République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tebessi –TEBESSA-
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de mathématique et informatique

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD
En : MATHEMATIQUES
Option : MATHEMATIQUES APPLIQUÉES

Par : **TOUALBIA Sarra**

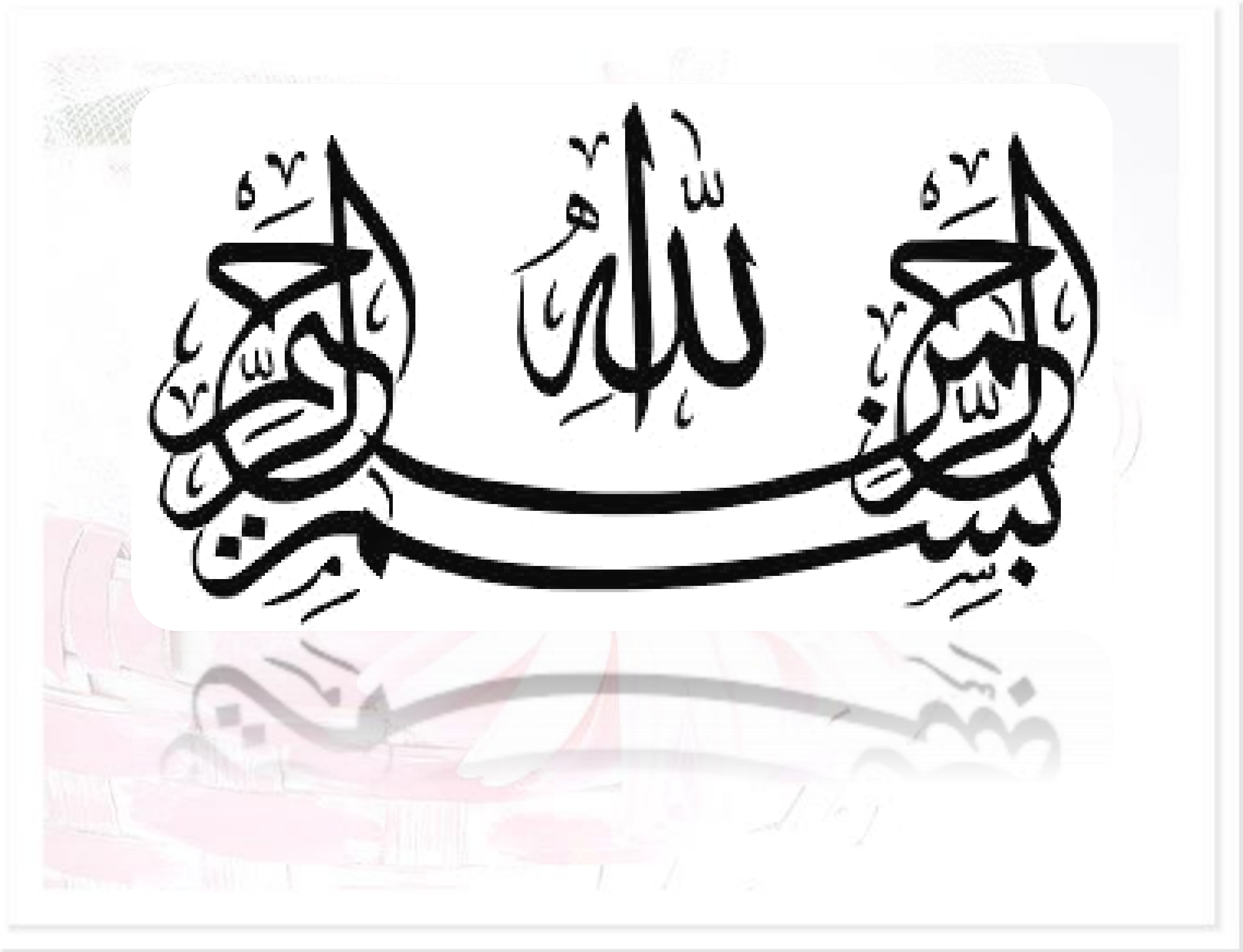
Intitulée :

Décroissances et explosion des solutions de certains systèmes d'évolution non linéaire

Devant le jury :

BOUMAZA Nouri	MCA	Université de Tébessa	Président
ZARAI Abderrahmane	Professeur	Université de Tébessa	Rapporteur
MESLOUB Fatiha	MCA	Université de Tébessa	Co-Rapporteur
AKROUT Kamel	MCA	Université de Tébessa	Examinateur
SAOUDI Khaled	MCA	Université de Khenchela	Examinateur
ZITOUNI Saleh	MCA	Université de Souk Ahras	Examinateur

Date de soutenance : 26/10/2020


بسم الله الرحمن الرحيم

قال تعالى:

{ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ }. (المجادلة. 11)

{شَهِدَ اللّهُ أَنَّهُ لاَ إِلَـهَ إِلاَّ هُوَ وَالْمَلاَئِكَةُ وَأُوْلُواْ الْعِلْمِ قَآئِمَاً بِالْقِسْطِ}.(ال عمران.18)

صدق الله العظيم.

وقال رسول الله صلى الله عليه وسلم :

{مَنْ سَلَكَ طَرِيقاً يَطْلُبُ فِيهِ عِلْماً سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقاً إِلَى الْجَنَّةِ ، وَ إِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا لِطَالِبِ الْعِلْمِ رِضًا بِهِ ، وَ إِنَّهُ يَسْتَغْفِرُ لِطَالِبِ الْعِلْمِ مَنْ فِي السَّمَاءِ وَ مَنْ فِي الْأَرْضِ حَتَّى الْحُوتِ فِي الْبَحْرِ ، وَ فَضْلُ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ كَفَضْلِ الْقَمَرِ عَلَى سَائِرِ النُّجُومِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ، وَ إِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ ، إِنَّ الْأَنْبِيَاءَ لَمْ يُوَرِّثُوا دِينَاراً وَ لَا دِرْهَماً وَ لَكِنْ وَرَّثُوا الْعِلْمَ ، فَمَنْ أَخَذَ مِنْهُ أَخَذَ بِحَظ وَافِرِ}.

صدق رسول الله.

Dédicaces

Avec l'aide de DIEU, le tout puissant ce travail est achevé je le dédie :

À Moi-même.

À ma mère.

À mon père.

À mes frères.

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire de Mathématiques, Informatiques et systèmes, Département de Mathématiques et informatiques, Université de Tébessa.

Je remercie avant tout ALLAH pour toute la volonté et la force qu'il ma donné pour finir cette thèse, il a été et sera toujours à côté de moi pour réussir à terminer n'importe quel travail.

Je souhaite remercier très chaleureusement mes encadrants pour leur implication dans mon travail. Je commence par mon directeur de thèse M : **ZERAI Abderrahmane,** professeur à l'université de Tébessa. Qui m'a fait l'honneur d'assurer la direction de ce travail, et pour son soutien et encouragement toutes ces années, également Mme : **MESLOUB Fatiha,** co- rapporteur, maitre de conférences à l'université de Tébessa aussi pour son encouragement.

Je souhaite également remercier les membres du jury pour avoir acceptés avec gentilles d'examiner mon travail. En commençant par le président, M: **BOUMAZA Nouri,** maitre de conférences à l'université de Tébessa, M : **AKROUT Kamel,** maitre de conférences à l'université de Tébessa aussi, puis je tiens également à remercie les invités, M: **SAOUDI Khaled,** maitre de conférences à l'université de Khenchela, et M: **ZITOUNI Saleh,** maitre de conférences à l'université de Souk Ahras.

Enfin je n'oublie pas de remercie tous les enseignants de département de Mathématiques.

Résumé :

L'objet de nos travaux porte essentiellement sur la détermination des conditions suffisantes pouvant mener la solution à tendre vers zéro lorsque t tend vers l'infini ou à exploser en temps fini pour certains problèmes d'évolutions en présence d'un terme source de type polynomiale et logarithmique.

Il s'est avéré que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème; c'est-à-dire que la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand t s'approche d'une valeur finie T appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle le terme source terme d'explosion.

Les termes de dissipations sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème. Il est facile de voir qu'en absence de termes sources, si la solution existe localement alors on peut toujours la prolonger en une solution globale. Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question centrale dans de nombreux travaux et elle l'est toujours. Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre.

L'outil principal utilisé repose sur la méthode de **Georgiev et Todorova**.

Mots clés : Décroissance exponentielle, Décroissance polynomiale, explosion, Lyapunov.

Abstract :

The purpose of our works focuses on the determination of sufficient conditions that can lead the solution to approach to zero when **t** goes to infinity or blow-up in finite time for some evolution problems in presence of a source term of polynomial type and logarithmic type.

It appears that this source prevents the global existence (in time) of the solution of the problem is to say that the solution (or more precisely the energy of the problem) tends to infinity for norm of the space when **t** approached to à finite time **T**.

The damping term stabilize the solution of the problem. It is easy to see that in the absence of source terms, if the solution exists locally then we can always extend it into a global solution. This interaction between source term and damping term has been purpose in many studies and it's still. It is important to know what term outweighs the other.

The main tool used is based on the method of **Georgiev and Todorova**.

Keywords: Exponential decay, Polynomial decay, explosion, Lyapunov.

ملخص:

الغرض من أعمالنا في هذه الأطروحة هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تؤول الحلول إلى الصفر عندما يؤول الزمن إلى ما لا نهاية أو تضمحل الحلول في وقت منتهي لبعض المسائل التطورية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى إن الحلول تؤول إلى مالا نهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار.

قوى التخامد هي التي تحقق الاستقرار في حلول المسالة, فمن السهل أن نرى أن في غياب القوى الخارجية، إذا كان هذا الحل موجودا محليا يمكننا دائما تمديده إلى حل كلي.

إن التفاعل بين القوى الخارجية وقوى التخامد كان سؤال مركزي في العديد من الدراسات التي لا تزال إلى الآن. ومن المهم أن نعرف القوى التي تتفوق.

تعتمد الأداة الرئيسية المستخدمة في البرهان على طريقة **جورجييف وتودوروفا**.

الكلمات المفتاحية : التناقص الأسي ، التناقص متعدد الحدود ، الانفجار ، ليابونوف .

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de trois problèmes d'évolution non linéaire. Les problèmes d'évolution non linéaire, sont généralement rencontrés en génie chimique, la transmission de chaleur, la physique des plasmas, thermo-élasticité. Voir à ce sujet les travaux [4 ;12 ;13 ; 49 ; 42 ; 55].

Dans la théorie des équations d'évolution non-linéaire, une solution est qualifiée d'être globale si elle est définie pour tout temps positif. Au contraire, si une solution existe seulement sur un intervalle de temps $[0, T)$ borné, elle est dite locale. Dans ce dernier cas et quand le temps maximal d'existence est relié à une alternative d'explosion, on dit aussi que la solution explose en temps fini. Cependant, pour donner un sens à la notion d'explosion en temps fini, il faut bien préciser l'espace dans lequel on travaille et avec quelle norme on va prouver la solution.

On s'intéressera au comportement asymptotique des solutions où la structure est soumise à une force extérieure (source de type polynomiale et logarithmique), plus précisément la source agit sur tout le domaine. Il s'est avéré que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution des problèmes c'est-à-dire que l'énergie la tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand t s'approche d'une valeur finie T appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle le terme source "terme d'explosion". Les dissipations utilisées dans ses problèmes sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème. Il est facile de voir qu'en absence de termes sources, si la solution existe localement alors, on peut toujours la prolonger en une solution globale.

Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question centrale dans de nombreux travaux et elle l'est toujours. Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre. Beaucoup d'études ont porté sur l'explosion de la solution pour les problèmes d'ondes semilinéaires avec un terme source de type polynomial, voir [30,31,32,33]. V. Georgiev et G. Todorova [24] ont montré la non existence de la solution globale pour les conditions initiales négatives. Plus tard, le même résultat a été établi par plusieurs auteurs pour les équations d'évolution générales [30,31,32,45]. En particulier, Levine et Serrin [31,32] ont prouvé le résultat de non existence globale pour un problème hyperbolique abstrait assez général.

Pour montrer l'explosion de la solution en temps fini, nous avons utilisé un argument qui est inspiré de la méthode de Georgiev et Todorova [24]. Cette méthode a été développée pour l'équation des ondes avec une dissipation non linéaire et une source polynomiale. Elle consiste à prendre une certaine puissance de l'énergie (avec signe négatif), la perturber par un terme qu'on peut contrôler par les termes déjà existant dans l'énergie classique et faire en sorte que cette fonctionnelle énergie perturbée (ou modifiée) satisfait une inéquation différentielle. L'explosion en temps fini découle alors de la résolution de cette inéquation différentielle.

Nous déterminerons le comportement asymptotique de la solution à l'aide de la méthode énergétique, elle consiste donc de garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation, pour le but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback). Plus précisément, le problème de la stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ et étudier sa limite pour $t \to \infty$. Il existe plusieurs degrés de stabilité comme

-La stabilisation **forte** quand $E(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

-La décroissance de l'énergie **rapide** de type polynomial

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}},$$

- La décroissance **plus rapide** de type exponentielle

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t},$$

où C et α sont des constantes positives.

Nos contributions se trouvent dans les chapitres 2, 3 et 4, et cette thèse comprend quatre chapitres est organisé comme suit

Le premier chapitre intitulé "Rappels et préliminaires"

Dans ce chapitre, nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans les chapitres ultérieurs.

Le deuxiéme chapitre intitulé "Etude d'une équation d'évolution pour une classe de p-laplacien avec non-linéarité logarithmique".

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle simple d'équation non linéaire parabolique avec une source logarithmique dans un domaine borné sous la condition de Neumann au bord. On constate un résultat d'existence locale et globale de solutions, ensuite on a étudié le non existence et l'explosion en temps fini des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = |u|^{p-2}u\log|u| - \oint_\Omega |u|^{p-2}u\log|u|\,dx, & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial\eta} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0) = u_0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n\geq 1)$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, $p\in(2,+\infty)$, $\oint_\Omega u_0 dx = \frac{1}{|\Omega|}\oint_\Omega u_0 dx = 0$ avec $u_0 \neq 0$.

Le problème (1) était étudié par plusieurs autres auteurs sous une forme plus générale

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) - \oint_\Omega f(u)\,dx, & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial\eta} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0) = u_0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec $|\Omega|$ désignant sa mesure de Lebesgue, et la fonction $f(u)$ est généralement considérée comme une puissance de u.

Les solutions non négatives du probléme (2) avec $f(u) = |u|^p$ sont étudiées dans la référence [56], puis [8] dans le cas où $f(u) = u\,|u|^p$ et $\int_\Omega u dx > 0$,ansi que [20, 12] ont etudiés un résultat d'existence non globale est discuté par l' utilisation de l'argument de la convexité et sous la condition énergétique suivant

$$E(u_0) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 - \frac{1}{p+1} |u_0|^{p+1} \right] dx \leq -C,$$

avec $\int_\Omega u dx = 0$

De plus, [4,18] ont étudié l'explosion de la solution critique de l'équation non locale de p-Laplacien suivant

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u) = u^q - \oint_\Omega u^q dx, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u\,(x,0) = u_0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.

Dans ces cas, quelques travaux ont été consacrés à l'existence globale et à le non-existence de l'équation parabolique non locale avec la non-linéarité logarithmique. Au temps que c'est remarquable que l'équation parabolique non locale avec une non-linéarité logarithmique n'admet pas la méthode du principe du maximum et la méthode du comparaison. En raison de cette difficulté principale, certaines méthodes les plus efficaces, telles que la méthode des solutions supérieures et inférieures, ne sont plus valables ici. Inspiré des idées de [25-48], les résultats préliminaires de la stratégie globale de l'existence et l'explosion de solutions faibles sont données par la méthode des puits potentiels, la méthode classique de Galerkin et l'inégalité logarithmique de Sobolev. Nous discutons d'une part des propriétés de non-extinction et du comportement asymptotique des solutions globales. D'autre part, pour traiter le terme logarithmique non linéaire, nous avons besoin de l'inégalité logarithmique de Sobolev, on revenant au références [17, 36].

Le troisiéme chapitre intitulé "Stabilité exponentielle et l'explosion d'équation des ondes de type Kelvin voigt avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et conditions aux limites d'acoustique".

La viscoélasticité caractérise sous un comportement élastique et dissipatif des matériaux en petites déformations. Celle-ci peut être considérée à différentes échelles. En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité exponentielle et l'explosion de la solution de probléme suivant

$$\begin{cases} |u_t|^m u_{tt} = \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma \int_\Omega \nabla u.\nabla u' dx\right)\Delta u + 2\lambda \Delta u_t + \int_\Omega |u|^{p-2} u dx & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma \int_\Omega \nabla u.\nabla u' dx\right)\frac{\partial u}{\partial v} + 2\lambda \frac{\partial u_t}{\partial v} = y_t & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_t + p(x) y_t + q(x) y = 0 & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = v_0,\ u_t(0) = u_1 & \text{in } \Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Gamma_0 \end{cases} \quad (4)$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ est composée de deux parties Γ_0 et Γ_1 telques $\overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} = \Gamma$.Tous les paramètres a, b,$\sigma > 0$, p et q sont des fonctions satisfaisantes

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0 \ \text{ pour tous } x \in \Gamma_1. \quad (5)$$

Les études analytiques dans le domaine de la stabilisation de systèmes à paramètres distribués présente actuellement un intérêt en ce qui concerne l'application au contrôle des vibrations de divers éléments structurels. Le phénomène a été observé pour la première fois par Hunton, comme l'a rapporté Harrison en [28]. Le modèle non linéaire comme (4) pour les vibrations transversales a été dérivé à l'origine par Kirchhof. Beale et Rosencrans ont introduit des conditions aux limites d'acoustiques de la forme générale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v} = y' & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \gamma u' + m(x) y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Récemment, de nombreux auteurs ont traité les équations d'onde avec des conditions aux limites acoustiques ([14], [22], [31], [45]). Dans [30], les auteurs ont étudié les équations d'ondes non linéaires

$$\begin{cases} u'' - M\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)\Delta u + \left|u'\right|^\alpha u' = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial v} = y' & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \gamma u' + m(x) y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Ils ont prouvé l'existence de solutions, mais n'ont pas donné la décroissance des solutions. En ce qui concerne la décroissance des solutions pour les solutions aux problèmes de conditions aux limites d'acoustiques, mais il n'existe pas beaucoup de littérature ([21], [44], [45]). Frota et

Larkin [21] ont établi des estimations de la solvabilité et de la décroissance globales pour une équation linéaire d'onde avec des conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v} = h(x)y' & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \gamma u' + p(x)y' + q(x)y = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Le quatriéme chapitre intitulé "Explosion de la solution d'équation de membrane élastique avec un retard".

Les problémes d'évolutions avec retard surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est un phénomène qui dépend de son passé. Les applications de ces types de problèmes peut rencontrer dans plusieurs domaines , notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie . . . etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un interval de temps donné.

Beaucoup de phénomènes rencontrés en physique, biologie, chimie, étude des réseaux de neurones, circulation routière...etc. ont trouvé dans la théorie des équations à retard un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires).

On appelle équation à retard toute équation dans laquelle la valeur de la dérivée à un instant de la solution dépend aussi des valeurs prises avant cet instant. L'initialement idée des équations différentielles à retard a été introduite par V. Volterra [56], il a étudié le modèle prédateur-proie, et dans la deuxième moitié du dernier siècle, la théorie des équations à retard a connu un grand développement, notamment on trouve Bellman et Cooke [7].

En ce chapitre on s'intéresse à l'étude du probléme suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(a + b\left\|\nabla u\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u(x,t), \nabla u_t(x,t)\right)\right)\Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\ +\mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \ t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, $a, b, \sigma, \mu_0, \mu_1$ sont des constantes positives et $g(t) > 0$, $\tau > 0$ représente le temps retard, u_0, u_1, f_0 sont des fonctions appartenant à des espaces appropriés. les termes d'amortissement structural viscoélastique $\left(a + b\left\|\nabla u\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u(x,t), \nabla u_t(x,t)\right)\right)$ sont désignés par a, b, σ est la rigidité non linéaire de la membrane.

L'équation une du probléme (6) est liée à l'équation du panneau de flutter avec le contrôle de la durée et de la temporisation en mémoire. Les matériaux viscoélastiques présentent un amortissement naturel, ce qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux de conserver la mémoire de leur passé. Surtout cette équation se pose dans une expérience en soufflerie à des vitesses supersoniques voir [60]. Le modèle avec amortissement de Balakrishnan-Taylor $[(\sigma \neq 0)\, et g = 0, \mu_0 = 0, \mu_1 = 0]$ a été initialement proposé par Balakrishnan et Taylor [3] et Bass and Zes [5]. Kirane et Said-Houari [29] ont considéré l' équation viscoélastique d'onde de la forme

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 u_t(x,t-\tau) = 0,$$

pour $x \in \Omega, t > 0,$ avec les conditions initiales et limites de Dirichlet. Ils ont établi des résultats généraux de désintégration d'énergie à la condition que $\mu_1 \leq \mu_0$.

T.A.Apalara ; S.A. Messaoudi et M.I. Mustafa, [2],ont considéré la thermo-élasticité de type II avec un amortissement viscoélastique est à retard

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \mu\Delta u(x,t) - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u(x,t)) + \beta\nabla\theta(x,t) \\ + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 u_t(x,t-\tau) = 0, \\ \quad \theta(x,t) - \kappa\Delta\theta(x,t) - \delta\Delta\theta_t(x,t) + \beta \operatorname{div} u_{tt}(x,t) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

pour $x \in \Omega, t > 0,$ avec les conditions initiales et limites de Dirichlet, Ils ont d'étudié la dégradation d'énergie en thermo-élasticité de type III avec un amortissement viscoélastique en retard. Wu [57] a récemment d'étudier l'équation viscoélastique non linéaire avec un amortissement linéaire est en retard de la forme

$$|u|^\rho u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 u_t(x,t-\tau) = 0,$$

pour $x \in \Omega, t, \rho > 0,$ avec les conditions initiales et limites de Dirichlet, Il a prouvé le comportement asymptotique pour une équation viscoélastique d'onde avec un retard pour $\mu_1 \leq \mu_0$. Mi, J.L., Jong, Y.P et Han Kang, Y.,[59] ont étudié la stabilité asymptotique du problème.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle de quelques définitions, quelques espaces fonctionnels de base (espace de Banach, espace de Hilbert....), et quelques théorèmes et formules fondamentaux, ainsi que la notion de l'existence locale et globale.

L'objectif de ce chapitre est l'utilisation des résultats préliminaires dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Notations et notions générales

Dans cette section nous avons défini quelque différents symboles, et certains opérateurs utilisés dans notre travail.

Le gradient d'une fonction u est définie par

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2. \ [11] \tag{1.1}$$

La divergence d'une fonction est également définie par

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \ [11] \tag{1.2}$$

Le laplacien de u

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \ [11] \tag{1.3}$$

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire : $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\eta}$, où $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ. [11]

$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues dans Ω. [11]
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, à support compact dans Ω. [42]
L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ que nous noterons également $D(\Omega)$, s'appelle l'espace des fonctions tests sur Ω. [42]
$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continue (ou bornés) de E dans F muni de la norme

1.2 Quelques espaces fonctionnels

1.2.1 Espace normé

Définition 1.1 [1] *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$, avec $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$. Une **norme** sur E est une application $\|.\|$ de E dans $[0, +\infty[$ vérifiant*

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$,
2) $\forall x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3) $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in E$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|u\|$.

Remarque 1.1 *$(E, \|.\|_E)$ est un espace normé.*

Définition 1.2 [38] (**Equivalence des normes**)
Soit E un espace vectoriel normé, les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0, \exists \, \beta > 0, \ \forall x \in E, \ \ \alpha \, \|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \beta \|.\|_1 .$$

Définition 1.3 [16] (**Suite de Cauchy**)
*Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **Cauchy** si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon, \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

1.2.2 Espace complet

Définition 1.4 [1] *Un espace métrique E est **complet,** si toute suite de **Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'espace E a une limite dans E.*

1.2.3 Espace de Banach

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé,

Définition 1.5 [38] *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.6 *E' est l'espace linéaire de toutes les fonctions linéaires continues*

$$f : E \to \mathbb{R},$$

et appelé l'espace dual de E.

Proposition 1.1 [7] *L'espace E muni de la norme $\|.\|_E$ définit*

$$\|f\|_E = \sup \{|f(u)| : \|u\| \leq 1\},$$

est aussi un espace de Banach.

Définition 1.7 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de **Banach** tels qu'il existe une application linéaire **injective** de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on note $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*
On dit que cette inclusion est
*1) **Continue :** S'il existe une constante $C > 0$, telle que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$. On note $E \hookrightarrow_{continue} F$.*
*2) **Compact :** Si pour toute suite bornée dans E (pour la norme de E), on peut extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F), et on nete $E \hookrightarrow_{compact} F$.*
*3) **Dense :** Si pour tout $u \in E$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).*

La topologie faible et forte

Définition 1.8 [38] *Soit E un espace de Banach, et $(u_n)_{n\in N}$ une suite dans E, alors u_n **converge fortement** vers u dans E si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,\ \forall n \geq N \quad \| u_n - u\|_E \leq \varepsilon.$$

Définition 1.9 [38] *Soit E un espace de Banach et $(u_n)_{n\in N}$ une suite dans E, alors u_n **converge faiblement** vers u dans E si et seulement si*

$$\forall f \in L_c(E, \mathbb{R}),\quad f(u_n) \to f(u).$$
$$\forall f \in L_c(E, \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0,\ \forall n \geq N_\varepsilon \quad | f(u_n) - f(u)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.2 [38] *Si E est de dimension fini, alors*

$$\text{La convergence forte} \Longrightarrow \text{la convergence faible,}$$

mais la réciproque et fausse.

1.2.4 Espace de Hilbert

Définition 1.10 [11] *Soit E un espace vectoriel, on appelle produit scalaire définit par $\langle u, v\rangle$, est une forme bilinéaire $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive (i.e $\langle u, u\rangle \geq 0$ $\forall u \in E$ et $\langle u, u\rangle > 0$ si $u \neq 0$).*

Définition 1.11 [38] *E est un espace de* ***Hilbert*** *si c'est un espace de Banach pour la norme associée*

$$\|u\|_E = \langle u, u\rangle^{1/2} \ \textit{(i.e)} \ \|u\|_E^2 = \langle u, u\rangle \,.$$

Définition 1.12 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.13 [11] *On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.*

Définition 1.14 [11] ***(Base Hilbertienne)***
Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$. On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de E telle que
(i) $|e_n| = 1$ $\forall n$, $(e_n, e_m) = 0$ $\forall m, n$, $m \neq n$.
(ii) *L'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.*

Définition 1.15 [11] ***(Espace séparable)***
On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

Exemple 1.1 *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$).*

Théorème 1.1 [11] *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.3 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (u, e_n)$,*
telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infini.

De plus, on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2 .$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n)\, e_n.$$

1.2.5 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.16 [11] *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 1.17 [11] *Si $p = \infty$, on a*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C, \text{ telle que} \\ |u(x)| \leq C \quad \text{p.p sur } \Omega. \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C,\ \ |u(x)| \leq C \quad \text{p.p sur } \Omega \right\}.$$

Définition 1.18 [42] *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ par l'ensemble des $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tels que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout Ω' et dont la fermeture est compacte dans $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 1.4 [49] *L^p muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de **Banach**, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.2 [42] *L^p est **réflexif** si et seulement si $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.3 [42] *L^p est **séparable** pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 1.5 [49] *L^∞ est un espace de **Banach non séparable**.*

Lemme 1.1 *[7] Si $\mu(\Omega) < \infty, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, et*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/q} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Théorème 1.4 *[11]Soient (u_n) une suite de L^p et $u \in L^p$, tels $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite (u_{nk}) telleque*

$$u_{nk}(x) \to u(x) \ p.p.sur\Omega.$$

Remarque 1.2 *Supposons que $(1 \leq p \leq \infty)$ et E est un espace de Banach réflexif alors la convergence faible étoile équivalent à la convergence faible.*

Théorème 1.5 [42] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$*

1) Si $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.

2) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightharpoonup \|u\|_{L^p(\Omega)}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3) Si $1 \leq p < \infty$ et si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ et

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \|u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

4) Si $1 < p < \infty$ et si $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p} \leq K$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} et $u \in L^p(\Omega)$ tels que $u_{n_i} \longrightarrow u \in L^p(\Omega)$.

Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et on a alors $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

*5) Si $1 \leq p \leq \infty$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} telle que $u_{n_i} \rightharpoonup u$ **p.p** et $|u_{n_i}| \leq h$ **p.p** avec $h \in L^p(\Omega)$.*

Lemme 1.2 *[35] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, u_m et u des fonctions de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, telles que*

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad, u_m \to u \ \text{ p.p dans } \Omega.$$

Alors $u_m \to u$ dans $L^p(\Omega)$ faiblement.

1.2.6 L'espace de Lebesgue

Définition 1.19 *Soient E un espace de **Banach**, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de **Lebegue** à valeurs dans E et on note $L^p((0,T),E)$ l'espace des fonctions $u :]0,T[\to E$, mesurable qui vérifient*

$$\textbf{i) } \text{Si } 1 \leq p < \infty, \ \|u\|_{L^p((0,T),E)} = \left(\int_0^T |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\textbf{ii) } \text{Si } p = \infty, \ \|u\|_{L^\infty((0,T),E)} = ess \sup_{x \in]0,T[} |u(x)| < \infty.$$

Lemme 1.3 *[35] Soient $u \in L^p((0,T),E)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T),E)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ alors la fonction u est continue de $[0,T]$ dans E (i,e) $u \in \mathcal{C}^1((0,T),E)$.*
1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T),E)$ est un espace de Banach et en particulier $L^2((0,T),E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.
2) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E réflexif, alors $L^p(0,T,E)$ est aussi réflexif.
3) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E séparable, alors $L^p((0,T),E)$ est aussi séparable.

Proposition 1.6 *[13] L'espace $L^p((0,T),E)$ qui associé à la norme $\|.\|_{L^p((0,T),X)}$, est un espace de Banach.*

Proposition 1.7 *[23] Soient E et F deux espaces de Banach, $E \subset F$ avec injection continue alors*

$$L^p((0,T),E) \subset L^p((0,T),F),$$

avec injection continue.

1.2.7 Espace de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.20 [42] *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que la fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i si*

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par abus de notation, on écrit $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ou $u = u_{x_i}$.

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.21 [11] *Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists f \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.22 [11] *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \quad \begin{array}{c} ,\forall \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m \ \exists f_\alpha \in L^p(\Omega) \ \text{ tel que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_I$ et $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_N}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} .. \partial_{x_N}^{\alpha_N}} \varphi$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Définition 1.23 [11] *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right)^{1/2},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx, \text{ pour tout } u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.8 *[46]*
1) Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2) Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec injection continue.
3) Si $m = 0$ on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

1.3 Les opérateurs

Soient H et H' deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.24 [23] *Toute application linéaire et continu $T : H \to H'$ s'appel un opérateur.*

Définition 1.25 (**Opérateurs bornés** [23])
Soit $A : X \to Y$ un opérateur, A est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Au\| \leq C \|u\|, \ \forall u \in X.$$

Définition 1.26 (**Opérateurs symétrique** [19])
L'opérateur $A : H \to H$ *est dit symétrique si* $\forall u, v \in D(A) \subset H$,

$$(Au, v) = (v, Au).$$

Définition 1.27 (***Opérateurs adjoint*** [10])
Soit $A : D(A) \subset E \to F$ *un opérateur non-borné à domaine dense. Il existe un unique opérateur* $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ *appelé adjoint de* A *qui vérifie*

$$\forall u \in D(A),\ \forall v \in D(A^*),\ \ (v, Au)_{F',F} = (A^*v, u)_{E',E},$$

où

$$D(A^*) = \{v \in F',\ \exists c \geq 0,\ \ |(v, Au)| < c\,|u|_E\ \ \forall u \in D(A)\}.$$

Remarque 1.3 [11] A *autoadjoint si*

$$A^* = A.$$

Ce qui sous-entend $D(A) = D(A^*)$.

Définition 1.28 (***Opérateur monotone*** [11])
Soit $A : D(A) \subset H \to H$ *un opérateur linéaire* ***non-borné****. On dit que* A *est* ***monotone (****certains auteurs disent que* A *est* ***accrétif*** *ou que* $-A$ *est* ***dissipatif)*** *si*

$$(Av, v) \geq 0,\ \forall v \in D(A).$$

A *est* ***maximale monotone*** *si de plus* $R(I + A) = H$ ***i.e.***

$$\forall f \in H,\ \exists u \in D(A)\ \textit{tel que}\ u + Au = f.$$

1.4 Quelques inégalités et formules fondamentaux

Corollaire 1.1 ([39] **Formule de Green**)
Soit Ω *un ouvert bornée de classe* C^1*. Alors pour toutes fonctions* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *et* $v \in C^1(\overline{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx, \tag{1.4}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u(x) . \eta(x)$ *(dérivée normale de* u*).*

Lemme 1.4 ([11] **Inégalité de Hölder**)
Soient $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *et* $1 \leq p < \infty$, $1 < p' \leq \infty$. *Alors*

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

Corollaire 1.2 ([11] **Inégalité de Poincaré**)
On suppose que Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* C *(dépondant de* Ω *et* p*) telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } 1 \leq p < \infty.$$

Lemme 1.5 ([37] **Inégalité de Young**)
Soient $u, v \geq 0$, *et pour tous* $\delta > 0$, *on a*

$$uv \leq \frac{\delta^p}{p} u^p + \frac{\delta^{-q}}{q} v^q, \ \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lemme 1.6 ([16] **Inégalité de Young avec** ε)
Soient $u \geq 0$, $v \geq 0$ *et* p, q *deux nombres positifs tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$uv \leq \varepsilon u^p + c(\varepsilon) v^q.$$

Théorème 1.6 ([16] **Inégalité de Cauchy – Shwartz**)
Soit $\langle u, v\rangle$ *un produit scalaire sur l'espace vecoriel réel* V *muni de la norme* $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$, *alors*

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

pour touts vecteurs u et $v \in V$, l'égalité ayant lieu si u et v sont linéairement dépendants.

1.5 Notion de l'existence locale et globale

1.5.1 Existence locale, globale et explosion

L'étude d'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaire abstraites (voir A. Pazy [43]).
Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, $f : X \to X$. Étant donné, $u_0 \in X$.
Considérons le problème.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f, \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Définition 1.29 [4] *On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est une* ***solution locale*** *du problème (1.5), s'il existe u définie sur un* ***intervalle maximal*** $[0, T^*)$ *qui pour $t < T^*$ est l'unique solution de (1.5) dans $C^1([0, T^*), X)$.*
En particulier*, l'une des deux éventualités suivantes a lieu.*
i) $T^* = \infty$.
ii) $T^* < \infty$ *et* $\lim\limits_{t \to T^*} \|u\| = \infty$.

Remarque 1.4 [27] *- Si la propriété* ***(i)*** *est satisfaite, on dit que la solution u est* ***globale.***
- Si ***(ii)*** *est satisfaite, on dit que u est* ***une solution explose en temps fin***

1.5.2 Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 1.30 [49] *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système d'évolution formé de m équations, toute fonction*

$$L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

tel que

$$\frac{d}{dt}\left(L\left(u_1(t,.), ...u_m(t,.)\right)\right) \leq 0, \tag{1.6}$$

pour tout $t > 0$ et toute solution $(u_1(t,.), ...u_m(t,.))$ de système.

Chapitre 2

Etude d'une équation d'évolution pour une classe de p-laplacien avec non-linéarité logarithmique

On va considérer le problème de Neumann avec une source logarithmique de l'équation parabolique suivante

$$\begin{cases} u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = |u|^{p-2}u\log|u| - \oint_\Omega |u|^{p-2}u\log|u|\,dx & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial\eta} = 0 & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0) = u_0 & x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{2.1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, $p\in(2,+\infty)$, $\oint_\Omega u_0dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx = 0$ avec $u_0\neq 0$.

Ce type de problème à jouer un grand rôle en plusieurs domaines, et les termes non-linéaires logarithmiques a également reçu un grand intérêt par les physiciens et les mathématiciens.

La non-linéarité logarithmique a été introduit en l'équation des ondes non relative qui exprime des particules sans spin ou de filage que se déplaçe dans un champ électromagnétique externe. De plus, ce type de non-linéarité est également rencontré dans de nombreuses branches de la physique comme la cosmologie, la physique nucléaire, optique et Géophysique.

En ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence locale et globale des solutions, puits nous étudions la décroissance polynomiale, le non-existence de solutions et l'explosion en $+\infty$ de problème (2.1).

Ce travail là est le mien, c'est un article publié dans un respectable journal international de **classe A** en **2020**, voir [51] .

Remarque 2.1 *(voir la définition 03* [15]*)*
La fonction $f(u) = |u|^{p-2} u \log |u| \, dx$ *est une fonction convexe alors*

$$\int_\Omega \left(\oint_\Omega f(u) dx u_t \right) dx = 0.$$

2.1 Préliminaire

Dans cette section, nous présentons des lemmes bien connus qui seront nécessaires plus tard. Premièrement, nous utilisons la notation X_0 pour désigner l'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}$.

Lemme 2.1 ***(Inégalité logarithmique de sobolev*** [14]***)***
Soient $p > 1, \mu > 0$, *et* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \diagdown \{0\}$. *Alors*

$$\begin{aligned} & p \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \log \left(\frac{|u(x)|}{\|u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \right) dx + \frac{n}{p} \log \left(\frac{p\mu e}{n \mathcal{L}_p} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \\ & \leq \mu \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \, dx, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$\mathcal{L}_p = \frac{p}{n} \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)} \right]^{\frac{p}{n}}. \tag{2.3}$$

Lemme 2.2 [14] . *Soit* $\varrho > 0$. *On a l'inégalité suivante*

$$\log s \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{\varrho}, \text{ pour tous } s \in [1, +\infty] . \tag{2.4}$$

Lemme 2.3 [14] . *(a) Pour toute fonction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *on a l'inégalité*

$$\|u\|_q \leq B_{q,p} \|\nabla u\|_p , \tag{2.5}$$

pour tous $q \in [1, \infty)$ *si* $n \leq p$, *et* $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$, *si* $n > p$. $B_{q,p}$ *est la meilleure constante sur* Ω.
(b) Soit $2 \leq p < q < p^*$. *Pour toute* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *on a*

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p^\alpha \|u\|_2^{1-\alpha} , \tag{2.6}$$

Où C *est une constante positive et*

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right)^{-1}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.2 [14] . *D'après le Lemme 2.2, nous avons*

$$s^p \log s \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{p+\varrho}, \text{ pour tous } \varrho > 0 \text{ et } s \in [1, +\infty) . \tag{2.8}$$

Lemme 2.4 [14] . *Supposons que* $\theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0$, *et* $h(t)$ *est une fonction non négative absolument continue telle que,* $h^{'}(t) + \alpha h^{\theta}(t) \geq \beta$, *Puis pour* $0 < t < \infty$, *on a*

$$h(t) \geq \min\left\{h(0), \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}. \tag{2.9}$$

Lemme 2.5 [14] .*Soit* $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ *est une fonction non croissante,*$\omega > 0$, *et* σ *est une constante non négative telle que*

$$\int_{t}^{+\infty} f^{1+\sigma}(s)ds \leq \frac{1}{\omega} f^{\sigma}(0)f(t). \quad \forall t \geq 0. \tag{2.10}$$

alors

(a) $f(t) \leq f(0)e^{1-\omega t}$, *pour tous* $t \geq 0$, *si* $\sigma = 0$,

(b) $f(t) \leq f(0)\left(\frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$, *pour tous* $t \geq 0$, *si* $\sigma > 0$.

Définition 2.1 ***(Explosion à*** $+\infty$ [36]***)***

Soit $u(x,t)$ *est une solution faible de probléme (2.1). On dit que* $u(x,t)$ ***explose à*** $+\infty$ *si le temps d'existence maximal* $T = +\infty$ *et*

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(.,t)\|_2 = +\infty. \tag{2.11}$$

Définition 2.2 ***(Explose en temps fini*** [36]***)***

Soit $u(x,t)$ *une solution faible de (2.1). On dit que* $u(x,t)$ ***explose en temps fini*** *si le temps d'existence maximal* T *est fini et*

$$\lim_{t \to T^{-}} \|u(.,t)\|_2 = +\infty. \tag{2.12}$$

2.2 Le puits de potentiel

On commence par examiner les fonctionnelles I et J sont définies par

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u(x,t)\|_p^p - \frac{1}{p}\int_{\Omega} |u(x,t)|^p \log|u(x,t)|\, dx + \frac{1}{p^2}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{2.13}$$

$$I(u) = \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \int_{\Omega} |u(x,t)|^p \log|u(x,t)|\, dx. \tag{2.14}$$

Les fonctionnelles I et J sont continus. De plus, on a

$$J(u) = \frac{1}{p}I(u) + \frac{1}{p^2}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{2.15}$$

Lemme 2.6 [51] .$J(u)$ *est uniformément bornée par* $J(u_0)$ *et*

$$\frac{d}{dt}J(u) = -\|u_t(x,t)\|_2^2. \tag{2.16}$$

Preuve. En multipliant l'équation (2,1) par u_t, en intégrant sur Ω, puis en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\|u_t(x,t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^{p-2} \nabla u \nabla u_t dx = \int_\Omega |u(x,t)|^{p-2} u u_t \log |u(x,t)| \, dx, \tag{2.17}$$

on utilise

$$|\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla u_t = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} |\nabla u|^p \,, \tag{2.18}$$

et

$$|u|^{p-2} u u_t \log |u| = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left[|u|^p \log |u| - \frac{1}{p} |u|^p \right], \tag{2.19}$$

on remplace (2.18) et (2.19) en (2.17), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{p} \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \frac{1}{p} \int_\Omega |u(x,t)|^p \log |u(x,t)| \, dx + \frac{1}{p^2} \|u(x,t)\|_p^p \right] = - \|u_t(x,t)\|_2^2 .$$

■

soit $u \in X_0$, pour $\lambda > 0,$ nous considérons la fonction $j : \lambda \to J(\lambda u)$, définie par

$$j(\lambda) := J(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p} \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |u(x,t)|^p \log |u(x,t)| \, dx - \frac{\lambda^p}{p} \log \lambda \|u(x,t)\|_p^p + \frac{\lambda^p}{p^2} \|u(x,t)\|_p^p . \tag{2.20}$$

Le lemme suivant montre que $j(\lambda)$ admet un point critique positif unique $\lambda^* = \lambda^*(u)$.

Lemme 2.7 [51] *.Soit $u \in X_0$. Alors*
(1) $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} j(\lambda) = 0$ *et* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} j(\lambda) = -\infty,$
(2) il y a un unique $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ tel que $j'(\lambda^*) = 0,$
(3) $j(\lambda)$ est croissante sur $(0, \lambda^*)$, décroissante sur $(\lambda^*, +\infty)$ et atteint le maximum à λ^*,
(4) $I(\lambda u) > 0$ Pour $0 < \lambda < \lambda^*$, $I(\lambda u) < 0$ pour $\lambda^* < \lambda < +\infty$ et $I(\lambda^* u) = 0$.

Preuve. Pour $u \in X_0$, il est clair que (1) est valable pour $\|u\|_p \neq 0$.
Maintenant, on dérive j par apport à λ, on obtient

$$\frac{d}{d\lambda} j(\lambda) = \lambda^{p-1} \int_\Omega [|\nabla u(x,t)|^p - |u(x,t)|^p \log |u(x,t)| \, dx - |u(x,t)|^p \log \lambda] \, dx, \tag{2.21}$$

si

$$\frac{d}{d\lambda} j(\lambda^*) = 0,$$

alors

$$\lambda^{*p-1} \int_\Omega [|\nabla u(x,t)|^p - |u(x,t)|^p \log |u(x,t)| \, dx - |u(x,t)|^p \log \lambda^*] \, dx = 0,$$

cela implique

$$\lambda^* = \exp \frac{\int_\Omega [|\nabla u(x,t)|^p \, dx - |u(x,t)|^p \log |u(x,t)|] \, dx}{\int_\Omega |u(x,t)|^p \, dx}, \tag{2.22}$$

alors, on vu que $j(\lambda)$ est croissante sur $(0, \lambda^*)$, et décroissante sur $(\lambda^*, +\infty)$.
La dernière propriété, on a

$$\begin{aligned} I(\lambda^*) &= \lambda^* \left[\lambda^{*p-1} \int_\Omega (|\nabla u|^p - |u|^p \log |u| \, dx - |u|^p \log \lambda^*) \, dx \right] \\ &= \lambda^* j(\lambda^*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Ensuite, nous notons

$$R = \left(\frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{n}{p^2}}, \tag{2.23}$$

où $\mathcal{L}_p$ est définie par (2.3) dans le Lemme 2.1.

Lemme 2.8 [51] .*(1) Si* $I(u) > 0$, ***alors*** $0 < \|u(x,t)\|_p < R$*,*
(2) si $I(u) < 0$, ***alors*** $\|u(x,t)\|_p > R$*,*
(3) si $I(u) = 0$, ***alors*** $\|u(x,t)\|_p \geq R$*.*

Preuve. Par la définition de $I(u)$, on a

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \int_\Omega |u(x,t)|^p \log |u(x,t)| \, dx \\ &= \left(\frac{\mu}{p} \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \int_\Omega |u|^p \log \left(\frac{|u(x,t)|}{\|u(x,t)\|_p} \right) dx \right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\mu}{p} \right) \|\nabla u(x,t)\|_p^p - \int_\Omega |u(x,t)|^p \log \|u(x,t)\|_p \, dx, \end{aligned} \tag{2.24}$$

on pose $\mu = p$, et on applique l'inégalité logarithmique de sobolev (Lemme 2.1), on obtient

$$I(u) \geq \left(\frac{n}{p^2} \log \frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p} - \log \|u(x,t)\|_p \right) \|u(x,t)\|_p^p, \tag{2.25}$$

par (2.25) si $I(u) > 0$, alors

$$\log \|u(x,t)\|_p < \log \left(\frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{n}{p^2}},$$

ce signifie que

$$\|u(x,t)\|_p < \left(\frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{n}{p^2}} = R,$$

si $I(u) < 0$, par (2.25) on obtient

$$\|u(x,t)\|_p > \left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = R.$$

La propriété (3) est la même manière que la preuve de la propriété (2). ■

Lemme 2.9 [51] .*On introduit les ensembles suivants*

$$N = \{u \in X_0,\ I(u) = 0\}.$$

$$W^+ = \{u \in X_0,\ J(u) < d,\ I(u) > 0\},\ \ ,$$

où d est définie par

$$d = \inf_{u \in N} J(u).$$

2.3 Existence locale, globale et décroissance polynomiale

Dans cette section, on étudie l'existence locale et globale de solutions faibles, ensuite on va prouver la décroissance polynomiale de solutions.

2.3.1 Existence locale

Théorème 2.1 [51] .***(Existence locale)***
Soit $u_0 \in X_0$, alors il existe une constante positive T_0 telle que le problème (2.1) admet une solution faible locale $u(x,t)$ dans $\Omega \times (0;T_0)$. En outre, $u(x;t)$ satisfait l'inégalité suivante

$$\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds + J(u(t)) \leq J(u_0),\ \ \forall t \in [0,T).\tag{2.26}$$

Preuve. Pour montre notre résultat, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, alors dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors on prend une base $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ puis, on définit l'espace dimensionnel fini comme suite

$$V_m = span\{w_1, w_2, ...w_m\}.\tag{2.27}$$

Soit u_{0m} un élément de V_m tel que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}\omega_j \rightarrow \text{ u}_0 \text{ fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).\tag{2.28}$$

Comme $m \rightarrow +\infty$, on trouve l'approximation de solution $u_m(x,t)$ du problème (2.1) sous la forme

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(t)\omega_j(x).\tag{2.29}$$

Où les coefficients $\alpha_{mj}(1 \leq j \leq m)$ satisfont le système d' équations différentielles ordinaires suivantes

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_{mt}(x,t)\omega_j(x)dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m(x,t)|^{p-2} \nabla u_m(x,t)\right) \nabla \omega_j(x)dx \\ = \int_{\Omega} |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t) \log |u_m(x,t)| \omega_j(x)dx. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Où $j \in \{1, 2.., m\}$, avec la condition initiale

$$\alpha_{mj}(0) = a_{mj}, \quad j \in \{1, 2.., m\}. \tag{2.31}$$

Ensuite, on a besoin d'estimations du solutions approchés u_m, alors en multipliant (2.30) par α_{mj}, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \alpha_{mj}(t)u_{mt}(x,t)\omega_i(x)dx + \int_{\Omega} \alpha_{mj}(t) \left(|\nabla u_m(x,t)|^{p-2} \nabla u_m(x,t)\right) \nabla \omega_j(x)dx \\ = \int_{\Omega} \alpha_{mj}(t) |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t) \log |u_m(x,t)| \omega_j(x)dx, \end{aligned} \tag{2.32}$$

en prend la somme pour $j = 1, 2.., m$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_{mt}(x,t) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(t)\omega_j(x)dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m(x,t)|^{p-2} \nabla u_m(x,t)\right) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(t)\nabla\omega_j(x)dx \\ = \int_{\Omega} |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t) \log |u_m(x,t)| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(t)\omega_j(x)dx, \end{aligned} \tag{2.33}$$

cela implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(x,t)\|_p^p = \int_{\Omega} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx, \tag{2.34}$$

par l'utilisation de la remarque 2.2, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx &= \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx + \int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx \\ &\leq \frac{e^{-1}}{\varrho} \|u_m(x,t)\|_{p+\varrho}^{p+\varrho}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

où ϱ est choisi suffisamment petite telle que $p + \varrho < p^*, \varrho > 1, \Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| \leq 1\}$, et $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| > 1\}$.
En utilisant le lemme 2.3, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)| \, dx \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} \|\nabla u_m(x,t)\|_p^{\alpha(p+\varrho)} \|u_m(x,t)\|_2^{(1-\alpha)(p+\varrho)}, \tag{2.36}$$

on applique l'inégalité de Young

$$\int_\Omega |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)|\, dx \leq \varepsilon \left[\frac{\delta^\theta}{\theta} \|\nabla u_m(x,t)\|_p^{\alpha(p+\varrho)\theta} + \frac{\delta^{-\upsilon}}{\upsilon} \|u_m(x,t)\|_2^{(1-\alpha)(p+\varrho)\upsilon}\right], \tag{2.37}$$

Où $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\upsilon}=1$ et $\delta>0, \varepsilon=\frac{e^{-1}}{\varrho}$
alors, dans (2.37) on choisit que $\delta=1$, $\theta=\frac{p}{\alpha(p+\varrho)}$, $\upsilon=\frac{p}{p-\alpha(p+\varrho)}$, $\alpha\,(p+\varrho)<p$, on obtient

$$\int_\Omega |u_m(x,t)|^p \log |u_m(x,t)|\, dx \leq C_1 \|\nabla u_m(x,t)\|_p^p + C_2 \left(\|u_m(x,t)\|_2^2\right)^\gamma, \tag{2.38}$$

où $C_1=\frac{\alpha(p+\varrho)}{p}\varepsilon, C_2=\frac{p-\alpha(p+\varrho)}{p}\varepsilon$, $\gamma=\frac{p(1-\alpha)(p+\varrho)}{2[p-\alpha(p+\varrho)]}$ et α définit par (2.7) dans le lemme 2.3.
Combinant (2.34), (2.38), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 \leq C_2\left(\|u_m(x,t)\|_2^2\right)^\gamma, \tag{2.39}$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall-Bellman- Bihari (voir [7]), il existe une constante $T_0>0$, telle que pour tous $t\in[0,T_0]$, on obtient

$$\|u_m(x,t)\|_2^2 \leq C_{T_0}, \quad \forall t\in[0,T_0]. \tag{2.40}$$

Maintenant, on multiplie les deux côtés de (2.30) par $\alpha'_{mi}(t)$ puis, nous prenons la somme $j=1,2..,m$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{mt}(x,t)\sum_{j=1}^m \alpha'_{mj}(t)w_j(x)dx + \int_\Omega |\nabla u_m(x,t)|^{p-2}\nabla u(x,t)\sum_{j=1}^m \alpha'_{mj}(t)\nabla w_j(x)dx \\
= &\int_\Omega |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t)\log|u_m(x,t)|\sum_{j=1}^m \alpha'_{jm}(t)w_j(x)dx,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

de (2.29), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_{mt}(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_m(x,t)|^{p-2}\nabla u_m(x,t)\nabla u_{mt}(x,t)dx \\
= &\int_\Omega |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t)u_{mt}(x,t)\log|u_m(x,t)|\, dx,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

cela implique

$$\|u_{mt}(x,t)\|_2^2 + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p}\|\nabla u_m(x,t)\|_p^p + \frac{1}{p^2}\|u_m(x,t)\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_m|^p(x,t)\log|u_m(x,t)|\,dx\right] = 0,$$

et par (2.13), on a

$$\|u_{mt}(x,t)\|_2^2 + \frac{d}{dt}J(u_m(x,t)) = 0, \tag{2.43}$$

en intégrant (2.42) par rapport à t sur $[0, t]$, on obtient l'égalité suivante

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds + J(u_m(t)) = J(u_m(0)), \quad 0 \leq t \leq T_m, \tag{2.44}$$

d'après (2.28) qu'il existe une constante positive C telle que

$$J(u_m(0)) \leq \beta, \text{ pour tous } m, \tag{2.45}$$

par La définition de $J(u_m(t))$ et les inégalités (2.38) et (2.40), on a

$$J(u_m(t)) \geq \frac{1 - C_1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{p} (C_{T_0})^\gamma,$$

de (2.43), on a

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds \leq \frac{C_1 - 1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \frac{1}{p} (C_{T_0})^\gamma, \tag{2.46}$$

de (2.40) et (2.45), on déduit

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(0,T_0,W_0^{1,p})} \leq C', \tag{2.47}$$

et

$$\|u_{mt}\|_{L^2(0,T_0,L^2(\Omega))} \leq C'', \tag{2.48}$$

En combinant les estimations a priori (2.46) et (2.47), on vu qu'il existe une fonction u et une sous-séquence de $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, telle que

$$u_m \rightarrow u \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T_0, W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{2.49}$$

$$u_{mt} \rightarrow u_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T_0, L^2(\Omega)). \tag{2.50}$$

$$|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \rightarrow \chi \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T_0, W_0^{-1,q}(\Omega)). \tag{2.51}$$

Depuis (2.48) et (2.49), on déduit

$$u_m \rightarrow u \text{ fortement dans } C([0, T_0]; L^r(\Omega)), \ \forall r \in [2, p^*). \tag{2.52}$$

Clairement, cela implique

$$|u_m(t)|^p \log |u_m(t)| \rightarrow |u(t)|^p \log |u(t)|, \ \forall (x,t) \in \Omega \times (0, T_0). \tag{2.53}$$

Par contre, par un calcule direct, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\rho_m(x,t)|^p \, dx &= \int_{\Omega_1} |\rho_m(x,t)|^p \, dx + \int_{\Omega_2} |\rho_m(x,t)|^p \, dx \\ &\leq k_1 |\Omega| + k_2 \int_\Omega |u_m(t)|^p \, dx \\ &\leq k_1 |\Omega| + k_2 B_p \|u_m(t)\|_p^q \leq C_{T_0}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

où $q \in [p, p^*]$, $\rho_m(x,t) = |u_m(t)|^{p-1} \log |u_m(t)|$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| > 1\}$,et B_p est la meilleure constante de l'injection de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,(voir le lemme 2.2) k_1,k_2 deux constante positives.
Par conséquent, selon le Lemme de Lion [24, Lemme 1.3, p. 12], il résulte de (2.51) et (2.53) que

$$|u_m(t)|^p \log |u_m(t)| \to |u(t)|^p \log |u(t)| \text{ Faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T_0 L^2(\Omega)). \tag{2.55}$$

On passe la limite en (2.29) et (2.30) comme $m \to +\infty$, par (2.48)-(2.50) et (2.54), on peux montrer que u satisfait la condition initiale $u(0) = u_0$ et

$$\int_\Omega u_t(t)\omega dx + \int_\Omega \varkappa(t)\nabla\omega dx = \int_\Omega |u(t)|^p \log |u(t)| \, \omega dx, \tag{2.56}$$

pour tout $\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour presque tous $t \in [0, T_0]$. Enfin, par la théorie des opérateurs monotones

$$\varkappa(t) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u,$$

cela implique que la fonction u est une solution exacte du problème (2.1).
Maintenant, on montre que la solution u satisfait l'inégalité énergétique (2.26). Pour cela, soit θ la fonction non-négative qui appartient à $C([0,T])$.
Ensuite, (2.42) découle

$$\int_0^{T_0} \theta(t)dt \int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds + \int_0^{T_0} J(u_m(t))\theta(t)dt = \int_0^{T_0} J(u_m(0))\theta(t)dt, \tag{2.57}$$

la côté droit de (2.56) converge vers $\int_0^{T_0} J(u(0))\theta(t)dt$ comme $m \to \infty$.
Par conséquent

$$\int_0^{T_0} J(u(t))\theta(t)dt \leq \lim_{m\to+\infty} \inf \int_0^{T_0} J(u_m(t))\theta(t)dt.$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_0^{T_0} \theta(t)dt \int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds + \int_0^{T_0} J(u_m(t))\theta(t)dt \leq \int_0^{T_0} J(u_0)\theta(t)dt.$$

Puisque θ est arbitraire, on obtient l'inégalité énergétique suivante

$$\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad \forall t \in [0,T] .$$

■

2.3.2 Existence globale

Théorème 2.2 [51] .*Soit* $u_0 \in W^+, 0 < J(u_0) < M$ *alors, le problème (2.1) admet une solution globale faible* $u(x,t)$, *telle que*

$$u(t) \in \overline{W^+}, \text{ pour } 0 \leq t < \infty,$$

et satisfait l'estimation énergétique suivante

$$\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad \forall t \in [t, T_0). \tag{2.58}$$

Preuve. Il suffit de montrer que $\|\nabla u\|_p^p$ et $\|u\|_p^p$ sont bornés indépendants de t.
Soit la série $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{u_{0m}\}_{m=1}^{\infty}$, et $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, ceux les mêmes que énoncés dans la preuve du théorème 2.1.
en multipliant les deux côtés de (2.30) par $\alpha'_{mi}(t)$ puis, on fait la somme, on obtient

$$\|u_{mt}(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt} J(u_m(t)) = 0, \tag{2.59}$$

en intégrant (2.58) par rapport à t sur $[0, t]$, on obtient l'égalité suivante

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds + J(u_m(t)) = J(u_m(0)), \quad 0 \leq t \leq T_m, \tag{2.60}$$

où T_m est le temps d'existence maximal de la solution $u_{mt}(x,t)$.
Il résulte de (2.28), (2.31), (2.59) et de la continuité de J

$$J(u_m(0)) \to J(u_0), \text{ où } m \to +\infty, \tag{2.61}$$

avec $J(u_0) < d$ et

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds + J(u_m(t)) < d, \; 0 \leq t \leq T_m, \tag{2.62}$$

pour m suffisamment grand. On va montrer que

$$u_m(t) \in W^+, \; \forall t \geq 0, \tag{2.63}$$

pour m suffisamment grand. En effet, supposons que (2.62) ne pas vrai, soit t_* le plus petit temps pour lequel $u_m(t_*) \notin W^+$. Ensuite, par la continuité de $u_m(t_*) \in \partial W^+$, on a

$$J(u_m(t_*)) = d, \tag{2.64}$$

ou

$$I(u_m(t_*)) = 0, \tag{2.65}$$

d'aute part, il est clair que (2.64) ne pourrait pas apparaître avec (2.62) donc, si (2.64) soit vrai. Alors, par la définition de d, on a

$$J(u_m(t_*)) \geq \inf_{u\in N} J(u) = d, \tag{2.66}$$

qui contredit avec (2.62). Par conséquent, on posséde (2.63).
d'autre part , puisque $u_m(t) \in W^+$, et

$$J(u_m(t)) = \frac{1}{p} I(u_m(t)) + \frac{1}{p^2} \|u_m(t)\|_p^p, \ \forall t \in [0, T_m),$$

de (2.62), on déduit que

$$\|u_m(t)\|_p^p < p^2 d, \tag{2.67}$$

et

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_2^2 \, ds < d, \tag{2.68}$$

pour m suffisamment grand et $t \in [0, T_m)$. En outre, par l'inégalité logarithmique de sobolev, on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_m(t)\|_p^p &= pJ(u_m(t)) + \int_\Omega |u_m|^p (t) \log |u_m(t)| \, dx - \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p \\
&\leq pJ(u_m(0)) + \int_\Omega |u_m|^p (t) \left(\frac{\log |u_m(t)| \, dx}{\|u_m(t)\|_p} + \log \|u_m(t)\|_p \right) dx \\
&\leq pJ(u_m(0)) + \frac{\mu}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{n}{p^2} \log \left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p} \right) \|u_m(t)\|_p^p \\
&\quad + \|u_m(t)\|_p^p \log \|u_m(t)\|_p,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

cela implique

$$\left(\frac{p-\mu}{p} \right) \|\nabla u_m(t)\|_p^p \leq pJ(u_m(0)) + \|u_m(t)\|_p^p \log \|u_m(t)\|_p - \frac{n}{p^2} \log \left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p} \right) \|u_m(t)\|_p^p \tag{2.70}$$

En prenant $\mu < p$, on déduit que

$$\|\nabla u_m(t)\|_p^p \leq C_d, \quad \forall t \in [0, T_m). \tag{2.71}$$

■

2.3.3 Décroissance polynomiale

Théorème 2.3 [51] *.Soient $I(u) > 0, 0 < J(u_0) < M$, alors la solution $u(x,t)$ du problème (2.1) est décroit polynomiale donnée par*

$$\|u\|_2 \leq \|u_0\|_2 \left(\frac{p}{2\left(1 + \zeta\left(p-2\right)t\right)} \right)^{\frac{1}{p-2}}, \ t \geq 0, \tag{2.72}$$

où $\zeta = \frac{1}{p} \log \frac{\alpha}{J(u_0)}$ et $\alpha = \frac{\left(\frac{p^2}{nL_p}\right)^{\frac{n}{p^2}}}{p^2}$.

Preuve. On définit

$$M(t) = \frac{1}{2} \|u\|_2^2, \tag{2.73}$$

on dérive M par apport à t, on obtient

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_\Omega u_t u dx = \int_\Omega \left(|u|^{p-2} u \log |u| - \oint |u|^{p-2} u \log |u| \, dx \right) u dx + \|\nabla u\|_p^p \\ & \int_\Omega |u|^p \log |u| \, dx + \|\nabla u\|_p^p, \\ &= -I(u), \end{aligned} \tag{2.74}$$

on utilise l'effait que $I(u) > 0$, et l'inégalité énergétique (2.13), on obtient

$$\|u\|_p^p \leq p^2 J(u) \leq p^2 J(u_0). \tag{2.75}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev logarithmique qui présente dans le lemme 2.1, on met $\mu = p$, on a

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \left(\frac{n}{p^2} \log \left(\frac{p^2 e}{n L_p} \right) - \log \|u\|_p \right) \|u\|_p^p \\ &\geq \left(\log \left(\frac{p^2}{n L_p} \right)^{\frac{n}{p^2}} - p \log p^2 J(u_0) \right) \|u\|_p^p \\ &= \frac{1}{p} \left[\log \frac{\left(\frac{p^2}{n L_p} \right)^{\frac{n}{p}}}{p^2 J(u_0)} \right] \|u\|_p^p \\ &\geq l_{2,p}^p \left[\log \frac{\left(\frac{p^2}{n L_p} \right)^{\frac{n}{p^2}}}{p^2 J(u_0)} \right] \|u\|_2^p \\ &\geq \zeta \|u\|_2^p, \end{aligned} \tag{2.76}$$

où $\zeta = l_{2,p}^p \log \frac{R}{J(u_0)}$,et $l_{2,p}^p$ est une constante d'injection $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $p > 2$.
D'aprés (2.73), on a

$$\begin{aligned} \int_t^T I(u(s)) ds &= -\int_t^T \int_\Omega u_s(s) u(s) dx ds \\ &= -\frac{1}{2} \|u(T)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Par conséquent, (2.75) et (2.76), on résulte

$$\int_t^T \|u(t)\|_2^p \, ds \leq \frac{1}{2\zeta} \|u(t)\|_2^2 , \ \forall t \in [0,T) . \tag{2.78}$$

Soit $T \to +\infty$, on applique le lemme 2.5, tels que $f(t) = \|u(t)\|_2^2$, $\sigma = \frac{p-2}{2}$, $f^\sigma(0) = 1, \omega = 2\zeta$ on obtient l'estimation décroissance polynomiale suivante

$$\|u\|_2 \leq C \left(\frac{p}{2\left(1 + \zeta\left(p-2\right)t\right)} \right)^{\frac{1}{p-2}} , \quad t \geq 0. \tag{2.79}$$

où C est une constante positive. ■

2.4 Explosion de la solutions faibles

2.4.1 Explosion à $+\infty$

Lemme 2.10 [51] .*Soit $H(u) = E_1 - J(u), J(u_0) < E_1$, alors $H(u)$ est satisfait l'estimation suivante*

$$0 < H(u_0) \leq H(u). \tag{2.80}$$

Preuve. Il est évident que $H(u)$ est non croissante en t, par (2.13), et $J(u_0) < E_1$ que

$$H(u) \geq H(u_0) = E_1 - J(u_0) > 0.$$

■

Théorème 2.4 *Supposons que $J(u_0) < 0$, alors la solution $u(x,t)$ du problème (2.1) est une explosion à $+\infty$. De plus, si $\|u_0\|_2 \leq \left(\frac{-pJ(u_0)}{l_{2,p}}\right)^{\frac{1}{p}}$, alors, on a l'estimation suivante*

$$\|u\|_2^2 \geq \|u_0\|_2^2 , \tag{2.81}$$

qui est indépendant de t.

Preuve. Par la définition de $J(u)$, $M(t)$ satisfait

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx \\ &= -\|\nabla u(x,t)\|_p^p + \int_\Omega \left(|u(x,t)|^{p-2} \log|u(x,t)| - \oint |u(x,t)|^{p-2} \log|u(x,t)|\, dx \right) u^2(x,t)dx \\ &= -\|\nabla u(x,t)\|_p^p + \int_\Omega |u(x,t)|^p \log|u(x,t)|\, dx \\ &= -pJ(u) + \frac{1}{p}\|u(x,t)\|_p^p \\ &\geq -pJ(u), \end{aligned} \tag{2.82}$$

on utilise la formule (2.26) qui présente dans le théorème 2.1, et la condition $J(u_0) < 0$, on a

$$-pJ(u) \geq p \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds, \tag{2.83}$$

de (2.81) et (2.82), on obtient

$$M'(t) \geq p \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds. \tag{2.84}$$

Par la définition de la solution faible, on sais que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pour tous $t_0 > 0$,
on déduit que

$$\int_0^{t_0} \|u_s\|_2^2 \, ds > 0, \tag{2.85}$$

par ailleurs, il existe $t_0 > 0$ tel que $\int_0^{t_0} \|u_s\|_2^2 \, ds = 0$, donc $u_t = 0$ pour tous $u(x,t) \in \Omega \times (0, t_0)$.
Ensuite, on résulte que

$$-|\nabla u|^p + |u|^p \log |u| = 0,$$

pour tous $t \in (0, t_0)$, puis de (2.13) on obtient

$$J(u) = \frac{1}{p^2} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

En combinant avec $J(u) \leq J(u_0) \leq 0$, on obtient $\| u\|_p = 0$, pour tous $t \in [0, t_0]$, qui contredit avec la définition de u.
On Fixe $t_0 > 0$ et soit $\delta = \int_0^t \| u\|_2^2 \, ds$.
Integrant (2.83) sur (t_0, t), on obtient

$$M(t) \geq M(t_0) + p \int_{t_0}^t \int_0^t \| u(s)\|_2^2 \, ds d\tau \geq M(t_0) + p \int_{t_0}^t \delta d\tau \geq \delta \, (t - t_0). \tag{2.86}$$

On a

$$\begin{aligned} H'(t) &= -J'(u) \\ &= \| u_t(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

où $H(t)$ définit dans le lemme 2.9
Par conséquent

$$\lim_{t \to \infty} H'(t) = \lim_{t \to \infty} M(t) = \infty, \tag{2.87}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} M'(t) &= -pJ(u) + \frac{1}{p} \|u\|_p^p \\ &\geq -pJ(u_0) + \frac{1}{p} \|u\|_p^p, \end{aligned} \tag{2.88}$$

on a

$$\begin{aligned} M^{'}(t)+l_{2,p}M^{\frac{p}{2}}(t) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_p^p - pJ(u_0)+l_{2,p}M^{\frac{p}{2}}(t) \\ &\geq -pJ(u_0), \end{aligned} \tag{2.89}$$

On utilise le lemme 2.4, $J(u_0)<0$, et $\|u_0\|_2^2 \leq \left(\frac{-pJ(u0)}{l_{2,p}}\right)^{\frac{2}{p}}$, on obtient

$$\begin{aligned} M(t) &\geq \min\left\{\|u_0\|_2^2, \left(\frac{-pJ(u0)}{l_{2,p}}\right)^{\frac{2}{p}}\right\} \\ &\geq \|u_0\|_2^2, \end{aligned}$$

on result que

$$\|u\|_2^2 \geq \|u_0\|_2^2.$$

■

2.4.2 Explose en temps fini

Lemme 2.11 [14] *.Soit ϕ est une fonction différentiable positive, satisfait les conditions suivantes*

$$\phi(\bar{t})>0, \text{ et } \phi^{'}(\bar{t})>0,$$

pour certain $\bar{t}\in[0,T)$, et l'inégalité

$$\phi(t)\phi^{''}(t)-\alpha(\phi^{'}(t))^2 \geq 0, \quad \forall t\in\left[\bar{t},T\right], \tag{2.90}$$

où $\alpha>1$.

Ensuite, nous avons

$$\phi(t)\geq\left(\frac{1}{\phi^{1-\alpha}(\bar{t})-\sigma(t-\bar{t})}\right), \quad t\in\left[\bar{t},T^{*}\right).$$

avec σ est une constante positive, et

$$T^{*}=\bar{t}+\frac{\phi(t)}{(\alpha-1)\phi^{'}(\bar{t})}.$$

cela implique

$$\lim_{t\to T^{*}}\phi(t)=\infty.$$

Théorème 2.5 [51] *.supposons que $0<J(u_0)<M$ et $I(u)<0$, alors la solution $u(x,t)$ de probléme (2.1) est **Explose en temps fini** T^{*}, définit par*

$$T^{*}=\bar{t}+\frac{\int_0^t\|u(s)\|_2^2\,ds}{(\frac{p-2}{2})\left\|u(\bar{t})\right\|_2^2}, \quad s\in\left[\bar{t},T^{*}\right).$$

Preuve. On définit la fonctionnelle suivante

$$\Gamma(t) = \int_0^t \|u(s)\|_2^2 \, ds. \tag{2.91}$$

Alors, on a

$$\Gamma^{'}(t) = \|u(t)\|_2^2 \,, \tag{2.92}$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma^{''}(t) &= 2\int_\Omega u_t u dx \\
&= -2\|\nabla u(t)\|_p^p + 2\int_\Omega |u|^p \log|u| \, dx \\
&= -2pJ(u) + \frac{2}{p}\|u(t)\|_p^p \,,
\end{aligned} \tag{2.93}$$

on utilise l'inégalité (2.26) qui représente dans le théorème 2. 1, on trouve

$$-2pJ(u) \geq -2pJ(u_0) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds, \tag{2.94}$$

par l'utilisation de lemme 2.8 dans le cas de $I(u) < 0$,
ce implique que

$$\|u(t)\|_p^p \geq R, \tag{2.95}$$

par (2.93) et (2.94), on a

$$\begin{aligned}
\Gamma^{''}(t) &\geq -2pJ(u_0) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds + \frac{2}{p}\|u(t)\|_p^p \\
&= 2p\left(\frac{1}{p^2}\|u(t)\|_p^p - J(u_0)\right) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds \\
&\geq 2p\left(M - J(u_0)\right) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds,
\end{aligned} \tag{2.96}$$

où $M = \frac{R}{p^2}$.
D'autre part, on a

$$\Gamma^{'}(t) = \Gamma^{'}(0) + \int_0^t \Gamma^{''}(s) ds \geq 2p\left(M - J(u_0)\right) t \geq 0, \quad t \in [0, t]\,, \tag{2.97}$$

aussi, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\Gamma^{'}(t)\right)^2 &\leq \left(\int_0^t \int_\Omega u_s(s) u(s) dx ds\right)^2 \\
&\leq \int_0^t \|u(s)\|_2^2 \, ds \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds,
\end{aligned} \tag{2.98}$$

maintenant, en multipliant (2.95) par $\Gamma(t)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma^{''}(t)\Gamma(t) &\geq 2p\left(M - J(u_0)\right)\Gamma(t) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds\Gamma(t) \\ &= 2p\left(M - J(u_0)\right)\Gamma(t) + 2p\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds \int_0^t \|u(s)\|_2^2\, ds, \end{aligned} \tag{2.99}$$

en utilisant (2.97) en (2.98), on obtient

$$\Gamma^{''}(t)\Gamma(t) \geq 2p\left(M - J(u_0)\right)\Gamma(t) + \frac{p}{2}\left(\Gamma^{'}(t)\right)^2, \; for\ all\ t \in [0, T]. \tag{2.100}$$

alors

$$\Gamma^{''}(t)\Gamma(t) - \frac{p}{2}\left(\Gamma^{'}(t)\right)^2 \geq 2p\left(M - J(u_0)\right)\Gamma(t), \;\; for\ all\ t \in [0, T]. \tag{2.101}$$

On vertu du lemme 2.10, où $\alpha = \frac{p}{2} > 1$,et $\phi(t) = \Gamma(t)$, on obtient
il existe $T_* > 0$, tel que

$$\lim_{t \to T_*^-} \Gamma(t) = +\infty,$$

ce qui implique

$$\lim_{t \to T_*^-} \int_0^t \|u(s)\|_2^2\, ds = +\infty,$$

par conséquent, on conclut

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_2^2 = +\infty.$$

■

Chapitre 3

Stabilité exponentielle et l'explosion d'équation des ondes de type Kelvin voigt avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et conditions aux limites d'acoustique

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème avec conditions aux limites d'acoustique suivantes

$$\begin{cases} |u_t|^m u_{tt} - \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma \int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx\right) \Delta u - 2\lambda \Delta u_t = 0 & \text{in } \Omega. \\ u = 0 & \text{in } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma \int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx\right) \frac{\partial u}{\partial v} + 2\lambda \frac{\partial u_t}{\partial v} = y_t & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_t + p(x) y_t + q(x) y = 0 & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = v_0,\ u_t(0) = u_1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ a composé de deux parties Γ_0 et Γ_1 tel que $\overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} = \Gamma$.Tous les paramètres a, b, $\sigma > 0$, et p, q sont des fonctions satisfaites

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0 \ \text{ pour tous } x \in \Gamma_1. \tag{3.2}$$

Physiquement, les équations intégro-différentielles du problème (3.1) ont étudié les vibrations de structures d'espace flexibles amorties dans un domaine délimité dans $\mathbb{R}^n$. Le terme non linéaire $|u_t|^m u_{tt}$, $m > 0$, il est exprimé des matériaux dont la densité dépend de la vitesse u_t, Le terme $2\lambda \Delta u_t$ est l'amortissement interne des matériaux de la structure de type Kelvin-Voigt ou appelé aussi un matériel Voigt, est un matériau viscoélastique contient les deux propriétés d'élasticité et de viscosité.

Ce chapitre a composé de deux partie, la première partie est étudiée la stabilité exponentielle et la deuxième est étudiée l'explosion en temps fini sous quelques hypothèses.
Ce mon travail aussi, c'est un article publié dans un respectable journal international de **classe B** en **2020**, voir [50] .

3.1 Préliminaires

Dans cette section, on présente quelques notations et quelques lemmes que on a besoin pour montrer notre résultat.

On définit le sous-espace V de l'espace classique de Sobolev $H^1(\Omega)$, par

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0, \text{ on } \Gamma_0 \right\},$$

on suppose que

$$m \text{ satisfait } 1 < m < \frac{n}{n-2}, \text{ si } n \geq 3, \tag{3.3}$$

puis

$$V \hookrightarrow L^{m+2}(\Omega).$$

Lemme 3.1 [26] *.Il existe une constante positive K telle que*

$$\|u\|_{m+2} \leq K \|\nabla u\|_2 . \tag{3.4}$$

Lemme 3.2 [26] *.Pour les fonctions p et q, nous supposons que $p, q \in C(\Gamma_1)$, $p(x) > 0$ et $q(x) > 0$, pour tous $x \in \Gamma_1$. Cette hypothèse implique qu'il existe des constantes positives p_i, q_i $(i = 0; 1)$, telles que*

$$p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad q_0 \leq q(x) \leq q_1, \quad \text{pour tous } x \in \Gamma_1. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1 [26] *.Pour les données initiales $(u_0, u_1, y_0) \in (V \cap H^2(\Omega)) \times V \times L^2(\Gamma_1)$, il existe une fonction unique $(u; y)$, est une solution du problème (3.1) de classe*

$$\begin{aligned} u \in L^\infty(0, T; V \times H^2(\Omega)), \ u_t \in L^\infty(0, T; V) \\ u_{tt} \in L^\infty(0, T; \times L^2(\Omega)), y, y_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2 Stabilité exponentielle

Dans cette section nous allons démontrer la décroissance exponentielle de solutions du problème (3.1)-(3.6).

Nous définissons l'énergie du problème (3.1) par

$$E(t) = \frac{1}{m+2}\|u_t(x,t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2\right)\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(t))^2 d\Gamma. \quad (3.7)$$

Lemme 3.3 [26] .*$E(t)$ est uniformément bornée par $E(0)$ et*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(x,t)\|_2^2\right)^2 - 2\lambda\|\nabla u_t(x,t)\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)\,(y_t(t))^2\, d\Gamma \leq 0,\ t > 0 \quad (3.8)$$

Preuve. En multipliant l'équation $(3.1)_1$ par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |u_t|^m u_t u_{tt} dx = \int_\Omega \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma\int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx\right)\Delta u u_t dx + 2\lambda\int_\Omega \Delta u_t u_t dx. \quad (3.9)$$

On remarque que

$$\int_\Omega |u_t|^m u_t u_{tt} dx = \frac{1}{m+2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_{m+2}^{m+2},$$

puis, on applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{a^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4 - \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma\right] \\ = &-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 - 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} y_t u_t d\Gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent, on utilise les conditions aux limites $(3.1)_3$ et $(3.1)_4$, il est facile que voir

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{a^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|^4 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma\right] \\ = &-\frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 - 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)\,(y_t)^2\, d\Gamma. \end{aligned}$$

Cela implique

$$E(t) \leq E(0),\ t > 0.$$

■

Lemme 3.4 [26] .*Pour chaque solution $u(x;t)$ du système (3.1), le temps dérivé de la fonction définit par*

$$\Psi(t) = \frac{1}{m+1}\int_\Omega |u_t|^m u_t u dx + \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\sigma}{4}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} p(x)y^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} uy d\Gamma, \quad (3.10)$$

satisfait

$$\Psi'(t) \leq \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - 2\int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma - a^2\|\nabla u\|_2^2 - b\|\nabla u\|_2^4 + \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2. \tag{3.11}$$

Preuve. Dérivant (3.10) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \int_\Omega |u_t|^m u_{tt} u dx + \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + 2\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx + \frac{\sigma}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\\ &\quad + \int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u_t y d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p(x)y_t y d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.12}$$

on remplace $\int_\Omega |u_t|^m u_{tt} u dx$ par l'équation $(3.1)_1$ puis, on applique la formule de Green et les conditions aux limites $(3.1)_3$ et $(3.1)_4$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_t|^m u_{tt} u dx &= -\left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\sigma}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right) - 2\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx\\ &\quad + \int_{\Gamma_1}\left\{\left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2 + \sigma\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx\right)\frac{\partial u}{\partial \nu} + 2\lambda\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right\} u d\Gamma\\ &= -\left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\sigma}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\\ &\quad + \int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma - 2\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

On remplace (3.13) en (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - \left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 + 2\int_{\Gamma_1} u_t y d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(u_t + p(x)y_t)\, y\\ &= \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - \left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 + 2\int_{\Gamma_1} u_t y d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma\\ &\leq \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - \left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 + 2\int_{\Gamma_1} u_t y d\Gamma\\ &\quad - \int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma + \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2. \end{aligned}$$

■

Maintenant, on définit la fonctionnelle suivante

$$V(t) = E(t) + \varepsilon\Psi(t). \tag{3.14}$$

Proposition 3.1 [26] *.Il existe deux constantes positives M_1, M_2, telles que*

$$(1 - \varepsilon M_1)\, E(t) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon M_2)\, E(t),\ \forall t \geq 0, \tag{3.15}$$

où

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{M_1}.$$

Preuve. On a

$$E(t) - \varepsilon |\Psi(t)| \leq V(t) \leq E(t) + \varepsilon |\Psi(t)|. \tag{3.16}$$

On estime le premier terme de $\Psi(t)$

$$\left|\frac{1}{m+1}\int_\Omega |u_t|^m u_t u dx\right| \leq \frac{1}{m+1}\int_\Omega |u_t|^{m+1}|u|\, dx, \tag{3.17}$$

on utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\frac{1}{m+1}\int_\Omega |u_t|^m u_t u dx\right| \leq \frac{1}{m+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{(m+1)\theta} dx\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\int_\Omega |u|^{\upsilon} dx\right)^{\frac{1}{\upsilon}},$$

On choisit $\theta = \frac{m+2}{m+1}$, on obtient $\upsilon = m+2$, on trouve

$$\left|\frac{1}{m+1}\int_\Omega |u_t|^m u_t u dx\right| \leq \frac{1}{m+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{m+2} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} . \left(\int_\Omega |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}}, \tag{3.18}$$

on applique aussi l'inégalité de Yong, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{m+2} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} . \left(\int_\Omega |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}} \quad &\leq \quad \frac{\delta^\theta}{\theta(m+1)}\left(\int_\Omega |u_t|^{m+2} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}\theta} \\ &+ \frac{\delta^{-\upsilon}}{\upsilon(m+1)}\left(\int_\Omega |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}\upsilon},\end{aligned}$$

pour δ ets une constatne positive et $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\upsilon} = 1$
On choisit $\delta = 1$ et $\theta = \frac{m+2}{m+1}$, on obtient $\upsilon = m+2$, alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{m+1} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} . \left(\int_\Omega |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}} \\ \leq\ & \frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}\|u\|_{m+2}^{m+2} \\ \leq\ & \frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{K^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

On utilise la définition énergétique (3.7), on obtient

$$\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}\|u\|_{m+2}^{m+2} \leq \left[1 + \frac{K^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{2E(0)}{a^2}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{a^2}\right]E(t), \tag{3.20}$$

on remplace les dernières inégalités en (3.18), on conclut que

$$\left|\frac{1}{m+1}\int_{\Omega}|u_t|^m u_t u dx\right| \leq \left[1+\frac{K^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{2E(0)}{a^2}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{a^2}\right]E(t). \tag{3.21}$$

Ensuite, on a les estimations suivantes

$$0 \leq \lambda \int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx \leq \frac{2\lambda}{a^2}E(t), \tag{3.22}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} uyd\Gamma\right| &\leq \int_{\Gamma_1}\frac{1}{2q(x)}|u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{\overline{k}}{2q_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma \\ &\leq \left(\frac{\overline{k}}{2q_0}+1\right)E(t), \end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} p(x)y^2 d\Gamma &\leq \frac{p_1}{2q_0}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{p_1}{2q_0}E(t), \end{aligned} \tag{3.24}$$

aussi

$$\frac{\sigma}{4}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)^2 \leq \frac{\sigma}{b}E(t). \tag{3.25}$$

Par les inégalités (3.21)-(3.25), on déduit que

$$(1-\varepsilon M_1)E(t) \leq V(t) \leq (1+\varepsilon M_2)E(t), \ \forall t \geq 0,$$

telles que

$$M_1 = 2 + \frac{K^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{2E(0)}{a^2}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{a^2} + \frac{\overline{k}}{a^2 q_0},$$

et

$$M_2 = 2 + \frac{K^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{2E(0)}{a^2}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{a^2} + \frac{\overline{k}}{a^2 q_0} + \frac{p_1}{q_0} + \frac{\sigma}{b} + \frac{2\lambda}{a^2},$$

où

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{M_1}.$$

■

Théorème 3.2 [26] *.Soit $u(x;t)$ la solution régulière du système (3.1) avec des valeurs initiales $(u_0, u_1, y_0) \in (V \cap H^2(\Omega)) \times V \times L^2(\Gamma_1)$ alors, l'énergie $E(t)$ du système définit par (3.1) est satisfaite*

$$E(t) < Me^{-\mu t}E(0), \text{ pour } t \in (0, \infty), \tag{3.26}$$

pour certaines constantes réelles $M > 1$ et $\mu > 0$.

Preuve. Dérivant $V(t)$ par apport à t, puis on utilise les formules (3.8) et (3.11), on obtient

$$\begin{aligned} V_t(t) \leq\ & \frac{\varepsilon}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - \varepsilon\left(a^2 + b\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 - 2\varepsilon\int_{\Gamma_1} u y_t d\Gamma - \varepsilon\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma \\ & -\sigma\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 - 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.27}$$

on a

$$\begin{aligned} \left|2\varepsilon\int_{\Gamma_1} u y_t d\Gamma\right| &\leq \int_{\Gamma_1} p(x) y_t^2 d\Gamma + \varepsilon^2\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u^2 d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_1} p(x) y_t^2 d\Gamma + \frac{\varepsilon^2}{p_0}\overline{k}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_1} p(x) y_t^2 d\Gamma + \frac{\varepsilon^2}{p_0 a^2}\overline{k}E(t), \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ensuite, de (3.7), on a

$$-a^2\|\nabla u\|_2^2 = -2E(t) + \frac{2}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma, \tag{3.29}$$

on remplace (3.28) et (3.29) dans (3.27), on obtient

$$\begin{aligned} V_t(t) \leq\ & \frac{\varepsilon(3m+4)}{(m+1)(m+2)}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 \\ & -2\varepsilon\left(1-\frac{\overline{k}\varepsilon}{p_0 a^2}\right)E(t) - \sigma\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Par la définition énergétique (3.7), on a

$$\|u_t\|_{m+2}^{m+2} \leq (m+2)E(0),$$

on choisit

$$0 < \varepsilon_0 \leq \frac{2\lambda(m+1)\|\nabla u_t\|_2^2}{(3m+4)E(0)}, \tag{3.31}$$

et

$$-2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 + \varepsilon_0\frac{(3m+4)}{(m+1)(m+2)}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} < 0, \tag{3.32}$$

ensuite, par (3.31) et (3.32), on peut choisir ε assez petite constante satisfait

$$0 < \varepsilon < \min\left(4, \frac{a^2 p_0}{\overline{k}}, \varepsilon_0\right). \tag{3.33}$$

De (3.30) et (3.33), on obtient

$$V_t(t) < -2\varepsilon\left(1 - \frac{\overline{k}\varepsilon}{p_0 a^2}\right) E(t), \ \forall t > 0, \tag{3.34}$$

on suppose que

$$0 < \varepsilon < \min\left(4, \frac{1}{M}, \frac{a^2 p_0}{\overline{k}}, \varepsilon_0\right), \tag{3.35}$$

par la proposition 3.1 et (3.34), on déduit

$$V_t(t) < \mu V(t), \ \ \forall t > 0, \tag{3.36}$$

où

$$\mu = \frac{2\varepsilon\left(a^2 p_0 - \varepsilon\overline{k}\right)}{a^2 p_0\left(1 + \varepsilon M_2\right)}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.37}$$

Il est facile de voir que la relation (3,36) implique

$$V(t) < V(0)e^{-\mu t}, \tag{3.38}$$

on résulte que

$$E(t) \leq M e^{-\mu t} E(0), \tag{3.39}$$

où

$$M = \frac{1 + \varepsilon M_2}{1 - \varepsilon M_1} > 1. \tag{3.40}$$

■

3.3 Phénomène d'explosion en temps fini

Dans cette section on considére la propriété d'explosion de la solution du problème (3.1), pour obtenir notre résultat, on ajoute le terme source $|u|^{p-2} u$, alors le problème s'écrit comme suit

$$\begin{cases} |u_t|^m u_{tt} = \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma\int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx\right)\Delta u + 2\lambda\Delta u_t + |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega. \\ u = 0 & \text{in } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \left(a^2 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \sigma\int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx\right)\frac{\partial u}{\partial v} + 2\lambda\frac{\partial u_t}{\partial v} = y_t & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_t + p(x)y_t + q(x)y = 0 & \text{in } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = v_0, \ u_t(0) = u_1 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.41}$$

Notre technique de preuve est basée sur une méthode directe utilisée par plusieurs auteurs comme Salim A.Messaoudi, en 2001, 2003(on revenant au références [8, 9]) avec quelques modifications nécessaires dues à la nature du problème traité ici.

Nous définissons l'énergie du problème (3.41) par

$$E(t) = \frac{1}{m+2}\|u_t(x,t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2\right)\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(t))^2 d\Gamma - \frac{1}{p}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{3.42}$$

Théorème 3.3 [50] .*Supposons que* $m > 1$, $p > \beta(m+1)$, *et*

$$E_0 = \frac{1}{m+2}\|u_1\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u_0\|_2^2\right)\|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u_0\|_p^p + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(0))^2 d\Gamma < 0. \tag{3.43}$$

alors la solution du problème (3.41) est explose en temps fini T^*, *estimé par*

$$T^* \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2\alpha - 1)\gamma [L(0)]^{\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}}}. \tag{3.44}$$

Remarque 3.1 *on définit*

$$\beta = 3 + \frac{\overline{k}q_1}{a^2}.$$

Lemme 3.5 [37] .*Il existe une constante positive* $C > 1$, *telle que*

$$\|u\|_p^s \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right). \tag{3.45}$$

Pour toute $2 \leq s \leq p$ *et* $u \in H^1(\Omega)$.

Preuve. Si $\|u\|_p \leq 1$ alors, $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C\|\nabla u\|_2^2$ par le théorème de Sobolev.
Si $\|u\|_p > 1$ alors, $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p$. Donc (3.45) est verifiée. ∎
On définit la fonctionnelle suivante

$$H(t) = -E(t). \tag{3.46}$$

alors

$$H'(t) = \frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 + 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma \geq 0. \tag{3.47}$$

Par conséquent, on a

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p,$$

de (3.42) et (3.46),en conséquent le corollaire suivant

Corollaire 3.1 [50] *.Soient les hypothèses du lemme 3.5 sont satisfaites, alors*

$$\|u\|_p^s \leq C\left(-\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} - \|\nabla u\|^4 - \int_{\Gamma_1} p(x)\,(y_t)^2\,d\Gamma - H(t) + \|u\|_p^p\right). \tag{3.48}$$

pour tous $t \in (0,T)$, *pour tous* $u(.,t) \in H^1(\Omega)$ *et* $2 \leq s \leq p$.

Ensuite, par (3.42) et (3.46). On définit

$$L(t) = H^{2(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^m u_t u dx. \tag{3.49}$$

Pour une petite constante positive ε à choisir plus tard et

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{m(p-1)+3p-2}{2p(m+2)}, \tag{3.50}$$

Preuve. (Théorème 3.3)
on dérive (3.49), on obtient

$$L^{'}(t) = 2(1-\alpha)H^{(1-2\alpha)}(t)H^{'}(t) + \varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m+2}dx + \varepsilon(m+1)\int_\Omega |u_t|^m u_{tt} u dx. \tag{3.51}$$

On utilise l'équation $(3.41)_1$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(m+1)\int_\Omega |u_t|^m u_{tt}udx &= -\varepsilon(m+1)b\|\nabla u\|_2^4 - \varepsilon(m+1) - 2\lambda\varepsilon(m+1)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx\\ &\quad -\varepsilon(m+1)a^2\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon(m+1)\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2\\ &\quad +\varepsilon(m+1)\int_\Omega |u|^p dx + \varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1} uy_t dx.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ensuite, on utilise l'équation $(3.41)_4$, on trouve

$$\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma = -\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t u d\Gamma - \varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}yud\Gamma. \tag{3.53}$$

On remplace (3.52) et (3.53) on (3.51), on obtient

$$\begin{aligned}L^{'}(t) &= 2(1-\alpha)H^{(1-2\alpha)}(t)H^{'}(t) + \varepsilon\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \varepsilon(m+1)\|u\|_p^p\\ &\quad -\varepsilon(m+1)a^2\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon(m+1)\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2\\ &\quad -\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t u d\Gamma - \varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}yud\Gamma\\ &\quad -2\lambda\varepsilon(m+1)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx - \varepsilon(m+1)b\|\nabla u\|_2^4.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Il est clair que

$$\varepsilon(m+1)\|u\|_p^p = \varepsilon(m-1)\|u\|_p^p + 2\varepsilon\|u\|_p^p,$$

d'aprés (3.46), on a

$$\begin{aligned}2\varepsilon \|u\|_p^p &= 2\varepsilon p H(t) + \frac{2\varepsilon p}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \varepsilon p a^2 \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon \frac{pb}{2}\|\nabla u\|_2^4 \\ &+\varepsilon p \int_{\Gamma_1} q(x) y^2 d\Gamma,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(m+1)\|u\|_p^p &= \varepsilon(m-1)\|u\|_p^p + 2\varepsilon p H(t) + \frac{2\varepsilon p}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \varepsilon p a^2\|\nabla u\|_2^2 \\ &+\varepsilon\frac{pb}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \varepsilon p \int_{\Gamma_1} q(x) y^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.55}$$

On remplace (3.55) en (3.54), on obtient

$$\begin{aligned}L'(t) &= 2(1-\alpha)H^{(1-2\alpha)}(t)H'(t) + \varepsilon\left(1+\frac{2p}{m+2}\right)\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \varepsilon(m-1)\|u\|_p^p + 2\varepsilon p H(t) \\ &+\varepsilon a^2\left[p-(m+1)\right]\|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon b\left[\frac{p}{2}-(m+1)\right]\|\nabla u\|_2^4 + \varepsilon p\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 dx \\ &-\varepsilon(m+1)\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 - 2\lambda\varepsilon(m+1)\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\ &-\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t u d\Gamma - \varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)} y u d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.56}$$

On utilise l'inégalité de Yong avec ε, puis les formules (3.5) et (3.4), on a

$$-\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t u d\Gamma \geq -\varepsilon(m+1)\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2p_0}\|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon(m+1)\frac{\overline{k}}{2\varepsilon_1 p_0}\|\nabla u\|_2^2. \tag{3.57}$$

$$-\varepsilon(m+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)} u y d\Gamma \geq -\varepsilon(m+1)\frac{q_1\varepsilon_2}{2p_0}\overline{k}\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon(m+1)\frac{1}{2p_0\varepsilon_2}\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 dx. \tag{3.58}$$

$$-2\varepsilon(m+1)\lambda\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx \geq -\varepsilon(m+1)\lambda\varepsilon_3\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon(m+1)\lambda\frac{1}{\varepsilon_3}\|\nabla u_t\|_2^2. \tag{3.59}$$

$$-\varepsilon(m+1)\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2 = -\varepsilon(m+1)\frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2. \tag{3.60}$$

Ensuite, à partir de (3.47), on a

$$H'(t) \geq \frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 + 2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2, \tag{3.61}$$

et

$$H(t) \geq H(0), \tag{3.62}$$

on remplace les dernières inégalités (3.58)-(3.63) dans (3.57), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \frac{\sigma}{4}\left[2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(m+1)\right]\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2+\varepsilon(m-1)\|u\|_p^p \\ & +\lambda\left[2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(m+1)\left(\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2p_0\lambda}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right]\|\nabla u_t\|_2^2+2\varepsilon pH(t) \\ & +\varepsilon(m+1)\left[a^2\left(\frac{p}{(m+1)}-1\right)-\frac{\overline{k}}{2p_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_1\varepsilon_2+\frac{2p_0}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right)\right]\|\nabla u\|_2^2 \\ & \varepsilon b\left(\frac{p}{2}-m-1\right)\|\nabla u\|_2^4+\varepsilon\left(p-\frac{m+1}{2p_0\varepsilon_2}\right)\int_{\Gamma_1}q(x)y^2d\Gamma+\varepsilon\|u_t\|_{m+2}^{m+2}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

On a,

$$L(0)=H^{2(1-\alpha)}(0)+\varepsilon\int_\Omega u_0u_1>0, \tag{3.64}$$

maintenant, on pause

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(m+1), \\ a_2 &= 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(m+1)\left(\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2\lambda p_0}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right), \\ a_3 &= a^2\left(\frac{p}{m+1}-1\right)-\frac{\overline{k}}{2p_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_1\varepsilon_2+\frac{2p_0}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right), \\ a_4 &= \frac{p}{2}-(m+1), \\ a_5 &= p-(m+1). \end{aligned}$$

On choisit aussi $\varepsilon_1=\frac{\overline{k}}{a^2p_0}, \varepsilon_2=\frac{p_0}{2\overline{k}q_1}, \varepsilon_3=\frac{a^2}{4\lambda}$, et

$$\varepsilon<\frac{2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)}{(m+1)}\min\left(1,\frac{2\lambda(p_0a)^2}{\overline{k}^2+2(2p_0a)^2}\right),$$

alors, les termes $(a_i=1..5)$ sont des termes positifs.
Enfin, on obtient

$$L'(t)\geq C\left[\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2+\|\nabla u\|_2^4+\|\nabla u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_{m+2}^{m+2}+H(t)+\|u\|_p^p\right]. \tag{3.65}$$

On conclut que,

$$L(t)\geq L(0)>0, \quad \text{fr all } t\geq 0. \tag{3.66}$$

Maintenant, en estimant $\left|\int_\Omega |u_t|^m u_tudx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$, on a

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^m u_t u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}, \tag{3.67}$$

on utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(m+1)p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u|^{q} dx\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$$

telle que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,on choisit $p=\frac{m+2}{m+1}$ alors, $q=m+2$, on obtient

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(m+2)} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} \left(\int_{\Omega} |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}}\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}, \tag{3.68}$$

et par l'inégalité de Yong

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \frac{\delta^{\theta}}{\theta}\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(m+2)} dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{\theta}{2(1-\alpha)}} + \frac{\delta^{-\mu}}{\mu}\left(\int_{\Omega} |u|^{m+2} dx\right)^{\frac{1}{m+2}\cdot\frac{\mu}{2(1-\alpha)}},$$

telles que $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\mu}=1$, et $\delta=1$, on choisit $\theta=\frac{2(m+2)(1-\alpha)}{m+1}$ alors $\mu=\frac{(2m+4)(1-\alpha)}{m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}$, donc

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_1\left[\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(m+2)} dx\right) + \left(\int_{\Omega} |u|^{m+2} dx\right)^{\left(\frac{1}{m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}\right)}\right], \tag{3.69}$$

où

$$C_1 = \max\left(\frac{m+1}{2(m+2)(1-\alpha)}, \frac{m\,(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}{2(m+2)(1-\alpha)}\right),$$

on applique aussi l'inégalité de Hölder sur le deuxiéme terme du côté droit de (3.69), on obtient

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{m+2} dx\right)^{\left(\frac{1}{m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}\right)} \leq \left(\int_{\Omega} 1^{\rho} dx\right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\int_{\Omega} |u|^{(m+2)\theta} dx\right)^{\left(\frac{1}{m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}\right)\frac{1}{\theta}} \tag{3.70}$$

on choisit $\theta=\frac{p}{m+2}$ et $\rho=\frac{p}{p-(m+2)}$, alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{m+2} dx\right)^{\left(\frac{1}{m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}\right)} \leq C_2\left(\|u\|_p^{\left(\frac{m+2}{[m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)]}\right)}\right), \tag{3.71}$$

on remplace (3.71) dans (3.69), on obteint

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_3\left[\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \|u\|_p^{\left(\frac{m+2}{[m(1-2\alpha)-(4\alpha-3)]}\right)}\right]. \tag{3.72}$$

Pour $m>1$, $p\geq\beta(m+1)$ et α définit par (3.51) puis, on pose

$$2 \leq s = \frac{m+2}{[m\,(1-2\alpha)-(4\alpha-3)]} \leq p,$$

par conséquent, le lemme 3.5 donne

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{m+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_2 \left[\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \|u\|_p^p\right]. \tag{3.73}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(t) &= \left(H^{2(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \\ &\leq \delta\left(H(t) + \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \|u\|_p^p\right), \text{ pour tous } t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Donc, combinant (3.65) et (3.74), on obtient

$$L^{'}(t) \geq \gamma L^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(t) \quad \text{pour tous } t \geq 0, \tag{3.75}$$

ce signifie que

$$L^{'}(t) L^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}(t) \geq \gamma, \tag{3.76}$$

on a

$$L^{'}(t) L^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}(t) = \frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1} \frac{d}{dt}\left(L^{\frac{2\alpha-1}{2(\alpha-1)}}(t)\right), \tag{3.77}$$

on remplace (3.77) en (3.76), on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(L^{\frac{2\alpha-1}{2(\alpha-1)}}(t)\right) \leq \frac{2\alpha-1}{2(\alpha-1)}\gamma, \tag{3.78}$$

telle que γ est une constante positive.
Par une simple intégration de (3.78) sur $(0,t)$, on résulte que

$$L^{\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}}(t) \geq \frac{1}{\frac{2\alpha-1}{2(\alpha-1)}\gamma t + L^{\frac{2\alpha-1}{2(\alpha-1)}}(0)}. \tag{3.79}$$

■

Chapitre 4

Explosion de la solution d'équation de la membrane élastique avec un retard

Un retard utilisé pour séparer l'occurrence entre deux événements, en particulier dans un dispositif mécanique ou électronique des retards, ce type de problèmes sont appliqués dans plusieurs domaines car, dans la plupart des cas, les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, thermiques et économiques ne dépendent pas naturellement et uniquement de l'état présent, mais aussi sur certaines occurrences passées.
Le but de ce chapitre est d'étudier l'explosion de la solution de l'équation viscoélastique non linéaire avec un retard de la forme

$$\begin{cases} u_{tt} - \left[a + b\left\|\nabla u\right\|_2^2 + \sigma\left(\nabla u(x,t), \nabla u_t(x,t)\right)\right]\Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds & \\ +\mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-2}u, & x\in\Omega, t>0, \\ u(x,t) = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u\left(x,0\right) = u_0(x), \quad u_t\left(x,0\right) = u_1(x), & x\in\Omega, t>0, \\ u_t\left(x,t-\tau\right) = f_0(x,t), & x\in\Omega, t>0,\ t\in(0,\tau). \end{cases} \tag{4.1}$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, $a, b, \sigma, \mu_0, \mu_1$ sont des constantes positives et $g(t)$ est une fonction positive qui représente le noyau du terme mémoire satisfait la condition donnée dans **H1.** $\tau > 0$ représente un temps retardé, u_0, u_1, f_0 sont des fonctions appartenant à des espaces appropriés. L'équation de $(4.1)_1$ est liée à l'équation du panneau de flutter avec un terme mémoire et le contrôle du temps retard. Les matériaux viscoélastiques présentent un amortissement naturel, à cause de la propriété particulière de ces matériaux qui gardent la mémoire de leur histoire passée. Surtout cette équation se pose dans une expérience en soufflerie à des vitesses supersoniques.

Mon travail est un article fini et envoyé à un espectable jornale.

4.1 Préliminaire

(H1) $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ est une fonction non croissante de classe C^1, telle que

$$a - \int_0^\infty g(s)ds := l > 0, \tag{4.2}$$

et

$$\int_0^\infty g(s)ds < \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(p(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\right)(p-2)}}, \quad \text{où } \ 0 < \beta < 1. \tag{4.3}$$

(H2) Il existe une fonction différentiable positive non croissante $\xi(t)$, telle que

$$g^{'}(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad \forall\, t \geq 0, \tag{4.4}$$

et

$$\int_0^\infty \xi(t)dt = \infty.$$

(H3) Soit δ est une constante positive telle que

$$\begin{gathered} \tau\mu_1 < \delta < \tau\left(2\mu_0 - \mu_1\right) \quad \text{si } \ \mu_1 < \mu_0 \\ \delta = \mu_0 \ \text{ si } \ \mu_1 = \mu_0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Lemme 4.1 [57] *.Pour toute fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$ et $u \in H_0^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$, on a*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx &= \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \nabla u\right)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \circ \nabla u\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t)ds \int_\Omega \left|\nabla u(s)\right|^2 dx\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

où

$$\left(g \circ u\right)(t) := \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \left|u(t) - u(s)\right|^2 dxds,$$

.

Lemme 4.2 [57] *.Pour $u \in L^2\left(o, T; H_0^1(\Omega)\right)$, on a*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left(u(t) - u(s)\right)ds\right)^2 dx \leq (a-l)\, C_*^2 \left(g \circ u\right)(t), \tag{4.7}$$

où C_* est la constante de Poincaré et l est donné par (4.2).

Lemme 4.3 [57] *.Soit $p \geq 2$, alors il existe une constante positive c_s, telle que*

$$\left\|u\right\|_p \leq c_s \left\|\nabla u\right\|_2, \ \text{ pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 4.4 [57] *.Supposons que $p \geq 2$, alors il existe une constante positive C, telle que*

$$\left\|u\right\|_p^s \leq C\left(\left\|\nabla u\right\|_2^2 + \left\|u\right\|_p^p\right), \tag{4.8}$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p$.

4.1.1 Problème équivalent

Nous introduisons la nouvelle variable dépendante suivante

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \quad x\in\Omega, \quad \rho\in(0,1) \ t>0. \tag{4.9}$$

Par conséquent, on a

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z\rho(x,\rho,t) = 0, \quad \text{in } \Omega\times(0,1)\times(0,\infty). \tag{4.10}$$

Alors, le problème (4.1) est équivalent à

$$\begin{cases} u_{tt} - \left[a + b\|\nabla u\|_2^2 + \sigma\left(\nabla u(x,t), \nabla u_t(x,t)\right)\right]\Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\ +\mu_0 u_t(x,t) + \mu_1 z(x,1,t) = |u|^{p-2}u, & x\in\Omega, t>0, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & x\in\Omega, t>0, \rho\in(0,1). \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & x\in\Omega, t>0, \\ u(x,t) = 0, & x\in\partial\Omega, t\geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x\in\Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,t\rho), & x\in\Omega, t>0, \rho\in(0,1). \end{cases} \tag{4.11}$$

Soit δ une constante positive telle que

$$\tau\mu_1 < \delta < \tau(2\mu_0 - \mu_1). \tag{4.12}$$

Théorème 4.1 [57] .*On suppose que $\mu_0 \leq \mu_1$. Soient $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f_0 \in L^2(\Omega\times(0,1))$ et $T>0$, il existe une solution faible unique du problème (4.11) sur l'intervalle $(0,T)$ telle que*

$$u \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right).$$
$$u_t \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T)\times\Omega\right).$$

4.2 Explosion en temps fini

Dans cette section, nous étudions l'explosion en temps fini de la solution du probléme (4.11), avec la condition de positivité énergétique initiale.

Premièrement, nous définissons la fonctionnelle énergétique du problème (4.11) comme suit

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \left(a - \int_0^t g(s)ds\right)\right]\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\,d\rho dx \\ &\quad + \frac{1}{2}(g\circ u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Où δ est une constante positive satisfaite (4.12) avec $\tau = 1$.

Lemme 4.5 *$E(t)$ est une fonction non croissante et*

$$E^{'}(t) \leq -\alpha \left(\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx \right), \text{ pour } t \geq 0, \tag{4.14}$$

où α est une constante positive.

Preuve. En multipliant l'équation $(4.11)_1$ par u_t puis, en intégrant sur Ω, ensuit on utilise la formule de Green et la formule (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|_2^2 + \left(a - \int_0^t g(t-s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 + (g \circ \nabla u)\right] + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u\|_p^p \\ = \ & -\frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 - \frac{g(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \nabla u\right) - \mu_0\|u_t\|_2^2 - \mu_1\int_\Omega z(x,1,t)\,u_t dx,\end{aligned} \tag{4.15}$$

aussi , en multipliant l'équation $(4.11)_2$ par $\frac{\delta}{\tau}z$ puis, en intégrant sur $(0,1)\times\Omega$, on trouve

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\,d\rho dx = -\frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx + \frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(x,0,t)\,dx, \tag{4.16}$$

en sommant les deux formules (4.15) et (4.16), on résulte

$$\begin{aligned}E^{'}(t) \ = \ & -\frac{\sigma}{4}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 - \frac{g(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g^{'} \circ \nabla u\right) - \mu_0\|u_t\|_2^2 - \mu_1\int_\Omega z(x,1,t)\,u_t dx \\ & -\frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx + \frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(x,0,t)\,dx,\end{aligned} \tag{4.17}$$

alors, on permet d'écrire

$$E^{'}(t) \leq -\left(\mu_0 - \frac{\delta}{2\tau}\right)\|u_t\|_2^2 - \frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx - \mu_1\int_\Omega z(x,1,t)\,u_t dx, \tag{4.18}$$

on a

$$-\mu_1\int_\Omega z(x,1,t)\,u_t dx \leq \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx + \frac{\mu_1}{2}\|u_t\|_2^2\,dx, \tag{4.19}$$

on remplace (4.19) en (4.18), on obtient

$$\begin{aligned}E^{'}(t) \ & \leq \ -\left(\mu_0 - \frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}\right)\|u_t\|_2^2 - \left(\frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}\right)\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx, \\ & \leq \ -\alpha_1\left(\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx\right), \text{ pour tous } t \geq 0,\end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\alpha_1 = \min\left\{\mu_0 - \frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}, \frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}\right\} > 0$. ■

Ensuit, d'après (4.13) et le Lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned}
E(t) &\geq \frac{1}{2}l\left\|\nabla u\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(g\circ\nabla u\right)-\frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p \\
&\geq \frac{1}{2}l\left\|\nabla u\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(g\circ\nabla u\right)-\frac{B_1^p}{p}\left(l^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla u\right\|_2\right)^p \\
&\geq F\left(\sqrt{l\left\|\nabla u\right\|_2^2+\left(g\circ\nabla u\right)}\right),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

où $B_1=\frac{C_s^p}{l^{\frac{p}{2}}}$, et

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{B_1^p}{p}x^p,\ x>0. \tag{4.22}$$

Remarque 4.1 *on peut vérifier que la fonctionelle F est croissante sur $(0,\lambda_1)$, decroissante sur (λ_1,∞), et F admet un maximum $\lambda_1=B_1^{-\frac{p}{p-2}}$ avec la valeur maximale $E_1=F(\lambda_1)=\frac{p-2}{2p}\lambda_1^2$.*

Preuve. On dérive (4.22) par apport à t, on obtient

$$F^{'}(x)=x-B_1^px^{p-1}, \tag{4.23}$$

soit λ_1 une constante positive, telle que

$$F^{'}(\lambda_1)=0,$$

de (4.23), on a

$$\lambda_1=B_1^{-\frac{p}{p-2}},$$

cela implique

$$\begin{aligned}
F(\lambda_1) &= \frac{1}{2}\lambda_1^2-\frac{B_1^p}{p}\lambda_1^p,\ \lambda_1>0 \\
&= \frac{1}{2}B_1^{-\frac{2p}{p-2}}-\frac{B_1^p}{p}\left(B_1^{-\frac{p^2}{p-2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}B_1^{-\frac{2p}{p-2}}-\frac{1}{p}B_1^{-\frac{2p}{p-2}} \\
&= \frac{p-2}{2p}B_1^{-\frac{2p}{p-2}} \\
&= \frac{p-2}{2p}\lambda_1^2.
\end{aligned}$$

Alors, la fonctionelle F est croissante sur $(0,\lambda_1)$, et decroissante sur (λ_1,∞). ■

Lemme 4.6 [58] *.On suppose que $p\geq 2$, $l\left\|\nabla u\right\|_2^2>\lambda_1^2$, et **(H1)-(H3)** sont vérifiés avec $E(0)<E_1$ alors, il existe $\lambda_2>\lambda_1$ telle que, pour tous $t\in[0,T)$,*

$$l\left\|\nabla u\right\|_2^2+\left(g\circ\nabla u\right)(t)\geq\lambda_2^2. \tag{4.24}$$

et

$$\|u\|_p^p \geq \frac{B_1^p}{p}\lambda_2^p. \tag{4.25}$$

Preuve. On considère que $E(t)$ est non croissante, alors

$$E(t) \leq E(0) < E_1,$$

pour tous $t > 0$. De la propriété de F, Il existe $\lambda_2^{'} < \lambda_1 < \lambda_2$ tellle que $F(\lambda_2^{'}) = F(\lambda_2) = E(0)$. Puis, comme $F(0) = 0$, $l\,\|\nabla u_0\|_2^2 > \lambda_1^2$ et la continuité de $F(\sqrt{l\,\|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)\,(t)})$, on déduit que

$$l\,\|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)\,(t) \geq \lambda_2^2, \quad \forall t \in [0, T)\,.$$

De plus, d'après la définition de $E(t)$ par (4.13), (4.24), et la définition de F, on a

$$\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}\left(l\,\|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u)\,(t)\right) - E(0) \geq \frac{1}{2}\lambda_2^2 - F(\lambda_2) = \frac{B_1^p}{p}\lambda_2^p.$$

Par conséquent, on compléte la preuve. ∎

Théorème 4.2 *Soient **(H1)** et **(H2)** sont satisfaites. On suppose que $p > 4$, et $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$ avec $l\,\|\nabla u\|_2^2 > \lambda_1^2$, $E(0) < \beta E_1$. Alors, la solution u du problème (4.11) est explose en temps fini T^*estimée par*

$$T^* \leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma\,[L(0)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

Où Γ est une constante positive.

Preuve. Par la contradiction, on suppose que la solution du problème (4.11) est globale alors, il existe $K_1 > 0$ telle que

$$\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^4 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p \leq K_1.\ \forall t \geq 0. \tag{4.26}$$

On définit

$$H(t) = E_2 - E(t), \tag{4.27}$$

où $E_2 \in (E(0), \beta E_1)\,.$
Par le Lemme 4.5, et (4.25), on a

$$H(t) \geq H(0) = E_2 - E(0) > 0, \tag{4.28}$$

et par $E_1 = \frac{p-1}{2p}\lambda_1^2$, et $0 < \beta < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} H(t) &\leq E_2 - \frac{1}{2}\left(l\left\|\nabla u\right\|_2^2 + (g \circ \nabla u)\right) + \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p \\ &\leq \beta E_1 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 + \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2}\lambda_1^2 + \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p \\ &\leq -\frac{1}{2p}\lambda_1^2 + \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p \\ &\leq \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Aussi, on définit la fonctionnelle suivante

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int_\Omega u_t u dx + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0\int_\Omega u^2 dx + \varepsilon\frac{\sigma}{4}\left(\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\right)^2. \tag{4.30}$$

Où $0 < \varepsilon < 1$ à déterminer plus tard et

$$0 < \alpha < \min\left(\frac{p-2}{2p}, \frac{1}{2}\right). \tag{4.31}$$

On dérive (4.30), on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &= (1-\alpha)\, H^{-\alpha}(t)H^{'}(t) + \varepsilon\left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon\int_\Omega u_{tt}u dx \\ &\quad + \varepsilon\mu_0\int_\Omega u_t u dx + \varepsilon\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)\left(\left\|\nabla u\right\|^2\right), \end{aligned} \tag{4.32}$$

on utilise $(4.11)_1$, et la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon\int_\Omega u_{tt}u dx &= -\varepsilon a\left\|\nabla u\right\|_2^2 - \varepsilon b\left\|\nabla u\right\|_2^4 + \varepsilon\left\|u\right\|_p^p - \mu_1\varepsilon\int_\Omega z(x,1,t)u dx - \varepsilon\mu_0\int_\Omega u_t u dx \\ &\quad + \varepsilon\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx - \frac{\sigma}{2}\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)\left(\left\|\nabla u\right\|_2^2\right), \end{aligned} \tag{4.33}$$

on remplace (4.33) en (4.32), on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &= (1-\alpha)\, H^{-\alpha}(t)H^{'}(t) + \varepsilon\left\|u_t\right\|_2^2 - \varepsilon a\left\|\nabla u\right\|_2^2 - \varepsilon b\left\|\nabla u\right\|_2^4 + \varepsilon\left\|u\right\|_p^p \\ &\quad - \mu_1\varepsilon\int_\Omega z(x,1,t)u dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \tag{4.34}$$

On utilise l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, pour $\delta_1, \eta > 0$,

$$-\mu_1\varepsilon\int_\Omega z(x,1,t)u dx \geq -\delta_1\mu_1\varepsilon\left\|u\right\|_2^2 - \frac{\mu_1}{4\delta_1}\int_\Omega z^2(x,1,t) dx, \tag{4.35}$$

et

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx = \varepsilon \left\|\nabla u\right\|_2^2 \int_0^t g(s)ds + \varepsilon \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \left|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right| dsdx, \tag{4.36}$$

on voit que

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \left|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right| dsdx \geq -\frac{\varepsilon}{4\eta} \left\|\nabla u\right\|_2^2 \int_0^t g(s)ds - \eta\varepsilon \left(g \circ \nabla u\right)(t), \tag{4.37}$$

de (4.36) et (4.37)

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \geq -\eta\varepsilon \left(g \circ \nabla u\right)(t) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4\eta}\right) \int_0^t g(s)ds \left\|\nabla u\right\|_2^2. \tag{4.38}$$

On remplace (4.35) et (4.38) en (4.34), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left(1-\alpha\right) H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \left\|u_t\right\|_2^2 + \varepsilon \left[-a - \left(\frac{1}{4\eta} - 1\right) \int_0^t g(s)ds\right] \left\|\nabla u\right\|_2^2 - \varepsilon b \left\|\nabla u\right\|_2^4 \\ & + \varepsilon \left\|u\right\|_p^p - \eta\varepsilon \left(g \circ \nabla u\right)(t) - \delta_1\mu_1\varepsilon \left\|u\right\|_2^2 - \frac{\mu_1}{4\delta_1}\varepsilon \int_\Omega z^2(x,1,t)dx, \end{aligned} \tag{4.39}$$

on choisit $\delta_1 = \frac{\mu_1}{4\alpha_1 k} H^\alpha(t)$ telle que k est une grande constante positive à déterminer plus tard, on obtient

$$-\delta_1\mu_1\varepsilon \left\|u\right\|_2^2 = -\varepsilon \frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k} H^\alpha(t) \left\|u\right\|_2^2, \tag{4.40}$$

et

$$-\frac{\mu_1}{4\delta_1}\varepsilon \int_\Omega z^2(x,1,t)dx = -\varepsilon\alpha_1 k H^{-\alpha}(t) \int_\Omega z^2(x,1,t)dx, \tag{4.41}$$

maintenant, par (4.14)et (4.27) on a

$$-\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \geq -\frac{1}{\alpha_1} H'(t), \tag{4.42}$$

où α_1 définit on (4.20)

Par conséquent, (4.41) et (4.42) découle

$$-\varepsilon\alpha_1 k H^{-\alpha}(t) \int_\Omega z^2(x,1,t)udx \geq -\varepsilon k H^{-\alpha}(t)H'(t). \tag{4.43}$$

On remplace (4.40) et (4.43) on (4.39), on voit que

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left(1-\alpha-\varepsilon k\right) H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \left[-a - \left(\frac{1}{4\eta} - 1\right) \int_0^t g(s)ds\right] \left\|\nabla u\right\|_2^2 \\ & - b\varepsilon \left\|\nabla u\right\|_2^4 - \varepsilon\eta \left(g \circ \nabla u\right) - \varepsilon \frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k} H^\alpha(t) \left\|u\right\|_2^2 + \varepsilon \left\|u\right\|_p^p, \end{aligned} \tag{4.44}$$

on ajoute le terme $\varepsilon p(H(t)-E_2+E(t))$, puis on utilise la définition de $E(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &\geq (1-\alpha-\varepsilon k)\, H^{-\alpha}(t)H^{'}(t)+\varepsilon\left(\frac{p+2}{2}\right)\|u_t\|_2^2+\varepsilon b\left(\frac{p}{4}-1\right)\|\nabla u\|_2^4+\varepsilon pH(t) \\ &+\varepsilon\left[\frac{(p-2)}{2}a-\left(\frac{(p-2)}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)ds\right]\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{p}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u) \\ &-\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1}\varepsilon H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2+\varepsilon\frac{\delta_1 p}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx-\varepsilon pE_2. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Maintenant, on prend η qui satisfaite

$$\frac{a-l}{2(1-\beta)\,l\,(p-2)}<\eta<\frac{p(1-\beta)}{2}+\beta, \tag{4.46}$$

ce qui est possible grâce à (4.3),
par (4.46), on a

$$\left[\frac{(p-2)}{2}a-\left(\frac{(p-2)}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)ds\right]\|\nabla u\|_2^2\geq\beta\frac{(p-2)}{2}l\,\|\nabla u\|_2^2, \tag{4.47}$$

et

$$\left(\frac{p}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u)\geq\beta\frac{(p-2)}{2}(g\circ\nabla u), \tag{4.48}$$

ensuite, par (4.47) et (4.48), puis on utilise le fait que $l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)\geq\lambda_2^2$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(p-2)}{2}a-\left(\frac{(p-2)}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)ds\right]\|\nabla u\|_2^2+\left(\frac{p}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u)-pE_2 \\ \geq&\ \beta\frac{(p-2)}{2}\left(l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)\right)-pE_2 \\ =&\ \beta\frac{(p-2)}{2}\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left(l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)\right)+\beta\frac{(p-2)}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left(l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)\right)-pE_2 \\ \geq&\ C_1\left(l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)\right)+C_2. \end{aligned} \tag{4.49}$$

où $C_1=\beta\frac{(p-2)}{2}\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, $C_2=\beta\frac{(p-2)}{2}\lambda_1^2-pE_2$. en plus, de $E_2<\beta E_1$ et $E_1=\frac{(p-2)}{2}\lambda_1^2$,
on observe que $\beta\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}>0$, et $C_2=\beta\frac{(p-2)}{2}\lambda_1^2-pE_2>\beta\left(\frac{(p-2)}{2}\lambda_1^2-pE_1\right)=0$
Donc, (4.45) devient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &\geq (1-\alpha-\varepsilon k)\, H^{'}(t)H^{-\alpha}(t)+\varepsilon C_1\left(l\,\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)\right)-\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1}\varepsilon H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2 \\ &+\varepsilon\left(\frac{p+2}{2}\right)\|u_t\|_2^2+\varepsilon b\left(\frac{p}{4}-1\right)\|\nabla u\|_2^4+\varepsilon pH(t)+\varepsilon\frac{\delta_1 p}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx. \end{aligned} \tag{4.50}$$

On utilise (4.29), on trouve

$$H^{\alpha}(t) \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} \|u\|_p^{\alpha p},$$

c'est signifie que

$$H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \|u\|_p^{2+\alpha p}, \tag{4.51}$$

par le lemme 4.4, pour $2+\alpha p \leq p$ et (4.51), on obtient

$$H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2 \leq C_s \left[\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \|u\|_p^p + \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \|\nabla u\|_2^2\right], \tag{4.52}$$

par la décomposition de $pH(t)$

$$pH(t) = (2a_1 + (p-2a_1))\, H(t), \tag{4.53}$$

où

$$a_1 < \min\left(\frac{p-4}{2}, C_1\right),$$

ensuit, on utilise la définition de $2a_1H(t)$, puis on remplace (4.52) et (4.53) en (4.50), on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) \geq\ & [(1-\alpha)-\varepsilon k]\, H^{'}(t)H^{-\alpha}(t) + \varepsilon\left(\frac{p+2}{2} - a_1\right)\|u_t\|_2^2 \\ & +\varepsilon\left(C_1 l - C_s\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1} - a_1 l\right)\|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon\,(C_1 - a_1)\,(g\circ\nabla u) \\ & +\varepsilon b\left(\frac{p}{4} - 1 - \frac{a_1}{2}\right)\|\nabla u\|_2^4 + \varepsilon\,(p-2a_1)\,H(t) + \varepsilon\delta\left(\frac{p}{2} - a_1\right)\int_{\Omega}\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ & +\varepsilon\left(\frac{2a_1}{p} - C_s\frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k}\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}}\right)\|u\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.54}$$

On choisit la constante k, telle que

$$(C_1 - a_1)\, l - c_s\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1} > 0, \tag{4.55}$$

et

$$\frac{2a_1}{p} - c_s\frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k}\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} > 0, \tag{4.56}$$

par (4.55) et (4.56), on obtient

$$k > \frac{c_s}{4\alpha_1} p^{-\alpha} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} \max\left(\frac{\mu_1^2}{l\,(C_1 - a_1)}, \frac{p}{2a_1}\right), \tag{4.57}$$

et ε très petite que

$$\varepsilon < \frac{(1-\alpha)}{k}, \tag{4.58}$$

et

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_\Omega u_1 u_0 dx + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0 \int_\Omega u_0^2 dx + \sigma\varepsilon \|\nabla u_0\|_2^4 > 0. \tag{4.59}$$

Ainsi que, de (4.54),(4.57) et (4.58) il existe $\xi > 0$, telle que

$$L'(t) \geq \xi \left[H(t) + \|\nabla u\|_2^2 + (g \circ \nabla u) + \|\nabla u\|_2^4 + \int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t) d\rho dx + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 \right] \tag{4.60}$$

alors, (4.60) implique

$$L(t) \geq L(0) > 0 \text{ for } t \geq 0.$$

L'estimation suivante est

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_t u dx \right| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\ &\leq C \|u\|_p \|u_t\|_2 , \end{aligned} \tag{4.61}$$

cela implique

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|u\|_p^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} . \tag{4.62}$$

Encore on applique l'inégalité de Young, on obtient

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_3 \left[\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right], \tag{4.63}$$

pour $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$, et $C_3 = C\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}$, on choisit $\theta = 2(1-\alpha)$, on obtient $\mu = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$ alors

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_3 \left[\|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2 \right], \tag{4.64}$$

par (4.31), on a $2 \leq s = \frac{2}{1-2\alpha} \leq p$, on utilise le Lemme 4.4, on obtient

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_3 \left[\|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right]. \tag{4.65}$$

Par conséquent, de (4.65), on a

$$\begin{aligned} L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \left(H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t u dx + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0 \int_\Omega u^2 dx + \frac{\sigma}{4}\varepsilon \|\nabla u\|_2^4 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq C_4 \left(H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_2^{\frac{2}{1-\alpha}} + \|\nabla u\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \right), \end{aligned} \tag{4.66}$$

pour $t \geq 0$ et $C_4 > 0$,
par (4.26) et (4.28) , on a

$$\|\nabla u\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \leq K_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq K^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{H(t)}{H(0)}, \text{ et } \|u\|_2^{\frac{2}{1-\alpha}} \leq K^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{H(t)}{H(0)}. \tag{4.67}$$

De (4.67), on obtient

$$L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_5 \left(H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 \right), \quad t \geq 0. \tag{4.68}$$

avec $C_5 > 0$. En combinant (4.60) avec (4.69), on conclut que

$$L^{'}(t) \geq \Gamma L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \ t \geq 0. \ où \ \Gamma > 0, \tag{4.69}$$

ce implique

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \right)' \geq \Gamma,$$

alors

$$\left(L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \right)' \leq \gamma, \quad où \ \gamma = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\Gamma \tag{4.70}$$

Par une simple intégration de (4.70) sur $(0, t)$, on déduit que

$$L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \Gamma \frac{t\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4.71}$$

Puisque $L(0) > 0$, $L(t)$ est explose en temps fini, la preuve est terminée. ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié la stabilité de la solution par la méthode énergétique et l'explosion de la solution par une méthode directe qui se base sur les fonctionnelles de Lyapunove de certains systèmes d'évolution non-linéaire.

Tout d'abord, nous avons donné un résultat simple d'existence locale et globale d'une équation parabolique avec amortissement et terme source logarithmique, en utilisant certaines hypothèses pour les données initiales. Puis nous avons étudié la stabilité et l'explosion de la solution.

Ensuite, nous avons étudié une équation des ondes avec des conditions aux limites d'acoustique. Nous avons obtenu le résultat de la stabilité et l'explosion en temps fini.

Enfin, nous avons étudié l'explosion en temps fini d'un problème avec un retard.

Dans la littérature, nous avons observé que les équations classiques comportent des termes non linéaires d'amortissement et de perturbation du premier ordre qui ont été largement étudiées. Alors en perspective, il serait intéressant d'étudier la stabilité et l'explosion de la solution du système de la forme

$$u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m(x)-2}\,\nabla u\right) + \alpha u_t\,|u_t|^{m(x)-2} = |u|^{p(x)-2}\,u\log u.$$

Bibliographie

[1] **Antonini, C., Quint, J.F., Borgnat, P., Bérard, E., Lebeau, E., Souche., Chateau**, **A**., **Teytaud, Q. (**2002**),** Les Mathématiques pour l'Agrégation.

[2] **Apalara, T.A., Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I.,** (2012), Energy decay in thermoelasticity type III with viscoelastic damping and delay term, Electron. J. Differential Equations (128), 1-15.

[3] **Balakrishnan, A.V., Taylor, L.W. (**1989**),** Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures, Damping 89, Flight Dynamics Lab and Air Force Wright Aeronautral Labs, WPAFB.

[4] **Bai, Q.C., Liang**, **B., (**2013**),** Blow-up in a slow diffusive-Laplace equation with the Neumann boundary conditions. Abstr. Appl. Anal. Article ID 643819.

[5] **Bass, R.W., Zes**, **D.,** (1989), Spillover nonlinearity and flexible structures, in : L.W. Taylor (Ed.), The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA ConFlight Dynamics Lab and Air Force Wright Aeronautical Labs, WPAFB, 1991, pp. 1-14. Conference Publication 10065.

[6] **Bei, H., Hong-Ming, Y. (**1995), Semilinear parabolic equations with prescribed energy. Rend. Circ. Mat. Palermo 44(3), 479–505.

[7] **Bellman, R., Cooke**, **K**., (1963), Differential-Difference Equations, Academic Press.

[8] **Bérard**, **P., (**2001-2002**),** Espace de Sobolev Résumé du cours de MEDP. Institut Fourier, UMR 5582 UJF-CNRS.

[9] **Bihari, B. (**1956**),** A Generalization of lemma of Bellman and it's application to uniquness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 81-84.

[10] **Boyer**, **F**. (2015**)** Analyse Fonctionnelle. Aix-Marseille Université.

[11] **Brezis**, **H.**, (1987), Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo.

[12] **Budd, C.J., Dold, J.W., Galaktionov**, **V.A. (**2015**),** Global blow-up for a semilinear heat equation on a subspace. Proc. R. Soc. Edinb, Sect. A, Math. 145(5), 893-923.

[13] **Cazenave, T., Hareaux**, **A.,** Introduction aux Problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, societé de mathematiques appliquees et industrielles.

[14] **Cong, N.L., Xuan, T.L. (**2017**)**, Global Solution and Blow-up for a Class of p-Laplacian Evolution Equations with Logarithmic Nonlinearity, Acta Appl Math, DOI 10, 1007/s10440-017-0106-5.

[15] **Constantin, N., Ionel. R., (**2011**),** Generalized convexity and the existence of finite time blow-up solutions for an evolutionary problem, Math.CA, 1107.5647v1.

[16] **Charles, J., Mbekhta, M., Queffélec, H. (**2010**),** Analyse fonctionnelle et théorie des operateurs, Dunod, Paris.

[17] **Chen, H,. Luo, P., Liu**, **G.**, (2015), Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. J. Math. Anal. Appl. 422(1), 84-98.

[18] **Chengyuan**, **Q., Xueli, B., Sining, Z.**, (2014), Blow-up versus extinction in a nonlocal p-Laplace equation with Neumann boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 412(1), 326-333.

[19] **Dardalhon, F., Verga, F**. (2006**),** Le théorème de Hille Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Mémoire encadré par Florence Hubert.

[20] **El Soufi, A., Jazar,M., Monneau,R.** (2007)**,** A Gamma-convergence argument for the blow-up of a non-local semilinear parabolic equation with Neumann boundary conditions. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 24(1), 17-39.

[21] **Frota, C.L., Larkin, N.A. (**2005**),** Uniform stabilization for a hyperbolic equation with acoustic boundary conditions in simple connected domains, Progr. Nonlinear Di erential Equa-tions Appl. 66, 297-312.

[22] **Frota, C.L., Goldstein**, **J.A.** (2000), Some nonlinear wave equations with acoustic boundaryconditions, J. Di er. Equ. 164 ,92-109.

[23] **Gallais, E. (**2006**)**, Rappels d'analyse fonctionnelle. Exposé au séminaire des apprenis.

[24] **Georgiev, V., Todorova**, **G., (1994),** Existence of a solution of the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms, J. Diff. Eqs, (109), 295-308.

[25] **Guo, B., Jao**, **W**. (2015), Non-extinction of solution for a fast diffusive p-Laplace equation with Neumann boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 422, 1527–1531.

[26] **Han Kang, Y., (**2016**),** Energy decay rate for the Kelving-Voigt type wave equation with Balakrishnan-Taylor damong and acoustic boundary, East Asian Math. J, No. 3, pp. 355-364.

[27] **Haraux, A., Cazenave**, **T**. (1998), An Introduction to Semilinear Evolution Equations. CNRS and University of Paris VI, France.

[28] **Harrison**, **H**., (1948), Plane and circular motion of a string, J. Acoust. Soc. Am.20, 874-875.

[29] **Kirane, M., Said-Houari**, **B**., (2011), Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay, Z. Angew. Math. Phys. 62, 1065–1082.

[30] **Levine**, **H. A., (**1974**),** Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form Putt = Au + F(u) ; Trans. Amer. Math. Soc., 192, 1-21.

[31] **Levine**, **H. A., Pucci, P., Serrin**, **J.,** (1997), Some remarks on global non existence for non autonomous abstract evolution equations, Comtemporary Math. 208, 253-263.

[32] **Levine**, **H. A., Serrin**, **J.,** (1997), Global non existence theorems for quasilinear evolutions equations with dissipation, Arch. Rational Mech Anal. 137, 341-361.

[33] **Levine**, **H., Todorova**, **G.,** (2000), Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 129, No.3, 793-805.

[34] **Li, F.** (2004), Global existence and blow-up of solutions for a higher Kirchhoff type equation with nonlinear dissipation, Appl. Math. Lett, 17. 1409-1414.

[35] **Lions**, **J. L., (**1969**),** Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Gaulthier-Villars, Paris.

[36] **Lijun, Y., Zuodng,.Y.,** (2018), Blow-up and non-extinction for a nonlocal parabolic equation with logarithmic nonlinearity, Boundary Value Problems,10.1186/s13661-018-1042-7.

[37] **Messaoudi, S.A., (**2003**),** Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation, Math. Nachr. 260, 58 -66.

[38] **Morgan**, **B.** (2009**)**, Mathématiques pour la mécanique, Cachan.

[39] **Munnier, A**. (2007-2008)**,** Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy 1, B. P.

[40] **Mi,. J. L., Jong, Y., Yong. H.K.**, (2015), Asymptotic stability of a problem with Balakrishnan Taylor damping and a time delay, Computers and Mathematics with Applications 70, 478-487.

[41] **Mi, J.L.**, **Jong, Y.P.**, **Han Kang, Y., (2015),** Asymptotic stability of a problem with Balakrishnan–Taylor damping and a time delay, Computers and Mathematics with Applications 70, 478–487.

[42] **Oliviers, I.**, (2005), Espaces de Sobolev et problèmes variationnels.

[43] **Pazy, A**. (1983)**,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer- Verlag New York, Inc.

[44] **Park, J.Y., Kim**, **J.A.,** (2006), Some nonlinear wave equations with nonlinear memory source term and acoustic boundary conditions, Numer. Funct. Anal. Optim, 889-903.

[45] **Park, J.Y., Park**, **S.H.** (2011), Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions, Nonlinear Analysis : Theory, methods and Applications 74, no. 3, 993-998.

[46] **Said-Houari, B. (** 2002**),** Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un probleme hyperbolique, Memoire de magister, Université de Annaba.

[47] **Showalter, R. E.,** (2000), Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential.

[48] **Shahmurov, R.**, (2012), On strong solutions of a Robin problem modelling heat conduction in materials with corroded boundary. Nonlinear Anal, Real World Appl. 13(1), 441-451.

[49] **Smaller, J.**, (1983**),** Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, New York.

[50] **Toualbia, S., Zaraï, A.,(**2019**),** Blow up for the Kelving-Voigt type wave equation with Balakrishnan-Taylor damping and acoustic boundary, Italian Journal of Pur and Applied Mathematics, N. 42, 788-797.

[51] **Toualbia, S., Zaraï, A., Boulaaras, S., (**2020**),** Decay estimate and non-extinction of solutions of p-Laplacian nonlocal heatequations, AIMS Mathematics. 5(3), 1663–1679.

[52] **Vitillaro**, **E.** (2002), A potential well theory for the wave equations with nonlinear source and boundary damping, Glasg. Math. Vol. 44, No. 3, 375-395.

[53] **Vitillaro**, **E. (**1999**),** Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Rat. Anal, Vol. 149, No. 2, 155-182.

[54] **Vitillaro**, **E. (**2002**)**, Global existence for the wave equation with nonlinear boundary dambing and source terms, J. Diff. Eqs. 186, 259-298.

[55] **Volterra**, **V., (**1928**),** Sur la Théorie Mathématiques des phénomènes héréditaires, J.de Mathématiques 7, 249-298.

[56] **Wang, M., Wang, Y.**, (**1996**), Properties of positive solutions for non-local reaction–diffusion problems. Math. Methods Appl.Sci. 19(14), 1141–1156.

[57] **Wu, S.T.,** (2013), Asymptotic behavior for a viscoelastic wave equation with a delay term, Taiwanese J. Math. 17 (3) 765–784.

[58] **Wu, S.T.,** (2019), Blow up o solution fo a viscoelastic wave equation with a delay, Acta Mathematica Scientia, 39B(1) : 329–338.

[59] **Young, I.S.**, (2012), Energy decay rates for the kelving-voig type wave equation with acoustic boundary, J.KSIAM vol.16.No.2,85-19.

[60] **Zaraï, A., Tatar, N.E., Abdelmalek, S**. (2013), Existence memberane equation with memory term and nonlinear boundary damping : Global existence, decay and blow up of the solution, Acta Math. Sci. 33B (1), 84–106.