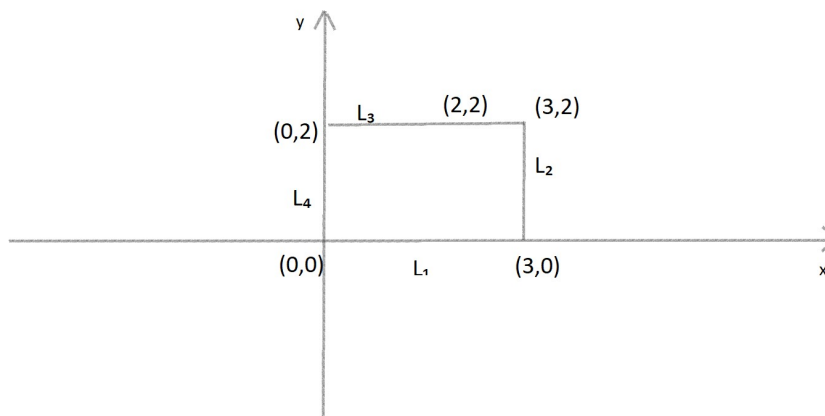


Figure 3

Sur L_1 , $y = 0$ et donc

$$f(x, 0) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

Comme il s'agit d'une fonction strictement croissante de x , son minimum est $f(0, 0) = 0$ et son maximum, $f(3, 0) = 9$. Sur L_2 , on a $x = 3$ et

$$f(3, y) = 9 - 4y \quad 0 \leq y \leq 2$$

Comme il s'agit d'une fonction strictement décroissante de y , son maximum $f(3, 0) = 9$ et son minimum $f(3, 2) = 1$. Sur L_3 , on a $y = 2$ et

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leq x \leq 3$$

En observant que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, on voit que le minimum de cette fonction est $f(2, 2) = 0$ et le maximum $f(0, 2) = 4$. Enfin, sur L_4 , on a $x = 0$ et

$$f(0, y) = 2y \quad 0 \leq y \leq 2$$

de sorte que le maximum est $f(0, 2) = 4$ et le minimum $f(0, 0) = 0$. En conclusion, sur la frontière, le minimum de f vaut 0 et le maximum 9.

Enfin, la troisième étape recommande de comparer ces valeurs avec la valeur $f(1, 1) = 1$ au point critique. Il en résulte que le maximum absolu de f sur D est $f(3, 0) = 9$ et le minimum absolu, $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

Chapitre 3

Les intégrales multiples

La notion d'intégrale définie est étendue dans ce chapitre à l'intégrale double et triple des fonctions de deux et trois variables. Ces notions sont ensuite exploitées pour calculer des volumes, des aires de surfaces, des masses et des centres de gravité. Enfin, les intégrales doubles servent encore à calculer des probabilités dans le cas où deux variables aléatoires sont en jeu.

3.1 Les intégrales doubles sur des rectangles

De la même façon qu'en essayant de résoudre un problème d'aire, nous avons été conduit à l'intégrale définie, nous cherchons ici à résoudre un problème de volume qui va nous conduire à la définition de l'intégrale double.

3.1.1 Révision de l'intégrale définie

Rappelons d'abord les éléments de base à propos des intégrales définies des fonctions d'une seule variable. Pour $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$, on commence par subdiviser l'intervalle en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de même longueur $\Delta x = (b - a)/n$ et on choisit des points x_i^* dans ces sous-intervalles. Ensuite, on construit la somme de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (1)$$

et on en prend la limite lorsque n tend vers l'infini pour arriver à l'intégrale définie de f depuis a jusqu'à b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (2)$$

Dans le cas particulier où $f(x) \geq 0$, la somme de Riemann peut être interprétée comme la somme des aires des rectangles d'approximation de la figure 1, et $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe depuis a jusqu'à b .

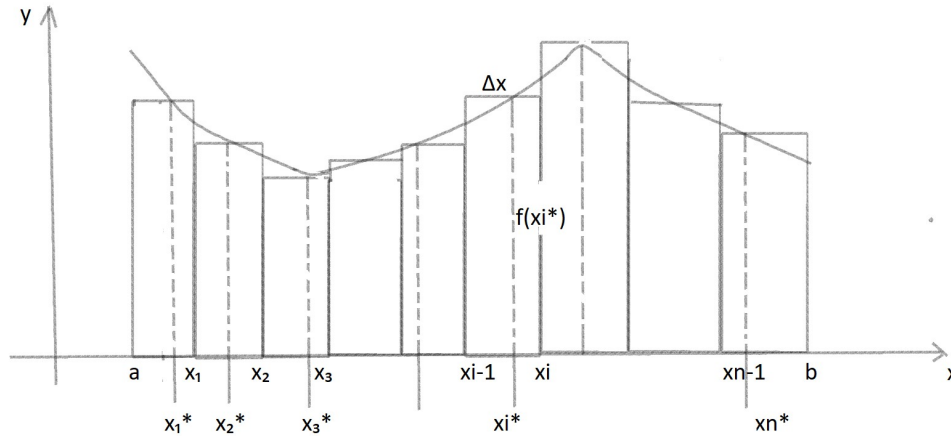


Figure 1

3.1.2 Des volumes et des intégrales doubles

Pareillement, on considère une fonction de deux variables définie sur un rectangle fermé

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

et on suppose que $f(x, y) \geq 0$. La représentation graphique de f est une surface d'équation $z = f(x, y)$. Soit S le solide dressé sur R et coiffé par le graphique de f , c'est à-dire,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

(Voyez la figure 2). L'objectif est de calculer le volume de S .

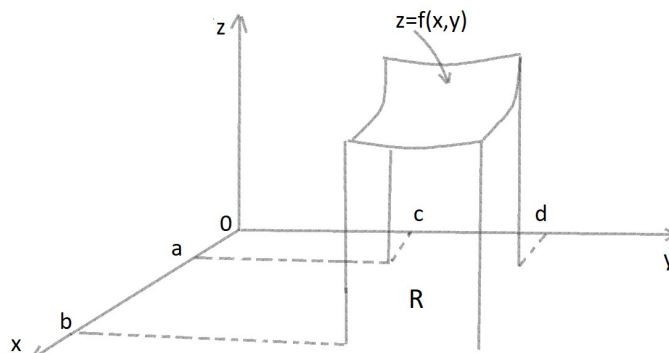


Figure 2

La première étape consiste à diviser le rectangle R en sous-rectangles. Pour cela, on divise l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ d'égale longueur $\Delta x = (b - a)/m$ et l'intervalle $[c, d]$ en n sous-intervalles $[y_{i-1}, y_i]$ d'égale longueur $\Delta y = (d - c)/n$. Les sous-rectangles

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

de la figure 3 apparaissent dès qu'on trace des parallèles aux axes par les points de subdivision des intervalles. Leur aire vaut $\Delta x \Delta y$.

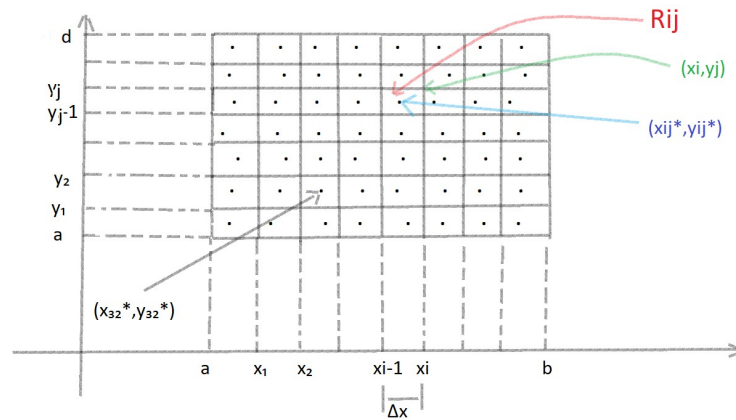


Figure3. Division de R en sous-rectangles

Si (x_{ij}^*, y_{ij}^*) désigne le point choisi arbitrairement dans chaque R_{ij} , alors la portion de S qui se dresse sur chaque R_{ij} n'est pas loin d'avoir le même volume que le parallélépipède (la "colonne") de base R_{ij} et de hauteur $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. Le volume de ce parallélépipède est égal au produit de la hauteur par l'aire du rectangle de base :

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

En tenant compte de cette façon de chaque sous-rectangle et en additionnant les volumes des " colonnes" correspondantes, on obtient une valeur approchée du volume total de S :

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (3)$$

Cette double somme signifie que f est calculée en chaque point choisi arbitrairement, que cette valeur de f est ensuite multipliée par l'aire du sous-rectangle et qu'enfin ces produits sont additionnés.

Intuitivement, il semble évident que plus m et n sont grands, meilleure est l'approximation donnée par (3) et donc nous pouvons nous attendre à ce que

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (4)$$

L'expression (4) sert de définition du **volume** du solide S situé sous le graphique de f et reposant sur le rectangle R .

Des limites comme celles de l'équation (4) se présentent fréquemment, pas seulement lorsqu'il s'agit de calculer des volumes, mais dans toutes sortes d'autres situations-ainsi que nous le verrons dans la section 3.5-même quand f n'est pas une fonction positive. Aussi, nous adoptons la définition suivante

Définition 3.1 *L'intégrale double de f sur le rectangle R est*

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (5)$$

pourvu que cette limite existe.

Il est démontré que la limite dont il est question dans la définition 3.1 existe pour toutes les fonctions continues. (Elle existe même pour certaines fonctions discontinues tant qu'elles se comportent "raisonnablement".)

Le point (x_{ij}^*, y_{ij}^*) au choix peut être n'importe quel point du rectangle R_{ij} , mais l'expression de l'intégrale double a l'air plus simple si ce point est le coin supérieur droit du sous-rectangle (autrement dit si $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = (x_i, y_i)$) (voyez la figure 3) :

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A \quad (6)$$

En comparant les formules (4) et (5), on remarque qu'un volume peut être écrit comme une intégrale double :

* Si $f(x, y) \geq 0$, alors le volume V du solide dressé sur le rectangle R et fermé par la surface $z = f(x, y)$ est égal à

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

La somme de la définition 3.1

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

s'appelle une **double somme de Riemann** et sert de valeur approchée de l'intégrale double. [Notez la similitude avec la somme de Riemann de (1) pour une fonction d'une seule variable.] Au cas où f est positive, alors la double somme de Riemann représente la somme des volumes des colonnes, et peut être vue comme une approximation du volume sous le graphique de f .

Exemple 3.1 Évaluez le volume du solide qui repose sur le carré $R = [0, 2] \times [0, 2]$ et fermé par la surface du parabolöide elliptique $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divisez R en quatre carré égaux et prenez le coin supérieur droit comme point au choix dans chaque carré R_{ij} . Faites un croquis du solide et des parallélipèdes rectangle d'approximation.

Solution 3.1 La figure 4 montre les carrés. Le parabolöide est le graphique de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ et chaque carré mesure 1 unité carrée.

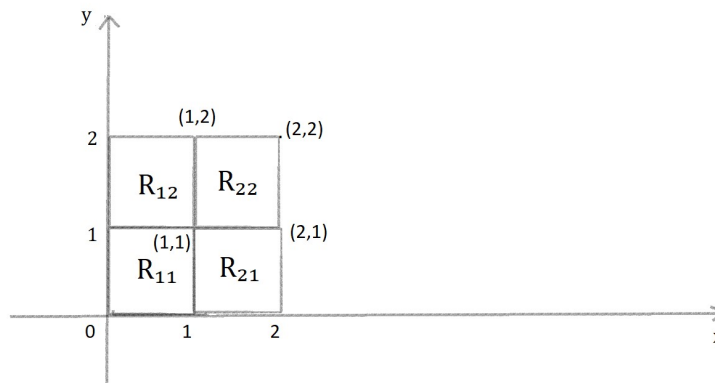


Figure 4

Le volume vaut approximativement la somme de Riemann avec $m = n = 2$:

$$\begin{aligned}
 V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\
 &= f(1, 1)\Delta A + f(1, 2)\Delta A + f(2, 1)\Delta A + f(2, 2)\Delta A \\
 &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34.
 \end{aligned}$$

La valeur approximative du volume de l'exemple 3.1 peut être améliorée si l'on augmente le nombre de carrés.

Exemple 3.2 Calculez l'intégrale

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$$

si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.

Solution 3.2 Il serait vraiment difficile de calculer cette intégrale à partir des sommes de Riemann de la définition 3.1, mais, vu que $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, on peut l'interpréter comme un volume et en calculer ainsi la valeur. Si $z = \sqrt{1-x^2}$, alors $x^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$. L'intégrale double représente donc le volume du solide situé sous le cylindre circulaire $x^2 + z^2 = 1$ et sur le rectangle R (Voyez la figure 5). Le volume de S vaut le produit du demi-cercle de rayon 1 par la longueur du cylindre. D'où

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi.$$

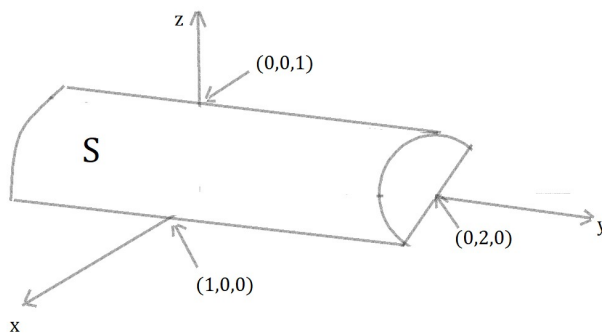


Figure 5

3.1.3 Les propriétés des intégrales doubles

Les propriétés 1 et 2 justifient l'attribut de linéarité de l'intégrale

1.

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

2.

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

3. Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ pour tout (x, y) de R , alors

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

3.2 Les intégrales itérées

Déjà le calcul, à partir de la définition, des intégrales simples était difficile, mais le Théorème de calcul de l'intégrale définie (première partie du Théorème fondamental du calcul intégrale) était venu pallier cette difficulté. Il n'est donc pas étonnant que le calcul de l'intégrale double soit encore plus difficile, mais nous allons justement voir dans cette section comment exprimer une intégrale double comme une intégrale itérée, de manière à ramener ce calcul à celui de deux intégrales simples.

On suppose que f est une fonction de deux variables continues sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. La notation $\int_c^d f(x, y) dy$ est employée pour signifier que x est maintenue fixe et que $f(x, y)$ est intégrée par rapport à y depuis $y = c$ jusqu'à $y = d$. Cette procédure est appelée intégration partielle par rapport à y . (Notez la similitude avec la dérivation partielle.) Comme, à ce stade, $\int_c^d f(x, y) dy$ est un nombre qui dépend de la valeur de x , il définit une fonction de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

En intégrant maintenant la fonction A par rapport à $x = a$ jusqu'à $x = b$, on obtient

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (1)$$

L'intégrale du membre de droite de l'équation (1) est appelée une **intégrale itérée**. Les crochets ne sont pas indispensables.

Donc

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (2)$$

signifie qu'il faut d'abord intégrer par rapport y depuis $y = c$ jusqu'à $y = d$, et ensuite par rapport à $x = a$ jusqu'à $x = b$.

De même, l'intégrale itérée

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (3)$$

signifie qu'il faut d'abord intégrer par rapport à x (tenant y fixé) depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, et ensuite par rapport à y depuis $y = c$ jusqu'à $y = d$. Remarquez que, tant dans l'expression 2 que dans l'expression 3, on travaille à partir de l'intérieur.

Exemple 3.3 Calculez les intégrales itérées

$$a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \quad b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy.$$

Solution 3.3 a)

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 y dy &= \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2 \end{aligned}$$

La fonction A dont il était question dans l'explication ci-dessus est donc $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ dans cet exemple.

On intègre maintenant cette fonction depuis 0 jusqu'à 3 :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

b) Ici, on intègre d'abord par rapport à x :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y dy = \left[\frac{9y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Vous aurez certainement remarqué que la réponse est la même dans l'exemple 3.3, qu'on intègre par rapport à x ou à y d'abord. Il s'avère que (voyez le théorème 3.1) que les deux intégrales itérées des équations 2 et 3 sont toujours égales; autrement dit l'ordre d'intégration n'a pas d'importance.

Le théorème suivant énonce la méthode pratique de calcul d'un intégral double par une intégrale itérée (dans un ordre ou dans l'autre).

Théorème 3.1 (Théorème de Fubini) Si f est continue sur le rectangle

$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Plus généralement, cet énoncé est vrai si on pose seulement que f est bornée sur R , que f est discontinue seulement en un nombre fini de courbes lisses et que les intégrales itérées existent

Preuve. La démonstration du théorème de Fubini est trop difficile pour l'inclure dans un traité comme celui-ci, mais on peut au moins l'expliquer intuitivement dans le cas où $f(x, y) \geq 0$. Dans ce cas en effet, l'intégrale double $\iint_R f(x, y) dA$ est interprétée comme le volume V du solide S qui se dresse sur R jusqu'à la surface $z = f(x, y)$. Or, on a utilisé une autre formule pour le volume, à savoir,

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

où $A(x)$ est l'aire de la section de S par le plan perpendiculaire à l'axe Ox en l'abscisse x . $A(x)$ est l'aire d'une région délimitée par la courbe C d'équation $z = f(x, y)$ où x est maintenu constant, pour $c \leq y \leq d$. Par conséquent,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

et

$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Le même raisonnement, tenu à propos des sections perpendiculaires à l'axe Oy ,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

■

Exemple 3.4 Calculez l'intégrale double $\iint_R f(x - 3y^2) dA$, où $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Solution 3.4 Le Théorème de Fubini conduit à

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12. \end{aligned}$$

Autre Solution. Par le Théorème de Fubini, mais en intégrant cette fois par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = \left[2y - 2y^3 \right]_1^2 = -12. \end{aligned}$$

Exemple 3.5 Calculez $\iint_R y \sin(xy) dA$, où $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solution 3.5 En intégrant d'abord par rapport à x , on a

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Autre Solution. Si on intervertit l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx.$$

Pour calculer l'intégrale intérieure, on emploie la méthode d'intégration par parties avec

$$u = y \quad dv = \sin(xy) dy$$

$$du = dy \quad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y \sin(xy) dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(xy) dy \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}. \end{aligned}$$

L'intégration du premier terme exige à nouveau de procéder par parties avec $u = -1/x$, $dv = \pi \cos \pi x dx$, d'où $du = dx/x^2$, $v = \sin \pi x$ et

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x}\right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x} - \int \frac{\sin \pi x}{x^2} dx.$$

Par conséquent,

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}\right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x},$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx &= \left[-\frac{\sin \pi x}{x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

Exemple 3.6 Calculez la mesure du volume délimité par le paraboloïde elliptique $x^2 + 2y^2 + z = 16$, les plans $x = 2$ et $y = 2$ et les plans de coordonnées.

Solution 3.6 On observe pour commencer qu'il s'agit du solide qui se trouve sous la surface $z = 16 - x^2 - 2y^2$ et au-dessus du carré $R = [0, 2] \times [0, 2]$. C'est le même que celui de l'exemple 3.1 dans la section 3.1, sauf que maintenant le calcul de l'intégrale se fait par le Théorème de Fubini. Il vient

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4y^3}{3} \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

Il faut mentionner un cas où l'intégrale double de f se ramène à une forme particulièrement simple, c'est celui où l'expression de f peut être factorisée en un produit d'une fonction de x seulement et d'une fonction de y seulement. Plus précisément, soit $f(x, y) = g(x)h(y)$ et $R = [a, b] \times [c, d]$. Alors le Théorème de Fubini conduit à

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy$$

Comme dans l'intégrale intérieure, y est une constante, $h(y)$ aussi et on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy &= \int_c^d \left[h(y) \int_a^b g(x) dx \right] dy \\ &= \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \end{aligned}$$

puisque $\int_a^b g(x) dx$ est une constante. Dans ce cas, l'intégrale double de f se réduit à un produit de deux intégrales simples

$$\iint_R g(x)h(y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{où } R = [a, b] \times [c, d]$$

Exemple 3.7 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, calculer $\iint_R \sin x \cos y dA$

Solution 3.7

$$\begin{aligned}
\iint_R \sin x \cos y dA &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\
&= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sin y]_0^{\pi/2} \\
&= 1.1 = 1.
\end{aligned}$$

3.3 Les intégrales doubles sur un domaine D borné.**3.3.1 Calcul d'une intégrale double sur un domaine D**

Le domaine d'intégration d'une intégrale simple est toujours un intervalle, Mais pour les intégrales doubles, on peut vouloir intégrer sur des domaines autres qu'un rectangle, de forme plus générale, comme celle de D qui est dans la figure 1 par exemple.

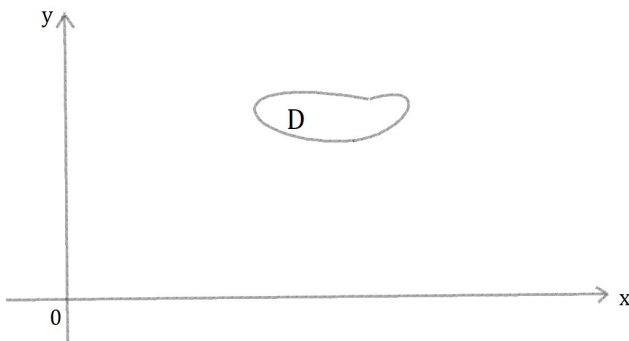


Figure 1

On suppose que D est borné, ce qui veut dire que D peut être enfermé dans un domaine rectangulaire R , comme dans la figure 2.

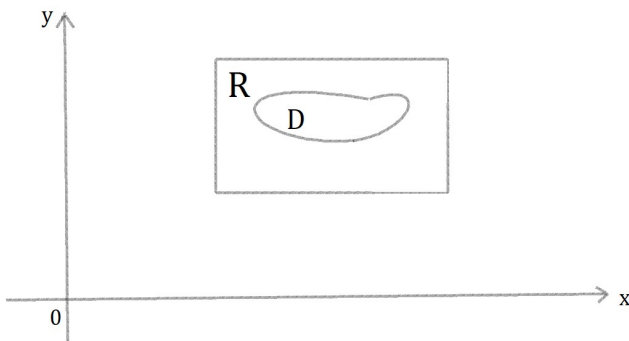


figure 2

On définit alors une nouvelle fonction F définie sur R par

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ appartient à } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ appartient à } R \text{ mais pas à } D \end{cases} \quad (1)$$

Sous l'hypothèse que l'intégrale double de F existe sur R , on définit alors l'**intégrale double de f sur D** par

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA \quad \text{où } F \text{ est définie par l'expression (1)} \quad (2)$$

La formule (2) a du sens parce que R est un rectangle et que $\iint_R F(x, y) dA$ vient d'être défini dans la section 3.1. Le détour adopté semble acceptable vu que $F(x, y) = 0$ lorsque (x, y) se trouve en dehors de D et ne contribue donc pour rien dans la valeur de l'intégrale. De plus, le rectangle employé n'a pas d'importance pourvu qu'il contienne D .

* Un domaine plan D est dit de **type I** s'il est délimité par les graphes de deux fonctions continues de x , c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

où g_1 et g_2 sont continues sur $[a, b]$. La figure 3 présente quelques exemples de domaines de type I.

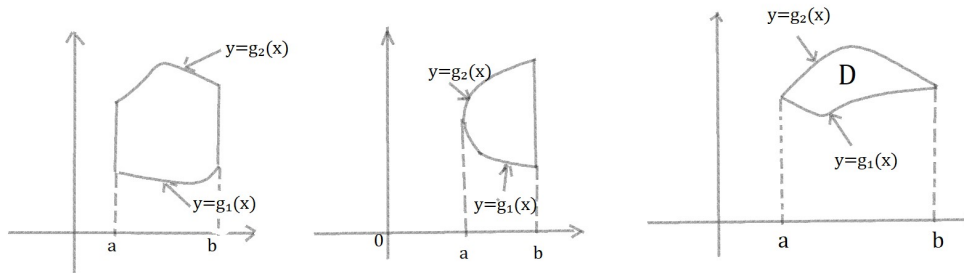


Figure 3 Quelques domaines de type I

* En vue du calcul de $\iint_D f(x, y) dA$ où D est un domaine de type I, on choisit un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ qui contient D , comme dans la figure 4,

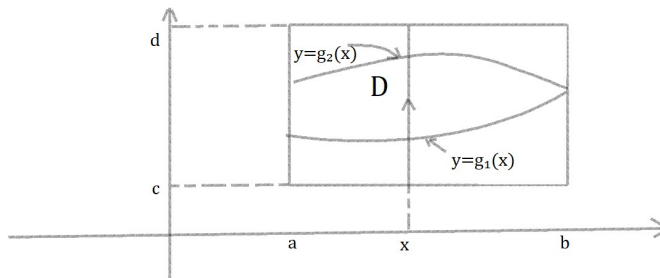


figure 4

et on pose F comme dans la formule (1) ; c'est-à-dire, F coïncide avec f sur D et F vaut 0 en dehors de D . Alors, par le théorème de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Observez que $F(x, y) = 0$ lorsque $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ puisque (x, y) est en dehors de D . Par conséquent,

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

puisque $F(x, y) = f(x, y)$ quand $g_1(x) < y < g_2(x)$. Ainsi, on a la formule suivante qui permet de calculer l'intégrale double comme une intégrale itérée.

* Si f est une fonction continue sur un domaine D de type I tel que

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

L'intégrale du membre de droite de (3) est une intégrale itérée semblable à celles qu'on a rencontrées dans la section précédente, sauf que, dans l'intégrale intérieure, x doit être traitée comme une constante, pas seulement dans $f(x, y)$, mais aussi dans les bornes d'intégration $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

* Il y a bien sûr aussi des domaines **de type II** qui sont décrits par

$$D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}, \quad (4)$$

où h_1 et h_2 sont continues. La figure 5 présente deux tels domaines

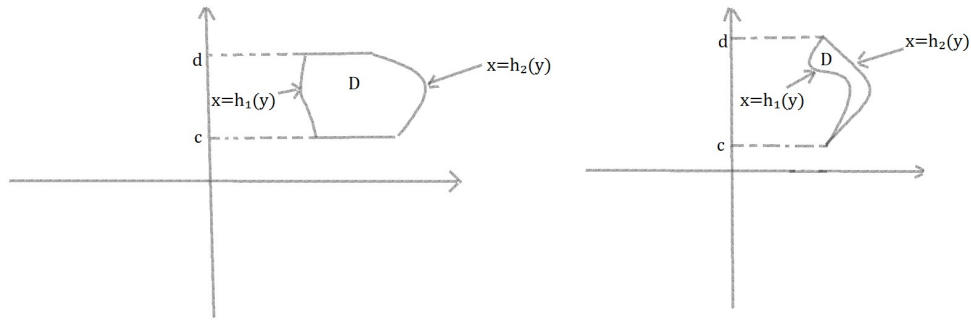


Figure 5 Quelques domaines de type II

En procédant de la même façon que pour établir (3), on peut montrer que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (5)$$

où D est un domaine de type II décrit par l'expression (4).

Exemple 3.8 Si D est le domaine délimité par les paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$, calculez $\iint_D (x + 2y) dA$.

Solution 3.8 Les paraboles se coupent quand $2x^2 = 1 + x^2$, ou $x^2 = 1$, ou $x = \pm 1$. La figure 6 montre que le domaine D est de type I et non de type II.

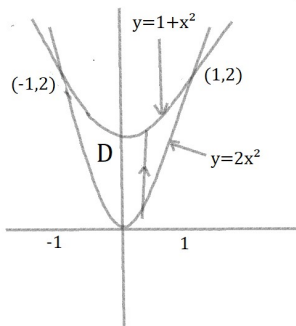


Figure 6

Il est décrit par

$$D = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

La frontière inférieure étant $y = 2x^2$ et la frontière supérieure $y = 1 + x^2$, la formule (3) donne

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 [x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] dx \\ &= \int_{-1}^1 [-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1] dx \\ &= \left[-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Remarque 3.1 Pour établir une intégrale double comme dans l'exemple 3.8, il est essentiel de faire un dessin. Il est souvent utile de tracer une flèche verticale, comme dans la figure 6. Les limites

d'intégration de l'intégrale Intérieure se lisent alors sur le dessin : la flèche part de la frontière inférieure $y = g_1(x)$, qui est la borne inférieure de l'intégrale, et se termine à la frontière supérieure $y = g_2(x)$, qui est la borne supérieure de l'intégrale. Dans le cas des domaines de type II, les flèches sont horizontales et vont de la frontière gauche jusqu'à la frontière droite

Exemple 3.9 Calculez le volume du solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimitée par la droite $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$, et couverte par le parabololoïde $z = x^2 + y^2$.

Solution 3.9 Au vu de la figure 7, le domaine D est de type I et il est décrit par

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

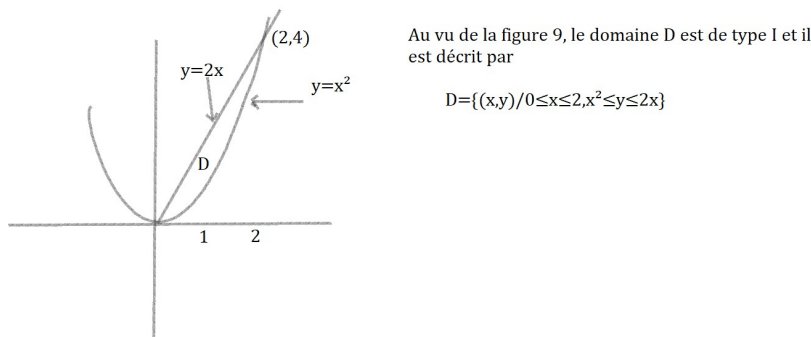


Figure 7.

De là, le volume sous $z = x^2 + y^2$ est calculé par

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2 (2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

Autre Solution. Au vu de la figure 8, le domaine D peut être décrit comme de type II

$$D = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

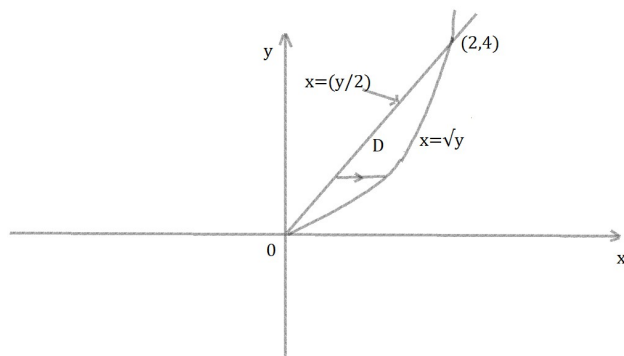


Figure 8.

De là, le volume sous $z = x^2 + y^2$ se calcule aussi par

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\
 &= \left[\frac{2}{15} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{13}{96} y^4 \right]_0^4 = \frac{216}{35}
 \end{aligned}$$

Exemple 3.10 Calculez $\iint_D xy dA$ où D est le domaine borné par la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.

Solution 3.10 Le domaine D est représenté dans la figure 9.

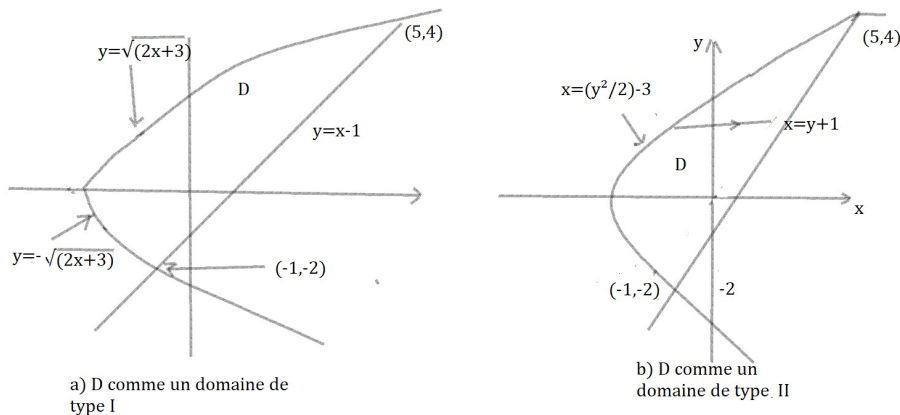


Figure 9

Il est à la fois de type I et de type II, mais sa description en tant que type I est plus compliquée qu'en tant que type II parce que sa frontière inférieure se compose de deux morceaux. On préfère donc le décrire comme un domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) / -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1 \right\}$$

Alors (5) conduit à

$$\begin{aligned} \iint_D xy dA &= \int_{-2}^4 \int_{y^2/2-3}^{y+1} xy dx dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=y^2/2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36 \end{aligned}$$

Eu égard à la description de D comme un domaine de type 1 [figure 9(a)], on aurait eu à calculer

$$\iint_D xy dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy dy dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy dy dx$$

ce qui aurait demandé beaucoup plus de travail.

Exemple 3.11 Calculez l'intégrale itérée $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$

Solution 3.11 Telle que cette intégrale double se présente, la première intégrale simple à calculer est $\int \sin(y^2) dy$. Celle-ci n'est pas possible en termes finis

La seule chose à faire est d'essayer de changer l'ordre d'intégration. Pour cela, on exprime d'abord l'intégrale itérée comme une intégrale double. La formule (3) lue de droite à gauche donne

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \iint_D \sin(y^2) dA$$

où $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

Ce domaine D est dessiné dans la figure 10.

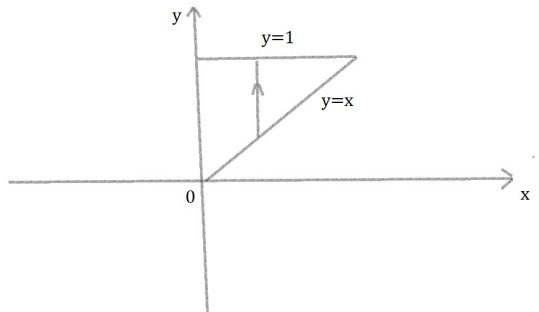


Figure 10

Dans la figure 11, on voit qu'il peut aussi être décrit d'une autre façon

$$D = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

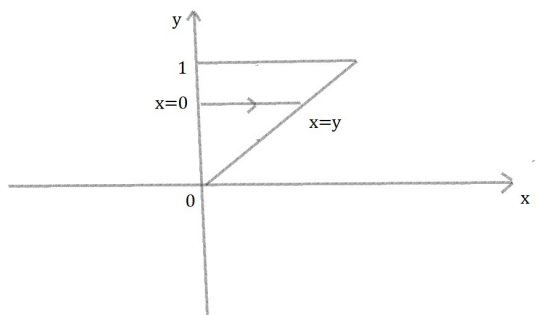


Figure 11

Selon cette description-ci, c'est la formule (5) qui conduit à écrire l'intégrale double comme une intégrale itérée dans l'ordre inverse :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx &= \iint_D \sin(y^2) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 [x \sin(y^2)]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \sin(y^2) dy = \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \end{aligned}$$

3.3.2 Propriétés générales de l'intégrale double

1.

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA \quad (1)$$

2.

$$\iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA \text{ où } c \text{ est une constante.} \quad (2)$$

3. Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ pour tout (x, y) dans D , alors

$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA \quad (3)$$

4. La propriété suivante des intégrales doubles est analogue à la propriété relative aux intégrales simples qui s'écrit $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, sans que D_1 ne chevauche D_2 , sauf peut-être sur leur frontière (voyez la figure 12), alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA \quad (4)$$

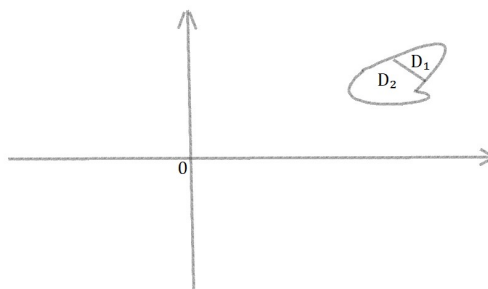


Figure 12.

La propriété 4 est mise à contribution pour calculer des intégrales doubles sur des domaines D qui n'entrent dans aucune des deux catégories de type I ou de type II, car elle permet d'envisager le domaine comme une union de domaines de type I ou II.

5. La propriété suivante affirme que l'intégrale double de la fonction constante $f(x, y) = 1$ sur un domaine D donne l'aire de celui-ci :

$$\iint_D 1 dA = A(D) \quad (5)$$

Par exemple, si D est de type I et si $f(x, y) = 1$ dans la formule (3) Section 3.3.1), on obtient

$$\iint_D 1 dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx = A(D),$$

6. Enfin, la combinaison des propriétés 2, 3 et 5 conduit à la propriété suivante.

- Si $m \leq f(x, y) \leq M$ pour tout (x, y) dans D , alors

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D) \quad (6)$$

Exemple 3.12 Servez-vous de la propriété 6 pour évaluer l'intégrale $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, où D est le disque centré à l'origine de rayon 2.

Solution 3.12 Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos y \leq 1$, $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ et de là,

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

La propriété 6, avec $m = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $M = e$ et $A(D) = \pi(2)^2$, conduit à

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e.$$

3.4 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

On souhaite calculer une intégrale double $\iint_R f(x, y) dA$, où R est une région comme celles que présente la figure 1.

Dans les deux cas, la description de R en coordonnées rectangulaires est compliquée alors qu'en coordonnées polaires, elle serait simple.

La figure 2 rappelle comment les coordonnées polaires (r, θ) sont liées aux coordonnées rectangulaires (x, y) :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

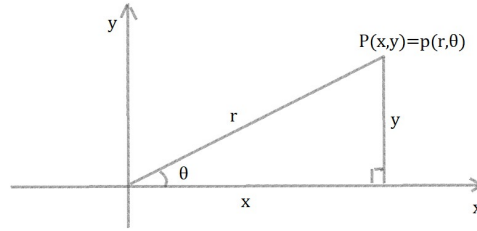


Figure 2

Les régions de la figure 1 sont des cas particuliers de **rectangle polaire**, défini par :

$$R = \{(r, \theta) / a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

et représenté dans la figure 3.

En vue de calculer $\iint_R f(x, y) dA$, où R est un rectangle polaire, on divise l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles $[r_{i-1}, r_i]$ d'égale largeur $\Delta r = (b - a)/m$ et on divise l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en n sous-intervalles $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ d'égale largeur $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Alors, les cercles $r = r_i$ et les rayons $\theta = \theta_j$ divisent le rectangle polaire R en sous-rectangles polaires.

Les coordonnées polaires du "centre" du sous-rectangle polaire

$$R_{ij} = \{(r, \theta) / r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i\}$$

sont

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_i^* = \frac{1}{2}(\theta_{i-1} + \theta_i)$$

Connaissant la formule de l'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle au centre θ , à savoir $\frac{1}{2}r^2\theta$, on peut calculer l'aire d'un R_{ij} , qui n'est que la différence de deux tels secteurs, d'angle central commun $\Delta \theta = \theta_j + \theta_{j-1}$,

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta \\ &= r_i^*\Delta r\Delta\theta \end{aligned}$$

Bien que l'intégrale double $\iint_R f(x, y) dA$ ait été définie sur des rectangles ordinaires, il est possible de démontrer que, pour des fonctions continues f , on obtient la même réponse sur des rectangles polaires. Comme les coordonnées rectangulaires du centre de R_{ij} , sont $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, une somme de Riemann représentative est

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta \theta \quad (1)$$

En posant $g(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, la somme de Riemann de l'expression 1 peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta$$

ce qui est une somme de Riemann de l'intégrale double

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

- Passage aux coordonnées polaires dans une intégrale double

Si f est continue sur un rectangle polaire R donné par $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (2)$$

La formule (2) établit que pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, il faut effectuer les substitutions $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, mettre les bornes convenables d'intégration relatives à r et θ et remplacer dA par $r dr d\theta$.

- Prenez garde de ne pas oublier le facteur supplémentaire r dans le membre de droite de la formule 2. La figure 4 est une aide mnémotechnique de la formule 2, elle montre un rectangle polaire "infinitésimal" dont le produit des dimensions $r d\theta$ et dr fournit l'"aire" $dA = r dr d\theta$.

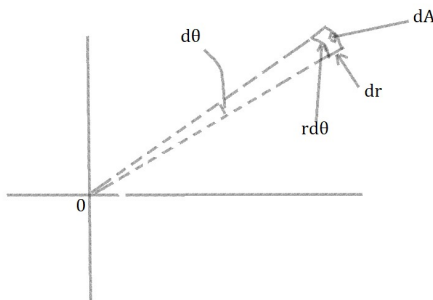


Figure 4

Exemple 3.13 Calculez $\iint_R (3x + y^2) dA$ où R est la région du demi-plan supérieur comprise entre les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.

Solution 3.13 La région R est décrite par

$$R = \{(x, y) / y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

C'est le demi-anneau de la figure 1 (gauche) qui, en coordonnées polaires, est décrit par $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. Par conséquent, conformément à la formule 2,

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (2r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi [r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta]_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right) d\theta \\ &= \left[7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemple 3.14 Déterminez le volume du solide délimité par le plan $z = 0$ et le parabolôïde $z = 1 - x^2 - y^2$

Solution 3.14 En posant $z = 0$ dans l'équation du paraboloid, on obtient $x^2 + y^2 = 1$. Le plan coupe donc le paraboloid selon le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et le solide repose donc sur le disque circulaire D défini par $x^2 + y^2 \leq 1$. En coordonnées polaires, D est décrit par $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Comme $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, le volume est calculé par

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

* En coordonnées rectangulaires, il aurait fallu calculer

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx,$$

ce qui n'est pas facile car y sont impliquées les intégrales suivantes

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx \quad \int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

* Ce qui a été fait jusqu'ici peut être étendu à des types de domaine plus compliqués. Il est semblable aux domaines de type II envisagés dans la section 3.3. En effet, en combinant la formule 2 de cette section avec la formule 5 de la section 3.3, on obtient la formule suivante.

* Si f est continue sur un domaine polaire de la forme

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (3)$$

En particulier, en posant $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ et $h_2(\theta) = h(\theta)$ dans cette formule, on voit que l'aire de la région D bornée par $\theta = \alpha, \theta = \beta$ et $r = h(\theta)$ est égale à

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

Exemple 3.15 Calculez le volume du solide qui est fermé supérieurement par le paraboloid $z = x^2 + y^2$, inférieurement par le plan Oxy et latéralement par la paroi du cylindre $x^2 + y^2 = 2x$.

Solution 3.15 Le solide repose donc sur le disque D dont la frontière est le cercle $x^2 + y^2 = 2x$ ou

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Comme $x^2 + y^2 = r^2$ et $x = r \cos \theta$, l'équation de ce cercle, en Coordonnées polaires, est $r^2 = 2r \cos \theta$, ou $r = 2 \cos \theta$. Le disque est maintenant décrit par

$$D = \left\{ (r, \theta) / \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \right\},$$

et, d'après la formule 3, on a

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 8 \left(\frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 6 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

3.5 Des applications des intégrales doubles

Calculer des volumes, telle est l'application de l'intégrale double que nous avons rencontrée jusqu'ici. Une autre application géométrique consiste à calculer des aires de surfaces et ce sera l'objet de la section suivante. Dans cette section-ci, nous explorons des applications du domaine de la physique, comme le calcul des masses, des charges électriques et des moments d'inertie. Nous verrons que ces notions propres à la physique sont importantes également lorsqu'elles sont appliquées aux fonctions de densité de probabilité de deux variables aléatoires.

3.5.1 Des densités et des masses

À la première année (chapitre : intégrale définie), on a été capable de calculer avec des intégrales simples des moments et des centres de masse d'une fine plaque de métal de densité constante.

Mais maintenant, armé des intégrales doubles, on peut envisager une plaque de métal de densité variable des centres de masse d'une fine plaque de métal de densité constante. On suppose que la plaque de métal occupe une région D du plan Oxy et que sa **densité** (en unités de masse par unité carrée) en un point (x, y) de D est donnée par $\rho(x, y)$, où ρ est une fonction continue de D . Cela signifie que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

où Δm et ΔA sont la masse et l'aire d'un petit rectangle qui contient (x, y) , la limite étant prise pour les dimensions du rectangle tendant vers 0 (voyez la figure 1).

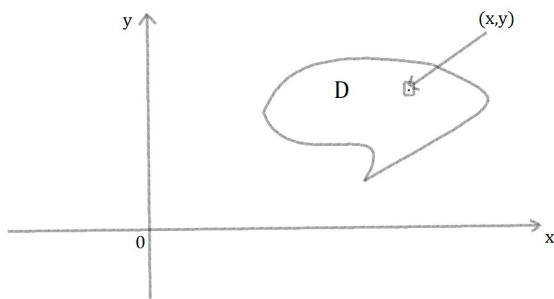


Figure 1.

En vue de déterminer la masse totale de la plaque de métal, on divise un rectangle R contenant D en sous-rectangles R_{ij} de même taille (comme dans la figure 2) et on considère $\rho(x, y)$ comme valant 0 en dehors de D .

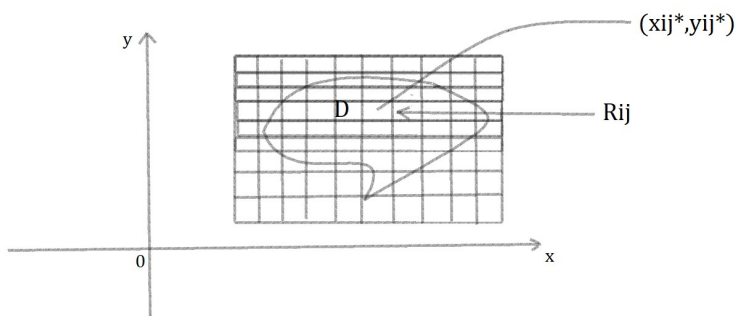


Figure 2.

La masse de la partie de la plaque de métal qui occupe le sous-rectangle R_{ij} vaut approximativement $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, où (x_{ij}^*, y_{ij}^*) est un point arbitrairement choisi dans R_{ij} et où ΔA est l'aire de R_{ij} . En additionnant toutes ces masses, on arrive à une approximation de la masse totale

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

On obtient maintenant la masse m totale de la plaque de métal, comme la valeur limite de ces approximations, lorsque le nombre de sous-rectangles augmente sans borne :

$$m = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA \quad (1)$$

la charge totale Q est calculée par

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA \quad (2)$$

Exemple 3.16 Une charge est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure 3 de telle sorte que la densité de charge en (x, y) est $\sigma(x, y) = xy$, mesurée en coulombs par mètre carré (C/m^2). Calculez la charge totale.

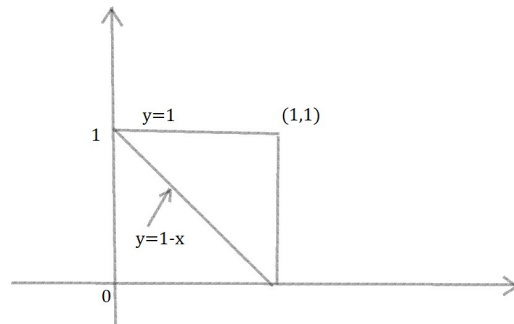


Figure 3.

Solution 3.16 Suite à l'équation 2 et au vu de la figure 3, on a

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1-x)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

La charge totale est donc de $\frac{5}{24}C$

3.5.2 Des moments et des centres de masse

On cherche maintenant le centre de masse d'une plaque de métal qui occupe une région D et dont la densité au point (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$. Souvenez-vous que le moment d'une particule par rapport à un axe a été défini, comme le produit de sa masse par la distance à cet axe. On divise D en sous-rectangles comme dans la figure 2. Comme la masse de R_{ij} est approchée par $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, le moment de R_{ij} par rapport à l'axe Ox vaut à peu près

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A] y_{ij}^*.$$

Le **moment** de la plaque de métal entière **par rapport à l'axe Ox** s'obtient alors en additionnant ces quantités et en prenant la limite lorsque le nombre de sous-rectangles devient infiniment grand :

$$M_x = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) dA \quad (3)$$

De même, le **moment par rapport à l'axe Oy** est

$$M_y = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) dA \quad (4)$$

Comme précédemment, on définit le centre de masse comme le point (\bar{x}, \bar{y}) dont les coordonnées satisfont à $m\bar{x} = M_y$ et $m\bar{y} = M_x$. Physiquement, cela signifie que la plaque de métal se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre de masse. Par exemple, elle est en équilibre lorsqu'elle repose sur son centre de masse.

- Les coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) du centre de masse d'une plaque de métal qui occupe la région D et dont la densité est donnée par la fonction $\rho(x, y)$ sont

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \quad (5)$$

où la masse m est donnée par

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Exemple 3.17 Déterminez la masse et le centre de masse d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$, sachant que la fonction de densité est $p(x, y) = 1 + 3x + y$.

Solution 3.17 Le triangle est tracé dans la figure 4. (L'équation de la frontière supérieure est $y = 2 - 2x$.)

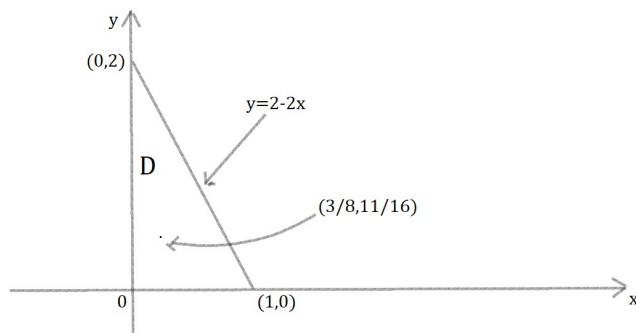


Figure 4.

La masse de la plaque de métal est

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Les formules 5 donnent ensuite

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) dy dx \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) dy dx \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[7x - 9 \frac{x^2}{2} - x^3 + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}
 \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre de masse sont donc $(\frac{8}{3}, \frac{11}{16})$.

Exemple 3.18 La densité en un point quelconque d'une plaque de métal semi-circulaire est proportionnelle à la distance de ce point par rapport au centre du cercle. Déterminez le centre de masse de la plaque de métal.

Solution 3.18 La plaque de métal occupe la moitié supérieure du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ (voyez la figure 5).

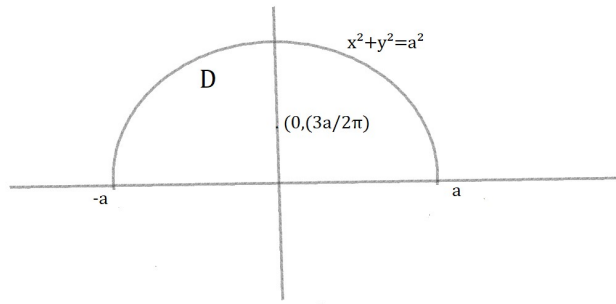


Figure 5.

La distance d'un point (x, y) au centre du cercle est donnée par $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dès lors, la fonction de densité est de la forme

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

où K est une certaine constante. Tant la fonction de densité que la forme de la plaque de métal incitent à passer aux coordonnées polaires. Alors $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et la région D est décrite par $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. D'où, la masse de la plaque de métal est donnée par

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2} dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) r dr d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 dr \\ &= \left[K\pi \frac{r^3}{3} \right]_0^a = K\pi \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Comme la plaque de métal et la fonction de densité sont symétriques par rapport à l'axe Oy , le centre de masse se trouve forcément sur cet axe, autrement dit, $\bar{x} = 0$. L'ordonnée, quant à elle, est calculée

par

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \\
 &= \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta (Kr) r dr d\theta \\
 &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\
 &= \frac{3}{\pi a^3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\
 &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, le centre de masse s situe au point $(0, \frac{3a}{2\pi})$

3.5.3 Probabilité

On a envisagé la fonction de densité de probabilité f d'une variable aléatoire continue X . Cela suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout x , que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ et que la probabilité que X se trouve entre a et b est obtenue en intégrant f depuis a jusqu'à b :

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

On considère maintenant une paire de variables aléatoires continues X et Y , telles les durées de vie de deux composantes d'une machine ou la taille et le poids d'un adulte de sexe féminin choisi au hasard. La **fonction de densité conjointe** de X et Y est une fonction f de deux variables telle que la probabilité pour que (X, Y) se trouve dans un domaine D est

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

En particulier, si la région est un rectangle, la probabilité que X se trouve entre a et b et Y entre c et d est

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Parce que des probabilités ne sont jamais négatives et sont mesurées sur une échelle de 0 à 1, la fonction de densité conjointe jouit des propriétés suivantes

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1$$

L'intégrale double sur \mathbb{R}^2 est une intégrale impropre définie comme la limite des intégrales doubles sur des cercles ou des carrés et on peut écrire

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Exemple 3.19 Déterminez la valeur de la constante C si f , définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est la fonction de densité conjointe de X et Y . Ensuite, calculez $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

Solution 3.19 La valeur de C doit être telle que l'intégrale double de f est égale à 1. Vu que $f(x, y) = 0$ en dehors du rectangle $[0, 10] \times [0, 10]$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) dy dx = C \int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) dx = 1500C \end{aligned}$$

Dès lors, $1500C = 1$ ou $C = \frac{1}{1500}$

On calcule maintenant la probabilité que X soit au plus égale à 7 et Y au moins égale à 2

$$\begin{aligned} P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1500} (x + 2y) dy dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500} \int_0^7 (8x + 96) dx \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0,5787 \end{aligned}$$

On envisage une variable aléatoire X dont la fonction de densité de probabilité est $f_1(x)$ et une variable aléatoire Y dont le fonction de densité de probabilité est $f_2(y)$. Les variables X et Y sont dites **indépendantes** si leur fonction de densité conjointe est le produit de leurs fonctions de densité respectives :

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

On a modélité des temps d'attente par des fonctions de densité exponentielle

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où μ est le temps d'attente moyen. L'exemple suivant présente une situation où il y a deux temps d'attente indépendants.

Exemple 3.20 Le directeur d'un cinéma remarque que la durée moyenne d'attente pour obtenir un ticket est de 10 minutes et pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place.

Solution 3.20 Les temps d'attente X et Y sont modélisés par des fonctions de densité de probabilité individuelles de type exponentiel

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-y/10} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Comme X et Y sont indépendantes, la fonction de densité de probabilité conjointe est le produit

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/10} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On demande la probabilité que $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

où D est la région triangulaire qu'on peut voir dans la figure 6. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/10} dy dx \\ &= \frac{1}{50} \int_0^{20} [e^{-x/10} (-5) e^{-y/10}]_{y=0}^{y=20-x} dx \end{aligned}$$

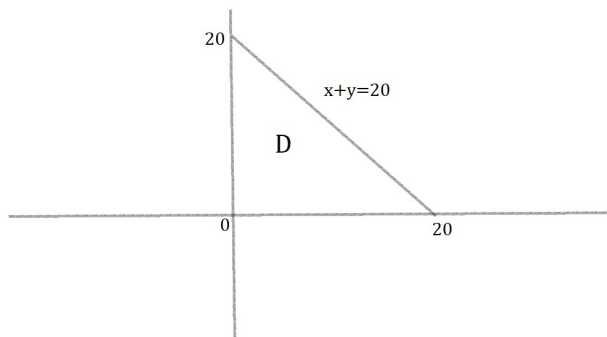


Figure 6.

3.6 Les intégrales triples

3.6.1 Calcul d'une intégrale triple sur un parallépipède

Tout comme on a défini des intégrales simples pour des fonctions d'une seule variable et des intégrales doubles pour des fonctions de deux variables, on peut définir des intégrales triples

pour des fonctions de trois variables. Pour commencer, on traite le cas le plus simple, celui où f est définie sur un parallépipède rectangle :

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\} \quad (1)$$

La première étape est de diviser B en sous parallépipèdes. Cela se fait en divisant l'intervalle $[a, b]$ en l sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ d'égale largeur Δx , l'intervalle $[c, d]$ en m sous-intervalles d'égale largeur Δy et l'intervalle $[r, s]$ en n sous-intervalles d'égale largeur Δz . Les plans passant par ces points de subdivision et parallèles aux plans coordonnées produisent une division de B en lmn sous-parallépipèdes

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

qui sont visibles dans la figure 1. Le volume de chaque B_{ijk} vaut $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

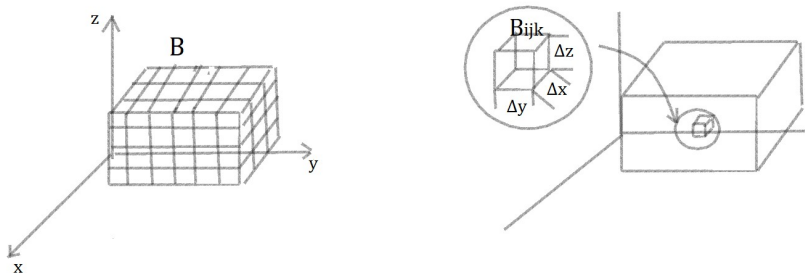


Figure 1.

Ensuite, on forme la **triple somme de Riemann**

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad (2)$$

où le point $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ est choisi arbitrairement dans B_{ijk} . Par analogie avec la définition d'une intégrale double, on définit l'intégrale triple comme la limite des triples sommes de Riemann de l'expression (2)

Définition 3.2 L'intégrale triple de f sur le parallépipède B est

$$\iiint_B f(x, y, z) \Delta V = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad (3)$$

pourvu que la limite existe.

A nouveau, l'intégrale triple existe toujours pour les fonctions continues. Le point au choix peut être n'importe où dans l'élément de volume B_{ijk} , mais s'il est au point (x_i, y_j, z_k) , l'expression de l'intégrale triple semble plus simple :

$$\iiint_B f(x, y, z) \Delta V = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

Le calcul de ces intégrales triples s'effectue, comme dans le cas des intégrales doubles, en les exprimant sous la forme d'intégrales itérées comme suit.

Théorème 3.2 *Théorème de Fubini pour les intégrales triples.* Si f est une fonction continue sur le parallépipède rectangle $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, alors

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

L'intégrale itérée du membre de droite du Théorème de Fubini signifie qu'on intègre d'abord par rapport à x (tenant y et z fixés), ensuite on intègre par rapport à y (tenant z fixé) et finalement on intègre par rapport à z . Il y a cinq autres ordres possibles d'intégration, qui tous donnent la même valeur. Par exemple, on peut intégrer par rapport à y d'abord, puis à z et enfin à x :

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$$

Exemple 3.21 Calculez l'intégrale triple $\iiint_B xyz^2 dV$, où B est le parallépipède rectangle décrit par

$$B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

Solution 3.21 On peut retenir n'importe lequel des 6 ordres d'intégration. Si on choisit d'intégrer d'abord par rapport à x , puis à y et enfin à z , les calculs s'effectuent comme suit :

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{y z^2}{2} dy dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

3.6.2 Calcul de l'intégrale triple sur un domaine E

On définit maintenant l'intégrale triple sur un domaine général E de l'espace à trois dimensions (un solide). Cela se fait d'une manière fort semblable à celle qui a prévalu pour l'intégrale double. On enferme E dans un parallépipède rectangle B comme celui décrit en (1). Puis on définit une fonction F qui coïncide avec f sur E , mais est nulle en tout point de B en dehors de E . Par définition,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV$$

Cette dernière intégrale existe si f est continue et si la frontière de E est "raisonnablement configurée". L'intégrale triple jouit des mêmes propriétés que l'intégrale double (propriétés 1-6 de la section 3.3.2).

On se limitera aux fonctions continues et à des régions d'un type simple. Une région solide E est dite de **type I** si elle est fermée par les surfaces représentatives de deux fonctions de x et y , autrement dit

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\} \quad (5)$$

où D est la projection de E sur le plan Oxy , comme le montre la figure 2.

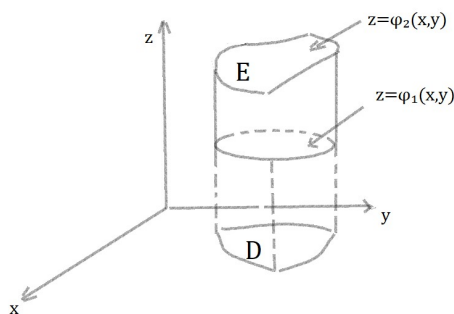


Figure 2. Une région solide de type 1

La frontière supérieure du solide E est la surface d'équation $z = \phi_2(x, y)$ tandis que la frontière inférieure est la surface $z = \phi_1(x, y)$.

Par le même genre de raisonnement que celui tenu pour arriver à l'expression (3) dans la section 3.3, on peut montrer que, si E est une région de type 1 décrite par (5), alors

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) \right] dA \quad (6)$$

L'intégrale intérieure du membre de droite de l'équation 6 est effectuée par rapport à z : pendant que x et y sont tenues constantes, et par là même aussi $\phi_1(x, y)$ et $\phi_2(x, y)$.

En particulier, si la projection D de E sur le plan Oxy est une région plane de type I, alors

$$E = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

et l'expression (6) devient

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx \quad (7)$$

Par contre, si D est une région plane de type II, alors

$$E = \{(x, y, z) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

et l'expression (6) devient

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy \quad (8)$$

Exemple 3.22 Calculez $\iiint_E z dV$, où E est le tétraèdre que forment les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.

Solution 3.22 Pour bien faire, avant d'établir une intégrale triple, il faut avoir dessiné deux graphiques, un de la région solide E (voyez la figure 3) et un de la projection de E sur le plan Oxy (voyez la figure 4).

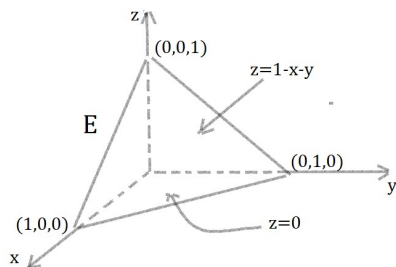


Figure 3

Comme la frontière inférieure du tétraèdre est le plan $z = 0$ tandis que la frontière supérieure est le plan $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$), on aura $\phi_1(x, y) = 0$ et $\phi_2(x, y) = 1 - x - y$ dans la formule

7. Par ailleurs, le plan $x + y + z = 1$ coupe le plan $z = 0$ selon la droite $x + y = 1$ ou ($y = 1 - x$). La projection de E est le triangle visible dans la figure 4 et

$$E = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \quad (9)$$

Cette description de E comme une région solide de type 1 conduit aux calculs suivants de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

* Une région solide de **type 2** est de la forme

$$E = \{(x, y, z) / (y, z) \in D, \phi_1(y, z) \leq x \leq \phi_2(y, z)\}$$

où, cette fois, D est la projection de E sur le plan Oyz . L'équation de la face arrière est $x = \phi_1(y, z)$, celle de la face avant $x = \phi_2(y, z)$ et

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(y, z)}^{\phi_2(y, z)} f(x, y, z) \right] dA \quad (10)$$

* Enfin, une région solide de **type 3** est de la forme

$$E = \{(x, y, z) / (x, z) \in D, \phi_1(x, z) \leq y \leq \phi_2(x, z)\}$$

où D est la projection de E sur le plan Oxz , $y = \phi_1(x, z)$ la face de gauche et $y = \phi_2(x, z)$ la face de droite. Pour ce type de région, on a

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x, z)}^{\phi_2(x, z)} f(x, y, z) \right] dA \quad (11)$$

Les expressions 10 et 11 sont susceptibles d'être explicitées de deux manières différentes selon que la projection de D est un domaine plan de type I ou II (correspondant aux expressions 7 et 8).

Exemple 3.23 Calculez $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV$, où E est le solide borné par le parabolôide $y = x^2 + z^2$ et le plan $y = 4$

Solution 3.23 Le solide E est représenté dans la figure 5. Si on le voit comme un solide de type 1, il faut regarder sa projection D_1 sur le plan Oxy qui a la forme du segment de parabole..

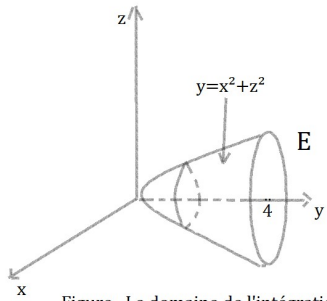


Figure Le domaine de l'intégration

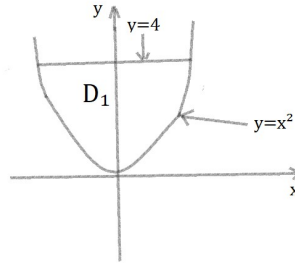


Figure La projection sur le plan oxy

Figure 5.

Comme de $y = x^2 + z^2$, il suit que $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, la surface frontière inférieure est $z = -\sqrt{y - x^2}$ et la surface frontière supérieure, $z = \sqrt{y - x^2}$. De ces considérations découle une description de E comme une région de type 1

$$E = (x, y, z) / -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}$$

et une expression de l'intégrale sous forme d'intégrale itérée

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dz dy dx$$

Bien que cette expression soit correcte, il semble bien difficile d'en entamer le calcul. Le domaine d'intégration E pourrait être vu comme une région de type 3. En tant que telle, sa projection D_3 sur le plan Oxz serait le disque $x^2 + z^2 \leq 4$.

De ce point de vue, la frontière gauche de E serait le parabolôide $y = x^2 + z^2$ et la frontière droite, le plan $y = 4$. D'où $\phi_1(x, z) = x^2 + z^2$ et $\phi_2(x, z) = 4$ dans l'expression 11 et on aurait

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} dy \right] dA \\ &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dA \end{aligned}$$

Bien que cette intégrale double puisse être écrite comme l'intégrale itérée

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2} dz dx,$$

il est plus facile de passer aux coordonnées polaires dans le plan Oxz : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$. Cela donne

$$\begin{aligned} \int \int \int_E \sqrt{x^2+z^2} dV &= \iint_{D_3} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2} dz dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2) r r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2-r^4) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15} \end{aligned}$$

3.6.3 Des applications des intégrales triples

On se souvient que si $f(x) \geq 0$, l'intégrale simple $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire sous la courbe $y = f(x)$ depuis a jusqu'à b , et que si $f(x, y) \geq 0$, l'intégrale double $\iint_D f(x, y) dA$ représente le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de D . L'interprétation analogue de l'intégrale triple $\iiint_E f(x, y, z) dV$, quand $f(x, y, z) \geq 0$, n'est pas très utile parce qu'il s'agirait d'un "hype volume" d'un objet de dimension 4, impossible à visualiser. (Il faut être bien conscient que E n'est que le domaine d'intégration de la fonction f ; le graphique de f appartient à un espace de dimension quatre.) Néanmoins, l'intégrale triple $\iiint_E f(x, y, z) dV$ possède diverses interprétations dans différentes situations en physique, selon l'interprétation de $f(x, y, z)$ et de x, y et z .

On commence par le cas particulier où $f(x, y, z) = 1$ quel que soit (x, y, z) dans E . L'intégrale triple représente alors le volume de E

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Cela se vérifie, dans le cas d'une région de type I, en posant $f(x, y, z) = 1$ dans la formule 6

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)] dA$$

cette dernière intégrale donnant, le volume du solide compris entre les surfaces $z = \phi_1(x, y)$ et $z = \phi_2(x, y)$.

Exemple 3.24 Calculez, par une intégrale triple, le volume du tétraèdre T formé par les plans $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ et $z = 0$

Solution 3.24 Les figures 6 montre le tétraèdre et sa projection D sur le plan Oxy . La frontière inférieure de T est le plan $z = 0$ et la frontière supérieure, le plan $x + 2y + z = 2$, ou, $z = 2 - x - 2y$. De là, on a

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y) dy dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(N'allez pas en conclure qu'il soit nécessaire de passer par des intégrales triples pour calculer des volumes. Ce n'est qu'une façon parmi d'autres de conduire le calcul)

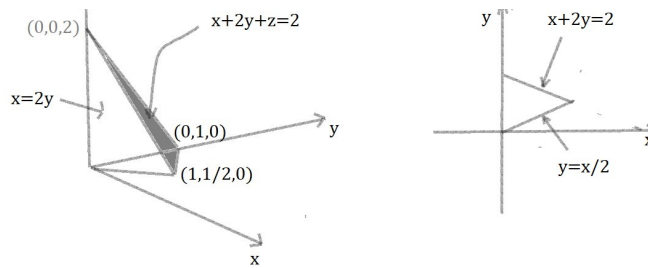


Figure 6.

Toutes les applications des intégrales doubles de la section 3.5 s'étendent aux intégrales triples. Par exemple, si la densité d'un solide qui occupe la région E est en tout point (x, y, z) donnée par $\rho(x, y, z)$, en unités de masse par unité de volume, alors sa **masse** est

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV \quad (12)$$

et ses **moments** par rapport aux trois plans de coordonnées sont

$$M_{yz} = \iiint_E x \rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_E y \rho(x, y, z) dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z \rho(x, y, z) dV$$

Le **centre de masse** occupe le point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ où

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Lorsque la densité est constante, le centre de masse est aussi le centre géométrique de E . Les **moments d'inertie** par rapport aux trois axes de coordonnées sont

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

Comme dans la section 12.5, la **charge électrique** totale d'un solide qui occupe la région E et dont la densité de charge en un point est donnée par $\sigma(x, y, z)$ est calculée par

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) dV$$

Dans la situation où X, Y et Z sont trois variables aléatoires continues, leur **fonction de densité conjointe** est une fonction de trois variables telle que la probabilité pour qu' (X, Y, Z) se trouve dans E est égale à

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

En particulier

$$P((a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s)) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

La fonction de densité conjointe est telle que

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dy dx = 1$$

Exemple 3.25 Situez le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans $x = z, z = 0$ et $x = 1$.

Solution 3.25 La figure 7 fait voir le solide E et sa projection sur le plan Oxy . Comme les surfaces inférieure et supérieure de E sont les plans $z = 0$ et $z = x$, E est décrit comme une région de type 1 :

$$E = \{(x, y, z) / -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

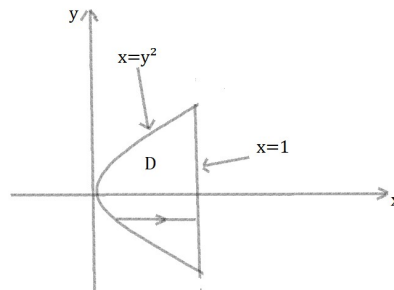
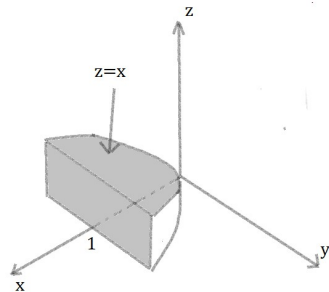


Figure 7.

Si la densité constante est écrite $\rho(x, y, z) = \rho$, alors la masse est le nombre

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}. \end{aligned}$$

En raison de la symétrie de E et ρ par rapport au plan Oxz , on peut immédiatement écrire $M_{xz} = 0$ et, de là, $\bar{y} = 0$. Les autres moments sont

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy = \frac{2\rho}{7} \end{aligned}$$

Par conséquent, le centre de masse est situé en

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$

3.7 Des intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques

Nous avons eu l'occasion de constater dans la section 3.4 que certaines intégrales doubles étaient plus faciles à calculer en coordonnées polaires. Dans cette section, nous allons observer que certaines intégrales triples sont plus faciles à calculer en coordonnées cylindriques et sphériques.

3.7.1 En coordonnées cylindriques

On se souvient que les coordonnées cylindriques d'un point P sont (r, θ, z) , où r, θ et z sont indiquées dans la figure 1.

Figure 1.

On suppose que E est une région de type I dont la projection D sur le plan Oxy se prête à une description en coordonnées polaires. En particulier, il est supposé que f est continue et que E est décrit par

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

où D est donné en coordonnées polaires par

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

On sait, de l'équation 6 dans la section 3.6, que

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA \quad (1)$$

Mais on sait aussi comment calculer des intégrales doubles en coordonnées polaires. Il ne reste donc qu'à combiner l'équation 1 avec l'équation 3 de la section 3.4 pour arriver à

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\phi_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{\phi_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta \quad (2)$$

La formule 2 est la formule de **changement de variables en coordonnées cylindriques** pour les intégrales triples. Elle dit comment procéder pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées cylindriques dans une intégrale triple : il faut remplacer x par $r \cos \theta$, y par $r \sin \theta$,

laissez z tel quel, attribuer à chacune des variables z , r et θ les bornes d'intégration appropriées et enfin remplacer dV par $rdzdrd\theta$. (La figure 2 aide à visualiser et a rappeler cette conversion). Cette formule est particulièrement adéquate quand E est une région solide qui se décrit aisément en coordonnées cylindriques, et plus spécialement quand la fonction $f(x, y, z)$ contient l'expression $x^2 + y^2$.

Figure 2. Élément de volume en coordonnées cylindriques : $dv = rdzdrd\theta$

Exemple 3.26 *Un solide E est la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ fermée inférieurement par le parabolöide $z = 1 - x^2 - y^2$ (Voyez la figure 3) et coiffée par le plan $z = 4$. La densité en chaque point est proportionnelle à la distance qui sépare le point de l'axe du cylindre. Calculez la masse de E .*

Figure 3.

Solution 3.26 *Comme, en coordonnées cylindriques, l'équation du cylindre est $r = 1$ et celle du parabolöide, $z = 1 - r^2$, on peut décrire E de la manière suivante*

$$E = \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Que la densité en (x, y, z) soit proportionnelle à la distance de l'axe Oz s'écrit

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

où K est la constante de proportionnalité. Par conséquent, d'après la formule 12 dans la section 3.6.3, la masse de E est le nombre

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] dr = 2\pi K \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr \\ &= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$

Exemple 3.27 Calculez $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$

Solution 3.27 Cette intégrale itérée est une intégrale triple sur la région solide

$$E = \left\{ (x, y, z) / -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \right\}$$

et la projection de E sur le plan Oxy est le disque $x^2 + y^2 \leq 4$. La frontière inférieure de E est le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et la frontière supérieure, le plan $z = 2$ (voyez la figure 4).

Figure 4

La description de cette région est beaucoup plus simple en coordonnées cylindriques :

$$E = \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx &= \iiint_E (x^2 + y^2) \, dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r) \, dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^2 = \frac{16\pi}{5}
 \end{aligned}$$

3.7.2 En coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) d'un point ont été définies à la première année (voyez la figure 5)

Figure 5.

et les relations qui les lient aux coordonnées rectangulaires sont, pour rappel :

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi \quad (3)$$

Dans ce système de coordonnées, le pendant du parallépipède rectangle est un **coin sphérique**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

où $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ et $d - c \leq \pi$. Bien que l'intégrale triple ait été définie en divisant des solides en petits parallépipèdes, on peut montrer qu'on arrive au même résultat en le divisant en petits

coins sphériques E_{ijk} par les sphères $\rho = \rho_i$, les demi plans $\theta = \theta_j$, et les demi-cônes $\phi = \phi_k$. Dès lors, le volume de E_{ijk} vaut approximativement

$$(\Delta\rho) \times (\rho_i \Delta\phi) \times (\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta\rho \Delta\phi \Delta\theta$$

Une approximation par une triple somme de Riemann est donc de la forme

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\rho_i \sin \phi_k \cos \theta_j, \rho_i \sin \phi_k \sin \theta_j, \rho_i \cos \phi_k) \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta\rho \Delta\phi \Delta\theta$$

Mais cette somme est une somme de Riemann de la fonction

$$F(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin \phi f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

Ce qui précède rend compréhensible **la formule de changement de variables en coordonnées sphériques** que voici.

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4)$$

où E est un coin sphérique décrit par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

La formule 4 indique comment convertir une intégrale triple de coordonnées rectangulaires en coordonnées sphériques : il faut faire les substitutions

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

adapter les bornes d'intégration et remplacer dV par $\rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$.

Cette formule peut être étendue à des domaines sphériques plus généraux tels que

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Dans ce cas, la formule est la même qu'en (4) à part que les bornes d'intégration de ρ sont $g_1(\theta, \phi)$ et $g_2(\theta, \phi)$

Les coordonnées sphériques interviennent généralement dans des intégrales triples sur des domaines d'intégration délimités par des cônes et des sphères.

Exemple 3.28 Calculez $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, où B est la boule unité

$$B = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Solution 3.28 Vu que la frontière de B est une sphère, on adopte les coordonnées sphériques

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

De plus, les coordonnées sphériques conviennent parce que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

D'où, (4) conduit

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho \\ &= [-\cos \phi]_0^\pi (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

Remarque 3.2 Il aurait été extrêmement malaise de calculer l'intégrale de l'exemple 3.28 sans les coordonnées sphériques. L'intégrale itérée en coordonnées rectangulaires eût été

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx.$$

Exemple 3.29 Calculez à l'aide des coordonnées sphériques le volume du solide qui se trouve compris entre le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (Voyez la figure 6)

Figure 6.

Solution 3.29 La sphère passe par l'origine, mais son centre est en $(0, 0, 1/2)$. L'équation de cette sphère en coordonnées sphériques est

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

Le cône peut être décrit par

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \rho \sin \phi$$

Cela donne $\sin \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Par conséquent, la description du solide E en coordonnées sphériques est

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\},$$

et son volume résulte du calcul suivant

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos^3 \phi d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

3.8 Le changement de variables dans les intégrales multiples

3.8.1 Le changement de variables dans un intégrale double

Le changement de variable (ou substitution) est une des méthodes qui simplifie le calcul des intégrales simples. En intervertissant les rôles de x et u , la Règle de substitution peut s'écrire

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du, \quad (1)$$

où $x = g(u)$ et $a = g(c)$, $b = g(d)$. La La formale (1) s'écrit encore d'une autre façon :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad (2)$$

Changer de variables peut aussi être fructueux dans le calcul des intégrales doubles. On l'a déjà vu dans le cas particulier du passage aux coordonnées polaires. Les nouvelles variables r et θ sont liées aux anciennes x et y par les équations

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

et la formule de changement de variables (voyez (2) dans la section 3.4) s'écrit :

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

où S est la région du plan $Or\theta$ qui correspond à la région R du plan Oxy .

Plus généralement, on envisage maintenant un changement de variables donné par une **transformation** T du plan Ouv vers le plan Oxy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

où x et y sont liées aux variables u et v par les équations

$$x = g(u, v) \quad y = h(u, v), \quad (3)$$

qui parfois sont aussi écrites

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

On suppose habituellement que T est une **transformation de classe C^1** , ce qui signifie que g et h ont des dérivées partielles du premier ordre continues.

Une transformation T n'est en réalité qu'une fonction dont le domaine définition et l'ensemble image sont tous les deux des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 . Lorsque $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, alors le point (x_1, y_1) est appelé l'**image** du point (u_1, v_1) . Si deux points distincts n'ont jamais la même image, T est dite **injective**. La figure 1 montre l'effet d'une transformation T sur une région S du plan Ouv . T transforme S en une région R du plan Oxy appelée l'**image de S** , composée des images de tous les points de S .

Figure 1

Si T est une transformation injective, alors elle admet une **transformation réciproque** T^{-1} du plan Oxy vers le plan Ouv et il est possible de résoudre les équations 3 par rapport à u et v en fonction de x et y :

$$u = G(x, y) \quad v = H(x, y)$$

Exemple 3.30 Une transformation est définie par les équations

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

Déterminer l'image du carré $S = \{(u, v) / 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

Solution 3.30 On cherche l'image des bords de S . L'équation du premier bord S_1 est $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$) (voyez la figure 2). Dans ce cas, les équations de T donnent $x = u^2, y = 0$ et donc $0 \leq x \leq 1$. Le segment S_1 devient après la transformation le segment qui joint $(0, 0)$ à $(1, 0)$ du plan Oxy . Ensuite, le côté S_2 répond à $u = 1$ ($0 \leq v \leq 1$) et poser $u = 1$ dans les équations de la transformation conduit à

$$x = 1 - v^2 \quad y = 2v$$

En éliminant v , on arrive à

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

qui représente un arc de parabole. De même, S_3 qui répond à $v = 1$ ($0 \leq u \leq 1$) a comme image l'arc de parabole

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad -1 \leq x \leq 0 \quad (5)$$

Enfin, S_4 est donné par $u = 0$ ($0 \leq v \leq 1$) dont l'image est $x = -v^2, y = 0$, c'est-à-dire $-1 \leq x \leq 0$. (Notez que si on fait le tour du carré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on tourne aussi dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sur le contour parabolique). L'image de S est la région R (visible dans la figure 2) délimités par l'axe Ox et les paraboles d'équations (4) et (5).

Figure 2

Définition 3.3 Le **Jacobien** d'une transformation T donnée par $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$ est

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (6)$$

Avec cette notation, la valeur approchée de l'aire ΔA de R s'écrit

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v, \quad (7)$$

où le Jacobien est calculé en (u_0, v_0) .

Maintenant, on divise une région S du plan Ouv en sous-rectangles S_{ij} et on appelle R_{ij} leurs images dans Oxy (voyez la figure 3). En employant l'approximation (7) pour l'aire de chaque R_{ij} , l'intégrale double de f sur R est approchée par la double somme :

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

où le Jacobien est calculé en (u_i, v_j) . Cette double somme est une somme de Riemann relative à l'intégrale

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

L'argumentation qui précède suggère que le théorème suivant soit vrai. (Une démonstration tout à fait complète n'est donnée qu'en analyse approfondie.)

Figure 3

Théorème 3.3 *Changement de variables dans une intégrale double.* On suppose que T est une transformation injective de classe C^1 dont le Jacobien est non nul et qui envoie une région S du plan Ouv sur la région R du plan Oxy . On suppose que f est continue sur R et que R et S sont des régions planes de type I ou II. Alors,

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \quad (8)$$

Le théorème 3.3 dit qu'on passe d'une intégrale en x et y à une intégrale en u et v , en exprimant x et y en termes de u et v et en remplaçant dA par

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

La similitude entre la formule du théorème 3.3 et celle de l'équation 2 à une dimension est remarquable. En lieu et place de la dérivée dx/du , il y a la valeur absolue du Jacobien : $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$. En guise de première application du théorème 3.3, on montre que la formule d'intégration en coordonnées polaires établie précédemment n'en est qu'un cas particulier. La transformation T du plan $Or\theta$ dans le plan Oxy est décrite par

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta,$$

et la visualisation géométrique de cette transformation apparaît dans la figure 3.

T transforme un rectangle ordinaire du plan $Or\theta$ en un rectangle polaire du plan Oxy . L'expression du Jacobien de T est, dans ce cas,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

De là, le théorème 3.3 donne

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

ce qui est bien la même que la formule 2 dans la section 3.4.

Exemple 3.31 Effectuez le changement de variables $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ pour calculer l'intégrale $\iint_R y dA$, où R est la région délimitée par l'axe Ox et les paraboles $y^2 = 4 - 4x$ et $y^2 = 4 + 4x$.

Solution 3.31 La région R est celle de la figure 2. L'exemple 3.30 a expliqué que $T(S) = R$, où S est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. L'avantage du changement de variables est justement de simplifier la région. Il faut d'abord calculer le Jacobien

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Ensuite, selon le théorème 3.3,

$$\begin{aligned} \iint_R y dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2uv) 4 (u^2 + v^2) dudv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3v + uv^3) dudv = 8 \int_0^1 \left[\frac{u^4}{4}v + \frac{u^2}{2}v^3 \right]_{u=0}^{u=1} dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

Remarque 3.3 La résolution de l'exemple 3.31 n'a posé aucune difficulté parce que le changement de variables adéquat était donné. Lorsque la transformation n'est pas fournie, la première étape est de réfléchir au changement de variables qui convient. La forme de $f(x, y)$ peut suggérer la bonne transformation, surtout si son expression est malaisée à intégrer. Si c'est la forme de la région R d'intégration qui est compliquée, alors la transformation doit faire en sorte que la description de la région S correspondante dans le plan Ouv soit simple.

Exemple 3.32 Calculez l'intégrale $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA$, où R est la région trapézoïdale de sommets $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ et $(0, -1)$.

Solution 3.32 Vu qu'il n'est pas facile d'intégrer $e^{(x+y)/(x-y)}$, le changement de variables suggéré s'inspire de la forme de cette fonction

$$u = x + y \quad v = x - y. \quad (9)$$

Ces équations définissent une transformation réciproque T^{-1} du plan Oxy vers le plan Ouv . Pour se ramener au théorème 3.3 qui est écrit pour une transformation T du plan Ouv vers le plan Oxy , on résout les équations 10 par rapport à x et y :

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v) \quad (10)$$

Le jacobien de T est

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Pour dessiner la région S image de R par T , on note que les arêtes de R appartiennent aux droites d'équations

$$y = 0 \quad x - y = 2 \quad x = 0 \quad x - y = 1$$

et que, après substitution dans les équations 9 et 10, les arêtes correspondantes dans le plan Ouv sont sur les droites

$$u = v \quad v = 2 \quad u = -v \quad v = 1$$

La région S est donc le trapèze de sommets $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ et $(-1, 1)$ que l'on peut voir dans la figure 4.

Comme

$$S = \{(u, v) / 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$

le théorème 3.3 s'applique et conduit à

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\ &= \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \left(\frac{1}{2} \right) dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1}) v dv = \frac{3}{4} (e - e^{-1}) \end{aligned}$$

3.8.2 Le changement de variables dans une intégrale triple

Il existe bien évidemment une formule de changement de variables analogue pour les intégrales triples. Soit T une transformation qui envoie une région S de l'espace $Ouvw$ dans l'espace $Oxyz$ au moyen des équations

$$x = g(u, v, w) \quad y = h(u, v, w) \quad z = k(u, v, w)$$

Le **Jacobien** de T est le déterminant d'ordre 3 que voici :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sous des hypothèses semblables à celles du théorème 3.3, on a la formule suivante pour les intégrales triples :

$$\begin{aligned} &\iiint_R f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_R f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudv dw \end{aligned}$$

Exemple 3.33 Retrouvez la formule d'intégration en coordonnées sphériques à partir de la Formule 13

Solution 3.33 Le changement de variables est décrit par

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

On calcule le Jacobien

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} \\
 &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\
 &= \cos \phi (-\rho^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta) \\
 &\quad - \rho \sin \phi (\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \\
 &= -\rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \sin \phi \sin^2 \phi = -\rho^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \phi \leq \pi$, on a $\sin \phi \geq 0$. Par conséquent,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = |-\rho^2 \sin \phi| = \rho^2 \sin \phi$$

et la formule 13 donne

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

qui est bien équivalent à la formule 4 de la section 000 $-\rho^2 \sin \phi$

$$D_M : (y - y_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Bibliographie

- [1] James Stewart, Analyse concepts et contextes, Volume 2 . Fonctions de plusieurs variables, De Boeck Université s.a. Paris. 2001.
- [2] N. Piskonov, Calcul différentiel et intégral, Tome II, Edition Mir. Moscou 1980.
- [3] Andrew Gleason, Fonctions de plusieurs variables, Gaetan Morin Cheneliere Education, Mars 2016.
- [4] Mohamed Mehbali, Mathématiques 2. Fonctions de plusieurs variables réelles, O P U, Septembre 2015.
- [5] M. Monier, Analyse PC- PSI- PT, Dunod, Paris 2004.
- [6] Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Edition Mir, Moscou, 1980.
- [7] CARTAN H. Cours de calcul différentiel, nouvelle édition refondue et corrigée, Hermann, Paris. 1977