



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
UNIVERSITE LARBI TEBESSI DE TEBESSA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



DOMAINE DE FORMATION : SCIENCES ET TECHNOLOGIES (ST)

*Polycopié de Cours*

## **DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

Matière : **Dynamique des Structures Avancées**  
Spécialité : **Construction Mécanique**  
Niveau : **MASTER I**

Réalisé par : **BELGHALEM HADJ**

Année universitaire : 2022

# Table de Matières

## *Table de Matières*

Introduction.....	1
Chapitre 1 : Rappels de la mécanique	
1 Introduction .....	3
1.1 Principe de d'Alembert.....	3
1) Force d'inertie	
2) Le moment des forces	
1.2 Le principe de déplacement virtuel (Lagrange) .....	5
<i>a) Déplacement virtuel</i>	
<i>b) Le Travail Virtuel</i>	
1.3 Le principe du travail Virtuel (W.V.) .....	5
1.4 Equation générale de la dynamique.....	6
1.5 Exemple explicatif.....	7
<b>Chapitre 2 : Notions Générales</b>	
2. Formulation des équations différentielles des oscillations.....	9
2.1 Objet du module.....	9
2.2 Classification des forces appliquées au système en oscillation .....	9
2.2.1 Force de rappel	
2.2.2 Forces d'amortissements	
2.2.3 Force dynamique	
2.3 Classification des forces dynamiques.....	12
2.4 Le modèle de calcul .....	13
2.4 .1 Modélisation des structures réelles	
2.5 Etablisement des équations différentielle des oxillations.....	15
2.5.1 Equation de déplacement	
2.5.2 Equation différentielle de déplacement	
2.5.3 Méthodes utilisables	
2.6 Applications.....	20
Chapitre 3 : Oscillations des systèmes à 1 degré de liberté (1ddl)	
3. Oscillations libres des systèmes à 1ddl.....	25
3 .1 Introduction.....	25

## Table de Matières

a) Modèl de Calcul	
b) Classification des oscillations	
3.1.1 Les oscillations libre non amorties.....	26
3.1.1.1 Equation différentielle des oscillations	
3.1.1.2 Les caractéristiques des oscillations libres non amorties	
a) Représentation cartésienne	
b) Représentation de FRENEL	
3.1.1.3 Le coefficient de rigidité de quelques systèmes.....	29
a) Système masse- ressort	
b) masse- barre	
3.1.1.4 La rigidité de quelques systèmes.....	29
3.1.1.5 Calcul des fréquences propres en tenant compte de la masse des éléments élastiques.....	30
3.1.2 Applications .....	32
3.2 Oxillations libres Amorties des systèmes à 1ddl.....	38
3.2.1 Equation différentielle.....	38
Amortissement critique	
a) Amortissement sur critique	
b) Amortissement sous critique	
3.2.2 Représentation.....	40
3.2.3 Le rapport des deux amplitudes consécutives ( $u_D, u_{n+1}$ ).....	40
3.2.4 Applications .....	41
<b>Chapitre 4 : Oxillations forcées des systèmes à 1ddl sous la charge harmonique</b>	
4. 1 Oscillations forcées avec amortissement visqueux.....	43
4.1.1 Equation différentielles.....	43
4.1.2 Représentation.....	46
4.1.3 Facteur d'amplification dynamique.....	47
4.1.4 Oscillations résonantes.....	48
4.1.4.1 La valeur maximale de D	
4.1.4.2 Oscillations résonantes	
4.1.5 Autres expression des oscillations résonantes.....	49
4.2 Oscillations Forcées de système sans amortissement Visqueux.....	50

## Table de Matières

4.2.1 Equation différentielle	
4.2.2 Oscillations résonantes	
4.2.3 Variation des oscillations résonantes	
4.3 Application technique des oscillations forcées.....	51
4.4 Applications .....	52
<b>Chapitre 5: Oscillations forcées des systèmes à 1DDL sous l'action des charges dynamiques arbitraires</b>	
5.1 Généralités.....	60
5.2 Oscillations forcées dues à la charge périodique.....	60
5.2 Oscillations forcées dues à la charge impulsive semi-sinus.....	61
5.2.1 Equation différentielle	
5.2.2 Facteur d'amplificateur dynamique	
5.3 Oscillations dues à la charge arbitraire.....	63
5.3.1 Oscillations forcées des systèmes sans amortissement -Intégrale du Duhamel-	
5.3.2 Oscillations forcées des systèmes avec amortissement ( $C \neq 0$ )...	
5.3.3 Procédé numérique de l'intégrale de Duhamel	
5.3.4 Expression Numérique pour $A_1(t)$	
5.3.5 Expression numérique pour $A_2(t)$	
5.4 Applications.....	67
<b>Chapitre 6 : Oscillations non linéaires d'un système à un degré de liberté</b>	
6.1 Introduction .....	79
6.2 Equation Incrémentale d'équilibre .....	80
6.2.1 Représentation des caractéristiques d'un système non linéaire	
6.2.2 Idée de la méthode d'intégration Pas à Pas	
6.3 Equation incrémentale de l'équilibre des forces .....	81
6.4 Hypothèse de base.....	82
6.5 Etablir les équations pour $\Delta u(t)$ et $\Delta \dot{u}(t)$ .....	82
6.6 Formule numériques pour incrément de déplacement $\Delta u(t)$ .....	83
6.7 Récapitulation du processus de calcul .....	84
6.8 Applications.....	86
<b>Chapitre 7 : Système à plusieurs degrés de liberté.</b>	

## Table de Matières

7.1 Généralités.....	89
7.1.1 Quelques exemples	
7.2 Etablissement des équations différentielles des oscillations en flexion.....	91
7.2.1 Equation d'équilibre dynamique	
7.2.2 Matrice de rigidité	
7.2.3 Matrice d'amortissement	
7.3 Equation différentielle des oscillations du système.....	93
7.4 Etablissement des équations différentielles des oscillation en flexion (Méthode des forces).....	93
7.4.1 Matrice de souplesse	
7.4.2 Détermination du coefficient de souplesse	
7.5 Applications .....	95
<b>Chapitre 8 : Oscillations libres et Oscillations forcées des systèmes à ' n'degré de liberté</b>	
8.1 Equation de mouvement .....	103
8.2 les oscillations libres .....	103
8.3 les modes propres .....	125
8.4 Applications.....	107
<b>Chapitre 9 : Méthode de composition de la solution en série des modes propre</b>	
<b>(Méthode de superposition des modes)</b>	
9.1 Equation différentielle du système.....	116
9.1.1 Système libres .....	117
9.1.2 Système Amortie.....	118
9.1.3 Oscillations forcées.....	118
9.1.3.1 Système non Amortie	
9.1.3.2 Système Amortie	
9.2 Détermination des contions initiales.....	118
9.3 Applications.....	119
<b>Chapitre 10 : Méthode variationnelles de caractérisation des valeurs propres</b>	
10 Les méthodes pratique de recherche des fréquences propres et des modes propres .....	117
10.1 Introduction.....	117
10.2 Equation des fréquences et de modes .....	117

## Table de Matières

10.3 Méthode de Stodola.....	118
10.3.1 Le résultat après le 1er cycle	
10.3.2 Le résultat après le 2ème cycle	
10.4 Applications.....	120
Références .....	123

## INTRODUCTION

Le terme dynamique des structures peut se définir simplement comme variable dans le temps. Une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application varient avec le temps. De même la réponse de la structure est une charge dynamique c'est-à-dire les déplacements et les contraintes qui en résultent et également variable dans le temps donc dynamique elle aussi. L'objectif que se fixe la dynamique des structures est de caractériser le comportement des constructions soumises à des sollicitations dynamiques.

Ce polycopié de la dynamique des structures est destiné aux étudiants de licence et Master I d'option construction mécanique. Il est rédigé d'une manière simplifiée ou des exercices qui me semblent utiles pour une bonne assimilation du contenu du cours sont accompagnés à la fin de chaque chapitre.

Le contenu de ce polycopié est structuré en huit chapitres. Le **premier** chapitre est consacré au rappel de quelques notions et méthodes de la mécanique analytique classique, les différents principes qui permettent d'établir les équations de mouvement, tel que d'Alembert, Lagrange et en les traduits par des exemples illustratifs.

Des notions générales font l'objet du **deuxième** chapitre. L'établissement des équations différentielles des oscillations, ainsi la classification des différentes forces appliquées au système en oscillation, et la modélisation des structures. Le **troisième** chapitre est consacré au traitement des oscillations libres amorties et non amorties des systèmes à un degré de liberté. Pour chaque type, l'équation différentielle du mouvement ainsi leurs caractéristiques et leurs présentations ont été décrites. Le calcul des fréquences propres en tenant compte de la masse des éléments élastiques a été également cherché. Le **quatrième** chapitre est proposé pour étudier les oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté ainsi des systèmes sans amortissement visqueux. Également au chapitre précédent, les équations différentielles, les caractéristiques et leurs présentations ont été étudiées. Ainsi les expressions des oscillations résonantes ont été cherchées. Le **cinquième** chapitre est consacré aux oscillations forcées des systèmes à 1ddl sous l'action des charges dynamiques arbitraires, tels que les oscillations forcées dues à la charge périodique, des charges impulsives semi-sinus, des charges arbitraires, oscillations forcées des systèmes sans amortissement -Intégrale du Duhamel- et avec amortissement ainsi le procédé numérique de

L'intégrale de Duhamel et en termine par des applications. Le **sixième** chapitre est consacré aux oscillations non linéaires. En traitant la méthode de l'intégration Pas à Pas. Le **septième** chapitre est consacré aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. L'établissement des équations différentielles des oscillations en flexion ainsi la détermination des matrices de rigidité et d'amortissement. Les mêmes oscillations ont été cherchées par la méthode des forces. Le **huitième** chapitre fait l'objet de l'étude des oscillations libres et oscillations forcées des systèmes à ' n' degré de liberté. Les oscillations libres ont été déterminées ainsi les modes propres. Le **neuvième** chapitre est consacré à la méthode de composition de la solution en série des modes propres (méthode de superposition des modes). L'équation différentielle des différents systèmes : libres, amortie, forcées amortie et non amortie ont été établies.

Le chapitre **dixième** est consacré aux méthodes pratiques de recherche des fréquences propres et des modes propres. La méthode de Stodola sera étudiée. À la fin de chaque chapitre, des applications qui me semblent utiles à la compréhension de différents phénomènes ont été proposées.

À la fin de chaque chapitre, des applications qui me semblent utiles à la compréhension de différents phénomènes ont été proposées

# Chapitre 1 : Rappel de la mécanique

## 1 Introduction

La mécanique newtonienne (ou classique) est l'étude des corps en mouvement (dynamique) ou des corps au repos (statique). Le mot "statique" signifie ici équilibre, le corps ne subit aucune condition dynamique (accélération, force sont nuls).

### 1.1 Le Principe de d'Alembert

Une masse produit une force proportionnelle et opposée à son accélération est connu sous le nom de principe de d'Alembert

#### 1) Force d'inertie

- Principe de d'Alembert pour un point matériel

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_I = 0$$

- Principe d'Alembert pour un système de point matériel

Si à chaque moment on ajoute au système des forces d'inertie

correspondants, le système obtenu est en équilibre

$$\vec{F}_{I_k}, \vec{F}_{I_k}, \vec{F}_{e_k} \quad k=1,2,3,4,\dots, N$$

et vérifier les conditions d'équilibre de la statique

$$\sum \vec{F}_{I_k} + \sum \vec{F}_{I_k} + \sum \vec{F}_{e_k} = \vec{0}$$

#### 2) Le moment des forces

$$\sum M_0(\vec{F}_{e_k}) + \sum M_0(\vec{F}_{I_k}) + \sum M_0(\vec{F}_{I_k}) = \vec{0}, \text{ avec } \sum M_0(\vec{F}_{I_k}) = 0$$

$$\sum \vec{F}_{e_k} + \vec{R}_I = \vec{0}$$

(1.1)

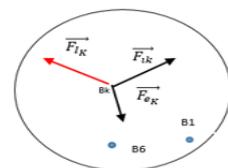
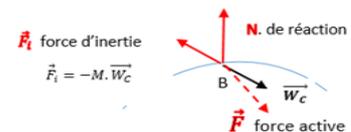


Fig.2.1: Equilibre d'un système de points

$$\sum M_0(\vec{F}_{eK}) + \vec{M}_{I_0} = \vec{0} \tag{1.2}$$

Les formules du vecteur résultant  $\vec{R}_I$  et le moment résultant  $\vec{M}_{I_0}$  des forces d'inerties.

**Conclusion**

a) Un corps solide en mouvement plan

Dans ce cas, les forces d'inerties du corps solide peuvent être remplacées par deux composantes.

- Une force de module égale au produit  $M \cdot \vec{W}_C$  et de sens opposé de  $\vec{W}_C$

$$\vec{R} = -M \cdot \vec{W}_C$$

$$(1.3)$$

M : masse totale du corps

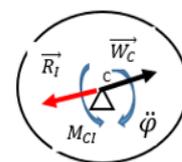


Fig.2.2 : Mouvement plan

- Un couple de moment égal un module au produit

$J_C \ddot{\phi}$ , est de signe opposé de  $\ddot{\phi}$

$$M_{CI} = -J_C \ddot{\phi}$$

$$(1.4)$$

b) Un corps solide en mouvement de rotation autour du point C

$$\vec{W}_C = 0 \rightarrow \vec{R}_{CI} = 0$$

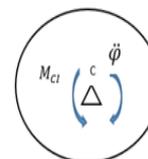


Fig.2.3 : Mouvement de rotation

Il reste,  $M_{CI} = -J_C \ddot{\phi}$  dans ce cas  $F_I$  se remplace par un couple

c) Un corps solide en mouvement de translation

$$\ddot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = -M \cdot \vec{W}_C$$

$$(1.5)$$

**1.2 Le principe de déplacement virtuel (Lagrange)**

a) *Déplacement virtuel* : Le déplacement d'un système est l'ensemble de déplacements infiniment petit et compatible aux liaisons du système.

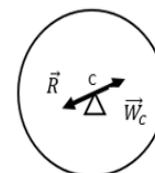
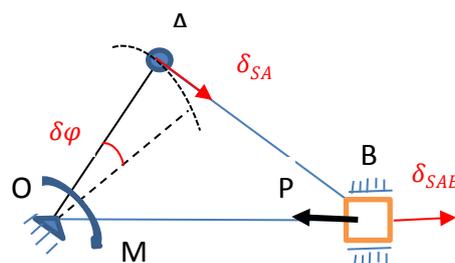


Fig.2.4: Mouvement de translation

- Un mécanisme (Bielle manivelle)

Les déplacements virtuels sont :

- $\delta$  possède les propriétés différentielles ;
- Les déplacements virtuels ne sont pas indépendants



Nous pouvons prendre un déplacement comme référence et exprimer les autres en fonction de ce déplacement choisi. Fig.2.5 : Système bielle manivelle

Le nombre de déplacement virtuel indépendants, s'appelle le nombre de degré de liberté (ddl).

b) *Le Travail Virtuel* : le travail de la force active appliquée sur un déplacement virtuel s'appelle le travail virtuel de cette force.

$$\delta A_p = -P\delta_{SB} \quad \text{Travail virtuel de la force } \vec{P}$$

$$\delta A_M = M \cdot \delta\varphi \quad \text{Travail virtuel du mouvement du point M}$$

### 1.3 Le principe du travail virtuel (W.V.)

Pour un système soumis aux liaisons parfaites (idéales) soit en équilibre. Il faut et il suffit que la somme des W.V de toutes les forces actives appliquées sur les déplacements virtuels (D.V = 0).

La condition d'équilibre du mécanisme considéré  $\delta A_p + \delta A_M = 0$

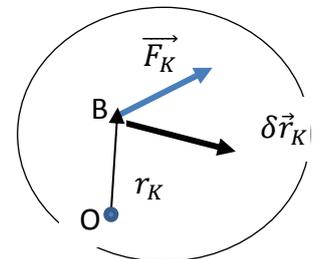
La condition d'équilibre de la bielle manivelle

$$-P\delta_{SB} + M \cdot \delta\varphi = 0$$

Pour un système général nous désignons

$F_K$  : Force active appliquée  $B_K$

$\delta r_K$  : Déplacement virtuel  $B_K$



$$\sum \delta A = \sum \vec{F}_K \delta \vec{r}_K = 0 \tag{1.6}$$

Si on a  $\vec{F}_K \begin{cases} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{cases}$  et  $\delta \vec{r}_K \begin{cases} \delta_{xk} \\ \delta_{yk} \\ \delta_{zk} \end{cases}$

Alors  $\sum (X_K \delta_{xk} + Y_K \delta_{yk} + Z_K \delta_{zk}) = 0 \tag{1.7}$

### 1.4 Equation générale de la dynamique

Nous avons connu que :

- Le principe de d'Alembert ramène un problème dynamique au problème statique

- Le principe de D.V nous donne les conditions d'équilibre pour un système aux liaisons parfaites (conditions d'équilibre statique).

Donc, si nous utilisons simultanément ces deux principes, nous obtenons un procédé général de la résolution d'un problème dynamique.

Les équations de Lagrange sont les équations de mouvements du système en coordonnées généralisées. Pour un système de degré de liberté (ddl), l'équation est donnée par

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.8)$$

T : énergie cinétique,  $q_j$  : Coordonnées généralisées,  $\dot{q}$  : Vitesse généralisées

$Q_j$  : Forces généralisées correspondant au coordonnée  $q_j$

Pour déterminer la force  $Q_j$ , il existe deux cas :

1<sup>ère</sup> cas des forces potentielles

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (1.9)$$

V : énergie potentielle

$Q_j = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$ , D : energie de dissipation ( $D = \frac{1}{2} C \cdot \dot{q}^2$ ) et C, coefficient d'amortissement

2<sup>ème</sup> cas des forces non potentielles

Les forces généralisées peuvent être déterminer par le procédé suivant :

Communiquer au système un D.V puis en détermine la somme des travaux virtuel sur ce déplacement.

Pour un système à S ddl on a

$$\sum \delta A = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2 + \dots \dots + Q_s \delta \varphi_s \quad (1.10)$$

$Q_i$  : Force généralisées correspond

*Conclusion* : Les coefficients des coordonnées généralisées dans l'expression des travaux virtuels s'appellent « forces généralisées correspondantes »

### 1.5 Exemple explicatif

Soit un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $L$  oscillé autour de  $O$ , voir figure

On demande de chercher l'équation de mouvement de la masse  $m$

1) On sait d'avance la nature de la force de pesanteur est une force qui dérive d'un potentiel.

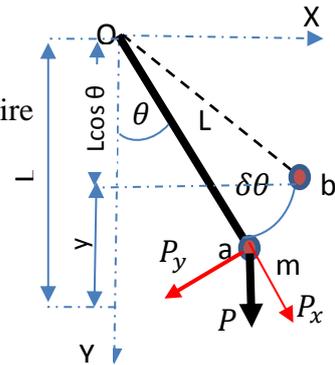
Donc, on cherche la solution en appliquant le Lagrangien  $L = T - V$

Avec  $T$ , énergie cinétique et  $V$ , Energie potentielle

$$- \quad T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{avec} \quad v = l \cdot \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} \quad \text{est la vitesse angulaire}$$

$$L'energie cinétique est \quad T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$- \quad \text{Énergie potentielle est} \quad V = mgy = mgl(1 - \cos\theta)$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Alors, } L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin\theta$$

$$\text{Donc l'équation (1) devient :} \quad m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin\theta = 0$$

$$\text{Ou bien} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \quad \text{avec} \quad \theta \ll 1, \quad \sin\theta \simeq \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\text{Équation du mouvement})$$

2) Dans le cas où on ne sait pas la nature des forces appliquées sur le système, on utilise la forme de l'équation (1.8)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_j, \quad Q_j \text{ Est la force généralisée}$$

*Remarque :*

Cette forme est générale, elle est applicable pour les forces conservatives (dérivent d'un potentiel) ou non conservatives

En se basant sur l'énergie cinétique  $T$ , on trouve les deux termes de l'équation (1.8)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

Pour déterminer la force généralisée  $Q_j$  on va communiquer au système un déplacement virtuel

Le travail virtuel  $A = -P_y \cdot \widetilde{ab}$  avec  $P_y = mgsin\theta$  (la force active)

Le signe (-) est dû au sens contraire de déplacement

$P_x$ , est non active (ne produit pas de travail  $A=0$ )

et l'arc  $\widetilde{ab} = l \cdot \delta\theta$  (déplacement virtuel)

D'où,  $A = -m g l \sin\theta \delta\theta$ , le terme  $Q_j = -m g l \sin\theta$  est la force généralisée

Remplaçant dans l'équation (1.8) on obtient ;

$m l^2 \ddot{\theta} + 0 = -m g l \sin\theta$ , donc l'équation du mouvement est  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$  C'est le même résultat

Pour plus de détail, voir le module de la mécanique analytique.

# Chapitre 2 : Notions Générales

## 2. Formulation des équations différentielles des oscillations

### 2.1 Objet du module

Les déplacements et les contraintes des structures en oscillation

Ex : un portique

On cherche les solutions à limiter les oscillations nuisibles, si le moteur fonctionne avec une vitesse quelconque, la résonance est produite.

Dans ce module la terminologie de structure signifie :

- Une machine
- Un détail de machine
- L'ensemble d'un bâtiment ;

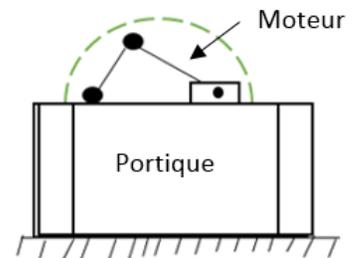


Fig.2.1 : Machine sur un portique

### 2.2 Classification des forces appliquées au système en oscillation

Les forces se produisent en 3 catégories

- Force de rappel (Force élastique) ;
- Force d'amortissement ;
- Force dynamique.

2.2.1 Force de rappel

Un système susceptible de vibrer se compose de deux éléments

- Une masse
- Un élément élastique

Exemple : Une machine tournante et forcée sur les fondations

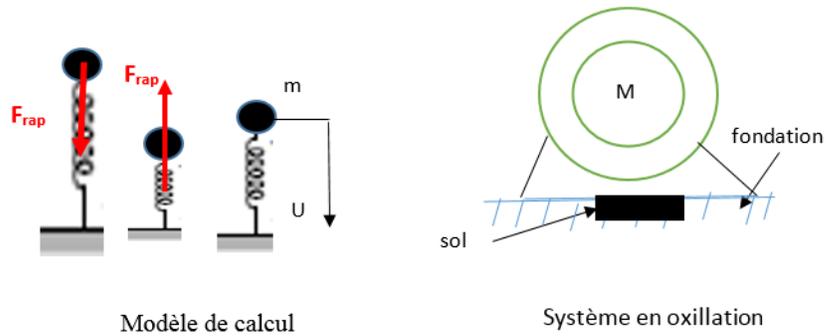


Fig. 2.2 : Modèle de calcul

Un sol : est un élément élastique provoque une force de rappel qui tend à ramener la masse à la position initiale.

- Force de rappel est appelé force élastique ou bien force de réaction des éléments élastiques

Considérons quelques diagrammes représentant les relations entre la force élastique et l'allongement du matériau.

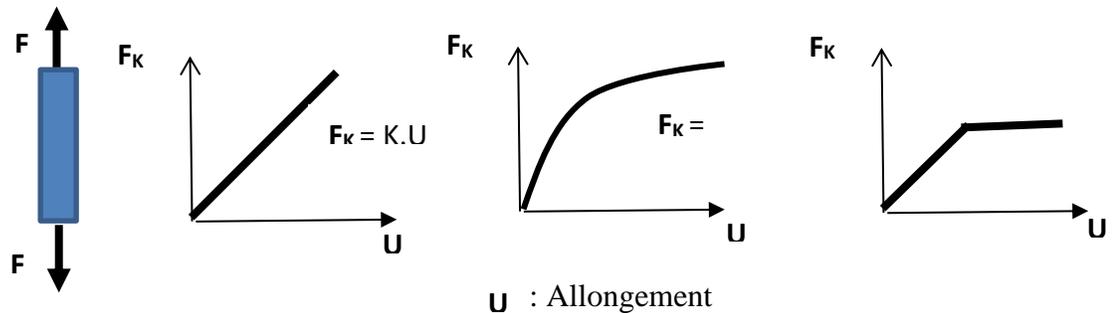


Fig. 2.3 : Relation entre Force élastique et allongement

$F_K$  Proportionnelle à l'allongement ,  $K$  : Coefficient de rigidité

**1<sup>ère</sup> Cas** : Elastique linéaire les oscillations correspondantes, s'appellent les oscillations linéaires.

**2<sup>ème</sup> Cas** : Non linéaire les oscillations correspondantes, s'appellent les oscillations non linéaires.

**3<sup>ème</sup> Cas** : Le cas du matériau élasto-plastique, les oscillations correspondantes, s'appellent les *élasto-plastique*.

### 2.2 .2 Forces d'amortissements

Ce sont les forces engendrées aux appuis aux articulations (force de frottement) et les forces du milieu dans lequel des oscillations.

Pour la structure considéré la force de résistance de l'air et la force d'amortissement. Dans ce cas, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse  $\dot{U}$  nous obtenons la relation suivante

$$F_C = C \cdot \dot{U}$$

C : Coefficient d'amortissement,  $F_C$  : Force d'amortissement

$F_C$  est toujours du sens opposé avec  $\dot{U}$  en général  $F_C = f(\dot{U})$

### 2.2.3 Force dynamique

Les forces dynamiques sont des forces qui varient avec le temps et qui engendre les oscillations forcées du système. Pour le moteur considéré, la machine tournante considère la force d'inertie centrifuge de la partie tournante comme force dynamique.

e : Centre de masse du rotor

O : centre géométrique du rotor

OC = e : excentricité

M : masse de rotor

$\omega$  : vitesse angulaire

$F_I = me\omega^2$  (Force centrifuge)  $\rightarrow$  force dynamique

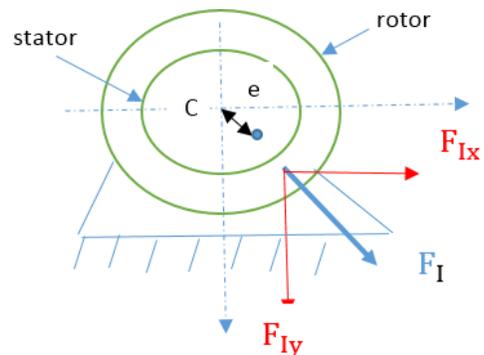


Fig. 2.4 : Les composantes de la force d'inertie

$\varphi$  : angle de rotation du rotor  $\varphi = \omega t$

Forces dynamiques 
$$\begin{cases} F_{Iy} = F_I \cos \omega t = m e \omega^2 \cos \omega t \\ F_{Ix} = F_I \sin \omega t = m e \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$F_{Iy}$  : engendre les oscillations verticales

$F_{Ix}$  : engendre les oscillations horizontales

### 2.3 Classification des forces dynamiques

a) Les forces dynamiques périodiques  $P(t)$  varient périodiquement avec le temps

Force Harmonique 
$$\begin{cases} P(t) = P_0 \sin \omega t \\ P(t) = P_0 \cos \omega t \end{cases}$$

b) Les forces dynamiques non périodique varient arbitrairement (force de choc, force d'explosion), il y a un maximal et un minimal

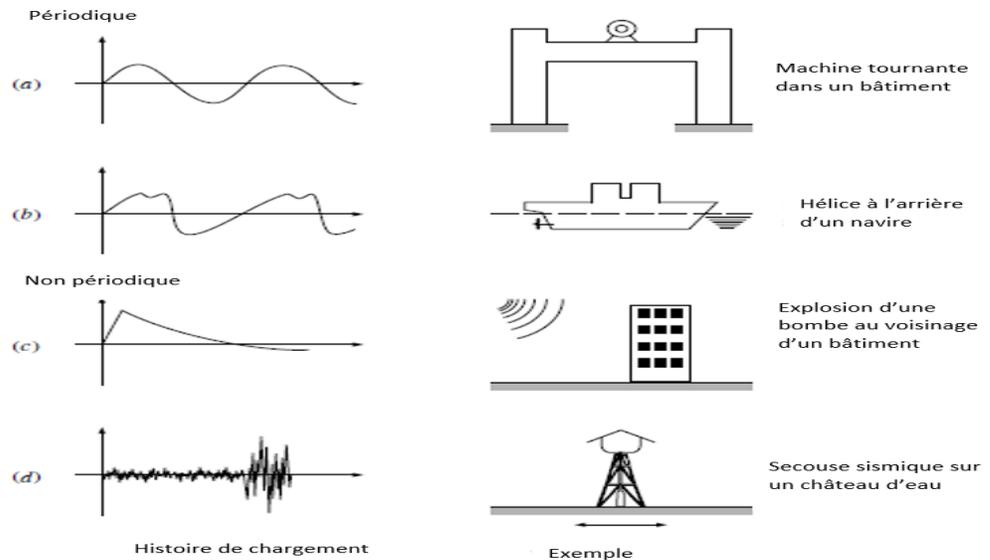


Fig. 2.5 Classification des charges dynamiques

### 2.4 Le modèle de Calcul

#### 2.4 .1 Modélisation des structures réelles

Pour établir les oscillations des structures réelles, il faut remplacées par des modèles simplifiés qui peuvent s'adopter aux instruments mathématiques.

- Le cas où la structure effectuée des oscillation verticales, un système à 2 ddl figure (2.6a)

- Dans le cas des oscillations horizontales, une colonne verticale portant trois masses peut engendrer la flexion horizontale.

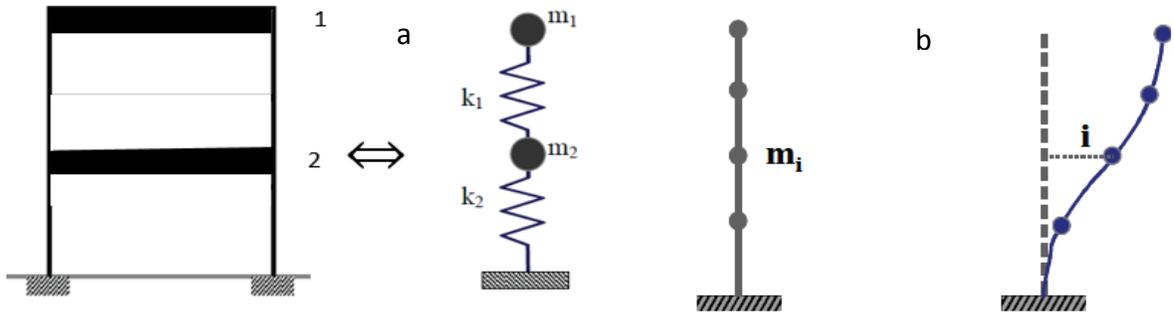


Fig.2.6 : Types des oscillations : a) horizontales, b) verticales

**Exemple à 2 d.d.l**

- m1 : moteur
- m2 : fondation
- K1 : plaque élastique
- K2 : sol

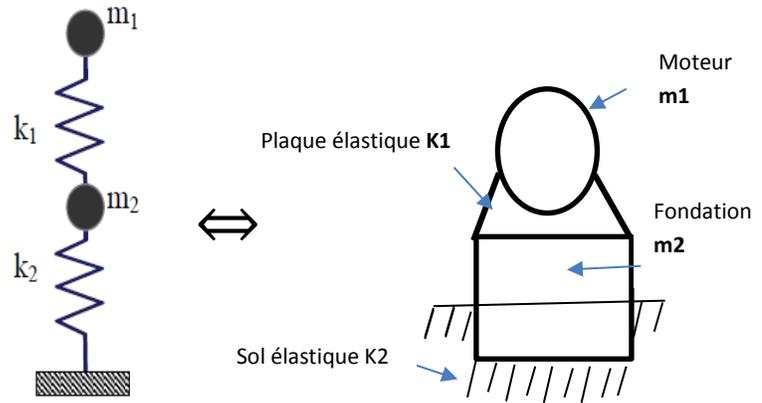


Fig. 2.7: Modélisation d'un système de deux degrés de liberté

- Si la masse de la barre est considéré comme concentrée en nombre fini de points (7 ddl) figure (2.8a)
- Si la masse est considérée comme répartie le long de la barre, un système (à nombre infini ddl) figure (2.8b)



Fig.2.8 : Poutre a) nombre fini



b) nombre infini (charge répartie)

## 2.5 Etablissement des équations différentielles des oscillations

### 2.5.1 Equation de déplacement :

Les équations qui représentent les déplacements du système par rapport au temps s'appellent les équations du déplacement

Si vous connaissez  $U(t) = A \sin \omega t$

Après avoir connue les équations des déplacements, nous pouvons calculer les autres éléments (déformée dynamique, contraintes dynamiques).

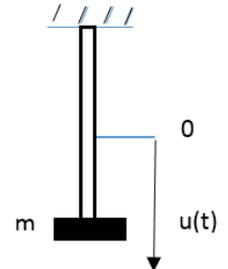


Fig.2.9

### 2.5.2 Equation différentielle de déplacement

Pour obtenir les équations de déplacement, il faut d'abord établir les équations sous les formes différentielles.

- Les équations  $\rightarrow$  équations différentielles des déplacements des oscillations.
- Etablissement des équations différentielles des oscillations  $\rightarrow$  une phase très importante

### 2.5.3 Méthodes utilisables

En général, on peut utiliser les méthodes connues.

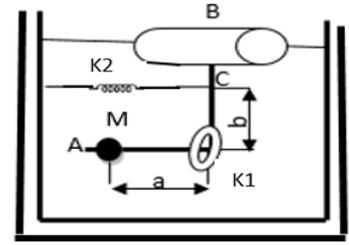
- Le principe de d'Alembert ;
- Le principe d'Alembert- Lagrange ou équation générale de la dynamique ;
- Les équations de Lagrange ;
- Le principe de Hamilton.

Pour des cas particuliers, on peut utiliser d'autres méthodes.

#### Exemple 1

Dans un appareil destiné à l'enregistrement des oscillations verticales. Le levier AOB est lié à un ressort spiral de rigidité  $K_1$  (N.m /rad), et un ressort de rigidité  $K_2$  (N/m). Le poids  $P$  est accroché au levier, le moment d'inertie du levier par rapport à l'axe de rotation est  $I$ . voir figure (2.10).

1. Ecrire l'équation différentielle des oscillations du système ?
2. Déterminer la période  $T$  des oscillations, si  $OA = a$  et  $OB = b$ .

Fig.2.10 : appareil d'enregistrement *Remarque*

Si nous prenons la position statique du système comme l'origine des axes du repère, la masse du corps vibrant et l'allongement statique du ressort ne se présentent pas dans le résultat final. Pour simplifier le processus d'établir les équations différentielles, nous pouvons dès le début négliger le poids vibrant est l'allongement statique.

### Solution

- Système possède 1ddl;
- Coordonnée généralisé  $\varphi(t)$ .

Origine du repère, est la position d'équilibre statique (position horizontale). Les deux ressorts sont déjà comprimés.

- Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_v \quad \text{Avec la coordonnée généralisée } q = \varphi$$

Energie cinétique

$$T_t = T_{lev} + T_m = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (I_0 + m a^2) \dot{\varphi}^2$$

- Energie potentielle

$$V = V_K + V_m + V_{ks} = \frac{1}{2} K b^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} K_s \varphi^2 = \frac{1}{2} (K b^2 + K_s) \varphi^2$$

$V_m = 0$  Position d'équilibre à l'origine

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (I_0 + m a^2) \ddot{\varphi}$$

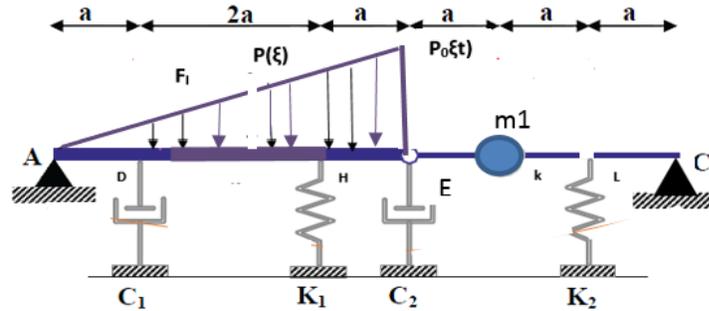
$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad \text{et} \quad Q_v = - \frac{\partial V}{\partial q} = - (K b^2 + K_s) \varphi$$

L'équation de mouvement est :

$$(I_0 + ma^2)\ddot{\varphi}(t) + (K b^2 + K_s)\varphi(t) = 0$$

Exemple 2 :

Etablir l'équation différentielle de la poutre schématisée ci-dessous.



*Solution*

- C'est un système à 1ddl
- Prenons comme coordonnée généralisée le déplacement du point B
- Considérons aussi que la position horizontale du système, position d'équilibre statique

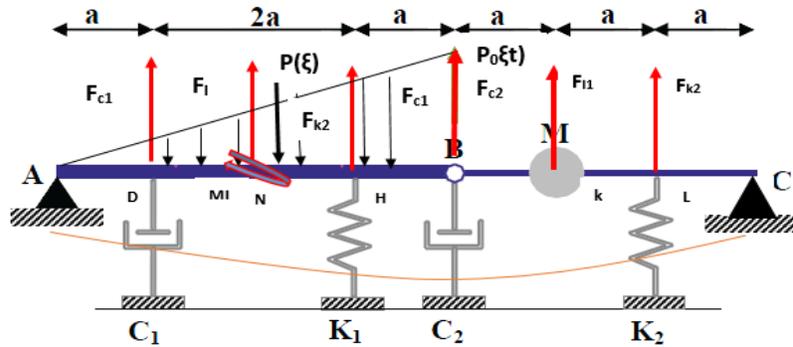


Fig.2.11 : Poutre sous différentes charges en flexion

Nous cherchons les différents déplacements possibles

Soit le déplacement du point B est  $U_B(t)$

$$u_B(t) = \frac{2}{3} U(t) \Rightarrow \dot{u}_B = \frac{2}{3} \dot{U} \quad \text{et} \quad u_H(t) = \frac{3}{4} U(t), \quad u_D(t) = \frac{1}{4} U(t)$$

$$u_K = \frac{2}{3} U(t) \Rightarrow \dot{u}_k = \frac{2}{3} \dot{U}_k(t) = \frac{2}{3} \dot{U}$$

$$u_L = \frac{1}{3} U(t) \Rightarrow \dot{u}_L = \frac{1}{3} \dot{U}_L(t) = \frac{1}{3} \dot{U}$$

$$u_N = \frac{1}{2} U(t) \Rightarrow \dot{u}_N = \frac{1}{2} \dot{u}_L(t) = \frac{2}{3} \dot{U}$$

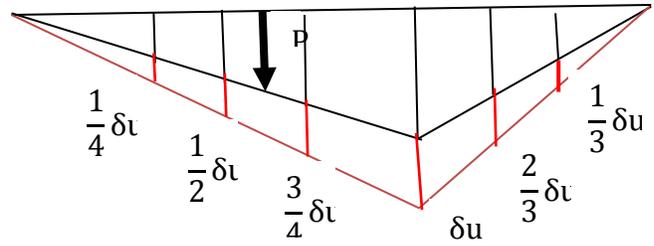


Fig. 2.12 Système des forces appliquées

La méthode appliquée est l'équation générale de la dynamique.

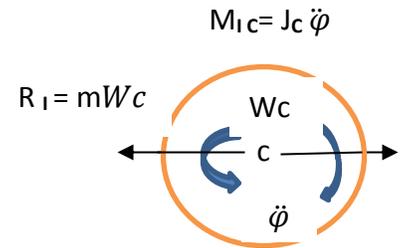
a) Forces réelles

- La force dynamique  $P(\xi) = P_0 \xi(t) \frac{4a}{2} = 2a P_0 \xi(t)$

- Force de rappel  $\begin{cases} F_{K1} = K_1 u_H = \frac{3}{4} K_1 U \\ F_{K2} = K_2 u_C = \frac{1}{3} K_2 U \end{cases}$

- Forces d'amortissements  $\begin{cases} F_{C1} = C_1 \cdot \dot{u}_D = C_1 \cdot \frac{1}{4} \dot{U} \\ F_{C2} = C_2 \cdot \dot{u}_B = C_2 \cdot \dot{U} \end{cases}$

- Forces d'inerties  $F_{I1} = m_1 \ddot{u}_K = m_1 \cdot \frac{2}{3} \ddot{U}$



La barre AB est considérée comme mouvement plan

$$F_I = m \ddot{u} = \frac{1}{2} m \ddot{U}$$

$$M_{IN} = J_n \ddot{\varphi} \quad \text{avec} \quad J_n = \frac{1}{3} m(4a)^2 \quad \text{et} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{U}}{4a}$$

$$M_{IN} = \frac{1}{3} m(4a)^2 \frac{\ddot{U}}{4a} = \frac{4}{3} ma \ddot{U}$$

Communiquer au système un déplacement vertical  $\delta u$

Le principe des travaux virtuels est donné par :

$$\sum(\delta A_F + \delta A_{FI}) = 0 \tag{2.1}$$

$$-F_{C1} \frac{1}{4} \delta u - F_I \frac{1}{2} \delta u - M_I \delta \varphi + \frac{2}{3} P(\xi) \delta u - F_{K1} \frac{3}{4} \delta u - F_{C2} \delta u - F_I \frac{3}{2} \delta u - F_{K2} \frac{1}{3} \delta u = 0 \tag{2.2}$$

$$\text{Avec} \quad \delta \varphi = \frac{\delta u}{4a} \quad \text{et} \quad \delta u \neq 0$$

Remplaçant les expressions de toutes les forces dans (2.2)

$$\left(\frac{4}{9}m_1 + \frac{4}{3}m\right)U\ddot{(t)} + \left(\frac{C_1}{16} + C_2\right)\dot{U}(t) + \left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{1}{9}K_2\right)U(t) = \frac{2}{3}P(\xi) \quad (2.3)$$

Désignons

$$M^* = \frac{4}{9}m_1 + \frac{4}{3}m \quad , \quad C^* = \frac{C_1}{16} + C_2 \quad , \quad K^* = \frac{9}{16}K_1 + \frac{1}{9}K_2$$

$$, P^*(t) = \frac{4}{3}a.P_0(\xi)$$

L'équation devient

$$M^*\ddot{U}(t) + C^*\dot{U}(t) + K^*U(t) = P^*(t) \quad (2.4)$$

Equation des oscillations du système considéré dont laquelle  $M^*, C^*, K^*, P^*$  s'appelle respectivement :

- Masse généralisée, Amortissement généralisée, Rigidité généralisée, Force généralisée.

Remarque :

Quel que soit la complexité du système considéré, l'équation différentielle des oscillations des systèmes à 1 ddl possède la forme générale (2.4)

## 2.6 Applications

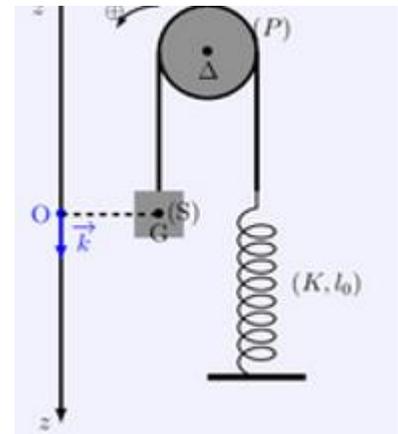
Ex1: Un fil inextensible et sans masse s'enroule autour d'une roue de masse  $M$  est de rayon  $R$ . le fil est lié aux deux bouts avec un poids de masse  $m$  et avec un ressort de rigidité  $K$ . En négligeant les

frottements à l'axe, établir l'équation différentielle du système en appliquant. :

- La méthode du principe de d'Alembert
- La méthode du principe des travaux virtuels
- La méthode de l'équation de Lagrange

*Solution*

- Le système considéré : corps B, fil, ressort, Roue. Le système à 1 degré de liberté (1ddl)
- $u$  : Coordonnée généralisée



- Prenant O comme position d'équilibre statique
- La force de rappel statique du ressort  $F_k$

$P = mg = Ku_0$  ,  $u_0$  : allongement statique du ressort

A la position quelconque  $\begin{cases} u(t) : \text{déplacement de la masse} \\ \varphi(t) : \text{angle de rotation de la masse} \end{cases}$

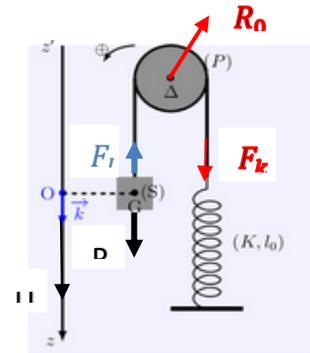
Le déplacement  $u$  égale à l'Arc  $ab$  d'où  $u = \widehat{ab} = R \cdot \varphi \rightarrow \dot{u} = R \dot{\varphi}$

Les forces appliquées au système Forces réelles  $\begin{cases} p, \text{ le poid du corp B} \\ P, \text{ le poid de la roue} \\ \text{Réaction de l'appui } R_0 \end{cases}$

- Force de rappel  $F_k = K(u + u_0)$
- Force d'inertie  $F_I = m \ddot{u}$  , en translation  
 $M_I = J_0 \ddot{\varphi}$  (de la masse en rotation),  $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{u}}{R}$

Avec  $\ddot{u}$  : accélération du point B,  $J_0$  : moment d'energie, pour une

Roue  $J_0 = \frac{MR^2}{2}$



D'après le principe de d'Alembert, toutes les forces en équilibre statique

$$\sum M_0(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow -p \cdot R + F_I \cdot R + F_k \cdot R + M_I = 0$$

$$-mg \cdot R + m \ddot{u} \cdot R + K(u + u_0) \cdot R + \frac{MR^2}{2} \frac{\ddot{u}}{R} = 0$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right) \ddot{U} + K \cdot U + (Ku_0 - mg) = 0 \quad \text{Avec } mg = Ku_0 \text{ (à l'équilibre statique)}$$

Donc,  $\left(m + \frac{M}{2}\right) \ddot{U}(t) + K \cdot U(t) = 0$  c'est l'équation du mouvement

2) Le principe des travaux virtuels

Pour un système soumis aux liaisons parfaites en équilibre, il faut et il suffit que la somme de toutes les forces appliquées aux systèmes sur un déplacement quelconque soit égale à zéro.

- a) Déterminer les forces appliquées au système y compris les forces d'inerties

b) Communiquer au système un déplacement virtuel quelconque par exemple  $\delta u$ , la roue effectue  $\delta\varphi$ . Avec  $\delta\varphi = \frac{\delta u}{R}$ , Nous obtenons  $\sum \delta A = 0$

$p \cdot \delta u - F_l \cdot \delta u - F_k \cdot \delta u - M_l \delta\varphi = 0$  (Rendre l'équation à 1 ddl, en remplaçant la valeur de  $\varphi$ )

$$p \cdot \delta u - F_l \cdot \delta u - F_k \cdot \delta u - M_l \frac{\delta u}{R} = 0$$

$$\left( p - F_l - F_k - \frac{M_l}{R} \right) \delta u = 0 \Rightarrow p - F_l - F_k - \frac{M_l}{R} = 0$$

En remplace les forces par leurs valeurs.

$$\left( m + \frac{M}{2} \right) \ddot{u}(t) + K \cdot u(t) = 0 \quad \text{C'est l'équation du mouvement}$$

c) Appliquant l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j=1,2,3,4,\dots \quad \text{Avec force généralisée } Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

La coordonnée généralisée  $u$ , l'équation précédente prend la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_u \quad \text{avec } Q_u = - \frac{\partial V}{\partial u}$$

*Energie cinétique*  $T = T_b + T_{roue}$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left( \frac{\dot{u}}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{2} M \right) \dot{u}^2$$

*Energie potentielle*

Système potentiel : c'est-à-dire l'énergie totale reste constante pendant le mouvement

$V = V_p + V_{Fk}$  (Energie de la masse et du ressort)

$$V = P \cdot h + \frac{1}{2} K x^2 = -mg \cdot u + \frac{1}{2} K (u + u_0)^2$$

$$Q_u = - \frac{\delta V}{\delta u} = mg - Ku - Ku_0 = -Ku_0$$

Finalement,  $\left( m + \frac{M}{2} \right) \ddot{u}(t) + K \cdot u(t) = 0$

Ex2 : Trouver l'équation de mouvement d'une plaque rectangulaire de masse  $m$  attachée à un ressort de rigidité  $k$  au point C. Une force  $p(t)$  est appliquée au point A qui laisse la plaque oscillée autour du point O. En appliquant le formalisme de Lagrange

1) Trouver l'équation du mouvement.

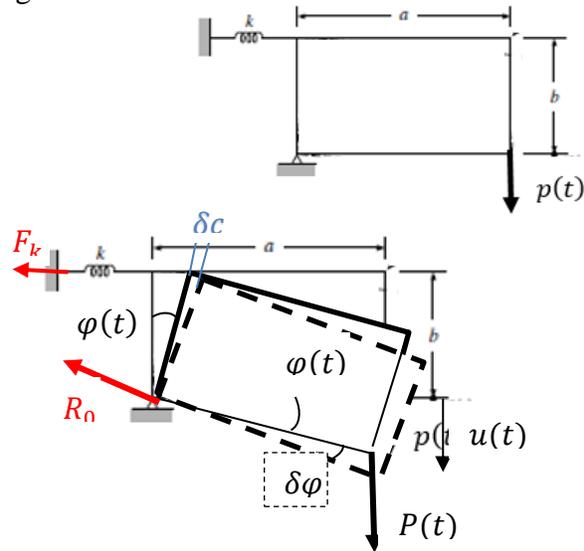
*Solution*

La force appliquée  $p(t) = p_0 \sin \omega t$

Equation différentielle du système

- C'est un système à 1ddl

- C.G.  $u(t) \begin{cases} \varphi(t) = \frac{u(t)}{a} \\ \dot{\varphi} = \frac{\dot{u}(t)}{a} \end{cases}$



La position dont laquelle OA horizontal et la position d'équilibre statique.

Nous prenons cette position comme position initiale.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{u}} \right) - \frac{\delta T}{\delta u} = Q_u, \text{ le système considéré est non potentiel donc } Q_u = - \frac{\delta V}{\delta u}$$

$$\text{Energie cinétique } T = T_{oabc} = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{m(a^2+b^2)}{3} \frac{\dot{u}^2}{a^2}$$

Pour déterminer la force généralisée d'un système non potentiel, il faut communiquer au système un déplacement virtuel et par la suite, en calcul les travaux virtuels des forces appliquées.

$$\sum \delta A_F = 0 \Rightarrow -F_K \delta u + p(t) \delta u = 0 \quad \text{avec } \delta u = \frac{b}{a} \delta u$$

$$-K \frac{u}{a} \cdot \frac{b}{a} \delta u + p(t) \delta u = 0$$

$$= (p(t) - K \frac{b^2}{a^2} u) \delta u, \text{ donc la force généralisée est : } Q_u = p(t) - K \frac{b^2}{a^2} u$$

$$\text{Finalement } \frac{M(a^2+b^2)}{3 a^2} \ddot{U}(t) + K \frac{b^2}{a^2} U(t) = p_0 \sin \omega t \text{ (Équation du mouvement)}$$

# Chapitre 3 : Oscillations des systèmes à un degré de liberté

## 3. Oscillations libres des systèmes à 1ddl

### 3.1 Introduction

#### a) Model de Calcul

1) Model : Nous avons connu que beaucoup de systèmes réels en vibration sont considéré une masse liée à un ressort et amortisseur. Par exemple :

- Machine tournante posée sur terre (a)
- Château d'eau soumis à l'explosion (b)
- Assemblage des barres rigides

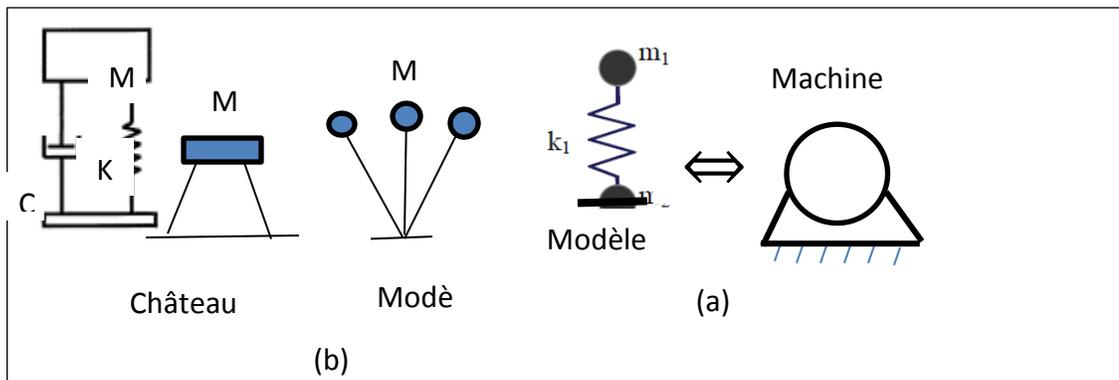


Fig.3.1 : les Modèles de quelques Systèmes

L'équation différentielle des oscillations prend la forme suivante :

$$M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = P(t) \quad (3.1)$$

### b) Classification des oscillations

- Si  $C = 0$  et  $P(t) = 0 \rightarrow M \ddot{U}(t) + K U(t) = 0$  c'est le cas des oscillations Libres non amorties
- Si  $P(t) = 0 \rightarrow M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = 0$  c'est le cas des oscillations libres amorties
- Si  $P(t) \neq 0 \rightarrow M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = P(t)$

Selon la forme de la charge  $P(t)$  Soit :

$$P(t) \begin{cases} P(t) = P_0 \sin \omega t \\ P(t) \text{ parfaitement arbitraire} \end{cases} \quad \text{dans ce cas les oscillations dites **forcées**}$$

### 3.1.1 Les oscillations libre non amorties

#### 3.1.1.1 Equation différentielle des oscillations

Dans ce cas  $C = 0$  et  $P(t) = 0$ , alors l'équation devient

$$M \ddot{U}(t) + K U(t) = 0 \quad (3.2)$$

$$\ddot{U}(t) + \frac{K}{M} U(t) = 0$$

$$\ddot{U}(t) + \omega^2 U(t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{Avec } \omega^2 = \frac{K}{M} \quad (s^{-1})$$

La solution de (3.3) est déterminée sous la forme

$$U(t) = C e^{\lambda t} \quad C \text{ et } \lambda \text{ sont des onstantes}$$

Remplaçant dans l'équation (3.3) Elle devient :

$$\lambda^2 C e^{\lambda t} + \omega^2 C e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{Équation caractéristique})$$

$$\text{Avec } C e^{\lambda t} \neq 0 \text{ alors}$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \omega$$

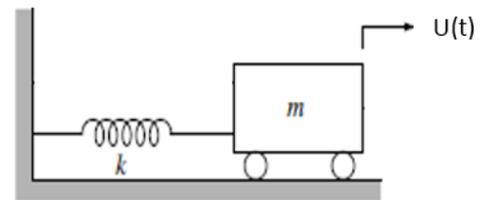


Fig.3.2 : Système non amortie

Donc  $U(t) = C e^{\pm i \omega t}$

On trouve d'après la formule d'Euler

$$U(t) = C (\cos \omega t \pm i \sin \omega t) \quad (3.4)$$

La solution a la forme la plus commode suivante

$$U(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.5)$$

A et B déterminer d'après les conditions initiale  $U(0)$  et  $\dot{U}(0)$

En effet, de l'équation (3.5) on obtient

$$\dot{U}(t) = A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t$$

$$\text{Pour } t=0 \quad \begin{cases} \text{de (3.6)} & U(0) = B \omega \\ \text{de (3.5)} & U(0) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \\ A = U(0) \end{cases} \quad (3.5a)$$

Remplaçant les constantes A et B dans (3.5)

$$U(t) = U(0) \cos \omega t + \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (3.6)$$

Une autre forme pour l'équation (3.5)

$$A = a \sin \theta \quad , \quad B = a \cos \theta$$

Donc,  $U(t) = a \sin \theta \cos \omega t + a \cos \theta \sin \omega t$

$$U(t) = a \sin (\omega t + \theta) \quad (3.7)$$

Avec  $(\alpha, \theta)$  nouvelles constantes déterminer par les conditions initiales  $U(0)$  et  $\dot{U}(0)$

$$\begin{cases} U(t) = a \sin (\omega t + \theta) \\ \dot{U}(t) = a \omega \cos (\omega t + \theta) \end{cases} \Rightarrow \text{pour } t=0 \quad \begin{cases} U(0) = a \sin \theta \\ \dot{U}(0) = a \omega \cos \theta \Rightarrow a \cos \theta = \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \end{cases}$$

$$\text{Donc,} \quad \begin{cases} a = \sqrt{u^2(0) + \left(\frac{\dot{U}(0)}{\omega}\right)^2} \\ \text{tg } \theta = \frac{U(0) \cdot \omega}{\dot{U}(0)} \end{cases} \quad (3.8)$$

*Conclusion*

La solution (3.3) peut se présenter sous deux formes (3.5,3.5a) et (3.7,3.8)

**3.1.1.2 Les caractéristiques des oscillations libres non amorties**

- Les oscillations exprimées par l'équation (3.5) ou (3.7) s'appellent les oscillations libres non amorties
- $\omega$  : S'appelle la fréquence propre
- La durée d'un cycle (d'une oscillation) s'appelle la période propre  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Déplacement maximal « a » Amplitude
- Le nombre des oscillations dans une seconde s'appelle fréquence cyclique  $f = \frac{1}{T}$

**a) Représentation cartésienne**

$$t \rightarrow x$$

$$U \rightarrow y$$

**b) Représentation de FRENEL**

(Représentation par un vecteur tournant)

Dans un plan complexe

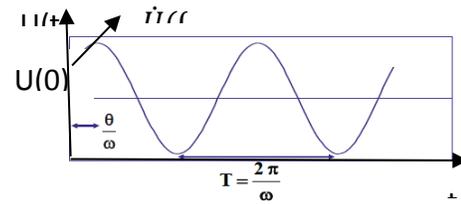


Fig.3.3 : Vibration libre d'un système non amorti

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$$

(3.9)

$$\begin{cases} OP = U(0) \\ OQ = \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \end{cases} \quad OP \perp OQ$$

$$ON = OP \cos\omega t + OQ \sin\omega t$$

$$ON = u(0) \cos\omega t + \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin\omega t \quad (3.10)$$

$$ON = OR \sin(\omega t + \theta) = a \sin(\omega t + \theta)$$

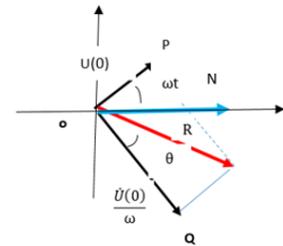


Fig.3.4 : Représentation de FRENEL

(3.11)

*Conclusion*

Le mouvement de la projection de N sur l'axe réel exprime les oscillations libres non amorties.

**3.1.1.3 Le coefficient de rigidité de quelques systèmes**

**a) Système masse- ressort**

La masse m est accrochée à un ressort de rigidité K

$$P = K\delta_{st} \quad \text{Si } P = 1 \rightarrow 1 = K \delta \Rightarrow K = \frac{1}{\delta}$$

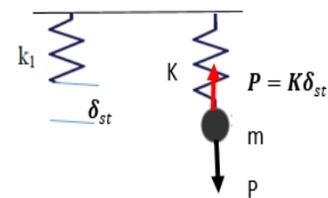


Fig.3.5 : système masse-ressort

$\delta$  : Allongement produit par une force unitaire ce coefficient est appelé coefficient de souplesse

*Conclusion*

Le coefficient de rigidité est l'inverse d'allongement du ressort produit par une force unitaire.

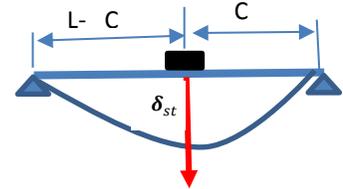
**b) Système masse- barre**

Sous l'action d'un poids du pesanteur P, la barre est déformée.

$$\delta_{st} = \frac{Pc^2(l-c)^2}{3EJ} \quad \text{avec } \delta_{st} : \text{flèche statique (voir RDM)}$$

Si  $P = 1 \rightarrow \delta = \frac{c^2(l-c)^2}{3EJ}$

$$P = K \delta \quad \text{La rigidité } K = \frac{3EJ}{c^2(l-c)^2}$$



Le coefficient de rigidité est l'inverse de la flèche produit par une force unitaire.

**3.1.1.4 La rigidité de quelques systèmes**

Le tableau suivant résume la rigidité de quelques systèmes quelques (différentes poutres)

Système	$\delta_{statique}$	$K = \delta^{-1}$	$\delta$	$\omega^2 = \frac{K}{M}$
	$\frac{Pc^2(l-c)^2}{3EJ}$	$\frac{3EJ}{c^2(l-c)^2}$	$\frac{c^2(l-c)^2}{3EJ}$	$\frac{3EJ}{mc^2(l-c)^2}$
	$\frac{Pl^3}{48EJ}$	$\frac{48EJ}{l^3}$	$\frac{l^3}{48EJ}$	$\frac{48EJ}{ml^3}$
	$\frac{Pl^3}{3EJ}$	$\frac{3EJ}{l^3}$	$\frac{l^3}{3EJ}$	$\frac{3EJ}{ml^3}$
	$\frac{Pl}{EA}$	$\frac{EA}{l}$	$\frac{l}{EA}$	$\frac{EA}{ml}$
	$\frac{Pb^2(b+l)^2}{12EJ}$	$\frac{12EJ}{b^2(b+l)^2}$	$\frac{b^2(b+l)^2}{12EJ}$	$\frac{12EJ}{M b^2(b+l)^2}$
Barre en torsion 	$\varphi_{st} = \frac{32lM}{Gd^4}$ G : module transversal	$\frac{Gd^4}{32l}$	$\frac{32l}{Gd^4}$	$\frac{Gd^4}{32lm}$
	$\varphi_{st} = \frac{64Ml}{\pi Ed^4}$ L : longueur du fil	$\frac{\pi Ed^4}{64l}$ E : module de Young	$\frac{64l}{\pi Ed^4}$ d : diamètre du fil	$\frac{\pi Ed^4}{64lm}$

Tableau 3.1 : Rigidité de quelques systèmes

### 3.1.1.5 Calcul des fréquences propres en tenant compte de la masse des éléments élastiques

Dans le cas, de la masse de la barre (ou du ressort) est faible par rapport à la masse vibrante, le système est considéré comme système à 1ddl.

Pour un problème technique, dans plusieurs cas on veut améliorer le résultat en tenant compte de la masse de la barre, on utilise la méthode approchée de **Rayleigh**

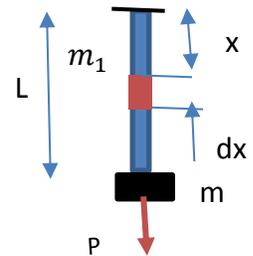
- *Hypothèses*

Masse des éléments élastiques influe avec insignifiance sur la configuration du mouvement du système.

$m$  : masse vibrante       $m_1$  : masse de la barre

Dans le cas  $m_1 = 0 \rightarrow K = \frac{EA}{\delta} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

Avec  $m_1 \neq 0$



D'après l'hypothèse de Rayleigh, le déplacement des éléments  $dx$  peut être exprimé

$$\frac{U_x(t)}{U(t)} = \frac{x}{l} \Rightarrow U_x(t) = \frac{x}{l} U(t) \quad (3.12)$$

Dans le cas de l'énergie cinétique de la masse       $T_m = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$

L'énergie cinétique totale

$$T = T_m + T_{barre}$$

$$T_{barre} = \int_0^L \frac{1}{2} dm_1 \left( \dot{U}(t) \frac{x}{l} \right)^2 \quad \text{Avec} \quad dm_1 = \frac{m_1}{l} dx$$

$$T_{barre} = \frac{1}{2} m_1 \frac{\dot{U}^2}{l^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_1 \dot{U}^2 \right)$$

$$\text{D'où } T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} m_1 \right) \dot{U}^2 \quad (3.13)$$

$$\text{Énergie potentielle } V \text{ pour } m_1 = 0, \quad V = \frac{1}{2} m K U^2 \quad (3.14)$$

D'après l'hypothèse  $V$  est la même

$$\text{Donc, l'équation de mouvementés } \left( m + \frac{1}{3} m_1 \right) \ddot{U} + K U = 0 \quad (3.15)$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m + \frac{1}{3}m_1} \quad \text{d'où la période} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_1}{K}}$$

La fréquence  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m + \frac{1}{3}m_1}}$  (3.16)

### 3.1.2 Applications

Ex1 : Calculer la rigidité de la poutre en flexion suivante.

Les réactions  $R_A = R_B = \frac{P}{2}$

Le moment  $M = R_A \cdot x = \frac{P}{2}x$

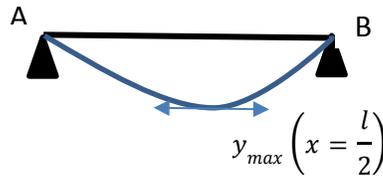
$$EJy'' = -M = -\frac{P}{2}x$$

$$EJy' = -M = -\frac{P}{2} \frac{x^2}{2} + C$$

$$EJy = -\frac{P}{2} \frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \quad (1)$$

Les constantes ( $C$  et  $C_1$ ) sont déterminées avec les conditions aux limites (CL) suivantes

$$\begin{cases} y'(x = \frac{l}{2}) = 0 \\ y(x = 0) = 0 \\ y(x = \frac{l}{2}) \rightarrow y_{max} \end{cases}$$



$$y(x = 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \text{et} \quad y'(x = \frac{l}{2}) = 0 \Rightarrow c = \frac{Pl^3}{16}$$

Remplaçant les constantes dans (1), alors l'équation de la flèche devient

$$EJy = -\frac{Px^3}{12} + \frac{Pl^3}{16}x \quad (2)$$

Pour  $y(x = \frac{l}{2}) \rightarrow y_{max} = \frac{Pl^3}{48 EJ}$

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48 EJ} \quad \text{Pour } P = 1, \text{ alors } \delta = \frac{l^3}{48 EJ} \quad (\text{coefficient de souplesse})$$

Donc  $K = \frac{1}{\delta} = \frac{48 EJ}{l^3}$  c'est la rigidité de la poutre

EX2 : Un escalier mécanique de poids  $P = 45 \text{ KN}$  descend avec la vitesse  $\dot{u} = 1 \text{ m/s}$  en arrêt brusquement la poulie. Déterminer la contrainte maximale du câble dont les caractéristiques sont :

$A = 16 \text{ cm}^2$ , longueur  $L = 18 \text{ m}$ , module d'élasticité  $E = 10000 \text{ KN/cm}^2$

.Solution

Le but est de chercher la contrainte totale après l'arrêt brusque de la cage

$$\sigma_{\text{totale}} = \sigma_{\text{sta}} + \sigma_{\text{dyna}}$$

A l'instant que nous arrêtons la poulie ( $t = 0$ ) la vitesse de la cage

est  $\dot{U} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  Prenons cette position comme position de repère.

La cage vibre autour de O, donc ce sont les oscillations libres non amorties.

$$M \ddot{U}(t) + KU(t) = 0 \Rightarrow \ddot{U}(t) + \frac{K}{M}U(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{U}(t) + \omega^2 U(t) = 0$$

La solution de cette équation est sous la forme

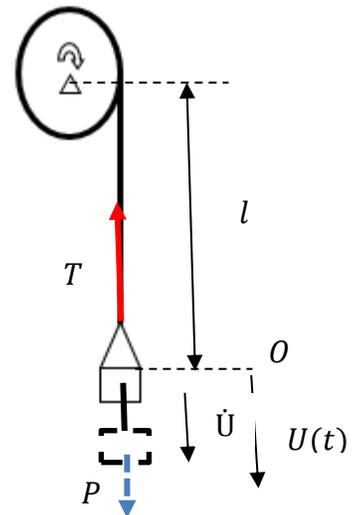
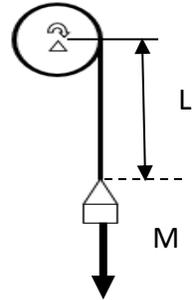
$$U(t) = U(0) \cos \omega t + \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin \omega t, \text{ Ou bien } U(t) = a \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a = \sqrt{U^2(0) + \left(\frac{\dot{U}(0)}{\omega}\right)^2} \\ \text{tg} \theta = \frac{U(0) \cdot \omega}{\dot{U}(0)} \end{cases}$$

Les conditions initiales  $U(0)$  et  $\dot{U}(0) = \dot{U}$  (connues)

Évidemment les oscillations libres de l'ascenseur

$$U(t) = \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{K}{M} \quad \text{et} \quad m = \frac{P}{g}$$



Maintenant, on détermine la rigidité (K) de la barre élastique (câble)

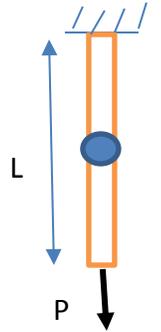
- $K_c$  , le câble travaille en élongation (traction)

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} \\ \sigma = \frac{F}{A} \end{cases} \Rightarrow E \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{A} \Rightarrow \Delta L = \frac{FL}{AE} = \delta$$

$\delta$  : allongement produit par une force unitaire

La rigidité est l'inverse de  $\delta$  avec une force unitaire ( $F = 1$ )

$$K_c = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{L}{AE}} = \frac{AE}{L} \quad E : \text{module d'élasticité du câble, } A : \text{la section}$$

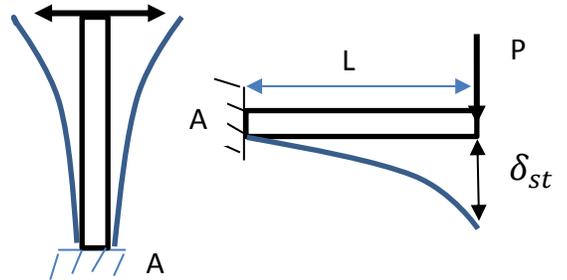


*Remarque* : Pour la flèche (voir RDM)

La poutre suivante est en oscillation horizontale, elle est considérée comme une poutre encastée.

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EJ} \quad (\text{Flèche})$$

$$\delta = \frac{l^3}{3EJ} \Rightarrow K = \frac{3EJ}{l^3}$$



La contrainte totale est :

$$\sigma_{total} = \sigma_{st} + \sigma_{dyn}$$

$\sigma_{st}$  : est due au poids de la cage P,  $\sigma_{st} = \frac{P}{A}$

$\sigma_{dyn}$  : est due à la force de tension (T) appliquée à la cage

$$T = -m\ddot{U} = m\omega^2 \frac{\dot{U}}{\omega} \sin \omega t$$

La tension est maximale pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  , alors  $T_{max} = m \omega \dot{U}$

$$\sigma_{dyn} = \frac{T_{max}}{A} = \frac{m \omega \dot{U}}{A}$$

$$\sigma_{total} = \frac{P}{A} + \frac{m \omega \dot{U}}{A} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{\omega \dot{U}}{g} \right)$$

A.N

$$\dot{U} = 1 \frac{m}{s} , \quad P = 45 \text{ Kn} , \quad l = 18 \text{ m} , \quad E = 100000 \frac{N}{\text{mm}^2} , \quad A = 16 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{total} = \frac{45}{16} \left( 1 + \frac{44,41}{9,81} \right) = 15,4 \frac{KN}{\text{cm}^2}$$

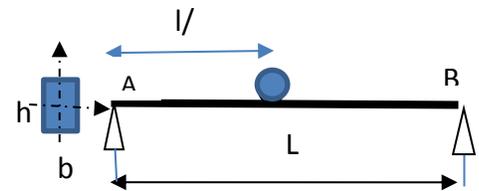
Ex3 : Une masse m est installée sur une barre AB. Le système indiqué est en oscillations de flexion.

En négligeant la masse de la barre

- 1) Déterminer la période T

Une impulsion d'intensité S est appliquée à la masse,

Dans ce cas



- 2) Calculer la contrainte normale maximale

- 3) Dans le cas où la masse  $m_1 \neq 0$  (masse de la barre), calculez la période T

*Solution*

Le but est de déterminer la période T

- 1) Pour la masse de la barre  $m_1 = 0$

$$L = T + V$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{U}^2 , \quad V = \frac{1}{2} K U^2 , \quad \text{d'où l'équation. } m\ddot{U} + K U = 0$$

La rigidité  $K = \frac{48 EJ}{l^3}$  (est déjà calculé)

$$\text{Donc } T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3 m}{48 EJ}} \quad (1) \quad m : \text{masse vibrante}$$

$$\text{La flèche } y(x) = -\frac{Px^3}{12EJ} + \frac{Pl^3}{16EJ} x \quad (2)$$

- 2) La contrainte normale maximale ou une impulsion d'intensité S est appliquée à la masse

*Remarque*

L'impulsion est la variation de la quantité de mouvement  $\vec{S} = m\vec{V} - m\vec{V}_0$ , ( $\dot{U} = V$ )

$$S = m \dot{U} - m \dot{U}_0$$

- Avant l'application de la masse  $S \Rightarrow V_0 = 0$
- Après l'application de la masse  $\dot{U} = \frac{S}{m}$

Le système vibre avec l'expression  $u(t) = \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin \omega t$ ,  $u(0) = 0$

Dans laquelle  $\dot{U}(0) = \frac{S}{m}$  et  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\text{D'où le déplacement } u(t) = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t$$

La contrainte totale est :  $\sigma_{total} = \sigma_{st} + \sigma_{dyn}$

$$\sigma_{st} = \frac{P.l}{4W_x} \quad \text{Contrainte de flexion (voir RDM)}$$

$\sigma_{dyn}$  Est due à la force d'inertie appliquée à la barre

$$F_I = -m\ddot{U} = \frac{S m}{m\omega} \omega^2 = S \cdot \omega \quad \text{Donc } \sigma_{dyn} = \frac{S ml}{4W}$$

La tension est maximale pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , alors  $T_{max} = m \omega \dot{U}$

$$\sigma_{tot} = \frac{P.l}{4W_x} + \frac{S ml}{4W}$$

3) Pour trouver la période T dans le cas de  $m_1 \neq 0$ , on utilise la méthode de Rayleigh

*Hypothèses*

La masse de la barre influe avec insignifiance sur la configuration du mouvement du système.

- Énergie potentielle  $V = \frac{1}{2} K U^2$
- Énergie cinétique  $T = T_m + T_{bar} = \frac{1}{2} m \dot{U}^2 + T_{bar}$

Cherchons  $T_{bar}$ , d'après l'expression de la flèche (2) donnant le déplacement

$$y(x) = -\frac{Px^3}{12EJ} + \frac{Pl^3}{16EJ}x$$

On peut la réécrire sous la forme suivante

$$U_x = \frac{PL^3}{48EJ} \left( \frac{3x}{L} - \frac{4x^3}{L^3} \right) = U_{1/2} \left( \frac{3x}{L} - \frac{4x^3}{L^3} \right) \quad \text{La déformée statique}$$

$$U_x = U(t) \left( \frac{3x}{L} - \frac{4x^3}{L^3} \right) \quad \text{La déformée dynamique}$$

L'énergie cinétique pour un  $dm_1$  s'écrit :

$$dT_{bar} = \frac{1}{2} dm_1 \dot{U}(t)^2 \quad \text{Avec} \quad dm_1 = \frac{m_1}{L} dx$$

$$T_{bar} = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{m_1}{L} \dot{U}(t)^2 \left( \frac{3x}{L} - \frac{4x^3}{L^3} \right)^2 dx$$

Après intégration, l'expression de l'énergie cinétique est  $T_{bar} = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{35} m_1 \dot{U}(t)^2 \right)$

$$D'où \quad T = T_m + T_{bar} = \frac{1}{2} m \dot{U}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{17}{35} m_1 \dot{U}(t)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( m + \frac{17}{35} m_1 \right) \dot{U}(t)^2$$

L'équation du mouvement est :

$$\left( m + \frac{17}{35} m_1 \right) \ddot{U}(t) + K U(t) = 0 \quad (3)$$

$$\text{La période} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3 \left( m + \frac{17}{35} m_1 \right)}{48 EJ}} \quad (4)$$

*Remarque*

Comment peut-on utiliser la méthode appropriée de Rayleigh pour déterminer la période du système dans le cas où la masse  $m$  est négligeable ?

Quand  $m=0$  ce sont les oscillations libres de la barre, de l'expression (4)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{17m_1 l^3}{35 \cdot 48 EJ}} = 0.632 \sqrt{\frac{m_1 l^3}{48 EJ}} \quad \text{Période approximative des oscillations de la barre}$$

Le résultat précis obtenu en considérant la barre comme système à  $\infty$  de ddl.

## 3.2 Oscillations libres amorties des systèmes à 1ddl

### 3.2.1 Équation différentielle

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U} + KU(t) = 0 \quad (3.18)$$

*Solution*

L'équation prend la forme suivante

$$\ddot{U}(t) + \frac{C}{M}\dot{U} + \frac{K}{M}U(t) = 0$$

Posons  $\frac{C}{M} = 2\xi\omega$  avec  $\xi$  facteur d'amortissement

$$\ddot{U}(t) + 2\xi\omega\dot{U} + \omega^2U(t) = 0 \quad (3.19)$$

On cherche la solution sous la forme  $U(t) = Ae^{\lambda t}$  (3.20)

Remplaçant (3.20) dans (3.19) en déduire l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\begin{cases} \lambda_{12} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} \\ \lambda_{12} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases} \quad (3.21)$$

**a) Amortissement critique ( $\xi = 1$ )**

$$\xi = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\xi\omega$$

Deux racines réelles égales, la solution de l'équation (13) devient

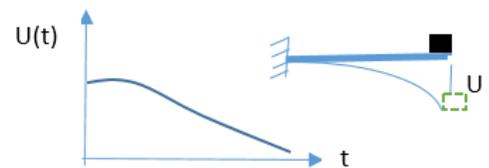
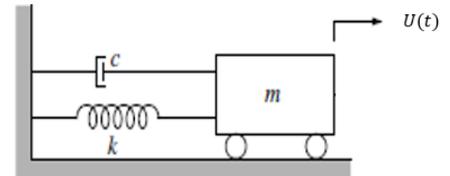
$$U(t) = e^{-\xi\omega t}(A_1 + A_2t)$$

**b) Amortissement sur critique  $\xi > 1$**

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  Deux racines réelles, mais différentes. L'équation (3.19) devient

$$U(t) = e^{-\xi\omega t}(A_1e^{\omega\sqrt{\xi^2-1}t} + A_2e^{-\omega\sqrt{\xi^2-1}t}) \quad (3.22)$$

c) Dans ce cas, le système revient aussi à l'équilibre, mais plus lent à cause du coefficient d'amortissement.



**d) Amortissement sous critique  $\xi < 1$** 

$$\lambda_{1,2} = -\xi \omega \pm i \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \quad \text{Sont différents et imaginaires}$$

La solution de (3.19) devient

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (A_1 e^{i \omega \sqrt{1 - \xi^2} t} + A_2 e^{-i \omega \sqrt{1 - \xi^2} t})$$

Nous pouvons exprimer l'expression précédente sous la forme suivante

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (B_1 \cos \omega \sqrt{1 - \xi^2} t + B_2 \sin \omega \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (3.23)$$

Notons que  $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  (3.24)

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (B_1 \cos \omega_D t + B_2 \sin \omega_D t) \quad (3.25)$$

La solution de l'équation (3.19) peut écrire sous la forme suivante :

$$U(t) = A e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi) \quad (3.26)$$

- L'équation (3.26) nous montre que les amplitudes diminuent avec le temps. Les oscillations s'appellent oscillations amorties du système.

$\omega_D$  : pseudo-fréquence

$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$  : s'appelle pseudo- période

- Les constantes A et  $\varphi$  sont déterminées par les conditions initiales  $U(0)$  et  $\dot{U}(0)$ . En effet

$$\dot{U}(0) = -A\xi \omega e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi) + A e^{-\xi \omega t} \omega_D \cos(\omega_D t + \varphi) \quad (3.27)$$

Pour  $t = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} U(0) = A \sin \varphi \\ \dot{U}(0) = -A\xi \omega \sin \varphi + A \omega_D \cos \varphi = -\xi \omega \dot{U}(0) + A \omega_D \cos \varphi \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin \varphi = \dot{U}(0) \\ A \cos \varphi = \frac{\dot{U}(0) + \xi \omega \dot{U}(0)}{\omega_D} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{U(0)^2 + \left( \frac{\dot{U}(0) + \xi \omega U(0)}{\omega_D} \right)^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{U(0) \omega_D}{\dot{U}(0) + \xi \omega U(0)} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

### 3.2.2 Le rapport des deux amplitudes consécutives ( $u_n, u_{n+1}$ )

$$u_{n+1}(t) = u_n(t + t_D)$$

D'après (3.26) 
$$u_{n+1}(t) = A e^{-\xi \omega(t+t_D)} \sin(\omega_D(t + t_D) + \varphi)$$

$$u_{n+1}(t) = A e^{-\xi \omega t} e^{-\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} \sin\left(\omega_D t + \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D} + \varphi\right)$$

$$u_{n+1}(t) = e^{-\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} A e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi)$$

Avec 
$$u_n(t) = A e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} \quad (3.29)$$

Nous pouvons obtenir

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \frac{u_3}{u_4} = \dots = e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} \quad (3.30)$$

Cela signifie que la diminution des amplitudes suit une suite géométrique dont la raison

$$e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} > 1$$

Le rapport entre deux amplitudes décalées d'un nombre de cycles, d'après (3.29)

$$\frac{u_n}{u_{n+j}} = \left( e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} \right)^j \quad (3.31)$$

Avec  $j$  nombre entier

$$\frac{u_n}{u_{n+j}} = \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)^j \quad \text{pour } j=1 \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}}$$

Prenons le logarithme népérien

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \ln e^{\xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D}} \Rightarrow \delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \xi \frac{\omega_D 2\pi}{\omega_D} \quad (3.32)$$

$\delta$  : s'appelle décrement logarithmique

### 3.2.3 Applications

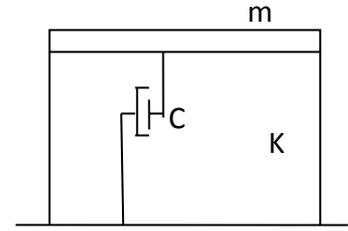
EX1. Un bâtiment est réalisé par une poudre rigide portée par de colonnes sans masse. Afin de déterminer les caractéristiques dynamiques de cette structure, on a effectué un test en vibration libre

dans lequel le toit (la poutre rigide) est déplacé latéralement par un vérin hydraulique, puis relâché. Pendant l'action de poussée du vérin,

on constate qu'une force de 90 kN est nécessaire pour

déplacer la poutre de 0.5 cm. Après que l'effort appliqué par le vérin

ait été annulé de manière instantanée, le déplacement max au retour après un cycle n'est plus que de 0.4 cm pour une durée du cycle de déplacement égale  $T = 1.4$  s.



- Déterminer la **masse** effective de la poudre, le **coefficient** d'amortissement et l'**amplitude** après 6 cycles.

*Solution*

Pour calculer les caractéristiques dynamique un test est réalisé. On applique une force  $p_0 = 90$  kN le bâtiment se déplace de  $u_1 = 0.50$  cm. On relâche le bâtiment revient avec une valeur de  $u_2 = 0.4$  cm après une durée de cycle  $T = 1.4$  s, donc le bâtiment effectué des oscillations libres amorties.

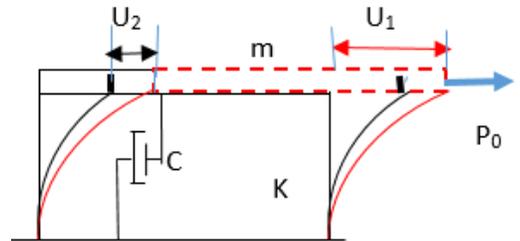
La solution générale de l'équation du mouvement

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (B_1 \cos \omega \sqrt{1 - \xi^2} t + B_2 \sin \omega \sqrt{1 - \xi^2} t)$$

Comme on peut la réécrire sous la forme

$$U(t) = A e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi)$$

Avec  $\varphi$  et  $a$  sont déterminées par les conditions initiales



La fréquence propre  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  et  $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  pseudo fréquence

- Le facteur d'amortissement  $\frac{c}{M} = 2\xi\omega$

Pour les systèmes réels  $\xi$  est très petit  $\xi \cong 0 \Rightarrow \omega_D = \omega$

Le décrément logarithmique  $\ln \frac{u_0}{u_1} = \delta = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \approx 2\pi\xi$

$$\ln \frac{u_0}{u_1} = 2\pi\xi \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \ln \frac{u_0}{u_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{0,5}{0,4} = 3.35\%$$

- Pour calculer la masse  $m$  on a

$$T \cong T_D = 2\pi \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow m = \frac{T_D^2 K}{4\pi^2}$$

Avec  $K = \frac{P_0}{u_0}$

Donc,  $m = \frac{T_D^2 P_0}{4\pi^2 u_0}$ ,  $m = 8.93$  tonnes

Pour la valeur de  $C$  on a

$$\frac{C}{M} = 2\xi\omega \Rightarrow C = 2\xi\omega m \text{ Avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

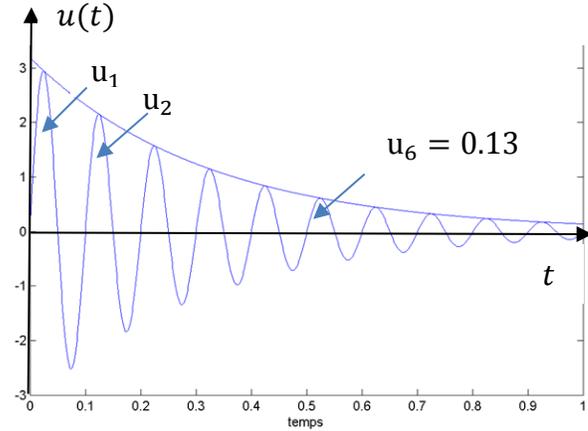
D'ou  $C = 2\xi \frac{2\pi}{T} m = 2,84 \cdot 10^5 \frac{N.S}{m}$

- Le déplacement après 6 cycles

$$\frac{u_n}{u_{n+j}} = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^j \text{ Avec } n = 0, j = 6 \text{ (cycles)}$$

alors,

$$\frac{u_0}{u_{1+5}} = \left(\frac{u_0}{u_1}\right)^5 \Rightarrow u_6 = \frac{u_0}{\left(\frac{u_0}{u_1}\right)^5} = \frac{0.5}{\left(\frac{5}{4}\right)^5} = 0.13 \text{ cm}$$



# Chapitre 4 : Oscillations forcées des systèmes à 1ddl sous la charge harmonique

## 4.1 Oscillations forcées avec amortissement visqueux

### 4.1.1 Equation différentielles

$$M \ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P_0(t)\sin \bar{\omega} t \quad (4.1)$$

$P_0$  : valeur maximale de la charge,

$\bar{\omega}$  : fréquence de la charge,  $\omega$  : fréquence propre

L'amortissement réalisé par un milieu liquide (air) est

appelé amortissement visqueux.

1) La solution générale de l'équation du mouvement

L'équation (4.1) peut prendre la forme suivante :

$$\ddot{U}(t) + \frac{C}{M}\dot{U}(t) + \frac{K}{M}U(t) = \frac{P_0}{M}(t)\sin \bar{\omega} t \quad (4.2)$$

Ou bien

$$\ddot{U}(t) + 2\xi\omega\dot{U}(t) + \omega^2U(t) = \frac{P_0}{M}(t)\sin \bar{\omega} t \quad (4.2a)$$

C'est une équation différentielle avec seconde membre, dont la solution générale est :

$$U(t) = U_g(t) + U_p(t) \quad (4.3)$$

Dans laquelle

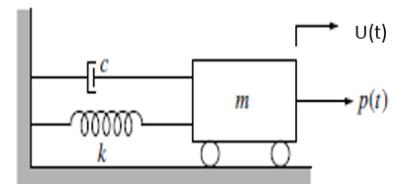


Fig.4.1 : Système amorti forcé

$U_g(t)$ : solution générale sans seconde membre

$U_p(t)$  : solution particulière avec seconde membre

$$U_g(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (4.4)$$

$U_p(t)$  est recherché sous la forme

$$U_p(t) = \rho \sin (\bar{\omega} t - \theta) \quad (4.5)$$

$\rho$  et  $\theta$  Sont deux constantes qui doivent rendre (4.2) en une identité, pour cela de (4.5)

$$\dot{U}(t) = \rho \bar{\omega} \cos (\bar{\omega} t - \theta) \quad (4.6)$$

$$\ddot{U}(t) = -\rho \bar{\omega}^2 \sin (\bar{\omega} t - \theta) \quad (4.7)$$

Mettons les équations (4.5), (4.6) et (4.7) dans (4.2) on obtient

$$(\omega^2 - \bar{\omega}^2)\rho \sin (\bar{\omega} t - \theta) + 2 \xi \omega \rho \bar{\omega} \cos (\bar{\omega} t - \theta) = \frac{P_0}{M} \sin \bar{\omega} t \quad (4.8)$$

On fait un changement de variable posons

$$\begin{cases} \varphi = \bar{\omega} t - \theta \\ \bar{\omega} t = \varphi + \theta \end{cases}$$

Réécrivant (4.8) sous la forme

$$(\omega^2 - \bar{\omega}^2)\rho \sin \varphi + 2 \xi \omega \rho \bar{\omega} \cos \varphi = \frac{P_0}{M} \sin \varphi \cos \theta + \frac{P_0}{M} \cos \varphi \sin \theta \quad (4.9)$$

Par identification

$$\begin{cases} (\omega^2 - \bar{\omega}^2)\rho = \frac{P_0}{M} \cos \theta \\ 2 \xi \omega \rho \bar{\omega} = \frac{P_0}{M} \sin \theta \end{cases} \quad \text{à partir de ce système } \rho = \sqrt{\frac{\left(\frac{P_0}{M}\right)^2}{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2 \xi \omega \bar{\omega})^2}}$$

$$\rho = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{\frac{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2 \xi \omega \bar{\omega})^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{2 \xi \omega \bar{\omega}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} \approx \frac{2 \xi \frac{\bar{\omega}}{\omega}}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}}$$

$$\text{Notons } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (4.10)$$

$\beta$  : rapport des fréquences  $\bar{\omega}$  et la fréquence propre  $\omega$

$$\text{L'amplitude } \rho = \frac{P_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2}} \quad (4.11)$$

Et 
$$\tan \theta = \frac{2 \xi \beta}{1 - \beta^2} \tag{4.12}$$

Conclusion

La solution générale de l'équation (4.1) est donnée par

$$U_g(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \rho \sin (\bar{\omega} t - \theta) \tag{4.13}$$

- Analyse du résultat obtenu

L'équation (4.13) montre que

$\left\{ \begin{array}{l} \text{la 1}^{\text{ère}} \text{ partie oscillation libre amortie, ce mouvement s'appelle} \\ \text{mouvement transitoire} \\ \text{la 2}^{\text{ème}} \text{ partie s'appelle mouvement permanent ou oscillations forcées} \end{array} \right.$

**4.1.2 Représentation**

La représentation de l'équation (4.13) est :

- Oscillations forcées : les oscillations forcées du système sont exprimées par l'équation

$$U(t) = \rho \sin (\bar{\omega} t - \theta)$$

Ou bien

$$U(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2}} \cos (\bar{\omega} t - \theta) \tag{4.14}$$

- L'amplitude  $\rho$  ne dépend pas des conditions initiales.
- Oscillations forcées sont en retard de déphase de  $\theta$  par rapport à la charge dynamique

**4.1.3 Facteur d'amplification dynamique**

Désignons par  $\frac{P_0}{K} = U_{st}$  , allongement du ressort ou bien le déplacement due à la charge statique

Le rapport  $\frac{\rho}{U_{st}} = \frac{\text{déplacement dynamique due à la charge dynamique}}{\text{déplacement statique due à la charge statique}} = D$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2}} \tag{4.15}$$

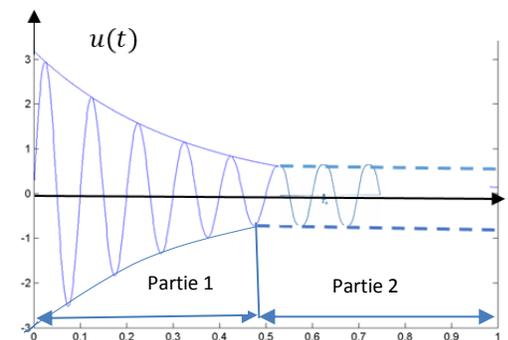


Fig.4.2 : Représentation des oscillations forcées amorties

D, s'appelle facteur d'amplification dynamique

- Les relations de D et  $\theta$  avec les caractéristiques du système

D et  $\theta$  sont en fonction de  $\xi$  et  $\beta$

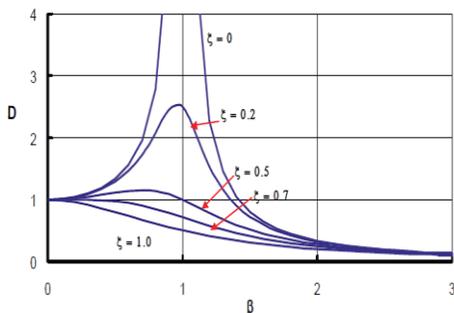


Fig.4.3 : Facteur d'amplification dynamique

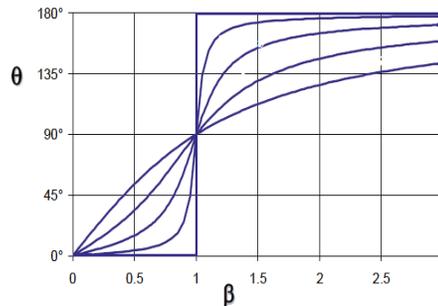


Fig.4.4 : Variation de  $\theta$  par rapport à  $\xi$  et  $\beta$

*Conclusion*

- 1) Avec les valeurs déterminées de  $\xi$  nous pouvons obtenir les oscillations forcées avec le facteur D ou les amplitudes  $\rho$  différentes en fait varier le rapport de  $\beta$ .
  - Avec  $\beta \ll 1$  c-à-dire  $\bar{\omega} \leq \omega$  le système est dit réel  $D \leq 1$
  - Avec  $\beta \gg 1$  c-à-dire  $\bar{\omega} \gg \omega$  le système est dit souples  $D = 0 \rightarrow \rho = 0$
  - Avec  $\beta = 1$  c-à-dire D atteint  $D_{max} \rightarrow \rho_{max}$
- 2) Les amplitudes
  - $0 < \beta < 1 \rightarrow 0^\circ < \theta < 90^\circ$
  - $\beta > 1 \rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$
  - $\beta = 1 \rightarrow \theta = 90^\circ$

**4.1.4 Oscillations résonantes**

**4.1.4.1 La valeur maximale de D**

D, Est atteint  $D_{max}$  quand le dénominateur  $f(\beta) = (1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2$  est minimal

Donc  $\dot{f}(\beta) = 2(1 - \beta^2)2\beta + 2.4\beta\xi^2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{array} \right. \quad \text{Cette valeur rend } f'(\beta) > 0 \text{ donc } \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ nous obtenons}$$

$$D_{max} = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\xi^2\beta^2)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \simeq \frac{1}{2\xi} \quad (4.16)$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2\xi} \\ \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ \theta = 90^\circ \end{array} \right.$$

$$\text{Conclusion : Avec } \beta \simeq 1 \rightarrow D = \frac{1}{2\xi}$$

#### 4.1.4.2 Oscillations résonantes

Quand  $D \rightarrow D_{max}$  c-à-dire  $\rho \rightarrow \rho_{max}$  on dit que c'est la résonance, les oscillations obtenues s'appellent oscillations résonantes

De l'expression  $U(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta)$  nous obtenons

$$\text{Avec } \rho = \frac{P_0}{K} D = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} \quad \text{et } \theta = 90^\circ \text{ donc } U_{rés} = -\frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} \cos \bar{\omega} t$$

#### 4.1.5 Autres expressions des oscillations résonantes

Pour une meilleure compréhension de la nature des oscillations résonantes, il est nécessaire de considérer la solution générale :

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) - \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} \cos \bar{\omega} t \quad (4.17)$$

De l'équation (4.17) et avec les conditions initiales  $U(0) = 0$  et  $\dot{U}(0)$ , on peut tirer les constantes A et B. Alors

$$0 = A - \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} \Rightarrow A = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = & -\xi \omega (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + e^{-\xi \omega t} (-A \omega_D \sin \omega_D t + B \omega_D \cos \omega_D t) + \\ & \frac{P_0}{K} \frac{1}{2\xi} \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.18)$$

Avec  $\dot{U}(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = -\xi \omega A + B \omega_D \Rightarrow B = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi \omega_D} = \frac{P_0}{K} \frac{\xi}{2 \xi \sqrt{1-\xi^2}}$

Remplaçant les constantes (A et B) dans l'équation (4.17)

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} \left( \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi} \cos \omega_D t + \frac{P_0}{K} \frac{\xi}{2 \xi \sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right) - \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi} \cos \bar{\omega} t$$

$$U(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi} e^{-\xi \omega t} \left( \cos \omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega t \right) - \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi} \cos \bar{\omega} t$$

Avec  $\sqrt{1-\xi^2} \ll 1$ , on néglige la deuxième partie

Donc les oscillations résonantes avec  $\bar{\omega} = \omega = \omega_D$  sont :

$$U_{rés} = \frac{P_0}{K} \frac{1}{2 \xi} (e^{-\xi \omega t} - 1) \cos \omega t \tag{4.19}$$

## 4.2 Oscillations forcées de système sans amortissement visqueux

### 4.2.1 Equation différentielle

$$M \ddot{U}(t) + KU(t) = P_0(t) \sin \bar{\omega} t \tag{4.20}$$

La solution générale est donnée par :

$$U_g(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \rho \sin (\bar{\omega} t - \theta)$$

Dans ce cas  $\xi = 0 \rightarrow D = \frac{1}{2 \xi} \Rightarrow \theta = 0$

$$U_g(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \tag{4.21}$$

Le facteur d'amplification dynamique est  $D = \frac{1}{1-\beta^2}$

### 4.2.2 Oscillations résonantes

Avec les conditions initiales nulles de l'équation (4.21) à  $U(t = 0) = 0 \rightarrow A = 0$

$$\dot{U}(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t + \frac{P_0}{K} \frac{\bar{\omega}}{1-\beta^2} \cos \bar{\omega} t$$

$$\dot{U}(t = 0) = 0 \Rightarrow B = -\frac{P_0}{K} \frac{\beta}{1-\beta^2} \quad \text{Avec } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

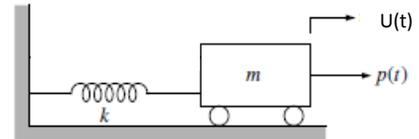


Fig.2.5 : Système forcé non amortie

$$U_g(t) = -\frac{P_0}{K} \frac{\beta}{1-\beta^2} \sin \omega t + \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t$$

$$U_g(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \tag{4.22}$$

Quand  $\beta \rightarrow 1 \Rightarrow \bar{\omega} \rightarrow \omega \Rightarrow U_g(t) = \frac{0}{0}$  (indéterminé)

D'après le théorème de l'Hôpital

$$U_{rés} = \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \omega} U_g(t) = \frac{\frac{d}{d\bar{\omega}} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t)}{\frac{d}{d\bar{\omega}} (1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2})} = \frac{P_0}{K} \frac{(\omega t \cos \bar{\omega} t - \sin \omega t)}{-2 \frac{\bar{\omega}}{\omega}}$$

L'expressions des oscillations résonantes est :

$$U_{rés} = \frac{P_0}{2K} (\sin \omega t - \omega t \cos \bar{\omega} t) \tag{4.23}$$

### 4.2.3 Variation des oscillations résonantes

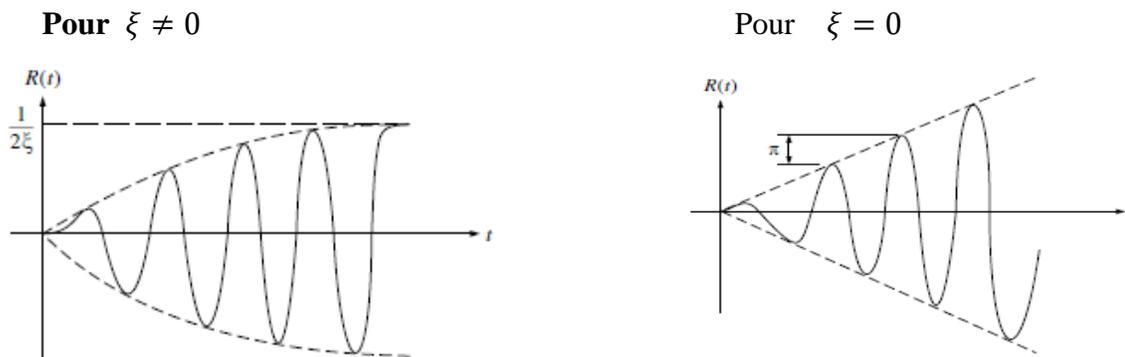


Fig.5.6 : Evolution de l'amplitude de la réponse d'un système en résonance

#### Conclusion

Dans le cas du système avec amortissement visqueux ou non, les amplitudes des oscillations résonantes s'augmentent avec le temps.

### 4.3 Application technique des oscillations forcées

- 1) Mesure des caractéristiques des systèmes réels ;
- 2) Oscillation vibratoire ;
- 3) Principe des vibrographes et sismographes.

- **Vibrographe** : appareil destinée à mesurer les oscillations.

*Exemple*

On veut étudier les oscillations d'un système avec amortissement dans une boîte installée sur une base. Le mouvement de la base  $u_b = u_{b_0} \sin \bar{\omega} t$

Désignons par  $u_R(t)$  mouvement relatif de la masse par rapport à la base, l'équation différentielle de la masse est :

$$M \ddot{U}_R(t) + C \dot{U}_R(t) + K U_R(t) + F_{IE} = 0$$

$F_{IE}$  Force d'inertie d'entrainement de la masse  $m$

$$F_{IE} = m \ddot{U}_b(t)$$

$$M \ddot{U}_R(t) + C \dot{U}_R(t) + K U_R(t) = -F_{IE} = m u_{b_0} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$$

Le mouvement relatif est

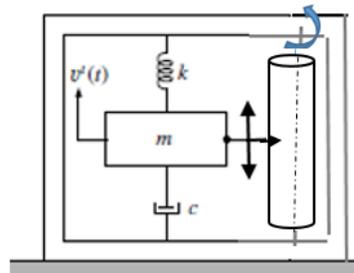
$$U_R(t) = \frac{m u_{b_0} \bar{\omega}^2}{K} D \sin (\bar{\omega} t - \theta)$$

$$U_R(t) = \frac{m u_{b_0} \bar{\omega}^2}{m \omega^2} D \sin (\bar{\omega} t - \theta) = u_{b_0} \beta^2 D \sin (\bar{\omega} t - \theta)$$

Nous obtenons l'amplitude  $\rho$  du mouvement relatif  $\rho = u_{b_0} \beta^2 D$

Avec  $\beta > 1$ ,  $\xi = 0,5$  on a  $\beta^2 D \simeq 1 \Rightarrow \rho = u_{b_0}$

L'amplitude du mouvement relatif est proportionnelle à l'amplitude de la masse. Cette masse est liée à un stylo et un cylindre tournant uniformes, le stylo registre sur la bande entourée autour d'un cylindre. C'est le principe des vibrographe.

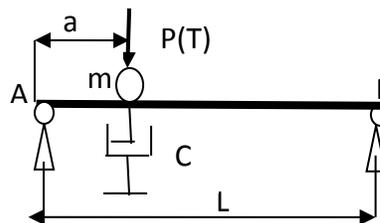


**4.4 Applications**

Ex1 : La charge  $P(t) = p_0 \sin (\omega t)$  est appliquée à la masse  $m$  qui est installée sur une barre AB.

Déterminer

- Le coefficient de rigidité du système ;



- Le facteur d'amplification dynamique ;
- La contrainte dynamique maximale.

Données :  $m = 2048,81 \text{ Kg}$ ,  $\omega = 30 \text{ s}^{-1}$ ,  $l = 5 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $J = 3773 \text{ cm}^4$ ,  $W = 251 \text{ cm}^3$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^7$ ,

$P_0 = 200 \text{ N}$ ,  $C = 16.326 \text{ N.s/m}$

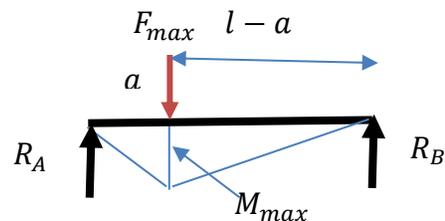
*Solution*

La contrainte dynamique pour une poutre soumise à la flexion est :

$$\sigma_{dyn} = \frac{M_{max,dyn}}{W}$$

Le moment max est

$$M_{max,dyn} = \frac{F_{max}(l-a)a}{l}$$



On sait que

$$\begin{cases} F_{max} = K \cdot \rho \\ \rho = \frac{p_0}{K} D \end{cases} \Rightarrow F_{max} = p_0 D \quad \text{avec} \quad D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

- La rigidité K est calculée traverse la flèche

$$\delta_{st} = \frac{Pa^2(l-a)^2}{3EJ} \quad \text{avec} \quad K = \frac{3EJ}{a^2(l-a)^2}$$

$$\text{Donc} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{3EJ}{m a^2(l-a)^2}} = 40 \text{ S}^{-1}$$

$$\text{Pour le coefficient } \xi \quad 2\xi\omega = \frac{c}{m} \Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

- Le facteur d'amplification dynamique  $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (\frac{c}{m\omega}\beta)^2}} = 2.16$

- La contrainte dynamique  $\sigma_{dyn} = \frac{M_{max,dyn}}{W} = \frac{p_0 D(l-a)a}{l \cdot W} = 200,6 \text{ N/m}^2$

Ex2. (Mesure des caractéristiques dynamiques)

Pour mesurer les caractéristiques dynamiques d'une structure en vraie grandeur, on utilise une machine spécialisée qui applique à la structure une charge harmonique. On mesure à chaque fois l'amplitude et le déphasage, la réponse obtenue correspondant à la charge donnée. Supposant que lors

d'une expérience de ce type, un bâtiment à un étage soit soumis à l'excitation de cette machine avec deux valeurs successives  $\omega_1 = 16 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 25 \text{ s}^{-1}$  et une force d'amplitude égale  $p_0 = 2500 \text{ N}$ . Dans chaque cas, l'amplitude et le déphasage  $\theta_0$  obtenus sont :

- $\rho_1 = 0.206 \text{ mm} \rightarrow \theta_1 = 15^\circ$
- $\rho_2 = 0.417 \text{ mm} \rightarrow \theta_2 = 55^\circ$

1) Déterminer la masse  $\mathbf{m}$ , le coefficient de rigidité  $\mathbf{K}$  et le coefficient d'amortissement  $\mathbf{C}$

*Solution*

Etudiant ici les oscillations forcées, d'après l'équation (4.1)

$$\mathbf{M} \ddot{U}(t) + \mathbf{C} \dot{U}(t) + \mathbf{K} U(t) = P_0(t) \sin \bar{\omega} t$$

La solution de l'équation  $U(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t + \theta)$

Avec l'amplitude  $\rho = \frac{P_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$  et  $\tan \theta = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

réécrivant  $\rho$  sous la forme

$$\rho = \frac{P_0}{K} \frac{\frac{1}{1-\beta^2}}{\sqrt{\left(\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)^2}} = \frac{P_0}{K} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}}$$

On sait que  $\frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$

$$\rho = \frac{P_0 \cos \theta}{K (1-\beta^2)} \quad \text{Avec} \quad \beta^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = \frac{m\bar{\omega}^2}{K}$$

L'expression de l'amplitude  $\rho = \frac{P_0 \cos \theta}{K \left(1 - \frac{m\bar{\omega}^2}{K}\right)}$

$$\rho k \left(1 - \frac{m\bar{\omega}^2}{K}\right) = P_0 \cos \theta \quad (1)$$

- 1<sup>ère</sup> essai avec  $\rho_1, \theta_1$  l'équation (1) devient :  $\rho_1 k \left(1 - \frac{m\bar{\omega}_1^2}{K}\right) = P_0 \cos \theta_1$
- 2<sup>ème</sup> essai avec  $\rho_2, \theta_2$  l'équation (1) devient :  $\rho_2 k \left(1 - \frac{m\bar{\omega}_2^2}{K}\right) = P_0 \cos \theta_2$

C'est un système d'équations à deux inconnus (m et k)

*Application numérique*

$$\begin{array}{l}
 1^{\text{ère}} \text{ essai} \\
 2^{\text{ème}} \text{ essai}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 P_0 = 2500 \text{ N} \\
 \bar{\omega}_1 = 16 \text{ rd/s} \\
 \theta_1 = 15^\circ \\
 \rho_1 = 0.206 \text{ mm} = 2.0610^{-4} \text{ m} \\
 \\
 P_0 = 2500 \text{ N} \\
 \bar{\omega}_1 = 25 \text{ rd/s} \\
 \theta_1 = 55^\circ \\
 \rho_1 = 0.417 \text{ mm} = 4.17 \cdot 10^{-4} \text{ m}
 \end{array}
 \right.$$

Les résultats

- **La masse**  $m = 22500 \text{ Kg}$  et la **rigidité**  $k = 1.75 \cdot 10^7 \text{ N/m}$
- **L'amortissement C**

On a  $C = 2\xi\omega m$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27,9 \text{ rd/s}$

$$\tan \theta = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \xi = \frac{(1-\beta^2)\tan \theta}{2\beta} = 15.6\%$$

Donc  $C = 2\xi\omega m = 1.96 \cdot 10^5 \text{ N.S/m}$

Résumé

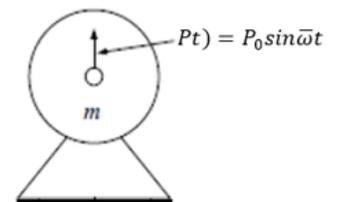
Pour déterminer les caractéristiques d'une machine réelle, on peut utiliser soit :

- Les formules des oscillations libres amorties ou non amorties ;
- Les formules des oscillations forcées.

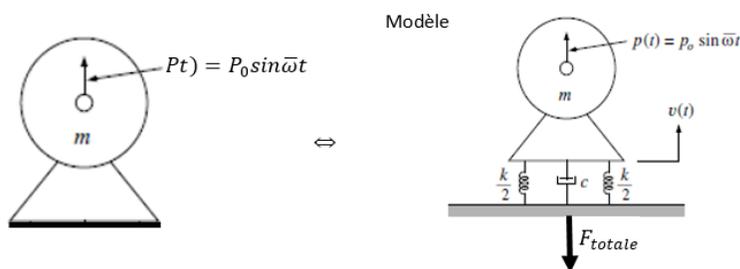
Ex3 : (Isolation des oscillations)

Une machine tournante est montée sur un support, cette machine produit une force verticale alternative  $P(t)$ .

- 1) Quelle est la force dynamique transmise au sol ?
- 2) Calculer la raideur  $K$  du ressort pour un système non amortie pour  $F_t = 4000 \text{ N}$

Solution

Pour déminuer cette force, on suppose que la machine est montée sur un support à un seul degré de liberté (ressort- amortissement).



Les forces appliquées au système sont :

- La force de rappel du ressort  $F_k = KU(t)$
- La force d'amortissement  $F_c = C\dot{U}(t)$

Donc, la force totale appliquée au sol est la résultante

$$F_{Totale} = \sqrt{F_c^2 + F_k^2} \tag{1}$$

Pour calculer ces forces, il faut connaître les oscillations du système. C'est un système forcé amortie dont l'équation du mouvement est :

$$M \ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = P_0(t) \sin \bar{\omega} t \tag{2}$$

La solution est sous la forme

$$U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \alpha)$$

Ou sous la forme  $U(t) = \frac{p_0}{K} D \sin(\bar{\omega}t - \alpha) \tag{3}$

D : Coefficient d'amplification

La dérivée de (3) donne la vitesse  $\dot{U}(t) = \frac{p_0}{K} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \alpha) \tag{4}$

Remplaçant les équations (3 et 4) dans les expressions des forces de rappel et d'amortissement, ces forces deviennent :

- La force de rappel du ressort  $F_k = KU(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega}t - \alpha)$

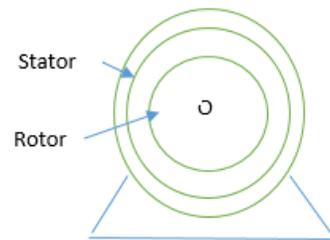
Cette force est maximale pour  $\bar{\omega}t - \alpha = 90^\circ$  alors  $F_k = p_0 D \tag{5}$

- La force d'amortissement  $F_C = C\dot{U}(t) = \frac{p_0}{K} C D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \alpha)$

Avec  $C = 2\xi\omega m$  alors

$F_C = p_0 2\xi\beta D \cos(\bar{\omega}t - \alpha)$ , elle est maximale pour  $\cos(\bar{\omega}t - \alpha) = 1$

$$F_C = p_0 2\xi\beta D \tag{6}$$



Remplaçant les équations (5 et 6) dans (1), la force totale appliquée au sol est :

$$F_{Totale} = \sqrt{F_C^2 + F_K^2} = \sqrt{(p_0 2\xi\beta D)^2 + (p_0 D)^2} = p_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

La charge transmise au sol est :  $F_{Totale} = p_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

dans le cas ou  $\xi = 0$  alors  $F_{Totale} = p_0 D = \frac{p_0}{1-\beta^2} = \frac{p_0}{1-\frac{\bar{\omega}^2}{\frac{K}{m}}}$ , donc la raideur  $k = \frac{F_t \bar{\omega}^2 m}{F_t - p_0}$

Ex3

Un moteur de masse **m** et masse de rotor **m<sub>r</sub>** fonctionnent avec une vitesse de N (Tr/min), l'excentricité est 'e'. Le moteur est placé sur une barre. Le rotor est mal équilibré.

C : le centre de gravité du rotor

- 1) Déterminer la charge dynamique appliquée au moteur ;
- 2) La vitesse critique du moteur.

*Solution*

1) *La force dynamique*

La force d'inertie du rotor est la charge dynamique qui oblige le moteur à vibrer

La force d'inertie se décompose en deux forces :

$F_{Ix}$  Engendre les oscillations horizontales

$$F_{Ix} = F_I \cos \bar{\omega}t = m e \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega}t$$

Avec  $\bar{\omega} = \frac{2\pi N}{60} \left(\frac{rd}{s}\right)$

$F_{Iy}$  , La force qui engendre les oscillations verticales

$$F_{Iy} = F_I \sin \bar{\omega}t = m.e.\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t$$

Donc,  $P_0(t) = F_y = m.e.\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t$

$F_{Iy}$  , Est maximale pour  $\sin \bar{\omega}t = 1 \Rightarrow P_{0max} = m.e.\bar{\omega}^2$

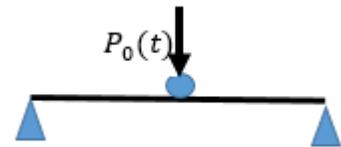
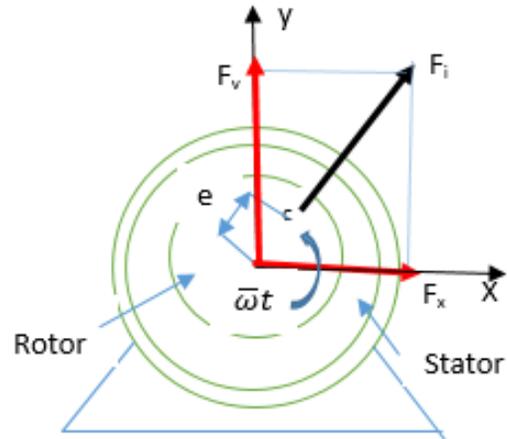
Si  $\bar{\omega} = \omega$  c'est la résonance

3) Vitesse critique du moteur

La vitesse critique est la vitesse qui correspond à la résonance, pour le système considéré

$$K = \sqrt{\frac{48 EJ}{l^3}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{48 EJ}{m l^3}} \quad \text{Vitesse propre du système}$$

La vitesse critique est  $\bar{\omega}_{cr} = \omega = \sqrt{\frac{48 EJ}{m l^3}}$



# Chapitre 5 : Oscillations des systèmes à 1 ddl sous l'action de forces arbitraires

## 5.1 Généralités

Nous avons étudié le cas des charges harmoniques, mais en réalité, les charges ne sont pas toujours harmoniques. Ils peuvent être :

- Soit périodiques ;
- Soit impulsives ;
- Soit parfaitement arbitraires.

## 5.2 Oscillations sous l'action de la charge périodique

Soit la charge  $p(t) = p(t + t_p)$  avec  $t_p$ , période de la charge

$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{t_p}$  Fréquence fondamentale de la charge

En développant la charge périodique en série de Fourier

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\bar{\omega}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\bar{\omega}t \quad (5.1)$$

Les coefficients  $(a_0, a_n, b_n)$  s'obtiennent par les expressions :

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} p(t) dt, \quad \mathbf{a}_n = \frac{2}{t_p} \int_0^{t_p} p(t) \cos n\bar{\omega}t dt \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_n = \frac{2}{t_p} \int_0^{t_p} p(t) \sin n\bar{\omega}t dt$$

Solution

L'équation différentielle dans ce cas prend la forme suivante :

$$\mathbf{M} \ddot{U}(t) + \mathbf{C} \dot{U}(t) + \mathbf{K}U(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\bar{\omega}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\bar{\omega}t \quad (5.2)$$

D'après le principe de superposition, nous obtenons

$$u(t) = \frac{a_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \cos(n\bar{\omega}t - \theta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \sin(n\bar{\omega}t - \theta_n) \quad (5.3)$$

Dans laquelle  $\beta_n = n \frac{\bar{\omega}}{\omega}$  et  $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{2\xi\beta_n}{1-\beta_n^2}$

*Remarque*

- Quand  $\beta_n = 1 \rightarrow n\bar{\omega} = \omega \rightarrow$  oscillations résonantes
- En réalité, nous pouvons faire la somme de quelques premiers termes de la solution, parce que ce sont les termes qui interviennent considérablement au déplacement du système.

### 5.3 Oscillations sous l'action de l'impulsion semi-sinus

Une charge impulsive, consiste en une impulsion unique. Elle est généralement de courte durée exemple chocs d'un engin (camion...)

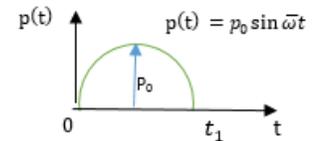


Fig.5.1 : Impulsion semi sinus

#### 5.3.1 Equation différentielle

Considérons un système sans amortissement sous l'action d'une impulsion semi- sinus.

$$\mathbf{M} \ddot{U}(t) + \mathbf{K}U(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

*Solution*

- Dans la 1<sup>ère</sup> phase  $0 \leq t \leq t_1$

La solution prend la forme (avec les conditions initiales nulles)

$$U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5.4)$$

b) Dans la 2<sup>ème</sup> phase  $t > t_1$

La charge a fini d'agir, les oscillations sont les oscillations libres non amorties, est qui se produit par la suite. Elle dépend du déplacement et la vitesse existante à la fin de la première phase. C- à- dire les conditions initiales  $U(t_1)$  et  $\dot{U}(t_1)$

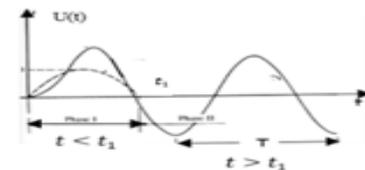


Fig.5.2 : Réponse à une impulsion semi sinus

La réponse est donnée par :

$$U(t) = \frac{\dot{U}(t_1)}{\omega} \sin \omega t + U(t_1) \cos \omega t \tag{5.5}$$

### 5.3.2 Facteur d'amplificateur dynamique

Le cas de l'impulsion de longue durée, le déplacement max atteint durant que la charge n'a pas encore d'agir.  $U_{max}$  est atteint à l'instant  $t^*$  qui est déterminé par annulation de  $\dot{U}(t) = 0$ .

De l'équation (5.4)  $\rightarrow \dot{U}(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \beta \omega \cos \omega t)$

On a  $\cos \bar{\omega} t = \cos \omega t \Rightarrow \bar{\omega} t^* = \pm \omega t^* + 2\pi k$  avec condition que  $t^* \leq t_1$

Nous obtenons  $\bar{\omega} t^* = 2\pi - \omega t^*$  avec  $k=1$  et en prend  $(-\omega t^*)$

$$\bar{\omega} t^* + \omega t^* = 2\pi \Rightarrow (\bar{\omega} + \omega) t^* = 2\pi \Rightarrow t^* = \frac{2\pi}{(\bar{\omega} + \omega)} \Rightarrow \bar{\omega} t^* = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}}$$

Le déplacement est :  $U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t^* - \beta \sin \omega t^*)$  (5.6)

#### Conclusion

Pour une impulsion de longue durée, l'instant du déplacement max est déterminé par :

$$\bar{\omega} t^* = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t^* - \beta \sin \omega t^*)$$

### 5. 3 Oscillations dues à la charge arbitraire

#### Rappel

Considérons un système soumis à une impulsion, d'après le théorème de la variation de la quantité de mouvement.

$$m\dot{u} = mu(0) = S \Rightarrow \dot{u} = \frac{S}{m}$$

La vitesse d'après l'application de l'impulsion, parce que la durée  $\tau$  très petite, le système n'arrive pas à ce déplacement. Après  $\tau$  le mouvement du système est libre avec les conditions initiales :

$$U(t) = U(0) \cos\omega t + \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin\omega t \tag{5.7}$$

$$U(0) = 0 \quad \dot{U}(0) = \frac{S}{m} \Rightarrow U(t) = \frac{S}{m\omega} \sin\omega t$$

Si la charge est appliquée à l'instant  $t_1$ , le mouvement produit par cette charge est :

$$U(t) = \frac{S}{m\omega} \sin\omega(t - t_1)$$

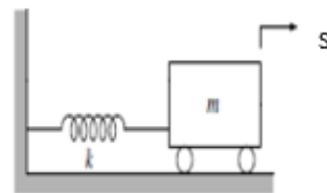
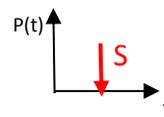


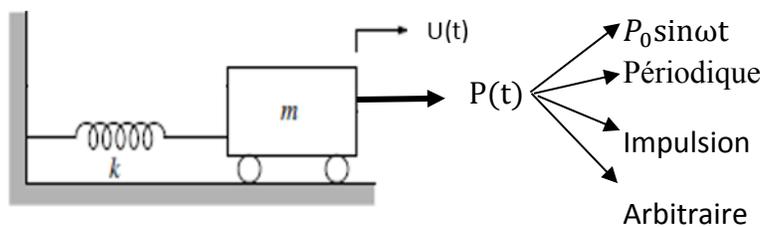
Fig.5.3 : système à 1ddl



### 5.3.1 Oscillations forcées des systèmes sans amortissement

#### Intégrale du Duhamel

Considérons un système sans amortissement avec une charge arbitraire



A l'instant  $\tau$  durant une fraction du temps  $d\tau$ , la charge fait subir au système une impulsion élémentaire  $p(\tau)d\tau$  qui provoque au système une vitesse  $\dot{u}(\tau) = \frac{p(\tau)d\tau}{m}$  et  $u(\tau) = 0$  (la durée est négligeable)

L'impulsion par conséquent un déplacement élémentaire

$$du(t) = U(\tau) \cos\omega(t - \tau) + \frac{\dot{U}(\tau)}{\omega} \sin\omega(t - \tau)$$

Avec  $U(\tau)$  est négligeable

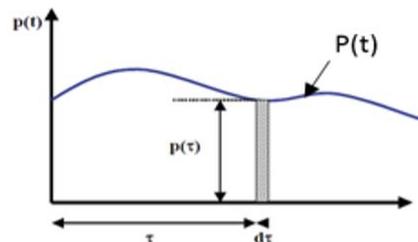


Fig.5.4 : Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel

$$dU(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} \sin\omega(t - \tau)$$

L'action de la charge  $p(t)$  durant le temps  $t$ , est considéré comme une succession des actions des impulsions élémentaires.

D'où l'intégrale de Duhamel est :

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t - \tau) d\tau \quad (t > \tau) \quad (5.7)$$

La solution générale comprend des termes complémentaires de vibration libre (C.I non nuls) est

$$U(t) = U(0) \cos\omega t + \frac{\dot{U}(0)}{\omega} \sin\omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t - \tau) d\tau \quad (5.8)$$

Si la charge  $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$  et avec les conditions initiales nulles l'équation (5.8) devient

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p_0 \sin \bar{\omega} t \sin\omega(t - \tau) d\tau$$

La solution en utilisant l'intégration par partie on obtient

$$U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad \text{Pour plus de détail, voir exercice 1}$$

### 5.3.2 Oscillations forcées des systèmes avec amortissement ( $C \neq 0$ )

Les oscillations libre amorties sont données par

$$U(t) = e^{-\xi \omega t} (u(0) \cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \varepsilon \omega u(0)}{\omega_D} B_2 \sin\omega_D t)$$

Analogiquement au cas précédent, l'impulsion élémentaire  $p(\tau)d\tau$  produit au système un déplacement élémentaire.

$$dU(t) = e^{-\xi \omega(t-\tau)} \left[ \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin\omega_D(t - \tau) \right] \quad \text{Avec les conditions initiales nulles}$$

Donc, Intégrale de Duhamel d'un système avec amortissement

$$U(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi \omega(t-\tau)} p(\tau) \sin\omega_D(t - \tau) d\tau \quad (5.9)$$

### 5.3.3 Procédé numérique de l'intégrale de Duhamel

*Remarque*

- Si  $p(t)$  est une fonction intégrable, l'expression (5.8) ou (5.9) nous permet de déterminer les oscillations forcées dans beaucoup de cas.
- Si  $p(t)$  n'est pas intégrable, nous devons calculer (5.8) et (5.9) par une méthode numérique.

Pour un système sans amortissement, la transformation de l'intégrale de Duhamel en expression numérique en utilisant l'identité trigonométrique. L'équation (5.7) s'écrit

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) [\sin\omega t \cos\omega\tau - \cos\omega t \sin\omega\tau] d\tau \tag{5.10}$$

Désignons par :

$$A_1(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos\omega\tau d\tau \tag{5.11}$$

$$A_2(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega\tau d\tau \tag{5.12}$$

On peut écrire

$$U(t) = A_1(t)\sin\omega t - A_2(t)\cos\omega t \tag{5.13}$$

Le calcul de (5.7) nous ramène au calcul numérique des expressions (5.11) et (5.12).

#### 5.3.4 Expression numérique pour $A_1(t)$

Multipliant  $p(\tau)$  par  $\cos\omega\tau$  ce qui donne  $y(\tau)$

$$y(\tau) = P(\tau) \cos\omega\tau \quad , \quad \Delta(\tau) = \frac{t}{n}$$

L'expression de  $A_1(t)$  devient :

$$A_1(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \sum_{i=0}^n y_i$$

Cette sommation est désignée formellement par :

$$y_i = \frac{1}{\xi} \sum \xi^A \quad \text{dépend de la règle de la sommation}$$

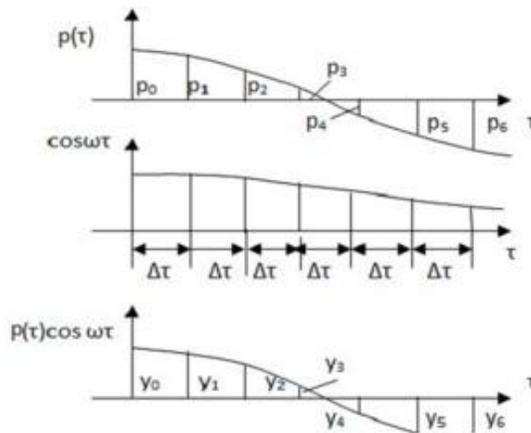


Fig. 5.5 : Formulation du procédé numérique de sommation

- Pour la sommation simple  $\xi = 1$

$$\frac{1}{\xi} \sum \xi^A = (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

- Pour la formule de trapèze  $\xi = 2$

$$\frac{1}{\xi} \sum \xi^A = \frac{1}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) :$$

- Pour la formule de Simpson  $\xi = 3$

$$\frac{1}{\xi} \sum \xi^A = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

### 5.3.5 Expression numérique pour $A_2(t)$

Avec le même raisonnement, nous obtenons l'expression numérique de  $A_2(t)$

- Expression numérique de  $U(t)$

$$U(t) = A_1(t) \sin \omega t - A_2(t) \cos \omega t$$

$$U(t) = \sin \omega t \frac{\Delta \tau}{m \omega \xi} \sum \xi^A - \cos \omega t \frac{\Delta \tau}{m \omega \xi} \sum \xi^B = \frac{\Delta \tau}{m \omega \xi} (\sum \xi^A \sin \omega t - \sum \xi^B \cos \omega t)$$

$$\text{Désignons par } G = \frac{\Delta \tau}{m \omega \xi} = \frac{\Delta \tau \omega}{K \xi} \quad \text{avec } (m \omega^2 = K) \quad (5.14)$$

Finalement, nous obtenons l'expression numérique suivante

$$U(t) = G (\sum \xi^A \sin \omega t - \sum \xi^B \cos \omega t) \quad (5.15)$$

Dans la deuxième phase (les oscillations libres)

$$U(t) = A \sin \omega(t - t_1) - B \cos \omega(t - t_1)$$

Si à  $t_1$  la charge s'annule ( $A = A(t_1)$  et  $B = B(t_1)$ )

Donc le déplacement est  $U_{max} = \sqrt{A^2 + B^2}$

## 5.4 Applications

Ex1: En utilisant l'intégrale de Duhamel, montrer que la réponse générale d'un système à 1ddl non

amorti a une excitation harmonique  $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$ , avec des conditions initiales de déplacement et de vitesse au repos, est donnée par :

$$U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t)$$

*Solution*

L'intégrale de Duhamel est donnée par

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

En remplaçant la valeur de  $p(\tau)$  l'expression précédente devient

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p_0 \sin \bar{\omega} \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

$$\sin \omega(t - \tau) = \sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau$$

En remplaçant dans (1)

$$U(t) = \frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau (\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau) d\tau$$

Simplifiant l'écriture en mettant

$$I_1 = \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau \cos \omega \tau d\tau \quad \text{Et} \quad I_2 = \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau \sin \omega \tau d\tau$$

D'où  $U(t)$  s'écrit

$$U(t) = \frac{p_0}{m\omega} (\sin \omega t \times I_1 - \cos \omega t \times I_2) \quad (2)$$

Nous utilisons l'intégration par partie pour  $I_1$ ,  $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V dU$

En mettant

$$\begin{cases} U = \sin \bar{\omega} \tau & \rightarrow dU = \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \tau d\tau \\ dV = \cos \omega \tau d\tau & \rightarrow V = \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \end{cases}$$

Donc, dans l'intervalle de (0 à t)  $I_1$  s'écrit

$$I_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \sin \bar{\omega} \tau - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau \cos \bar{\omega} \tau d\tau \quad (3)$$

Intégrons (3) une deuxième fois, en mettant

$$\begin{cases} U = \cos \bar{\omega} \tau \rightarrow dU = -\bar{\omega} \sin \bar{\omega} \tau d\tau \\ dV = \sin \omega \tau d\tau \rightarrow V = -\frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \end{cases}$$

Remplaçons dans (2)

$$I_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \sin \bar{\omega} t - \beta \left[ -\frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \cos \bar{\omega} \tau \right]_0^t + \beta \int_0^t \frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \tau d\tau$$

$$I_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \sin \bar{\omega} t + \frac{\beta}{\omega} (\cos \omega t \cos \bar{\omega} t - 1) + \beta^2 I_1$$

$$\text{En fin, } I_1 = \frac{1}{\omega(1-\beta^2)} (\sin \omega t \sin \bar{\omega} t + \beta \cos \omega t \cos \bar{\omega} t - \beta)$$

Pour  $I_2 = \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau \sin \omega \tau d\tau$  la même chose  $I_2$

$$I_2 = \frac{1}{\omega(1-\beta^2)} (\beta \sin \omega t \cos \bar{\omega} t - \cos \omega t \sin \bar{\omega} t)$$

Remplaçons  $I_1$  et  $I_2$  dans (2) on obtient l'expression demandée

$$U(t) = \frac{p_0}{K(1-\beta^2)} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t)$$

Ex2 : (Impulsion semi-sinus)

Déterminer le facteur d'amplification dynamique du système non amorti sous l'action de l'impulsion semi-sinus  $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$

Dans les trois cas :  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{4}{3}$ ,  $\beta = 1$

*Solution*

Equation différentielle :  $M \ddot{U}(t) + KU(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$

Ils existent deux cas :

- Pour le cas d'une impulsion de longue durée, le déplacement max est atteint et la charge elle n'as pas finir d'agir.
- Pour le cas d'une impulsion de courte durée, le déplacement max est produit quand la charge a fini d'agir.

- **Impulsion de longue durée**

1<sup>ère</sup> phase  $0 \leq t \leq t_1 \Rightarrow \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{2}{3} < 1$

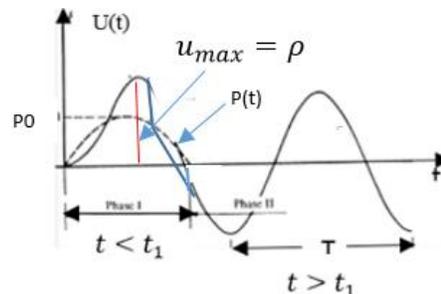
$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{\pi}{t_1}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2t_1} \Rightarrow \frac{t_1}{T} = 0,75$$

Le facteur d'amplification dynamique

$$D = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t^* - \beta \sin \omega t^*)$$

Avec 
$$\bar{\omega} t^* = \frac{2\pi}{1+\frac{\omega}{\bar{\omega}}} = \frac{2\pi}{1+\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{5}$$

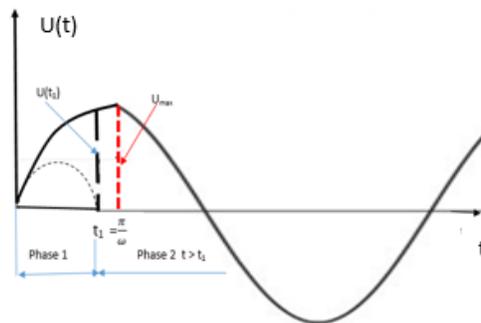
$$D = \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^2} \left( \sin \left( \frac{5\pi}{4} \right) - \frac{2}{3} \sin \left( \frac{6\pi}{5} \right) \right) = 1,77$$



- **Le cas de l'impulsion de courte durée**

- La 1<sup>ère</sup> phase le mouvement est terminé
- La 2<sup>ème</sup>  $t \geq t_1$  le mouvement est libre donné par :

$$U(t) = \frac{\dot{U}(t_1)}{\omega} \sin \omega t + U(t_1) \cos \omega t$$



Le déplacement maximal  $U(t) = \sqrt{(u(t_1))^2 + \left(\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega}\right)^2}$  (1)

On cherche  $(u(t_1))$  et  $\dot{u}(t_1)$

L'expression qui donne le mouvement est

$$u(t_1) = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t_1 - \beta \sin \omega t_1) \quad (2)$$

Avec  $t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$  l'expression devient

$$u(t_1) = \frac{1}{1-\beta^2} \left( \sin \bar{\omega} \frac{\pi}{\bar{\omega}} - \beta \sin \omega \frac{\pi}{\bar{\omega}} \right) = -\frac{p_0}{K} \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \sin \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \quad (3)$$

A partir de l'équation (2), la vitesse est

$$\dot{u}(t_1) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t_1 - \beta \omega \cos \omega t_1) \quad \text{avec } t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \left( -\bar{\omega} - \bar{\omega} \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \right) = \frac{p_0}{K} \frac{\bar{\omega}}{1-\beta^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \right)$$

$$\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} = \frac{p_0}{K} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \right) \quad (4)$$

Remplaçant les valeurs de (3) et (4) dans (1)

$$U_{max} = \frac{p_0}{K} \frac{\beta}{1-\beta^2} \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\beta} \right) + 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{\beta} \right) + 2 \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \right)}$$

Après réarrangement et avec  $2(1 + \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \right)) = 4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right)$  (voir les identités trigonométrique)

Le déplacement maximal est : 
$$U_{max} = \frac{p_0}{K} \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \quad (5)$$

Le facteur d'amplification dynamique est

$$D = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \quad (6)$$

A.N

$$t^* > t \rightarrow \beta > 1$$

Pour  $\beta = \frac{4}{3} > 1$  donc l'impulsion est considérée de courte durée

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\bar{\omega}} = \frac{3}{4} = \frac{3T}{8} \Rightarrow \frac{t_1}{T} = \frac{3}{8} = 0,33$$

de l'équation (6) le facteur d'amplification dynamique est : 
$$D = \frac{2 \left( \frac{4}{3} \right)}{1 - \left( \frac{4}{3} \right)^2} \cos \left( \frac{\pi}{2 \cdot \frac{4}{3}} \right) = 1,33$$

Le cas  $\beta = 1 \rightarrow \bar{\omega} = \omega$  c'est le cas de la résonance

$$U_{rés} = \frac{p_0}{2K} (\sin \bar{\omega} t^* - \omega t^* \cos \omega t^*) \quad \text{Avec } \bar{\omega} = \omega$$

Cherchons  $t^*$

$$\dot{U} = \frac{p_0}{2K} (\omega \cos \omega t^* - \omega \cos \omega t^* + \omega t^* \omega \sin \omega t^*) = 0$$

$$\omega^2 t^* \sin \omega t^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^* = 0 \\ \sin \omega t^* = 0 \Rightarrow t^* = \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

A l'instant  $t^* = t_1 = \frac{\pi}{\omega}$

$$U_{rés} = \frac{p_0}{2K} \left( \sin \omega \frac{\pi}{\omega} - \omega \frac{\pi}{\omega} \cos \omega \frac{\pi}{\omega} \right)$$

La valeur de la résonance est  $U_{rés} = \frac{p_0 \pi}{2K}$

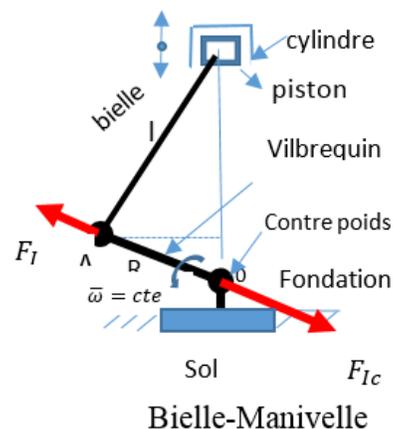
Le facteur d'amplification dynamique  $D = \frac{\pi}{2} = 1.57$  et le rapport de  $\frac{t_1}{T} = \frac{\frac{\pi}{\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}} = 0.5$

Ex 3 : (charge arbitraire)

Rappel

- Moteur électrique  $\begin{cases} \text{stator} \\ \text{rotor} \end{cases}$
- Moteur à combustion interne

Le moteur à combustion interne, est en équilibre quand le moteur fonctionne (Bielle-Manivelle), les forces d'inerties sont en équilibre. Il reste la force d'inerties alternative du piston qui provoque les oscillations verticales du moteur



Quelle est la force dynamique engendrant les oscillations forcées de la fondation, ainsi le déplacement

### Modèle du calcul

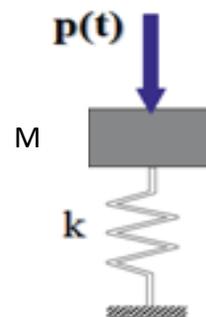
La charge dynamique est équivalente à la force d'inertie alternative du piston

- La masse M est la masse totale ( $M_m + m_f$ )
- La rigidité du sol (K)

L'équation du mouvement est :

$$M \ddot{U}(t) + K U(t) = P(t)$$

Il faut chercher la force P(t)



La force d'inertie centrifuge du piston est  $F_{Ip} = m_p \ddot{U}$

Le déplacement du piston  $x(t)$

$$x(t) = (R + l) - (l \cos \psi + R \cos \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = \bar{\omega} t$$

Exprimant  $\psi = f(\varphi)$

On a  $l \sin \psi = R \sin \varphi \Rightarrow \sin \psi = \frac{R}{l} \sin \varphi$

On sait que  $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi$$

D'où  $x(t) = (R + l) - l \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi\right) - R \cos \varphi$

Après réarrangement  $x(t)$  devient

$$x(t) = R - R \cos \bar{\omega} t - \frac{l}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \sin^2 \bar{\omega} t$$

- La vitesse est :  $\dot{x}(t) = -R \bar{\omega} \sin \bar{\omega} t - \frac{l}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 2 \sin \bar{\omega} t \cos \bar{\omega} t$

$$\dot{x}(t) = -R \bar{\omega} \sin \bar{\omega} t - \frac{l}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 2 \sin \bar{\omega} t \cos \bar{\omega} t = -R \bar{\omega} \sin \bar{\omega} t - \frac{l}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \sin 2 \bar{\omega} t$$

- L'accélération est :

-  $\ddot{x}(t) = -R \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega} l}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 2 \bar{\omega} \cos 2 \bar{\omega} t = R \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t + \bar{\omega}^2 l \left(\frac{R}{l}\right)^2 \cos 2 \bar{\omega} t$

La force d'inertie du piston  $F_{Ip} = m_p \ddot{x} = R m_p \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t + m_p \bar{\omega}^2 l \left(\frac{R}{l}\right)^2 \cos 2 \bar{\omega} t$

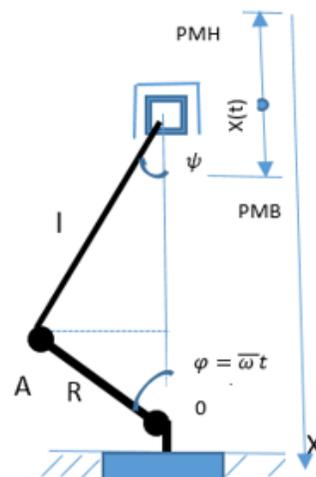
Désignons par  $P_{01} = R m_p \bar{\omega}^2$  et  $P_{02} = m_p \bar{\omega}^2 l \left(\frac{R}{l}\right)^2$

L'équation du système s'écrit :

$$M \ddot{U}(t) + K U(t) = P_{01} \cos \bar{\omega} t + P_{02} \cos 2 \bar{\omega} t$$

D'où la solution est :

$$U(t) = \frac{p_0}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right)^2} \cos \bar{\omega} t - \frac{p_0}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{2\bar{\omega}}{\omega_0}\right)^2} \cos 2 \bar{\omega} t$$

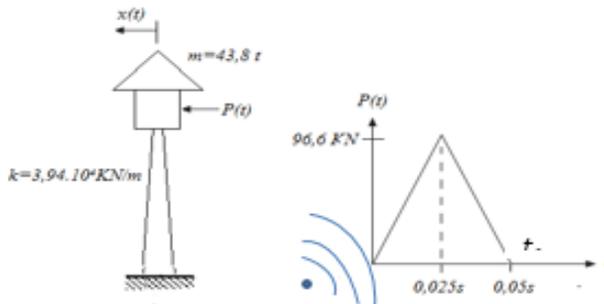


Ex 4 : Le château d'eau ci-dessous est soumis à une excitation  $P(t)$  d'explosion, voir figure. Si le système était au repos (conditions initiales nulles)

$$x(t = 0) = 0 \text{ et } \dot{x}(t = 0) = 0$$

- 1) Déterminer la réponse  $u(t)$  dans la première phase et la deuxième phase en appliquant le calcul numérique.

On donne :  $m = 43,8 \text{ t}$  et  $k = 3,94 \cdot 10^4 \text{ KN/m}$ .



*Solution*

- Calcul de  $U(t)$  dans la première phase  $0 \leq t \leq t_1$

Le déplacement est donné par l'intégrale de Duhamel

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t - \tau) d\tau$$

La formule numérique de cette intégrale est donnée par :

$$U(t) = \frac{\Delta\tau}{m \omega \xi} \left( \sum \xi^A \sin\omega t - \sum \xi^B \cos\omega t \right)$$

$$U(t) = G \left( \sum \xi^A \sin\omega t - \sum \xi^B \cos\omega t \right) \quad \text{Avec } G = \frac{\Delta\tau}{m \omega \xi}$$

$$A_1(t) = G \sum \xi^A \quad \text{et} \quad A_2(t) = G \sum \xi^B$$

D'après la règle de Simpson ( $\xi = 3$ )

$$\sum \xi^A = (y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + 4y_5 + y_6 + 4y_7 + y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

L'expression de  $A_1(t)$

$$A(t) = G(y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + 4y_5 + y_6 + 4y_7 + y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

$$\sum y_i = \sum P_i(\tau) \cos\omega\tau_i \quad , \quad \text{par exemple pour } i = 0 \rightarrow y_0 = P_0(\tau) \cos\omega\tau_0$$

Même chose pour l'expression de B(t)

$$B(t) = G (y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + 4y_5 + y_6 + 4y_7 + y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

$$\sum y_i = \sum P_i(\tau) \sin \omega \tau_i \quad \text{Par exemple } i = 0 \rightarrow y_0 = P_0(\tau) \sin \omega \tau_0$$

- Pour la deuxième phase  $t > t_1$

Pour la 2<sup>ème</sup> phase, le système est en oscillation libre

$$U(t) = A_1(t) \sin(\omega t - t_1) - A_2(t) \cos(\omega t - t_1)$$

Si à  $t_1$  la charge s'annule

$$U(t) = A_1(t_1) \sin \omega t - A_2(t_1) \cos \omega t$$

$$A_1(t) = A_1(t_1) = G \sum \xi^A(t_1) \quad \text{Et} \quad A_2(t) = A_2(t_1) = G \sum \xi^B(t_1)$$

$$\text{Donc le déplacement} \quad U(t) = \sqrt{A_1(t_1)^2 + A_2(t_1)^2} \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\text{Le déplacement maximal est } U_{max} = \sqrt{A_1(t_1)^2 + A_2(t_1)^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \arctg \frac{A_2(t_1)}{A_1(t_1)}$$

Les résultats trouvés par Excel sont illustrés dans le tableau suivant :

**Etude numérique par intégrale de Duhamel (Sans amortissement)**

la fréquence est  $\omega = \frac{\sqrt{K}}{m} = \frac{\sqrt{39487}}{43823} = 29992 \times 30 \text{ rad/s}$  avec m, la masse et K, la rigidité  $\Delta t = T/n = 1/10 = 0,05/10 = 0,005 \text{ (s)}$  N, nombre de pas

La constante G  $G = \frac{\Delta t}{m \omega^2} = \frac{0,005 \times 1000}{43800 \times 30 \times 3} = 1,2692 \times 10^{-6} \left(\frac{m}{kN}\right)$

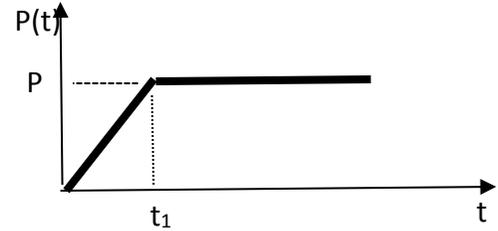
t(s) (1)	p(t)(2)	sinus(3)	cosus(3)	Calcul de A1					Calcul de A2					u(t)=S*(17/18)	fk*(t)(8)	(9)		
				2*4 (5)	Multi (6)	5*6 (7)	ΔAT (8)	AT (9)	2*3 (10)	Multi (11)	10*(11) (12)	ΔAT (13)	AT (14)					
0	0	.	1,000	.	1	.	.	0	.	1	.	.	0	.	.	.	.	
0,005	18,32	0,149	0,989	19,103	4	76,41	113,33		2,887	4	11,549	22,967		.	.	.	.	
0,01	38,84	0,296	0,955	36,914	1	36,91	113,33		11,419	1	11,419	22,967		33,490	21,942	11,549	0,00001	0,58
0,015	57,98	0,435	0,900	52,190	4	208,76	309,46		25,211	4	100,842	155,897		.	.	.	.	.
0,02	77,28	0,565	0,825	63,782	1	63,78	422,78		43,636	1	43,636	178,864		238,721	147,623	91,098	0,00012	4,55
0,025	86,6	0,682	0,732	70,681	4	282,72	394,54		65,846	4	263,385	367,556		.	.	.	.	.
0,03	77,28	0,783	0,622	48,038	1	48,04	817,33		60,536	1	60,536	546,421		640,234	339,661	300,574	0,00038	15,03
0,035	57,98	0,867	0,498	28,839	4	115,56	177,40		50,276	4	201,103	297,653		.	.	.	.	.
0,04	38,84	0,932	0,362	14,002	1	14,00	994,72		36,014	1	36,014	844,074		927,121	305,857	621,264	0,00079	31,06
0,045	18,32	0,976	0,219	4,231	4	16,92	30,93		18,851	4	75,404	111,418		.	.	.	.	.
0,05	0	0,997	0,071	.	1	.	1023,65		.	1	.	955,491		1023,08	67,589	955,491	0,00121	47,77

Ex5 : En utilisant l'intégrale du Duhamel, déterminer la réponse générale d'un système à 1 ddl non amorti de masse  $M$  et de rigidité  $K$  soumis au chargement suivant :

*Solution*

Cherchons la charge  $P(t)$

- Pour  $0 \leq t \leq t_1$  la charge est sous forme d'une droite qui passe par l'origine (phase I)
- Pour  $t \geq t_1$  la charge est constante de valeur de  $P_0$  (phase II)



Donc, la charge

$$P(t) = \begin{cases} \frac{P_0}{t_1} t & 0 \leq t \leq t_1 \\ P_0 & t \geq t_1 \end{cases}$$

Le déplacement total égale de la phase I plus de la phase II

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t)$$

- Phase I :  $0 \leq t \leq t_1$

$$U_1(t) = \frac{p_0}{m\omega t_1} \int_0^t \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{p_0}{m\omega I_1} I_1$$

Calculons l'intégrale en utilisant l'intégration par partie,  $I_1 = \int U \cdot dV = U \cdot V - \int V dU$  (1)

En mettant,

$$\begin{cases} U = \tau & dU = d\tau \\ dV = \sin \omega(t - \tau) d\tau \rightarrow V = \frac{1}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \end{cases}$$

Donc, dans l'intervalle de (0 à t),  $I_1$  s'écrit :

$$I_1 = \left[ \frac{t}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \right]_0^t - \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos \omega(t - \tau) d\tau = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t$$

$$U_1(t) = \frac{p_0}{m\omega t_1} \left( \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right)$$

- Phase II :  $t \geq t_1$

$$U_2(t) = \frac{p_0}{m\omega t_1} \int_0^{t_1} \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau + \frac{p_0}{m\omega} \int_{t_1}^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{p_0}{m\omega t_1} I_1 + \frac{p_0}{m\omega} I_2$$

Calculons

$$I_1 = \int_0^{t_1} \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad \text{après intégration par partie on obtient :}$$

$$I_1 = \left[ \frac{t}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \right]_0^{t_1} - \frac{1}{\omega} \int_0^{t_1} \cos \omega(t - \tau) d\tau$$

$$I_1 = \frac{t_1}{\omega} \cos \omega(t - t_1) + \frac{1}{\omega^2} [\sin \omega(t - \tau)]_0^{t_1}$$

Après réarrangement

$$I_1 = \frac{t_1}{\omega} \cos \omega(t - t_1) + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega(t - t_1) - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t$$

$$\text{Même chose pour } I_2 = \int_{t_1}^t \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad \text{égal à } I_2 = \frac{1}{\omega} [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

D'où, le déplacement prend la forme :

$$U_2(t) = \frac{p_0}{m\omega t_1} \left[ \frac{t_1}{\omega} \cos \omega(t - t_1) + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega(t - t_1) - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right] + \frac{p_0}{m\omega} \frac{1}{\omega} [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

Après réarrangement, le déplacement dans la phase II est :

$$U_2(t) = \frac{p_0}{K} \left[ 1 + \frac{1}{\omega t_1} (\sin \omega(t - t_1) - \sin \omega t) \right]$$

Les résultats

$$\begin{cases} U_1(t) = \frac{p_0}{m\omega t_1} \left( \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ U_2(t) = \frac{p_0}{K} \left[ 1 + \frac{1}{\omega t_1} (\sin \omega(t - t_1) - \sin \omega t) \right] & \text{pour } t \geq t_1 \end{cases}$$

# Chapitre 6 : Oscillations non Linéaires d'un Système à un 1ddl

## 6.1 Introduction

Nous avons étudié les systèmes linéaires, la raideur  $K$  et l'amortissement  $C$  sont constantes.

$$F_k = K \cdot u \quad \text{et} \quad F_k = C \cdot \dot{u}$$

En pratique, nous rencontrons souvent les systèmes dont  $K$  et  $C$  ne sont pas constantes comme le béton et la fonte.

- Diagramme charge –déformation



Fig. 6.1 : Déformation a) élasticité linéaire, b) élasticité non linéaire (Béton)

- Pour le pendule mathématique

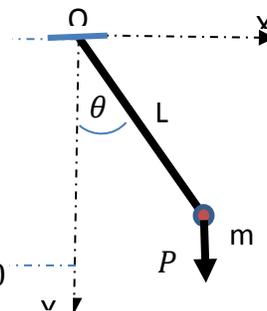
D'après le théorème de la variation du moment cinétique

$$J \ddot{\theta}(t) = -lmg \sin \theta \quad \theta \text{ Angle de rotation}$$

Le développement de Taylor de  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} - \dots$

$$ml^2 \ddot{\theta}(t) + lmg \left( \theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{6} \right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \left( \theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{6} \right) = 0$$

L'équation obtenue est non linéaire



Si nous considérons seulement les petites oscillations  $\theta^3 \approx 0$

Alors, l'équation de mouvement devient  $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$  (Équation linéaire)

Dans l'étude des oscillations non linéaire, ils existent plusieurs méthodes. Dans ce chapitre, nous étudions la méthode d'intégration pas à pas (Méthode numérique). Cette méthode s'est relevé donner de bons résultats, mais assez peu de calcul.

## 6.2 Equation Incrémentale d'équilibre

### 6.2.1 Représentation des caractéristiques d'un système non linéaire

Soit un système dont les caractéristiques sont données en figure (6.2)

- La figure 6.2a : variation de la force de rappel par rapport au déplacement (Pente sécante =  $K(t)$ ).
- La figure 6.2b : variation de la force d'amortissement par rapport la vitesse (Pente sécante =  $C(t)$ ).
- La figure 6.2c : variation de la charge  $P(t)$ .

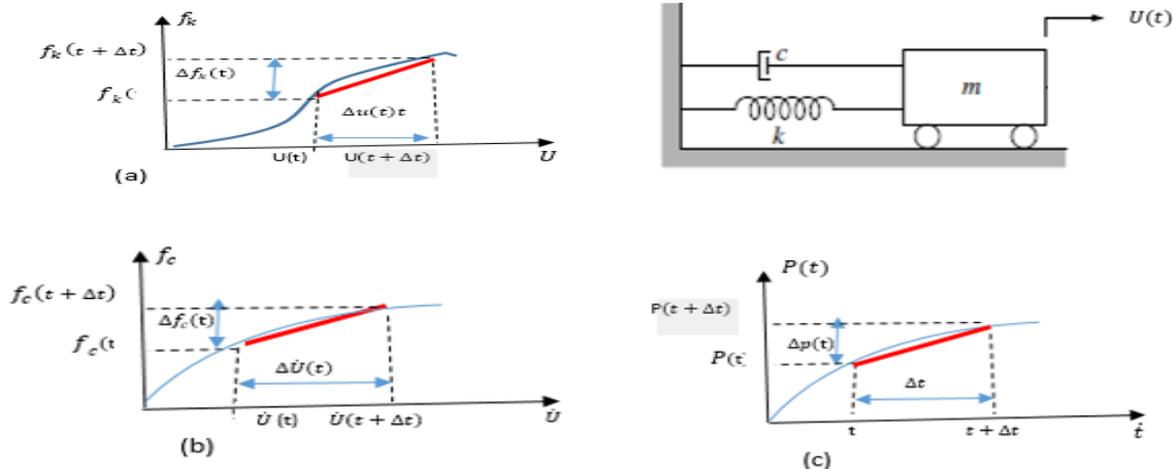


Fig. 6.2 : Les caractéristiques du système (a), (b) et (c)

### 6.2.2 Idée de la méthode de l'intégration Pas à Pas

L'idée de cette méthode est la suivante :

Pour chaque incrément de temps  $\Delta t$  déterminer  $u(t)$  et  $\Delta u(t)$

- $u(t)$  déplacement au début de l'incrément
- A la fin de cet incrément  $u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta u(t)$

Cette valeur  $u(t + \Delta t)$  est de nouveau considéré comme la valeur de départ au début de l'incrément suivant.

Cette méthode s'appelle Méthode d'intégration pas à pas. Notre but est de chercher pour incrément la valeur de  $\Delta u(t)$ .

### 6.3 Equation incrémentale de l'équilibre des forces

D'après le principe de d'Alembert à chaque instant  $t$  :

$$f_I(t) + f_c(t) + f_k(t) = P(t) \quad (6.1)$$

A l'instant  $(t + \Delta t)$

$$f_I(t + \Delta t) + f_c(t + \Delta t) + f_k(t + \Delta t) = P(t + \Delta t) \quad (6.2)$$

La soustraction (6.2) – (6.1) donne

$$\Delta f_I(t) + \Delta f_c(t) + \Delta f_k(t) = \Delta P(t) \quad (6.3)$$

Avec  $(f_I(t + \Delta t) - f_I(t) = \Delta f_I(t)$

$$\begin{cases} \Delta f_I(t) = m \ddot{u}(t + \Delta t) - m \ddot{u}(t) = m \Delta \ddot{u}(t) \\ \Delta f_c(t) = f_c(t + \Delta t) - f_c(t) = C(t) \Delta \dot{u}(t) \\ \Delta f_k(t) = f_k(t + \Delta t) - f_k(t) = K(t) \Delta u(t) \\ \Delta P(t) = p(t + \Delta t) - p(t) = \Delta p(t) \end{cases} \quad (6.4)$$

La relation (6.3) prend une nouvelle forme, en remplaçant l'équation (6.4).:

$$m \Delta \ddot{u}(t) + C(t) \Delta \dot{u}(t) + K(t) \Delta u(t) = \Delta p(t) \quad (6.5)$$

Dont laquelle les inconnus sont :  $\Delta u(t), \Delta \dot{u}(t), \Delta \ddot{u}(t)$

### 6.4 Hypothèse de base

La méthode utilisée est basée sur les deux hypothèses suivantes :

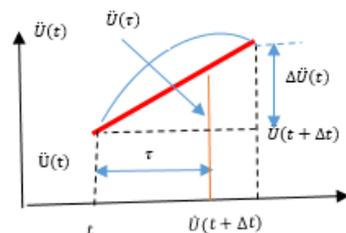
a) Accélération  $\ddot{u}(t)$  varie linéairement durant  $\Delta t$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \tau \quad (6.6)$$

b) Dans l'incrément  $\Delta t$ ,  $C(t)$  et  $K(t)$  sont constants

### 6.5 Etablir les équations pour $\Delta u(t)$ et $\Delta \dot{u}(t)$

- Pour  $\Delta \dot{u}(t)$



Intégrant (6.6) par rapport à  $\tau$

$$\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(\tau) + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2} + C_1 \quad \text{Si } \tau = 0 \Rightarrow C_1 = \dot{u}(0) = \dot{u}(t)$$

$$\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(\tau) + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2} + \dot{u}(t) \tag{6.7}$$

Avec  $\tau = \Delta t$ , l'équation (6.7) devient :

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \ddot{u}(t)\Delta t + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^2}{2} + \dot{u}(t)$$

On peut écrire l'équation précédente comme suit :

$$\Delta \dot{u}(t) = \ddot{u}(t)\Delta t + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^2}{2} \tag{6.8}$$

- Pour  $\Delta u(t)$

Intégrant (6.7) par rapport à  $\tau$

$$u(\tau) = \ddot{u}(t) \frac{\Delta \tau^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta \tau^3}{6} + \dot{u}(t)\tau + C_1 \quad \text{Pour } \tau = 0 \rightarrow C_1 = u(0) = u(t)$$

$$u(\tau) = \ddot{u}(t) \frac{\Delta \tau^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta \tau^3}{6} + \dot{u}(t)\tau + u(t)$$

Si  $\tau = \Delta t$

$$u(t + \Delta t) + u(t) = \ddot{u}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^3}{6} + \dot{u}(t)\Delta t$$

On peut écrire

$$\Delta u(t) = \ddot{u}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{u}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^3}{6} + \dot{u}(t)\Delta t \tag{6.9}$$

### 6.6 Formule numériques pour incrément de déplacement $\Delta u(t)$

Nous avons 3 équations avec 3 inconnues les autres termes sont connus. Pour chaque incrément m,  $k(t)$ ,  $C(t)$ ,  $\Delta p(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  de l'équation (6.9) nous tirons  $\Delta \ddot{u}(t)$

$$\Delta\ddot{u}(t) = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta u(t) - \frac{6 \dot{u}(t)}{\Delta t} - 3\ddot{u}(t) \tag{6.10}$$

En mettant (6.10) dans (6.8)

$$\begin{aligned} \Delta\dot{u}(t) &= \ddot{u}(t)\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{6}{\Delta t^2} \Delta u(t) - \frac{6 \dot{u}(t)}{\Delta t} - 3\ddot{u}(t) \right) \\ \Delta\dot{u}(t) &= -\frac{1}{2}\ddot{u}(t)\Delta t - 3 \dot{u}(t) + \frac{3}{\Delta t} \Delta u(t) \end{aligned} \tag{6.11}$$

En mettant  $\Delta\dot{u}(t)$  et  $\Delta\ddot{u}(t)$  nous obtenons

$$m \left( \frac{6}{\Delta t^2} \Delta u(t) - \frac{6 \dot{u}(t)}{\Delta t} - 3\ddot{u}(t) \right) + c(t) \left( -\frac{1}{2}\ddot{u}(t)\Delta t - 3 \dot{u}(t) + \frac{3}{\Delta t} \Delta u(t) \right) + K(t)u(t) = \Delta p(t)$$

Désignons par

$$\begin{cases} \bar{K}(t) = K(t) + \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c(t)}{\Delta t} \\ \Delta\bar{p}(t) = \Delta p(t) + m \left( \frac{6 \dot{u}(t)}{\Delta t} + 3\ddot{u}(t) \right) + C(t) \left( \frac{1}{2}\ddot{u}(t)\Delta t + 3 \dot{u}(t) \right) \end{cases} \tag{6.12}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \bar{K}(t)\Delta u(t) = \Delta\bar{p}(t) &\Rightarrow \Delta u(t) = \frac{\Delta\bar{p}(t)}{\bar{K}(t)} \\ \begin{cases} \ddot{u}(t) = \frac{p(t)-f_k-f_c}{m} \\ u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta u(t) \\ \dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t) \end{cases} \end{aligned} \tag{6.13}$$

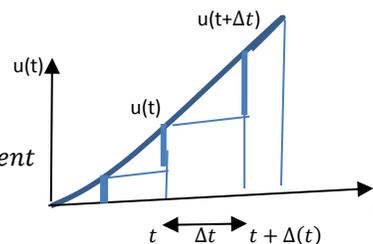
### 6.7 Récapitulation du processus de calcul

Dans chaque intervalle  $\Delta t$  le processus est utilisé d'après l'ordre suivant.

On détermine :

- 1) Les valeurs  $u(t)$  et  $\dot{u}(t)$

ces valeurs sont  $\begin{cases} \text{soit des conditions initiales} \\ \text{soit les valeurs obtenues à la fin de l'intervalle précédent} \end{cases}$



- 2) Les constantes  $C, K, f_k(t) = K(t)u(t), f_c(t) = C(t)\dot{u}(t)$
- 3) l'accélération  $\ddot{u}(t)$  par équ. (6.13)
- 4)  $\Delta\bar{p}(t)$  et  $\bar{K}(t)$  par équ.(6.12)

Avec  $\bar{K}(t)$ , la rigidité effective et  $\bar{\Delta}p(t)$ , la charge effective

5) La variation  $\Delta u(t)$

$$\Delta u(t) = \frac{\bar{\Delta}p(t)}{\bar{K}(t)}, \quad \Delta \dot{u}(t) \quad (6.11)$$

6) Le déplacement et la vitesse à la fin de l'intervalle considéré par les formules (6.13)

$$m\Delta \ddot{u}(t) + C(t)\Delta \dot{u}(t) + K(t)\Delta u(t) = \Delta p(t) \quad \text{équs. (6.5)}$$

$$\Delta \dot{u}(t) = \frac{3}{\Delta t}\Delta u(t) - 3\dot{u}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t) \quad \text{équs. (6.11)}$$

$$\bar{\Delta}p(t) = \bar{K}(t)\Delta u(t) \quad \text{équs. (5.3)}$$

$$\begin{cases} \bar{\Delta}p(t) = \Delta p(t) + m\left(\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t) + 3\ddot{u}(t) + C\left(3\dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\right)\right) \\ \bar{K}(t) = K(t) + \frac{6m}{\Delta t} + \frac{3C(t)}{\Delta t^2} \end{cases} \quad \text{équs. (6.12)}$$

7) Jusqu'à ici tous les calculs sont terminés, nous passons à l'intervalle suivante

*Remarque :*

- La méthode étudiée est valable pour n'importe quel système non linéaire ;
- Cette méthode est évidemment utilisable pour les systèmes linéaires, mais les calculs deviennent plus simples ;
- Comme dans tous les méthodes numériques la précision des résultats dépend de l'intervalle choisie, les trois facteurs qui décide le choix de  $\Delta t$  :
  - La variation de  $P(t)$  ;
  - La complexité de  $K(t)$  et  $C(t)$  ;
  - La période propre du système  $\Delta t \leq \frac{1}{10} t$  le résultat est digne de confiance.
- S'il y a un moindre doute sur les résultats obtenus, il faut refaire les calculs avec une intervalle  $\Delta t$  moitier.

### 6.8 Applications

Ex1 : Soit un portique élasto-plastique d'1 degré de liberté dont les caractéristiques, voir figure ci-dessous. Pour un incrément de temps de 0.1s, déterminer la réponse non linéaire en utilisant la méthode pas à pas avec accélération linéaire.

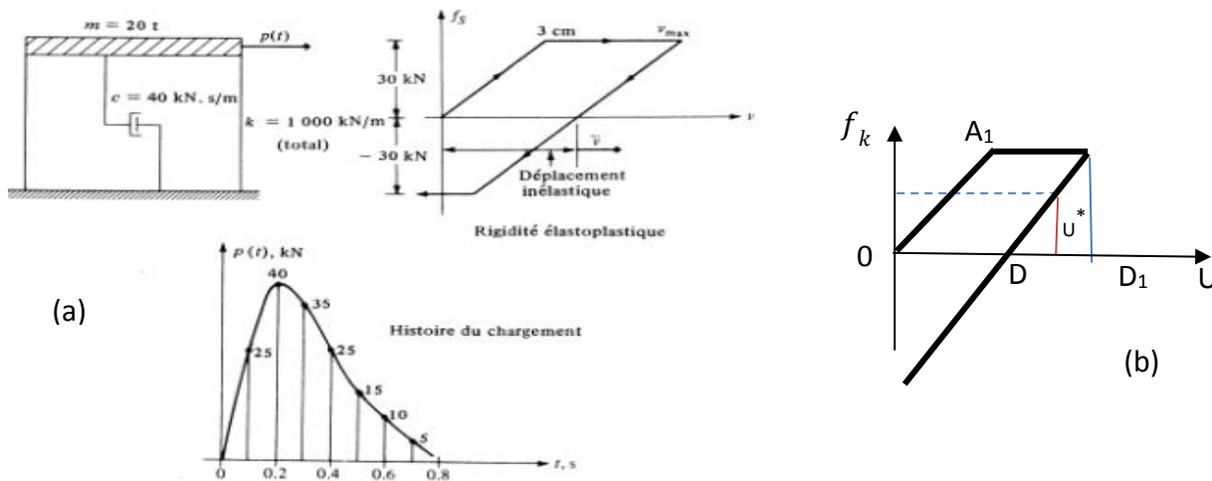
*Solution :* (Oscillations forcées sous l'action de la charge P(t))

Avant de résoudre le problème, il faut un petit rappel sur la déformation plastique (permanente, irréversible)

$$OD_1 = OD + DD_1 \quad \begin{cases} OD, \text{ déformation plastique} \\ DD_1, \text{ déformation élastique} \\ U^* \text{ arbitraire} \end{cases}$$

$$U_{el} = U^* - U_{pl}$$

D'où la déformation élastique est  $U_{total} = U_{el} + U_{pl}$



La durée d'application de la charge est de 0.8 s. prenons 8 intervalles avec  $\Delta t = 0.1$  s d'après la méthode d'intégration pas à pas, nous devons faire les calculs dans chaque intervalle.

- $u(t), \dot{u}(t)$
- $K, C \rightarrow f_k = K u(t) \rightarrow f_c = C \dot{u}(t)$

$$f_k = 1000 u \quad (u < 3cm) \quad \text{pour } u > 3cm \rightarrow f_k = 30 KN$$

Quant U atteint  $U_{max}$ , il dimuni  $f_k = K U_{el}$  pour  $f_c = 40 Kn \cdot \frac{s}{m}$  est toujours constante

- $\Delta \ddot{u} = \frac{P(t) - f_c(t) - f_k(t)}{m}$

$$\bullet \begin{cases} \bar{\Delta}p(t) = \Delta p(t) + m\left(\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t) + 3\ddot{u}(t) + C\left(3\dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\right)\right) \\ \bar{\Delta}p(t) = \Delta p(t) + 20\left(\frac{6}{0,1}\dot{u} + 3\ddot{u} + 40\left(3\dot{u} + \frac{0,1}{2}\ddot{u}\right)\right) \\ \bar{\Delta}p(t) = \Delta p(t) + 1320\dot{u} + 62\ddot{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{K}(t) = K(t) + \frac{6 \cdot m}{\Delta t} + \frac{3 \cdot C(t)}{\Delta t^2} \\ \bar{K}(t) = K(t) + \frac{6 \cdot 20}{\Delta t} + \frac{3 \cdot 40}{\Delta t^2} = k(t) + 13200 \left(\frac{Kn}{m}\right) \end{cases}$$

$$\bullet \Delta\dot{u}(t) = \frac{3}{\Delta t}\Delta u(t) - 3\dot{u}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)$$

$$\Delta\dot{u}(t) = \frac{3}{0,1}\Delta u - 3\dot{u} - \frac{0,1}{2}\ddot{u} = 30\Delta u - 3\dot{u} - 0,05\ddot{u}$$

$$\begin{cases} u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta u(t) \\ \dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t) \end{cases}$$

Les résultats calculés par Excel sont illustrés dans le tableau ci-dessous :

Méthode pas à pas avec accélération linéaire														
$t(s)$ (1)	$P(t)(kN)$ (2)	$U(m)$ (3)	$U'$ (4)	$F_k$ (5)	$F_c$ (6)	$F_l$ (7)	$U''$ (8)	$\Delta P$ (9)		$\Delta P'$ (11)	$k$ (12)	$K'$ (13)	$\Delta U$ (14)	$\Delta U'$ (15)
temps	charge	dépl.	vitesse	raideur	amortiss	$F_l$ inertie	Acceler,							
0	0		-	-	-	-	-	25,000	-	25,00	1000	14200	0,00176	0,05282
0,1	25	0,00175	0,05275	1,75	2,11	21,140	1,057	15,000	135,164	150,16	1000	14200	0,01057	0,10615
0,2	40	0,00123	0,15875	12,30	6,35	21,350	1,068	5,000	275,735	270,74	1000	14200	0,01907	0,04235
0,3	35	0,03140	0,20075	30,00	8,03	3,030	0,152	10,000	255,597	245,60	-	13200	0,01861	-0,03650
0,4	25	0,0500	0,16450	30,00	6,58	-11,580	-0,579	10,000	181,242	171,24	0	13200	0,01297	-0,07536
0,5	15	0,062975	0,08925	30,00	3,57	-18,570	-0,929	5,000	60,243	55,24	-	13200	0,00419	-0,09577
0,6	10	0,067175	-0,00700	30,00	0,3	-19,720	-0,986	5,000	-70,372	-75,37	1000	14200	-0,00531	-0,08894
0,7	5	0,06188	-0,09575	24,70	-3,83	-15,870	-0,794	5,000	-175,587	-180,59	1000	14200	-0,01272	-0,05460
0,8	0	0,05025	-0,13025	13,10	-5,21	-7,890	-0,395	-	-196,389	-196,39	1000	14200	-0,01383	-0,00443
0,9	0	0,03640	-0,12500	-0,80	-5,00	5,800	0,290	-	-147,020	-147,02	1000	14200	-0,01035	0,05
1	0	0,02605	-0,07500				-	-	-	-				

# Chapitre 7 : Système à plusieurs degrés de liberté

## liberté

### 7.1 Généralités

Nous avons étudié les systèmes dont les déplacements sont caractérisés par un seul paramètre. En pratique, nous avons souvent à rencontrer les systèmes dont les déplacements sont caractérisés par plusieurs paramètres. Ces systèmes s'appellent systèmes à plusieurs degrés de liberté

#### 7.1.1 Quelques exemples

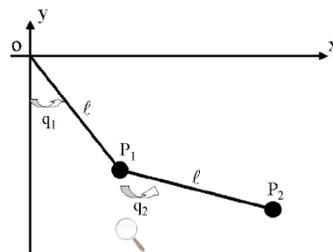
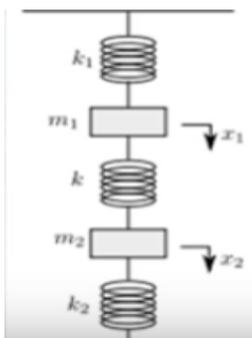


Fig. 7.1 : Masse - ressorts et pendule double

- *Mouvements d'une voiture*

- Déplacement vertical
- Balancement longitudinal (angle  $\theta$ )
- Balancement Latéral

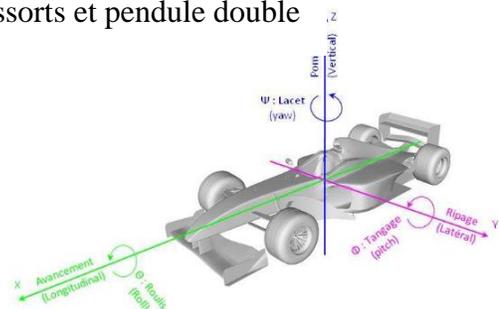


Fig. 7.2 : mouvement du véhicule

- **Vibration en torsion des arbres** : Un vilebrequin d'un moteur à 4 temps à 4 cylindres et modélisé comme un arbre à 5 disques figure 7.3a
- **Vibration en flexion des arbres figure 7.3b**

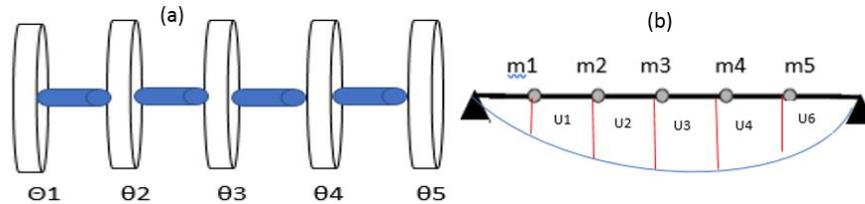


Fig.7.3 : Vibration des arbres a) Flexion b) Torsion

En général on peut utiliser les méthodes connues tel que :

- les équations de Lagrange
- Le principe de d'Alembert
- Les théorèmes généraux de la Mécanique

Pour des systèmes particuliers, on peut utiliser d'autres méthodes.

## 7.2 Etablissement des équations différentielles des oscillations en flexion

Considérons un système de 'n' masses et une barre. La déformée de ce système est caractérisé par 'n' déplacements.

### 7.2.1 Equation d'équilibre dynamique

A l'instant (t) les forces appliquées à la masse  $m_i$

$$f_{li} + f_{ci} + f_{ki} = p_i(t) \quad I = 1,2,3, \dots, N \quad (7.1)$$

Les 'n' équations peuvent être écrites sous la forme matricielle

$$[f_l] + [f_c] + [f_k] = [p(t)] \quad (7.2)$$

Dans laquelle

$$[f_I] = \begin{cases} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{In} \end{cases}, f_C = \begin{cases} f_{C1} \\ f_{C2} \\ \cdot \\ f_{CN} \end{cases}, f_K = \begin{cases} f_{k1} \\ f_{k2} \\ \cdot \\ f_{kn} \end{cases}, p^{(t)} = \begin{cases} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \cdot \\ p_n(t) \end{cases} \quad (7.3)$$

### 7.2.2 Matrice de rigidité

Supposons que le système est linéaire, la force de rappel à un point quelconque du déplacement de tous les autres points est :

$$\begin{cases} f_{k1} = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 \dots \dots \dots + k_{1j}u_j + \dots + k_{1n}u_n \\ f_{k2} = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 \dots \dots \dots + k_{2j}u_j + \dots + k_{2n}u_n \\ \vdots \\ f_{kn} = k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 \dots \dots \dots + k_{nj}u_j + \dots + k_{nn}u_n \end{cases} \quad (7.4)$$

Si on introduit la matrice suivante

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Et le vecteur déplacement  $[U] = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix}$  (7.6)

La vecteur des forces de raideur s'écrit  $\{f_k\} = [K]\{u\}$  (7.7)

$[K]$  : matrice de rigidité, dimension (n,n)

$K_{ij}$ ,  $i = j = 1.2.3 \dots \dots \dots n$  coefficients de rigidité

$\{U\}$  : vecteur de déplacement

- Signification mécanique des  $(K_{ij})$

Supposons que nous avons ainsi à choisir ' n ' forces extérieures  $P_1, P_2, P_3 \dots \dots \dots P_n$ , de telle manière qu'en les appliquant au système. Tous les déplacements sont nuls sauf en un point i

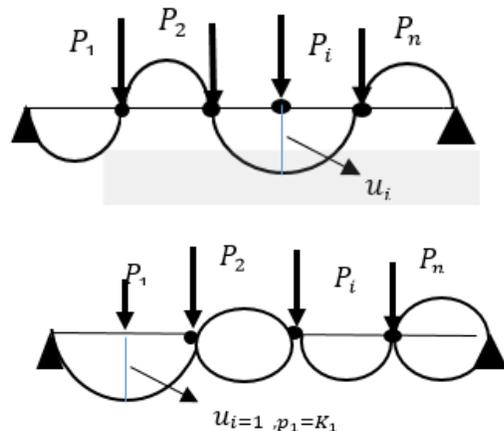
Exemple  $u_i$

De l'équation (4)

$$P_1 = K_{1j}, P_2 = K_{2j}, \dots, P_j = K_{jj}, \dots, P_n = K_{nj}$$

La Force appliquée à la coordonnées ' i ' produits par le déplacement de coordonnées j

Dans le cas des masses concentrées, l'accélération de la masse quelconque n'impose de la force d'inertie qu'à elle-même.



$$\begin{cases} f_{I1} = m_1 \ddot{u}_1 \\ f_{I2} = m_2 \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ f_{In} = m_n \ddot{u}_n \end{cases} \quad \text{Si l'introduit} \quad [m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

[m]: matrice de rigidité, elle est diagonale

$$\{f_I\} = [m]\{\ddot{u}\} \quad (7.9)$$

### 7.2.3 Matrice d'amortissement

Supposons que les forces d'amortissement  $f_{c1}$  dépendent des vitesses

$$U_j \quad j= 1.2.3 \dots \dots \dots n$$

On a les relations suivantes

$$\begin{cases} f_{c1} = C_{11}\dot{u}_1 + C_{12}\dot{u}_2 \dots \dots \dots + C_{1j}\dot{u}_j + \dots + C_{1n}\dot{u}_n \\ f_{c2} = C_{21}\dot{u}_1 + C_{22}\dot{u}_2 \dots \dots \dots + C_{2j}\dot{u}_j + \dots + C_{2n}\dot{u}_n \\ \vdots \\ f_{cn} = C_{n1}\dot{u}_1 + C_{n2}\dot{u}_2 \dots \dots \dots + C_{nj}\dot{u}_j + \dots + C_{nn}\dot{u}_n \end{cases} \quad (7.10)$$

On introduit les matrices suivantes :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Le vecteur de la vitesse  $\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_j \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix}$  (7.12)

Le vecteur des forces d'amortissements  $\{f_c\} = [C]\{\dot{u}\}$  (7.13)

Le coefficient  $C_{ij}$  s'appellent coefficients d'influence d'amortissement

- *Signification des  $C_{11}$*  : Force appliquée à la coordonnées produite par la vitesse unitaire de coordonnée j

### 7.3 Equation différentielle des oscillations du système

En remplaçant (7.7), (7.9) et (7.13) dans (7.2) nous obtenons :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{P(t)\} \quad (7.14)$$

Si  $n = 1$  alors  $M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)$

### 7.4 Etablissement des équations différentielles des oscillation en flexion

(Méthode des forces)

#### 7.4.1 Matrice de souplesse

Pour un système linéaire, le déplacement à un point quelconque dépend des forces appliquées aux autres points.

$$\begin{cases} u_1 = \delta_{11}p_1 + \delta_{12}p_2 \dots \dots \dots + \delta_{1j}p_j + \dots + \delta_{1n}p_n \\ u_2 = \delta_{21}p_1 + \delta_{22}p_2 \dots \dots \dots + \delta_{2j}p_j + \dots + \delta_{2n}p_n \\ \vdots \\ u_n = \delta_{n1}p_1 + \delta_{n2}p_2 \dots \dots \dots + \delta_{nj}p_j + \dots + \delta_{nn}p_n \end{cases} \quad (7.15)$$

On introduit

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

L'expression (7.15) devient  $\{u\} = [\delta]\{p\}$  (7.17)

$\delta_{ij}$  : coefficient d'influence de souplesse

Si toutes les forces extérieures sont égales à zéro sauf  $p_j$ ,  $p_j = 1$

L'expression (7.15) devient :  $u_1 = \delta_{1j}, u_2 = \delta_{2j}, \dots, u_j = \delta_{jj}, \dots, u_n = \delta_{nj}$

- Signification des  $\delta_{ij}$

Déplacement de la coordonnée ' i ' produit par la force unitaire appliquée à la coordonnée ' j '

### 7.4.2 Détermination du coefficient de souplesse

*Remarque*

Tous ces méthodes qu'en va citer ici, sont déjà étudiées en résistance des matériaux approfondies

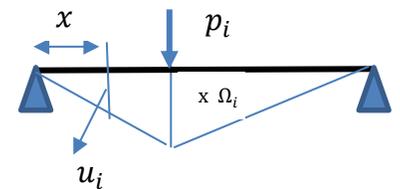
- a) Par la méthode de **Mohr**

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} dx \quad (7.18)$$

$M_i$  : moments fléchissant

- b) Par la méthode de **Verchtchaguine**

Le théorème de Verchtchaguine est une méthode mathématique qui permet de simplifier le calcul d'intégrales utilisé avec le théorème de la charge unitaire (qui est une variante du théorème de Castigliano). Il peut éviter de passer par les intégrales de Mohrs



C'est une méthode de multiplication des diagrammes ( ) ; diagramme )

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EJ} \Omega_i f_c = \frac{1}{EJ} (F)(f) \quad (7.19)$$

Pour plus d'information consulté le cours de résistance des matériaux approfondies (RDMA)

*Remarques*

Les propriétés des matrices de rigidités et de souplesse  $[K]$  et  $[\delta]$

- a) On peut démontrer que la matrice de souplesse est symétrique  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  application de la loi de Betti-Maxwell
- b) La matrice  $[K]$  est l'inverse de la matrice de souplesse

$$[k] = [\delta]^{-1} \quad , \quad [\delta] = [k]^{-1} \quad \text{la matrice } [k] \text{ est aussi symétrique.}$$

**7.5 Applications**

*Rappel*

Etablissement des équations différentielles des oscillations des systèmes

On peut utiliser 4 méthodes  $\left\{ \begin{array}{l} \text{L'équation de Lagrange} \\ \text{Méthode de principe de déplacement virtuel} \\ \text{Méthode de principe de D'Alembert} \\ \text{les théorèmes généraux de la mécanique} \end{array} \right.$

Un corps est en mouvement si :  $M \ddot{X} = \sum X, M \ddot{Y} = \sum Y, J \ddot{\phi} = \sum M(F)$

**Ex1 :**

Déterminer les équations de mouvement du système ci-dessous en appliquant l'équation de Lagrange.

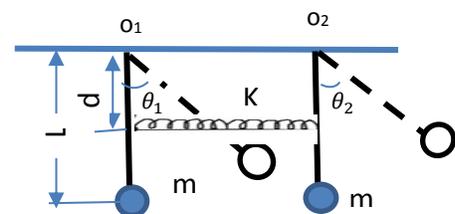
*Solution*

C'est un système à 2 d.d.l. de coordonnées généralisées  $(\theta_1, \theta_2)$ , donc deux équations de mouvements.

Lagrange s'écrit :  $L = T - V$

- Energie cinétique T

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m (l \cdot \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m (l \cdot \dot{\theta}_2)^2 \quad , \text{ avec } (v = l \cdot \dot{\theta})$$



- Energie potentielle  $V$

$$V = \frac{1}{2}K[d(\theta_1 - \theta_2)]^2 + mgh_1 + mgh_2$$

$$V = \frac{1}{2}Kd^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + mgl(1 - \cos\theta_1) + mgl(1 - \cos\theta_2)$$

Alors, le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m(l.\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(l.\dot{\theta}_2)^2 - \frac{1}{2}Kd^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - mgl(1 - \cos\theta_1) - mgl(1 - \cos\theta_2)$$

Les équations de Lagrange

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta_1} = 0 \rightarrow \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{kd^2}{ml^2} + \frac{g}{l} \right) \theta_1 - \frac{kd^2}{ml^2} \theta_2 = 0 \quad (1)$$

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta_2} = 0 \rightarrow \ddot{\theta}_2 + \left( \frac{kd^2}{ml^2} + \frac{g}{l} \right) \theta_2 - \frac{kd^2}{ml^2} \theta_1 = 0 \quad (2)$$

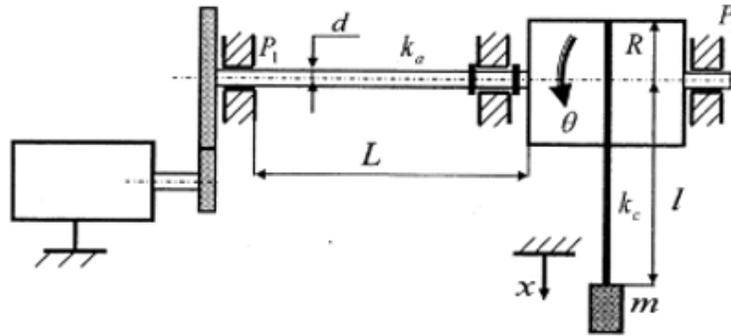
Les équations de mouvement sont :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kd^2}{ml^2} + \frac{g}{l} & -\frac{kd^2}{ml^2} \\ -\frac{kd^2}{ml^2} & \frac{kd^2}{ml^2} + \frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ex2 : Un monte-charge comporte un groupe moteur réducteur, un arbre, un tambour, un câble élastique et une charge voir figure ci-dessous. On néglige l'inertie de l'arbre et la masse du câble, on suppose que le tambour est indéformable et que le câble reste toujours tendu. On tient seulement de la torsion de l'arbre.

Les données :  $\mathbf{m}$  masse à soulever,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{G}$  le diamètre, longueur et le module d'élasticité de cisaillement de l'arbre respectivement,  $\mathbf{R}$  le rayon du tambour et  $\mathbf{J}$  son moment d'inertie,  $\mathbf{l}$  la longueur tendue du câble,  $\mathbf{A}$  la section du câble et  $\mathbf{E}$  son module d'élasticité.

- 1) Déterminer les pulsations propres du système en cas du blocage du palier  $P_1$



*Solution*

Pour trouver les pulsations, il faut d'abord trouver les équations de mouvement en appliquant l'une des méthodes énergétiques. Soit l'équation de Lagrange.

C'est un système à deux degrés de liberté, les coordonnées généralisées sont ( $q_1 = x$  et  $q_2 = \theta$ )

Le Lagrangien du système s'écrit :  $L = T - V$

- Energie cinétique  $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  avec J et R : moment d'inertie et rayon du tambour

- Energie potentielle  $V = \frac{1}{2}K_a \theta^2 + \frac{1}{2} K_c(x - R\theta)^2$

$K_a, K_c$  : rigidité de l'arbre et du câble respectivement.

Donc, L s'écrit :  $L = T - V = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_a \theta^2 - \frac{1}{2} K_c(x - R\theta)^2$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) = J\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\delta L}{\delta \theta} = -K_a\theta + K_c(x - R\theta)R$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) - \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \quad , \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad , \quad \frac{\delta L}{\delta x} = -K_c(x - R\theta)$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + K_a\theta - K_c(x - R\theta)R = 0 \\ m\ddot{x} + K_c(x - R\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J\ddot{\theta} + (K_a + K_cR^2)\theta - K_cRx = 0 \\ m\ddot{x} + K_cx - K_cR\theta = 0 \end{cases}$$

Comme on peut l'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_a + K_cR^2 & -K_cR \\ -K_cR & K_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Les pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$

Les pulsations propres du système seront déterminées à partir de l'équation

$$\det|K - M\omega^2|$$

$$\text{Soit } \begin{vmatrix} K_a + K_c R^2 - J\omega^2 & -K_c R \\ -K_c R & K_c - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(K_a + K_c R^2 - J\omega^2)(K_c - m\omega^2) - K_c^2 R^2 = 0 \quad (1)$$

Après réarrangement (1) s'écrit :

$$\omega^4 - \left(\frac{K_a + K_c R^2}{J} + \frac{K_c}{m}\right)\omega^2 + \frac{(K_a + K_c R^2)K_c - K_c^2 R^2}{mJ} = 0$$

$$\text{On pose } \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{K_a + K_c R^2}{J} + \frac{K_c}{m}\right)\omega^2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(K_a + K_c R^2)K_c - K_c^2 R^2}{mJ}$$

$$\omega^4 - 2\alpha\omega^2 + \beta = 0 \quad , \text{ posons } \omega^2 = Y$$

D'où  $Y^2 - 2\alpha Y + \beta = 0$  , les deux racines de l'équation sont :

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} \\ Y_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \\ \omega_2 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \end{cases} \quad (2)$$

En remplaçant les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  dans (2) on obtient les deux pulsations du système.

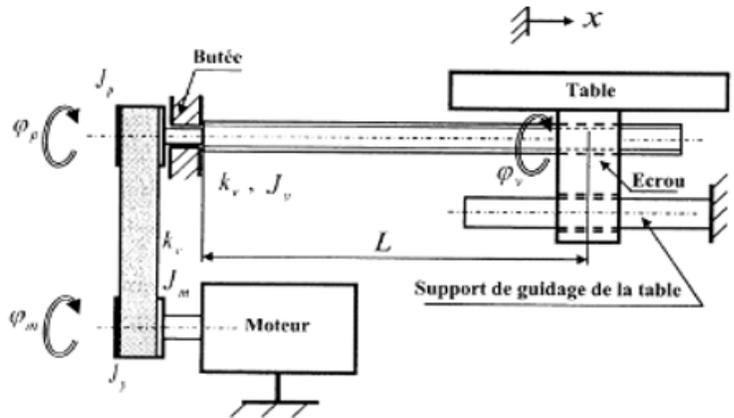
- Les rigidités

- Pour la rigidité du câble  $K_c$ , voir (Ex. 2, chapitre 3)
- Le même raisonnement pour la rigidité de l'arbre  $K_a$ , mais il travaille en torsion, la rigidité s'écrit :

$$K_a = \frac{G \cdot J_p}{L} \quad \text{avec } J_p: \text{moment d'inertie polaire de l'arbre, } G : \text{module de cisaillement et } d \text{ diamètre de l'arbre}$$

Ex3 : Un système d'entraînement d'une table de fraisage de petite taille, voir figure ci-dessous. La table de masse  $m_t$  est entraînée par moteur à courant continu d'inertie  $J_m$  au moyen d'une courroie crantée de rigidité  $K_c$  en traction et une vis à billes de pas  $P$ . l'inertie de chacune des poulies, identiques, supportant la courroie est désigné par  $J_p$  et l'inertie de la vis est  $J_v$ . On suppose que la vis subit la torsion et on néglige l'effet de la compression. Désignons  $K_v$  la rigidité de la butée, l'écrou et le support de guidage de la table sont supposés rigides. Les poulies et l'arbre moteur sont supposés indéformable. L'origine des coordonnées généralisées correspond à la position de repos du système.

- 1) Etablir les équations de mouvement du système et les mettre sous forme matricielle.



### Solution

Il existe quatre mouvements, la translation de la table, la rotation de la vis, la rotation de la poulie motrice (liée à l'arbre moteur) et la rotation de la réceptrice (poulie au bout de la vis). Appliquant le Lagrangien pour trouver les équations de mouvement.

Le Lagrangien s'écrit :  $L=T-V$

C'est un système à quatre degrés de libertés, les coordonnées généralisées sont respectivement :

$$x, \varphi_v, \varphi_p, \varphi_m$$

Déplacement linéaire de la table, l'angle de rotation de la vis au droit de l'écrou, l'angle de rotation de la poulie au bout de la vis et l'angle de rotation de la poulie moteur.

Energie cinétique du système :  $T = T_t + T_v + T_m + T_p$

- Energie cinétique de la table :  $T_t = \frac{1}{2} m_t \dot{x}^2$
- Energie cinétique de la vis : si on prend un élément de de la vis de longueur (**du**) et de masse (**dm**)

$$dT_v = \frac{1}{2} dJ_v \dot{\varphi}^2 \quad (1)$$

$\dot{\phi}$ , est la vitesse totale de la vis et de la poulie réceptrice  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_p + \frac{u}{L}(\dot{\phi}_v - \dot{\phi}_p)$

Pour le moment d'inertie de la vis, on a  $\frac{dJ_v}{J_v} = \frac{du}{L} \rightarrow dJ_v = \frac{J_v}{L} du$

Remplaçant dans (1)

$$dT_v = \frac{1}{2} \frac{J_v}{L} du (\dot{\phi}_p + \frac{u}{L}(\dot{\phi}_v - \dot{\phi}_p))^2 \Rightarrow T_v = \frac{1}{2} \frac{J_v}{L} \int_0^L (\dot{\phi}_p + \frac{u}{L}(\dot{\phi}_v - \dot{\phi}_p))^2 du$$

$$D'où \quad T_v = \frac{1}{2} \frac{J_v}{3} (\dot{\phi}_v^2 + \dot{\phi}_p^2 + \dot{\phi}_v \dot{\phi}_p)$$

- Energie cinétique  $T_m$  : cette énergie comporte deux énergies (l'arbre moteur et la poulie motrice).  $T_m = \frac{1}{2} (J_m + J_p) \dot{\phi}_m^2$

- Energie de la poulie réceptrice  $T_p = \frac{1}{2} J_p \dot{\phi}_p^2$

L'énergie du système est :  $T = \frac{1}{2} m_t \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_v}{3} (\dot{\phi}_v^2 + \dot{\phi}_p^2 + \dot{\phi}_v \dot{\phi}_p) + \frac{1}{2} (J_m + J_p) \dot{\phi}_m^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\phi}_p^2$

1) Energie potentielle

- De la vis :  $V = \frac{1}{2} K_v (\varphi_v - \varphi_p)^2$

- De la courroie  $V = \frac{1}{2} K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m)^2$

D'où l'énergie du système est :  $V = \frac{1}{2} K_v (\varphi_v - \varphi_p)^2 + \frac{1}{2} K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m)^2$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} m_t \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_v}{3} (\dot{\phi}_v^2 + \dot{\phi}_p^2 + \dot{\phi}_v \dot{\phi}_p) + \frac{1}{2} (J_m + J_p) \dot{\phi}_m^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\phi}_p^2 - \frac{1}{2} K_v (\varphi_v - \varphi_p)^2 - \frac{1}{2} K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m)^2$$

Puisque le système est conservatif, les équations de mouvement s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} - \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) - \frac{\delta L}{\delta x} &= 0, \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) = m_t \ddot{x}, \quad \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \\ - \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_v} \right) - \frac{\delta L}{\delta \varphi_v} &= 0, \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_v} \right) = \frac{J_v}{3} (\ddot{\phi}_v + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_p), \quad \frac{\delta L}{\delta \varphi_v} = -\frac{1}{2} K_v (\varphi_v - \varphi_p) \\ - \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_p} \right) - \frac{\delta L}{\delta \varphi_p} &= 0, \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_p} \right) = \left( \frac{J_v}{3} + J_p \right) \ddot{\phi}_p + \frac{J_v}{6} \ddot{\phi}_v, \quad \frac{\delta L}{\delta \varphi_p} = -K_v (\varphi_v - \varphi_p) - \end{aligned}$$

$$K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m)$$

$$- \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_m} \right) - \frac{\delta L}{\delta \varphi_m} = 0, \quad \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_m} \right) = (J_m + J_p) \ddot{\varphi}_m, \quad \frac{\delta L}{\delta \varphi_m} = K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m)$$

Les équations de mouvement sont :

- $m_t \ddot{x} = 0$
- $\frac{J_v}{3} (\ddot{\varphi}_v + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_p) - \frac{1}{2} K_v (\varphi_v - \varphi_p) = 0$
- $\left( \frac{J_v}{3} + J_p \right) \ddot{\varphi}_p + \frac{J_v}{6} \ddot{\varphi}_v - K_v (\varphi_v - \varphi_p) - K_c R_p^2 (\varphi_p - \varphi_m) = 0$
- $(J_m + J_p) \ddot{\varphi}_m + K_c R^2 (\varphi_p - \varphi_m) = 0$

Sous forme matricielle les équations s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_v}{3} & \frac{J_v}{6} & 0 \\ 0 & \frac{J_v}{6} & \left( \frac{J_v}{3} + J_p \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (J_m + J_p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_v \\ \ddot{\varphi}_p \\ \ddot{\varphi}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_v & -K_v & 0 \\ 0 & -K_v & K_v + K_c R_p^2 & -K_c R_p^2 \\ 0 & 0 & -K_c R_p^2 & K_c R_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_v \\ \varphi_p \\ \varphi_m \end{Bmatrix} = 0$$

# Chapitre 8 : Oscillations libres des systèmes à ' N' degré de liberté

## 8.1 Equation de mouvement

L'équation du mouvement dans le cas général est donnée par :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{P(t)\} \quad (8.1)$$

## 8.2 Oscillations libres

a) Equation différentielle

Dans ce cas  $\{P(t)\} = 0$  et  $[C] = 0$

De l'équation (8.1) nous obtenons

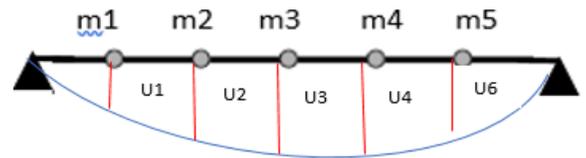
$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = 0 \quad (8.2)$$

Nous multiplions les deux membres par  $[\delta]$

$$[\delta][M] \{\ddot{U}\} + [\delta][K] \{U\} = 0$$

$$\{U\} + [\delta][M] \{\ddot{U}\} = 0 \quad (8.3)$$

Equations (8.2) et (8.3) sont deux formes différentielles des oscillations libres non amorties. Nous utilisant l'équation (8.3), le système s'écrit comme suit :



$$\begin{cases} u_1 + \delta_{11}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{12}m_2 \ddot{u}_2 \dots \dots + \delta_{1j}m_j \ddot{u}_j + \dots + \delta_{1n}m_n \ddot{u}_n = 0 \\ u_2 + \delta_{21}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{22}m_2 \ddot{u}_2 \dots \dots + \delta_{2j}m_j \ddot{u}_j + \dots + \delta_{2n}m_n \ddot{u}_n = 0 \\ \vdots \\ u_n + \delta_{n1}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{n2}m_2 \ddot{u}_2 \dots \dots + \delta_{nj}m_j \ddot{u}_j + \dots + \delta_{nn}m_n \ddot{u}_n = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

*Solution :*

Nous cherchons les déplacements des masses sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \\ \vdots \\ u_n(t) = A_n \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (8.5)$$

Toutes les masses ont les mêmes phases. Les constantes  $A_1 \dots A_n$ ,  $\omega$  et  $\alpha$  sont indéterminées.

Pour que ces constantes satisfont les ' n'équations de (8.4), mettant les déplacements (8.5) et leurs dérivées dans (8.2) et après élimination de  $(\sin(\omega t + \alpha))$ , on obtient :

$$\begin{cases} (1 - \delta_{11}m_1\omega^2)A_1 - \delta_{12}m_2\omega^2 \dots \dots - \delta_{1j}m_j\omega^2 + \dots - \delta_{1n}m_n\omega^2 = 0 \\ -\delta_{21}m_1\omega^2 + (1 - \delta_{22}m_2\omega^2)A_2 \dots \dots - \delta_{2j}m_j\omega^2 + \dots - \delta_{2n}m_n\omega^2 = 0 \\ \vdots \\ -\delta_{n1}m_1\omega^2 - \delta_{n2}m_2\omega^2 \dots \dots - \delta_{nj}m_j\omega^2 + \dots + (1 - \delta_{nn}m_n\omega^2)A_n = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Du système (8.6) de ' n'équations algébriques à ' n'inconnus, les racines non nulles sont obtenues sous la condition que  $Det \neq 0$

$$f(\omega^2) = \begin{cases} (1 - \delta_{11}m_1\omega^2) - \delta_{12}m_2\omega^2 \dots \dots - \delta_{1j}m_j\omega^2 + \dots - \delta_{1n}m_n\omega^2 = 0 \\ -\delta_{21}m_1\omega^2 + (1 - \delta_{22}m_2\omega^2) \dots \dots - \delta_{2j}m_j\omega^2 + \dots - \delta_{2n}m_n\omega^2 = 0 \\ \vdots \\ -\delta_{n1}m_1\omega^2 - \delta_{n2}m_2\omega^2 \dots \dots - \delta_{nj}m_j\omega^2 + \dots + (1 - \delta_{nn}m_n\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

$f(\omega^2)$  est un polynôme de ' n' degrés de  $\omega^2$

Ce polynôme de 'n' valeur de ( ω )

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots \dots \dots < \omega_n$$

L'équation (8.7) s'appelle équation de fréquences.

Les ω<sub>i</sub> (1,2,3,n) s'appelle les fréquences propres du système avec ω<sub>1</sub> s'appelle fréquence de base

### 8.3 Les modes propres du système

avec ω<sub>i</sub> quelconque l'équation (8.6) devient

$$\begin{cases} (1 - \delta_{11}m_1\omega_i^2)A_1^{(i)} - \delta_{12}m_2\omega_i^2 \dots \dots \dots - \delta_{1j}m_j\omega_i^2 + \dots - \delta_{1n}m_n\omega_i^2 = 0 \\ -\delta_{21}m_1\omega_i^2 + (1 - \delta_{22}m_2\omega_i^2)A_2^{(i)} \dots \dots \dots - \delta_{2j}m_j\omega_i^2 + \dots - \delta_{2n}m_n\omega_i^2 = 0 \\ \vdots \\ -\delta_{n1}m_1\omega_i^2 - \delta_{n2}m_2\omega_i^2 \dots \dots \dots - \delta_{nj}m_j\omega_i^2 + \dots + (1 - \delta_{nn}m_n\omega_i^2)A_n^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

' n' inconnues A<sub>1</sub><sup>(i)</sup>, A<sub>2</sub><sup>(i)</sup>, A<sub>3</sub><sup>(i)</sup> ... .. A<sub>n</sub><sup>(i)</sup>

Mais le déterminant de (8.8) = 0, cela signifie que les ' n ' équations ne sont pas indépendantes.

Nous obtenons (n-1) équations indépendantes

$$\begin{cases} -\delta_{21}m_1\omega_i^2 A_1^{(i)} + (1 - \delta_{22}m_2\omega_i^2)A_2^{(i)} \dots - \delta_{2j}m_j\omega_i^2 A_j^{(i)} \dots - \delta_{2n}m_n\omega_i^2 A_n^{(i)} = 0 \\ \vdots \\ -\delta_{n1}m_1\omega_i^2 A_1^{(i)} - \delta_{n2}m_2\omega_i^2 A_2^{(i)} \dots - \delta_{nj}m_j\omega_i^2 A_j^{(i)} \dots + (1 - \delta_{nn}m_n\omega_i^2)A_n^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

On a (n-1) équations → ' n ' inconnues

On introduit les valeurs suivantes, désigne par :

$$f_2^{(i)} = \frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}}, f_3^{(i)} = \frac{A_3^{(i)}}{A_1^{(i)}}, \dots, f_n^{(i)} = \frac{A_n^{(i)}}{A_1^{(i)}}, f_1^{(i)} = \frac{A_1^{(i)}}{A_1^{(i)}} = 1$$

L'équation (8.9) devient :

$$\begin{cases} -\delta_{21}m_1\omega_i^2 + (1 - \delta_{22}m_2\omega_i^2)f_2^{(i)} \dots - \delta_{2j}m_j\omega_i^2 f_j^{(i)} \dots - \delta_{2n}m_n\omega_i^2 f_n^{(i)} = 0 \\ \vdots \\ -\delta_{n1}m_1\omega_i^2 - \delta_{n2}m_2\omega_i^2 f_2^{(i)} \dots - \delta_{nj}m_j\omega_i^2 f_j^{(i)} \dots + (1 - \delta_{nn}m_n\omega_i^2)f_n^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

L'équation (8.9) nous donne les  $f_k^{(i)}$

$$f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_j^{(i)}, \dots, f_n^{(i)}, f_1^{(i)} = 1$$

$f_k^{(i)}$  (K=1,2,3,,,,,n) Sont les rapports des amplitudes des masse correspondant à  $\omega_i$

Avec  $\omega_i$  le déplacement de  $m_i$  est représenté par :

$$\begin{cases} u_1^{(i)} = A_1^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) \\ u_2^{(i)} = A_2^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) = f_2^{(i)} A_1^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) \\ u_3^{(i)} = A_3^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) = f_3^{(i)} A_1^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) \\ \vdots \\ u_n^{(i)} = A_n^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) = f_n^{(i)} A_1^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i) \end{cases}$$

Le déplacement du système s'appelle le mode - i<sup>ème</sup> - des oscillations

$$[A^{(i)}] = \begin{bmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \\ \vdots \\ A_n^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f_2^{(i)} \\ \vdots \\ f_n^{(i)} \end{bmatrix} A_1^{(i)}$$

*Conclusion*

Un système à ' n' degrés de liberté obtient ' n' fréquence propre et ' n' modes propres

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad [A_1] = \begin{bmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \\ \vdots \\ A_n^{(i)} \end{bmatrix}$$

Résumé : Nous résumons les résultats obtenus sous la forme matricielle

$$\{u\} + [\delta][m]\{\ddot{u}\} = 0 \quad (8.11)$$

- L'équation de fréquence de l'équation (8.7) on obtient

$$|[I] - [\delta][m]\omega^2| = 0 \quad (8.12)$$

[I] : matrice unité

- L'équation des modes (8.9) ou bien (8.10)

$$\{[I] - [\delta][m]\omega^2\}\{A^i\} = 0 \quad (8.13)$$

#### 8.4 Applications

Ex1 : Un volant de masse  $m_1$  et d'excentricité  $e$ , tourne avec  $\bar{\omega} = \text{const}$  autour d'un axe horizontal AB dont le coefficient de rigidité latérale est  $k_1$ . L'arbre est lié rigidement à des colonnes, son coefficient de rigidité en flexion est K (voir figure).

- 1) Etablir l'équation (s) différentielle (s) des oscillations du système

*Solution*

Sous l'action de la force centrifuge du volant ( $F_{lv} = m e \bar{\omega}^2$ )

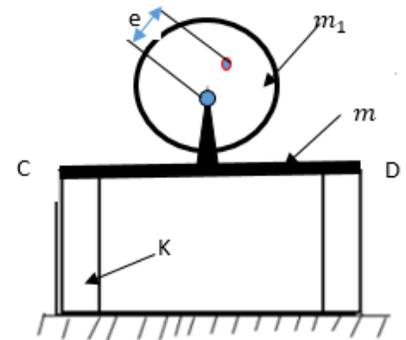
La barre CD est déformée latéralement.

La force de rappel de la barre est  $f_{k1} = k_1 \cdot r$  est appliquée au volant de sens contraire de la force appliquée au portique

$F_k$  La force de rappel des colonnes verticales appliquées à la barre C :  $f_{k1} = k_1 \cdot r$

Il y a deux mouvements, du volant et de la barre CD

- Le volant effectué un mouvement plan ( $J_c \ddot{\theta} = 0$ )
- La barre CD en mouvement de translation



- Pour le volant  $\begin{cases} X_c \\ Y_c \end{cases}$  avec  $\varphi = \bar{\omega} t$  angle de rotation

Les deux équations du volant sont :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_c = k_{1x} = k_1 \cdot r_x = -k_1(x_c - \xi - e \cdot \cos \bar{\omega} t) \\ m_1 \ddot{Y}_c = k_{1y} = k_1 \cdot r_y = -k_1(y_c - e \cdot \sin \bar{\omega} t) \end{cases}$$

Pour la barre CD de masse m

$$\ddot{\xi}_c = k \cdot \xi + k_1(x_c - \xi - e \cdot \cos \bar{\omega} t)$$

Les équations du système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_c + k_1 x_c - k_1 \xi = k_{1x} = k_1 e \cdot \cos \bar{\omega} t \\ m_1 \ddot{Y}_c + k_1 y_c = k_1 e \cdot \sin \bar{\omega} t \\ m \ddot{\xi}_c = -k_1 x_c + (k+k_1)\xi = -k_1 e \cdot \cos \bar{\omega} t \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_c \\ \ddot{Y}_c \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_1 \\ 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 e \cdot \cos \bar{\omega} t \\ k_1 e \cdot \sin \bar{\omega} t \\ -k_1 e \cdot \cos \bar{\omega} t \end{Bmatrix}$$

Ex2 : Soit la poutre console AB avec trois masses concentrées (m1, m2 et m3) schématisée ci-dessous.

Sous les conditions initiales  $U(0) = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$  cm et  $\dot{U}(0) = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$  cm/s:

- 1) Etablir la matrice de rigidité
- 2) Déterminer les pulsations propres ;
- 3) Calculer les modes propres
- 4) Les oscillations libres du système



*Solution*

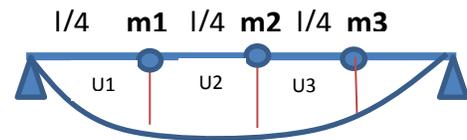
La poutre est modélisée par trois masses (**m1, m2, m3**), elle est considérée comme un système à 3ddl. Pour calculer les modes propres équ.3 (voir cours)

$$\{U\} + [\delta][M] \{\ddot{U}\} = 0$$

- ✚ Pour déterminer la matrice de rigidité, il faut déterminer la matrice des coefficients de souplesse  $[\delta_{ij}]$

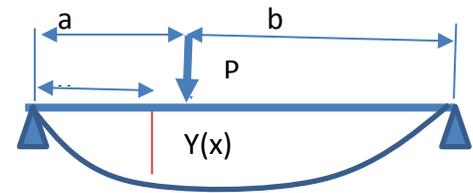
$\delta_{ij}$  : déplacement de la coordonnée i causé par la charge appliquée à la coordonnée j

$$[\delta_{33}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$



Ces coefficients sont déterminés soit par la résistance des matériaux (RDM) soit par Mohr soit par Verchtchaguine (multiplication des diagrammes)

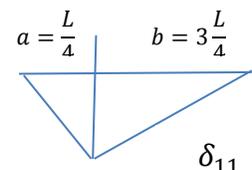
Pour cette poutre de longueur  $L = a + b$ , la flèche  $Y(x)$  est donnée par  $Y(x)$



$$y(x) = P \frac{a^2 b^2}{6EjL} \left( 2 \frac{(L-x)}{b} + \frac{L}{a} x + \frac{(L-x)^3}{ab^2} \right)$$

- Les coordonnées de la masse m1 et m3

$$\delta_{11} = y(x) = \begin{cases} x = \frac{L}{4} \\ a = \frac{L}{4} \\ b = 3\frac{L}{4} \end{cases} \Rightarrow \delta_{11} = 3 \frac{L^3}{256Ej} = \delta_{33} \text{ (Symétrie)}$$



$$\delta_{13} = \delta_{31} = y(x) = \begin{cases} x = \frac{3L}{4} \\ a = \frac{L}{4} \\ b = 3\frac{L}{4} \end{cases} \Rightarrow \delta_{13} = \delta_{31} = 7 \frac{L^3}{768Ej}$$

Même chose pour la masse m2

$$\delta_{22} = y(x) \begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ a = \frac{L}{2} \\ b = \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow \delta_{22} = 16 \frac{L^3}{768EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = y(x) \begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ a = \frac{L}{4} \\ b = 3\frac{L}{4} \end{cases} \Rightarrow \delta_{21} = \delta_{12} = 11 \frac{L^3}{768EJ} = \delta_{33}$$

Donc 
$$[\delta] = \frac{L^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité est :

$$[\delta]^{-1} = [K] = \frac{768EJ}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{16} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{11} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

✚ Les modes propres et les fréquences propres

1) Equation différentielle

$$\{U\} + [\delta][M] \{\ddot{U}\} = 0 \quad (1)$$

La solution est cherchée sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \\ u_3(t) = A_3 \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (2)$$

Nous remplaçant (2) et leurs dérivées dans (1) nous obtenions

$$\begin{cases} u_1 + \delta_{11}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{12}m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{13}m_3 \ddot{u}_3 = 0 \\ u_2 + \delta_{21}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{22}m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{23}m_3 \ddot{u}_3 = 0 \\ u_3 + \delta_{31}m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{32}m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{33}m_3 \ddot{u}_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Avec  $A_i, \omega$  et  $\alpha$  sont des inconnus

$$\begin{cases} (1 - \delta_{11}m_1\omega^2)A_1 - \delta_{12}m_2\omega^2A_2 - \delta_{13}m_3\omega^2A_3 = 0 \\ -\delta_{21}m_1\omega^2A_1 + (1 - \delta_{22}m_2\omega^2)A_2 - \delta_{23}m_3\omega^2A_3 = 0 \\ -\delta_{31}m_1\omega^2A_1 - \delta_{32}m_2\omega^2A_2 + (1 - \delta_{33}m_3\omega^2)A_3 = 0 \end{cases}$$

- Pour le même exercice, on cherche les fréquences propres

Il faut que le déterminant soit nul (Dét. = 0) pour que ces équations ont une solution

$$\det = \begin{vmatrix} (1 - \delta_{11}m_1\omega^2) & -\delta_{12}m_2\omega^2 & -\delta_{13}m_3\omega^2 \\ -\delta_{21}m_1\omega^2 & (1 - \delta_{22}m_2\omega^2) & -\delta_{23}m_3\omega^2 \\ -\delta_{31}m_1\omega^2 & -\delta_{32}m_2\omega^2 & (1 - \delta_{33}m_3\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

avec  $m_1 = m_2 = m_3 = m$

$$\det = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{9L^3}{768EJ}m\omega^2\right) & -\frac{11L^3}{768EJ}m\omega^2 & -\frac{7L^3}{768EJ}m\omega^2 \\ -\frac{11L^3}{768EJ}m\omega^2 & \left(1 - \frac{16L^3}{768EJ}m\omega^2\right) & -\frac{11L^3}{768EJ}m\omega^2 \\ -\frac{7L^3}{768EJ}m\omega^2 & -\frac{11L^3}{768EJ}m\omega^2 & \left(1 - \frac{9L^3}{768EJ}m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Pour simplifier l'écriture on pose  $B = \frac{mL^3\omega^2}{768EJ}$

$$\det = \begin{vmatrix} (1 - 9B) & -11B & -7B \\ -11B & (1 - 16B) & -11B \\ -7B & -11B & (1 - 9) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$28B^3 + 78B^2 - 34B + 1 = 0$$

Il faut résoudre l'expression précédente pour trouver les  $B_i$ . La première racine de l'équation à 3<sup>ème</sup> degré peut être obtenue par la méthode d'itération de Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$B_1 = 0.0316, B_2 = 0.5, B_3 = 2.26$$

$$B = \frac{mL^3 \omega^2}{768EJ} = \begin{cases} B_1 = 0.0316 & \Rightarrow & \omega_1 = 4.93 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} \\ B_2 = 0.5 & \Rightarrow & \omega_2 = 19.6 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} \\ B_3 = 2.26 & \Rightarrow & \omega_3 = 41.8 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} \end{cases}$$

Nous avons obtenu les trois fréquences propres suivantes :

$$\{\omega\} = \begin{bmatrix} 4.93 \\ 19.6 \\ 41.8 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

- **Les modes propres**

- Pour la première mode avec  $\omega_1$  et  $B_1$  les équations du système (8.18) deviennent :

$$\begin{cases} (1 - 9B_1)A_1^{(1)} - 11B_1A_2^{(1)} - 7B_1A_3^{(1)} = 0 \\ -11B_1A_1^{(1)} + (1 - 16B_1)A_2^{(1)} - 11B_1A_3^{(1)} = 0 \\ -7B_1A_1^{(1)} - 11B_1A_2^{(1)} + (1 - 9B_1)A_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

On introduit les rapports suivants

$$f_1^{(1)} = \frac{A_1^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 1, \quad f_2^{(1)} = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}, \quad f_3^{(1)} = \frac{A_3^{(1)}}{A_1^{(1)}}$$

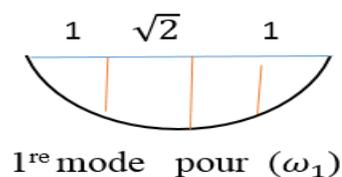
D'où

$$\begin{cases} (1 - 9B_1) - 11B_1f_2^{(1)} - 7B_1f_3^{(1)} = 0 \\ -11B_1 + (1 - 16B_1)f_2^{(1)} - 11B_1f_3^{(1)} = 0 \\ -7B_1 - 11B_1f_2^{(1)} + (1 - 9B_1)f_3^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Pour déterminer les racines  $f_2^{(1)}$  et  $f_3^{(1)}$ , nous examinons par exemple les deux dernières équations du système précédent, et nous supprimons la première équation.

$$\begin{cases} -11B_1 + (1 - 16B_1)f_2^{(1)} - 11B_1f_3^{(1)} = 0 \\ -7B_1 - 11B_1f_2^{(1)} + (1 - 9B_1)f_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

La solution donne 
$$\begin{cases} f_1^{(1)} = 1 \\ f_2^{(1)} = \sqrt{2} \\ f_3^{(1)} = 1 \end{cases}$$

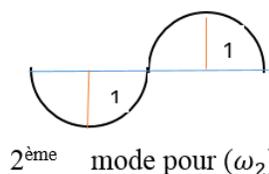


Les masses passent simultanément par la position d'équilibre.

- Pour la deuxième fréquence  $\omega_2$  et  $B_2$

$$\begin{cases} -11B_2 + (1 - 16B_1)f_2^{(2)} - 11B_1f_3^{(2)} = 0 \\ -7B_2 - 11B_1f_2^{(2)} + (1 - 9B_1)f_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

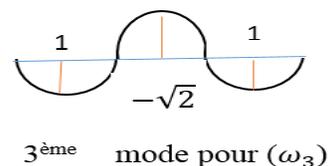
La solution donne 
$$\begin{cases} f_1^{(2)} = 1 \\ f_2^{(2)} = 0 \\ f_3^{(2)} = 1 \end{cases}$$



- Pour la troisième fréquence  $\omega_3$  et  $B_3$

$$\begin{cases} -11B_3 + (1 - 16B_3)f_2^{(3)} - 11B_3f_3^{(3)} = 0 \\ -7B_3 - 11B_3f_2^{(3)} + (1 - 9B_3)f_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

La solution donne 
$$\begin{cases} f_1^{(3)} = 1 \\ f_2^{(3)} = -\sqrt{2} \\ f_3^{(3)} = 1 \end{cases}$$



- Les oscillations libres du système

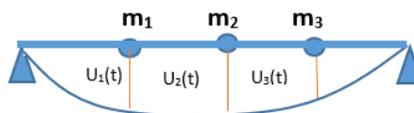
On va déterminer les oscillations libres du système par la méthode normale avec les conditions

$$U(0) = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm} \quad \text{et} \quad \dot{U}(0) = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm/s}$$

- Les oscillations libres du système sont les combinaisons des trois modes

- Pour la première masse

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \\ \vdots \\ u_n(t) = A_n \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= u_1^{(1)}(t) + u_1^{(2)}(t) + u_1^{(3)}(t) \\
 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_1^{(3)} \sin(\omega_3 t + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

$$u_2(t) = A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_2^{(3)} \sin(\omega_3 t + \alpha_3)$$

$$u_3(t) = A_3^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_3^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_3^{(3)} \sin(\omega_3 t + \alpha_3)$$

Il existe 6 constantes indéterminées ( $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ )

Pour les déplacements, pour  $t = 0$

$$\begin{cases}
 u_1(0) = 0.5 = A_1^{(1)} \sin \alpha_1 + A_1^{(2)} \sin \alpha_2 + A_1^{(3)} \sin \alpha_3 \\
 u_2(0) = 0 = A_2^{(1)} \sin \alpha_1 + A_2^{(2)} \sin \alpha_2 + A_2^{(3)} \sin \alpha_3 \\
 u_3(0) = 0 = A_3^{(1)} \sin \alpha_1 + A_3^{(2)} \sin \alpha_2 + A_3^{(3)} \sin \alpha_3
 \end{cases}$$

- Pour les vitesses :

$$\begin{cases}
 \dot{u}_1(0) = 0.4 = A_1^{(1)} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_1^{(2)} \omega_2 \cos \alpha_2 + A_1^{(3)} \omega_3 \cos \alpha_3 \\
 \dot{u}_2(0) = 0 = A_2^{(1)} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_2^{(2)} \omega_2 \cos \alpha_2 + A_2^{(3)} \omega_3 \cos \alpha_3 \\
 \dot{u}_3(0) = 0 = A_3^{(1)} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_3^{(2)} \omega_2 \cos \alpha_2 + A_3^{(3)} \omega_3 \cos \alpha_3
 \end{cases}$$

# Chapitre 9 : Méthode de composition de la solution en série des modes propres (Méthode de superposition des modes)

## 9.1 Equation différentielle du système

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{P(t)\} \quad (9.1)$$

La solution de ce système est donnée sous la forme

$$\{U(t)\} = [A^{(1)}] y_1(t) + [A^{(2)}] y_2(t) \dots \dots \dots [A^{(n)}] y_n(t)$$

Avec

$[A^{(1)}] y_1(t)$  : les fonctions inconnues

Ces fonctions s'appellent les coordonnées principales

Au lieu de déterminer les fonctions  $U_i(t)$  , nous devons déterminer les  $y_i(t)$

$$\{U(t)\} = \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] y_i(t) \quad (9.2)$$

Remplaçant (9.2) dans (9.1) en tire

$$[M] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] \ddot{y}_i(t) + [C] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] \dot{y}_i(t) + [K] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] y_i(t) = \{P(t)\} \quad (9.3)$$

Profitons de l'orthogonalité des modes pour transformer l'équation (9.3)

$$\begin{cases} [A^{(i)}]^t [M] [A^{(j)}] = 0 \\ [A^{(i)}]^t [K] [A^{(j)}] = 0 \end{cases} \quad i \neq j \quad (9.4)$$

$$2) \quad [A^{(i)}]^t [M] [A^{(j)}] \omega^2 = [A^{(i)}]^t [K] [A^{(j)}] \quad i = j$$

$$\text{Avec} \quad \omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m\omega^2 = K$$

Multipliant à gauche de l'équation (9.3) par  $[A^{(j)}]^t$

$$[A^{(j)}]^t [M] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] \ddot{y}_i(t) + [A^{(j)}]^t [C] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] \dot{y}_i(t) + [A^{(j)}]^t [K] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] y_i(t) = [A^{(j)}]^t \{P(t)\}$$

$$[A^{(j)}]^t [M] [A^{(i)}] \ddot{y}_i(t) + [A^{(j)}]^t [C] [A^{(i)}] \dot{y}_i(t) + [A^{(j)}]^t [K] [A^{(i)}] y_i(t) = [A^{(j)}]^t \{P(t)\} \quad (9.5)$$

Désignons par :

$$\mathbf{M}_j = [A^{(j)}]^t [M] [A^{(i)}], \quad 2\xi_j \omega_j \mathbf{M}_j = [A^{(j)}]^t [C] [A^{(i)}], \quad \mathbf{K}_j = [A^{(j)}]^t [K] [A^{(i)}] = \omega_j^2 \mathbf{M}_j$$

$$\text{Et} \quad \mathbf{p}_j^{(t)} = [A^{(j)}]^t \{P(t)\}$$

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}_i(t) + 2\xi_j \omega_j \mathbf{M}_j \dot{y}_i(t) + \mathbf{K}_j y_i(t) = \mathbf{p}_j^{(t)} \quad (9.6)$$

Nous obtenons « n » équations de type (9.6), ces équations sont indépendantes

### 9.1.1 Système libres $\mathbf{p}_j^{(t)} = \xi_j = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}_i(t) + \mathbf{K}_j y_i(t) = \mathbf{0}$$

La solution de cette équation est :

$$Y_j(t) = \frac{\dot{y}_j(0)}{\omega_j} \sin(\omega_j) t + y_j(0) \cos(\omega_j) t \quad (9.7)$$

### 9.1.2 Système amorti $\xi_j \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}_i(t) + 2\xi_j \omega_j \mathbf{M}_j \dot{y}_i(t) + \mathbf{K}_j y_i(t) = \mathbf{0}$$

La solution est donnée sous la forme

$$Y_j(t) = \frac{\dot{y}_j(0) + \xi_j \omega_j y_j(0)}{\omega_{Dj}} \sin(\omega_{Dj}) t + y_j(0) \cos(\omega_{Dj}) t \quad (9.8)$$

### 9.1.3 Oscillations forcées

#### 9.1.3.1 Système non amorti

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}(t) + \mathbf{K}_j y_i(t) = P_j(t) \sin \bar{\omega} t = \mathbf{P}_j(t)$$

La solution est sous la forme

$$Y_j(t) = \frac{p_{0j}}{K_j} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (9.9)$$

#### 9.1.3.2 Système amorti

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}(t) + 2\xi_j \omega_j \mathbf{M}_j \dot{y}_j(t) + \mathbf{K}_j y_j(t) = \mathbf{p}_j^{(t)}$$

La solution prend la forme suivante

$$Y_j(t) = \frac{p_{0j}}{K_j} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi_j \omega_j)^2}} \sin(\bar{\omega} t - \alpha) \quad (9.10)$$

$$\tan \alpha_j = \frac{2\xi_j \beta_j}{1-\beta_j^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

## 9.2 Détermination des conditions initiales

$$y_j(0), \dot{y}_j(0) \text{ et } u(0)$$

Le déplacement est donné par l'équation (9.3)

$$\{U(t)\} = \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] y_i(t)$$

Multipliant les deux côtés par  $[A^{(i)}]^T [m]$

$$[A^{(i)}]^T [m] \{U(t)\} = [A^{(i)}]^T [m] \sum_{i=1}^n [A^{(i)}] y_i(t)$$

$$[A^{(i)}]^T [m] \{U(t)\} = [A^{(i)}]^T [m] [A^{(i)}] y_i(t) \Rightarrow y_i(t) = \frac{[A^{(i)}]^T [m] \{U(t)\}}{[A^{(i)}]^T [m] [A^{(i)}]} \quad (9.11)$$

D'où ,

$$y(0) = \frac{[A^{(i)}]^T [m] \{U(0)\}}{[A^{(i)}]^T [m] [A^{(i)}]} \quad (9.12)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{[A^{(i)}]^T [m] \{\dot{U}(0)\}}{[A^{(i)}]^T [m] [A^{(i)}]} \quad (9.13)$$

### 9.3 Applications

Ex1 : Maintenant, nous reprenons l'exercice 2 (chap.8) et nous cherchons les équations de mouvement pour les oscillations libres avec une autre méthode et avec les mêmes conditions initiales.

$$U(0) = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Cm} \quad \text{et} \quad \dot{U}(0) = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Cm/s}$$

Nous avons déjà obtenu les modes (voir Ex. (8.2).

$$[A^{(1)}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad [A^{(2)}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad [A^{(3)}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}$$

Mettons

$$U(t) = [A^{(1)}] y_1(t) + [A^{(2)}] y_2(t) + [A^{(3)}] y_3(t)$$

$$\text{Avec} \quad Y_i(t) = \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + y_i(0) \cos \omega_i t \quad (i = 1,2,3)$$

D'après (9.12) et (9.23) avec  $i = 1$

$$y_1(0) = \frac{[A^{(1)}]^T [m] \{U(0)\}}{[A^{(1)}]^T [m] [A^{(1)}]} = \frac{[1 \quad \sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{[1 \quad \sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{0.5}{4} = 0.125 \text{ cm}$$

$$\dot{y}_1(0) = \frac{[A^{(1)}]^T [m] \{\dot{U}(0)\}}{[A^{(1)}]^T [m] [A^{(1)}]} = \frac{[1 \quad \sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{[1 \quad \sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{0.4}{4} = 0.1 \text{ cm}$$

Pour  $i=2$

$$y_2(0) = \frac{[A^{(2)}]^T [m] \{U(0)\}}{[A^{(2)}]^T [m] [A^{(2)}]} = \frac{[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}} = \frac{0.5m}{2m} = 0.25 \text{ cm}$$

$$\dot{y}_2(0) = \frac{[A^{(2)}]^T [m] \{\dot{U}(0)\}}{[A^{(2)}]^T [m] [A^{(2)}]} = \frac{[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}} = \frac{0.4}{2} = 0.2 \text{ cm}$$

Analogiquement, nous obtenons

$$\begin{cases} y_1(0) = 0.125 \text{ cm} & , & \dot{y}_1(0) = 0.1 \text{ m/s} \\ y_2(0) = 0.25 \text{ cm} & , & \dot{y}_2(0) = 0.2 \text{ m/s} \\ y_3(0) = 0.125 \text{ cm} & , & \dot{y}_3(0) = 0.1 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1(t) = \frac{0.1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + 0.125 \cos \omega_1 t \\ Y_2(t) = \frac{0.2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + 0.25 \cos \omega_2 t \\ Y_3(t) = \frac{0.1}{\omega_3} \sin \omega_3 t + 0.125 \cos \omega_3 t \end{cases}$$

Le résultat final est :

$$U(t) = [A^{(1)}]y_1(t) + [A^{(2)}]y_2(t) + [A^{(3)}]y_3(t)$$

$$U(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} y_1(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} y_2(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} y_3(t)$$

Les trois équations de mouvement avec  $\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.93 \\ 19.6 \\ 41.8 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$  sont :

$$U_1(t) = 1. \left( \frac{0.1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + 0.125 \cos \omega_1 t \right) + 1. \left( \frac{0.2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + 0.25 \cos \omega_2 t \right) + 1. \left( \frac{0.1}{\omega_3} \sin \omega_3 t + 0.125 \cos \omega_3 t \right)$$

$$U_2(t) = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + 0.125 \cos \omega_1 t \right) + 0 \cdot \left( \frac{0.2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + 0.25 \cos \omega_2 t \right) - \sqrt{2} \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_3} \sin \omega_3 t + 0.125 \cos \omega_3 t \right)$$

$$U_2(t) = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + 0.125 \cos \omega_1 t \right) - \sqrt{2} \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_3} \sin \omega_3 t + 0.125 \cos \omega_3 t \right)$$

$$U_3(t) = 1 \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + 0.125 \cos \omega_1 t \right) - 1 \cdot \left( \frac{0.2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + 0.25 \cos \omega_2 t \right) + 1 \cdot \left( \frac{0.1}{\omega_3} \sin \omega_3 t + 0.125 \cos \omega_3 t \right)$$

- Maintenant supposons que le système est forcé avec  $P(t) = \begin{cases} p_0 \sin \bar{\omega} t \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

✚ Déterminer les équations du mouvement.

$$\mathbf{M}_j \ddot{y}(t) + \mathbf{K}_j y_i(t) = P_j(t) \sin \bar{\omega} t = \mathbf{P}_j(t)$$

$$\mathbf{P}_j(t) = [\mathbf{A}^{(j)}]^t [\mathbf{P}]$$

Exemple pour :

$$\mathbf{y}_1(t) \rightarrow \mathbf{P}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \sin \bar{\omega} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

$$\mathbf{M}_1 = [\mathbf{M}] [\mathbf{A}^{(1)}]^2 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = m \cdot 1^2 + m \cdot \sqrt{2}^2 + m \cdot 1^2 = 4m$$

$$\mathbf{K}_1 = [\mathbf{A}^{(1)}]^t [\mathbf{K}] [\mathbf{A}^{(1)}] = \omega_1^2 \mathbf{M}_1 = 4m\omega_1^2$$

$$\text{Donc, } 4m \ddot{y}(t) + 4m\omega_1^2 y_i(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

La solution de cette équation est :

$$Y_1(t) = \frac{p_0}{K_1} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad \text{Même chose pour } Y_2(t) \text{ et } Y_3(t)$$

Les oscillations forcées du système sont :

$$\begin{cases} U_1(t) = 1 \cdot \left( \frac{p_0}{K_1} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \right) + (1) \cdot Y_2(t) + (1) \cdot Y_3(t) \\ U_2(t) = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{p_0}{K_1} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \right) + (0) \cdot Y_2(t) - (\sqrt{2}) \cdot Y_3(t) \\ U_3(t) = 1 \cdot \left( \frac{p_0}{K_1} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \right) - (1) \cdot Y_2(t) + (1) \cdot Y_3(t) \end{cases}$$

# Chapitre 10 : La méthode pratique de recherche des fréquences propres et des modes propres

## 10.1 Introduction

Après avoir obtenu  $n$  fréquences et  $n$  modes propres avec la méthode de superposition des modes, nous pouvons résoudre les oscillations des systèmes à  $n$  degré de liberté. En pratique, seuls les premiers modes qui contribueront considérablement à la solution générale avec une précision suffisante. Cela nous ramène aux résultats approximatifs.

$$\{U(t)\} = [A^{(1)}] y_1(t) + [A^{(2)}] y_2(t) \dots \dots \dots [A^{(n)}] y_n(t) \quad (10.1)$$

C -à - dire nous pouvons arrêter nos calculs aux quelques premiers modes, même au premier mode avec la fréquence la plus basse. Nous allons étudier une méthode pratique.

## 10.2 Equation des fréquences et de modes

Pour un système non amorti à  $n$  degré de liberté l'équation différentielle prend la forme

$$\{U\} + [\delta][M] \{\ddot{U}\} = 0$$

L'équation des modes est donnée par équation (8.13)

$$\{[I] - [\delta][m]\omega^2\}\{A^i\} = 0$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\omega_i^2} [A^{(i)}] = \{[\delta][m]\}\{A^{(i)}\} \quad (10.2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_i^2} A_1^{(i)} = \delta_{11} m_1 A_1^{(i)} + \delta_{12} m_2 A_2^{(i)} + \dots + \delta_{1n} m_n A_n^{(i)} \\ \frac{1}{\omega_i^2} A_2^{(i)} = \delta_{21} m_1 A_1^{(i)} + \delta_{22} m_2 A_2^{(i)} + \dots + \delta_{2n} m_n A_n^{(i)} \\ \dots \\ \frac{1}{\omega_i^2} A_n^{(i)} = \delta_{n1} m_1 A_1^{(i)} + \delta_{n2} m_2 A_2^{(i)} + \dots + \delta_{nn} m_n A_n^{(i)} \end{cases} \quad (10.3)$$

*Remarque*

- 1) Avec les fréquences  $\omega_i$  déterminée du système (10.3) on obtient les  $A^{(i)}$  correspondant
- 2) Au contraire avec un mode déterminé, le système (10.3) donne les  $\omega_i$  correspondantes par n'importe quelle équation.
- 3) Pour un mode supposé le système (10.3) donne n valeurs de  $\omega_i$

### 10.3 Méthode de Stodola

Cette méthode consiste à faire une hypothèse initiale sur l'allure du mode ; cette hypothèse est ensuite améliorée par itérations successives jusqu'à ce qu'une approximation satisfaisante du mode soit obtenue : la fréquence de vibration correspondante est alors déterminée à l'aide de l'équation du mouvement

- Est une méthode itérative
- Idée de la méthode, d'abord on se donne un mode (mode supposé). Ce mode est amélioré d'une sécession itérative jusqu'à ce que le mode obtenu assure une précision suffisante

#### 10.3.1 Le résultat après le 1<sup>er</sup> cycle

Nous supposons que le mode initial prend la forme :

$$[A^{(1)0}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \text{le } 1^{er} \text{ indice} \rightarrow 1^{er} \text{ mode (precision)} \\ \text{Le } 2^{er} \text{ indice} \rightarrow \text{mode initial (hypothèse)} \end{cases}$$

Désignons le produit  $[D] = [\delta][m]$   $D$ , s'appelle matrice dynamique

$$\text{L'équation (10.2) devient } \frac{1}{\omega_i^2} [A^{(i)}] = [D][A^{(i)}] \quad (10.4)$$

Multipliant  $[D]$  à droite par  $[A^{(1)0}]$  nous obtenons le nouveau mode

$$[A^{(1)1}] = [D][A^{(1)0}]$$

Les deux modes  $[A^{(1)0}]$  et  $[A^{(1)1}]$  sont différents

Si l'on introduit le facteur de proportionnalité  $\frac{1}{\omega_i^2}$

$$[A^{(1)1}] = \frac{1}{\omega_i^2} [A^{(1)0}] \quad (10.5)$$

### 10.3.2 Le résultat après le 2<sup>ème</sup> cycle

Pour simplifier les calculs, nous pouvons normaliser ce mode par la division de tous les éléments par le plus grand élément et nous désignons par :  $[A^{(1)1}] = \overline{[A^{(1)1}]}$

$$\frac{1}{\omega_i^2} \overline{[A^{(1)1}]} = [A^{(1)2}], \text{ Avec } [D] \overline{[A^{(1)1}]} = [A^{(1)2}]$$

Pour s cycle  $\frac{1}{\omega_i^2} \overline{[A^{(1)s-1}]} = [A^{(1)s}] \quad (10.6)$

Si l'équation (10.6) converge, nous avons obtenu le mode  $\overline{[A^{(1)s-1}]}$ .

La fréquence correspondante  $\omega_i$  est déterminée par n'importe quelle équation du système (10.6).

$$\omega_i^2 = \frac{A_k^{(1)s-1}}{A_k^{(1)s}}$$

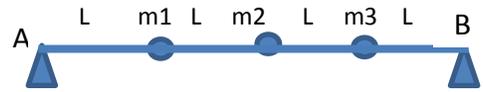
#### Conclusion

Le procédé de la méthode de Stodola

- Se donner un mode initial  $[A^{(1)0}]$
- Multipliant le mode initial par  $[D] \rightarrow [D][A^{(1)0}]$  et normalisé  $\overline{[A^{(1)1}]}$
- Répéter ces calculs jusqu'à la précision suffisante
- Finalement déterminer la fréquence  $\omega_i$  par l'équation (10.6)

### 10.4 Applications

En utilisant la méthode de Stodola, trouver le premier mode de la poutre AB, elle est considérée comme un système à 3 degrés de liberté.



Etant donné les matrices de coefficients de souplesse et de masse

$$[\delta] = \frac{L^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}, [m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

La première fréquence  $\omega_i = 4.93 \sqrt{\frac{FJ}{mL^3}}$  et  $[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,414 \\ 1 \end{bmatrix}$

*Solution*

Cherchons la matrice dynamique  $[D] = [\delta][m] = \frac{L^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$

$$[D] = \frac{mL^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{le mode initial est } [A^{(1)0}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On calcule  $[D][A^{(1)0}]$  en négligeant provisoirement le coefficient  $\frac{mL^3}{768EJ}$

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 38 \\ 27 \end{bmatrix} = [A^{(1)1}]$$

On va chercher le mode normalisé en divisant par l'élément le plus grand c'est la valeur (38)

$$[\overline{A^{(1)1}}] = \begin{bmatrix} \frac{27}{38} \\ 1 \\ \frac{27}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1 \\ 0.71 \end{bmatrix}$$

-On continue le calcul  $[D][A^{(1)1}] \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1 \\ 0.71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.36 \\ 31.62 \\ 22.36 \end{bmatrix} = [A^{(1)2}]$

$$[A^{(1)2}] = \begin{bmatrix} 22.36 \\ 31.62 \\ 31.62 \\ 22.36 \\ 31.62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 1 \\ 0.707 \end{bmatrix} \quad \text{On fait une itération}$$

-  $[D][A^{(1)2}] \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 \\ 1 \\ 0.707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.312 \\ 31.55 \\ 22.312 \end{bmatrix} = [A^{(1)3}]$

$$[A^{(1)3}] = \begin{bmatrix} 22.312 \\ 31.55 \\ 31.55 \\ 22.312 \\ 31.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 1 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

Donc le premier mode est le suivant  $[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 1 \\ 0.707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1414 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc

$$\omega_i^2 = \frac{A_1^{(1)2}}{A_1^{(1)3}} = \frac{0.707}{22.312 \frac{mL^3}{768EJ}} \Rightarrow \omega_i = 4.93 \sqrt{\frac{FJ}{mL^3}}$$

# Références

- [1] R. W Glough, JPenzien.”Dynamique des structures ‘ ‘ Tome 1 Principes fondamentaux ,1975
- [2] Sylvain Drapier ‘ ‘ dynamique des Solides et des Structures ‘ ‘ École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne 4e Édition octobre 2011
- [3] Pr I. SMITH & Dr P. LESTUZZI « Cours de Dynamique des Structures » Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 2013
- [4] Patrick Paultre, ‘ ‘Dynamique des structures application aux ouvrages de Génie civil ‘ ‘ Éditions Lavoisier, 2005.
- [5] Abdessattar Aloui. ‘ ‘Mécanique vibratoire ‘ ‘Cours et exercices corrigés, 2015
- [6] Alain Pecker ‘ ‘dynamique des structures et des ouvrages’ ’ Edition 2006.