



République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Tebessi –TEBESSA

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de mathématiques et informatique

N° d'ordre :

T H È S E

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par :

MESSAOUD ZAIDI

Thème :

**Étude des solutions globales de certains
systèmes de Réaction-Diffusion
par des méthodes fonctionnelles**

Devant le jury :

<i>Haouam Kamel</i>	Prof	Université de Tébessa	Président
<i>Saoudi Khaled</i>	MCA	Université de Khenchela	Rapporteur
<i>Abdelmalek Salem</i>	MCA	Université de Tébessa	Co-Encadreur
<i>Zarai Abderrahmane</i>	Prof	Université de Tébessa	Examineur
<i>Adjeroud Nacer</i>	MCA	Université de Khenchela	Examineur
<i>Merad Ahcen</i>	MCA	Université d'O.E Bouaghi	Examineur

Date de soutenance : 07/01/2021

Remerciements

Mes remerciements s'adressent à mon encadreur : Dr. Khaled Saoudi et mon Co-encadreur :

Dr. Salem Abdelmalek pour l'attention et la disponibilité dont ils ont su faire preuve au cours de leurs encadrement.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury : Le Pr. Kamel Haouam pour l'honneur qu'ille me fait en présidant le jury., Dr. Nacer Adjeroud, Dr. Ahcen Merad et le Pr. Abderrahmane Zarai pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents, mes sœurs, mon frère et leurs enfants : Abderahmane, Zakaria (Zakour), ainsi que Zaineb.

To all the children who have found themselves in a battle with cancer and defeated it.

We can only see a short distance ahead, but we can see plenty there that needs to be done.

Alan Turing

Résumé

Le but de cette thèse est de prouver l'existence globale en temps de solutions pour un système de réaction-diffusion. nous examinons une réaction diffusion générale à m composants avec une matrice de diffusion de dimension $m \times m$ pleine et des termes de réaction à croissance polynomiale grâce à sa diagonalisation. Nous établissons les régions invariantes du système et déterminons les conditions nécessaires de l'existence de solutions. Le cas 3×3 est considéré comme un cas d'étude, où nous déterminons les conditions exactes pour la positivité des valeurs propres, nécessaires au processus de diagonalisation. Des exemples numériques sont utilisés pour illustrer et confirmer les résultats de ce travail.

mots clés : Systèmes de réaction diffusion- régions invariantes- Existence globale fonction de Lyapunov.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو إثبات الوجود للحلول المحلية و الكلية لنظام رد الفعل و الإنتشار بالنسبة للزمن . نقوم بدراسة نظام رد فعل و إنتشار عام ل m مكون مع مصفوفة إنتشار من البعد $m \times m$ مملوءة و حدود رد الفعل كثيرات حدود متزايدة . الدراسة تتم من خلال مناقشة تأقطر المصفوفة . نشئ المناطق الثابتة و نستخلص الشروط اللازمة للحلول . ندرس حالة مصفوفة من البعد 3×3 مملوءة حيث نقوم بتحديد بدقة الشروط اللازمة لإيجابية قيمها الذاتية ، و هو أمر ضروري لعملية تأقطر المصفوفة . يتم إستخدام أمثلة عددية لتوضيح و تأكيد نتائج هذا العمل تطبيقيا .
الكلمات المفتاحية نظام رد الفعل و الإنتشار، المناطق الثابتة ، الوجود الكلي ، دالة ليابونوف .

Abstract

The purpose of this thesis is to prove the global existence in time of solutions for a reaction-diffusion system. We examine a general m -component reaction-diffusion matrix with a full diffusion matrix and polynomially growing reaction terms through its diagonalization. We establish the invariant regions of the system and derive the necessary conditions for the existence of solutions. The 3×3 case is taken as a case study, where we determine the exact conditions for the positivity of the eigenvalues, which is necessary for the diagonalization process. Numerical examples are used to illustrate and confirm the findings of this work.

keywords : reaction diffusion systems- Invariant regions- Global existence- Lyapunov function .

ACRONYMES ET NOTATION

- Ω : Domaine de \mathbb{R}^N .
- $\bar{\Omega}$: La fermeture de Ω .
- $\partial\Omega$: La frontière du Ω .
- t : Variable de temps.
- x : Variable de l'espace.
- Δ : Laplacien.
- ∇ : Le gradient.
- div : La divergence.
- M : Une matrice carrée.
- λ_i : Une valeur propre associée à une matrice.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps \mathbb{K} .
- \cdot^t : Transposé de matrice \cdot .
- \cdot_t : Dérivée partielle de \cdot par rapport au variable t .
- $0_{\mathbb{R}^N}$: Le vecteur nul.
- $L^p(\Omega)$: Espace de Lebegue.
- $L^\infty(\Omega)$: Espace de Lebegue.
- $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$: L'ensemble des fonctions différentiables sur $\bar{\Omega}$ à valeur dans \mathbb{R}^3 et ses dérivées partielles sont continue.
- $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$: L'ensemble des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.
- $\|\cdot\|_p$: La norme associée à l'espace de Lebegue $L^p(\Omega)$.
- $|\cdot|$: Valeur absolue.
- η : Vecteur unité normal extérieur à $\partial\Omega$.
- $\frac{\partial}{\partial\eta}$, ∂_η : La dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$.
- dx : Mesure volumique.
- $d\sigma$: Mesure surfacique.
- \cdot : Produit scalaire usuelle de \mathbb{R}^N .
- J_i : Le vecteur densité du courant de la $i^{\text{ème}}$ particules.
- J : Matrice jacobienne.
- \det : Déterminant d'une matrice.
- Tr : Trace d'une matrice.
- EDO : Équation différentielle ordinaire.
- EDP : Équation aux dérivées partielles.
- \oplus somme directe

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Notions préliminaires	4
1.1 Un peu d'algèbre linéaire	5
1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres	5
1.1.2 Diagonalisation d'une matrice	5
1.1.3 Caractérisation des matrices diagonalisables	5
1.1.4 Rang d'une matrice	5
1.1.5 Formes Quadratiques	6
1.2 rappels d'analyse fonctionnelle	6
1.2.1 Espaces fonctionnelles	6
1.2.2 Inégalités fondamentales	7
1.3 Formule de Green	7
1.4 Fonctionnelle de Lyapunov	8
1.5 Régions invariantes	8
2 Origine de systèmes de réaction diffusion	12
2.1 Lois de Fick	13
2.1.1 Première loi de Fick	13
2.1.2 Seconde loi de Fick	13
2.1.3 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion	13
2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion	15
2.3 phénomène d'explosion en temps fini	17
2.3.1 Notion de phénomène	17
2.3.2 Exemple élémentaire	17
2.3.3 Exemple de réaction diffusion	17
2.4 Existence globale et locale d'un système de réaction diffusion	20
2.4.1 Existence locale	20
2.4.2 Existence globale	21
2.5 Méthode de la Fonctionnelle de Lyapunov	21
2.6 Existence globale par effet régularisant	22
3 Existence globale de solutions d'un système de réaction diffusion à m composants d'une matrice pleine $m \times m$	23
3.1 Introduction	24

3.2	système de réaction diffusion à m composants d'une matrice de diffusion pleine $m \times m$	24
3.3	Diagonalisation du système	26
3.4	Sur la condition de parabolicité	26
3.5	Régions invariantes et diagonalisation	27
3.6	Exemple de diagonalisation d'une matrice 3×3	28
3.7	Existence de solutions	30
3.7.1	Existence locale	30
3.7.2	Existence globale	30
3.8	Existence globale d'un système symétrique à m composants de type spécial .	31
4	Existence globale d'un système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion pleine 3×3	33
4.1	Introduction	34
4.2	système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion pleine 3×3	34
4.2.1	Équation de polynôme caractéristique	34
4.2.2	Discussion sur la positivité des valeurs propres de la matrice	36
4.3	Conditions de diagonalisabilité et positivité des valeurs propres	39
4.4	Cas des systèmes spéciaux	42
4.5	Application numérique	46
	Conclusion générale et perspectives	50
	Bibliographie	51

Introduction Générale

Par système de Réaction-Diffusion, nous entendons un système d'équations aux dérivées partielles, parabolique, semi-linéaire de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u(t, x) = F(u), x \in \Omega, t \geq 0 \quad (1a.1b)$$

où $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$, u_i définie de Ω dans \mathbb{R}^n , est D est une matrice carrée diagonalisable définie positive appelée matrice de diffusion.

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application régulière localement Lipchitzienne et généralement non linéaire, $F(t, x, u(t, x)) = (f_1(t, x, u), f_2(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))$, représente la réaction.

L'équation (1a.1b) est posée sur un domaine ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n et complétée par des conditions initiales et des conditions sur le bord, par exemple les conditions de Dirichlet ou les conditions de Neumann.. Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions (chimiques, biologiques, biochimiques,.....) locales ; dans lequel les différentes substances se transforment ; et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace. Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi d'écrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent. Cette thèse examine la forme générale de nombreuses études trouvées dans la littérature. Nous observons que les études précédentes imposent différents types de conditions suffisantes garantissant l'existence globale de solutions à ce type de problème. Par exemple, bien que les études [31– 45] considèrent différents types de matrices de diffusion, ils exigent tous que la matrice de diffusion est une matrice symétrique définie positive de la forme $\frac{1}{2}(A + A^T)$. Dans [31], l'auteur a considéré un système à 2 composants symétriques. Les auteurs de [56] ont étudié une matrice pleine à deux composants et étudié l'attractivité du système. Ce travail a été suivi d'une généralisation aux m composantes dans [55]. Kouachi [52] a établi l'existence globale de solutions pour un système de réaction-diffusion à matrice pleine à deux régions invariantes. Bendoukha et al. [47] ont généralisé ce travail aux non-linéarités exponentielles. Abdelmalek et al. [46] ont établi l'existence globale d'un système diagonal à m composantes par la méthode de Lyapunov. Comme on le verra plus tard, la plupart des travaux ultérieurs tentent de diagonaliser la matrice du système, puis procèdent de manière similaire à [46]. Une autre généralisation de Abdelmalek se trouve dans [43], où il considéré une matrice tridiagonale de 3×3 de la forme.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Kouachi et al. [49] ont considéré une matrice tridiagonale plus générale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Une autre étude importante [44], où l'auteur a considéré une matrice $m \times m$ tridiagonale qui est une extension naturelle de l'ouvrage de [43]. Dans [30], les auteurs ont considéré un système de réaction diffusion à m composante et déterminé les régions invariantes avec quelques autres résultats soumis à la même condition. Enfin, dans [45], Abdelmalek et al. établi l'existence globale de solutions pour un système avec une matrice de diffusion tridiagonale à 2 Toeplitz. Dans ce court résumé, nous n'avons pas épuisé la littérature, mais plutôt présenté les études reliées les plus importantes dans lesquelles les auteurs exigent que la matrice symétrique $\frac{1}{2}(A + A^T)$ soit définie positive. D'autres études trouvées dans la littérature établissent l'existence globale de solutions soumises à des conditions différentes. Dans [32], l'auteur considère une matrice de diffusion pleine à deux composants et montre qu'il existe des solutions globales soumises à $a_{12} = 0$ et $a_{11} > a_{12} > 0$. Dans [08], l'auteur a établi l'existence globale de solutions et étudié leur stabilité asymptotique pour un système à 2 composants fortement couplé soumis à $a_{11}, a_{22} > \frac{|a_{12}| + |a_{21}|}{2}$ et $a_{21}a_{12} \geq 0$. Une autre étude importante est [24], où les auteurs ont prouvé l'existence globale à condition que toutes les valeurs propres de la matrice du système soient positives. L'auteur a simplement considéré le cas d'une matrice de diffusion 2×2 avec des termes de réaction nuls. Le thème commun à toutes les études susmentionnées est que des contraintes sont imposées à la matrice de diffusion en conséquence du deuxième principe de la thermodynamique. La plus importante de ces contraintes est que les valeurs propres doivent être positives et réelles, ce qui garantit la positivité du déterminant ainsi que la trace. D'un point de vue physique, l'existence de valeurs propres complexes pour la matrice de diffusion entraîne une relaxation oscillatoire de petites perturbations de l'état d'équilibre, même en l'absence de terme de réaction. Bien que cette exigence soit fondamentale, certaines études examinant la formation de motifs et la propagation des ondes dans les systèmes de réaction diffusion l'ont ignorée [45]. Ces études incluent, mais ne sont pas limitées à [29 – 15]. Dans cette thèse, nous discutons de la diagonalisation du système proposé à m composantes. Nous examinons les conditions de diagonalisabilité trouvées dans la littérature et signalons des irrégularités. Nous établissons l'existence locale et globale de solutions en suivant les lignes (les étapes) de [46]. On a deux cas d'études, dont la première est un système général symétrique, voir le sous-partie 3.8 du chapitre 3, et la seconde, un système plein à 3 composants, voir chapitre 4. En ce qui concerne la matrice à 3 composants, les conditions exactes sont calculées pour la diagonalisation du système.

Deux exemples tirés de la littérature sont examinés, dans lesquels nous montrons que nos nouvelles conditions sont plus faibles que les précédentes. Enfin, l'élément 4.5 du chapitre 4 illustre les résultats de nos travaux à l'aide d'un exemple numérique représentant une réaction chimique réaliste présentée dans [57] en termes de diffusion croisée.

Notre thèse est contenue dans quatre chapitres. Les chapitres sont organisés comme suit :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions générales et certaines définitions préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs.

Dans le deuxième chapitre on présente les origines d'un système de réaction diffusion et

quelques exemples.

Le troisième chapitre examine l'existence globale de solutions pour un système de réaction-diffusion à matrice $m \times m$ pleine et croissance polynomiale.

Dans le chapitre quatre nous examinons un cas particulier du chapitre 3 avec $m = 3$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Contents

1.1	Un peu d'algèbre linéaire	5
1.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	5
1.1.2	Diagonalisation d'une matrice	5
1.1.3	Caractérisation des matrices diagonalisables	5
1.1.4	Rang d'une matrice	5
1.1.5	Formes Quadratiques	6
1.2	rappels d'analyse fonctionnelle	6
1.2.1	Espaces fonctionnelles	6
1.2.2	Inégalités fondamentales	7
1.3	Formule de Green	7
1.4	Fonctionnelle de Lyapunov	8
1.5	Régions invariantes	8

1.1 Un peu d'algèbre linéaire

1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Nous étudions les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice donnée M . Ceux-ci peuvent être utilisés pour transformer la matrice M en une forme plus simple qui est utile pour résoudre des autres problèmes plus difficile.

Définition 1.1.

On dit que λ est une valeur propre d'une matrice carrée M avec le vecteur propre associé v si

$$Mv = \lambda v$$

1.1.2 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice M de $M_n(K)$ est dite diagonalisable dans $M_n(K)$, si elle est semblable à une matrice diagonale de $M_n(K)$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P de $M_n(K)$ et une matrice diagonale D à coefficients dans K telles que

$$M = PDP^{-1} \tag{1.1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = [V_1, V_2, \dots, V_n]$$

les colonnes de P doivent être des vecteurs propres linéairement indépendants de M et les éléments diagonales de D doivent être leurs valeurs propres associées.

1.1.3 Caractérisation des matrices diagonalisables

Théorème 1.1. Soit M une matrice de $M_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est diagonalisable dans $M_n(K)$
- ii) le polynôme caractéristique P_M est scindé sur K et, pour toute valeur propre λ de M ,

$$\text{Mult}_{geo}(\lambda) = \text{Mult}_{alg}(\lambda)$$

- iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de M , telles que

$$K^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

1.1.4 Rang d'une matrice

Définition 1.2.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par ses vecteurs colonnes. On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple 1.1.1.

Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les vecteurs sont colinéaire à $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc le rang de la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est 1 et ainsi $\text{rang} A = 1$

1.1.5 Formes Quadratiques**Définition 1.3.**

Une forme quadratique est un polynôme homogène du second ordre de n variables u_1, u_2, \dots, u_n . Une forme quadratique est donnée sous la forme suivante

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice symétrique. Si nous désignons la matrice-colonne (u_1, u_2, \dots, u_n) par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ par $A(u, u)$, nous pouvons écrire

$$A(u, u) = u^T A u = A u \cdot u \quad (1.2)$$

Une forme quadratique $A(u, u)$ est dite définie positive si

$$A(u, u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 \quad (1.3)$$

Théorème 1.2.

Une forme quadratique $A(u, u)$ est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle**1.2.1 Espaces fonctionnelles**

Soit p un entier naturel et Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . $L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

alors, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|f\|_{m,p}$ définie par

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in W^{m,p}(\Omega)$$

On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$. Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle divergence de u , la fonction définie par

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Le gradient de la fonction u est définie sous la forme

$$\operatorname{grad} u = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

On appelle Laplacien de la fonction u , la fonction définie par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$$

1.2.2 Inégalités fondamentales

Inégalité de Young

Pour $1 < p, q < +\infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a, b > 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Inégalité de Hölder

Pour $1 < p, q < +\infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et pour f, g deux fonctions de $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ respectivement, on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

1.3 Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ la normale extérieure au point x . Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$ la formule de Green est donnée par

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (1.4)$$

Théorème de la divergence

Ce théorème énonce que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν une normale extérieure unité à Ω . Soit $F : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, $\partial\Omega$ est la frontière de Ω , alors

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds \quad (1.5)$$

1.4 Fonctionnelle de Lyapunov

Définition

On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de m équations, toute fonction

$$L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que

$$\frac{dL(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot))}{dt} \leq 0 \quad (1.6)$$

pour tout $t > 0$ et toute solution $(u_1(\cdot, x), u_2(\cdot, x), \dots, u_m(\cdot, x))$ de système.

1.5 Régions invariantes

Définition

les régions invariantes sont essentielles pour prouver l'existence d'une solution pour tout $t > 0$.

Un sous-ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est appelé une région invariante pour un système de réaction diffusion, si, toute solution $u(t, x)$ ayant ses valeurs initiales dans Σ , reste dans Σ pour tout $(t, x) \in [0, T_{Max}) \times \Omega$

Exemple 1.5.1.

Considérons le système de réaction diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + b\Delta v + f(u, v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c\Delta u + d\Delta v + g(u, v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (1.8)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega \quad (1.9)$$

a, b, c et d , sont des constantes positives et vérifiant $(b + c)^2 \leq 4ac$, la matrice de diffusion est définie positive. Multipliant la première équation de (1.7) par α_1 , et la seconde par α_2 , on obtient

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_1 a \Delta u + \alpha_1 b \Delta v + \alpha_1 f(u, v) \quad (1.10)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha_2 c \Delta u + \alpha_2 d \Delta v + \alpha_2 g(u, v) \quad (1.11)$$

en additionnant les équations (1.10) et (1.11) membre à membre, on trouve

$$\frac{\partial(\alpha_1 u + \alpha_2 v)}{\partial t} - \Delta[(\alpha_1 a + \alpha_2 c)u + (\alpha_1 b + \alpha_2 d)v] = \alpha_1 f(u, v) + \alpha_2 g(u, v) \quad (1.12)$$

Après, on choisit α_1, α_2 de sorte que

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 c = \lambda_1 \alpha_1 \\ \alpha_1 b + \alpha_2 d = \lambda_1 \alpha_2 \end{cases}$$

le système implique que λ_1 est une valeur propre de A^t associé au vecteur propre (α_1, α_2) La région Σ étant définie par

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq, } \lambda_1 v_0 \leq cu_0 + dv_0 \leq \lambda_2 v_0\} \\ \text{ou} \\ \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq, } \lambda_1 u_0 \leq au_0 + bv_0 \leq \lambda_2 u_0\} \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

Supposons que f, g sont des fonctions polynômiales différentiables sur Σ ($f(r, s), g(r, s)$) dans Σ , pour tout $(r, s) \in \partial \Sigma$, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 g(r, s) \leq cf(r, s) + dg(r, s) \text{ , pour tout } r, s \text{ , } \lambda_1 s = cr + ds \\ cf(r, s) + dg(r, s) \leq \lambda_2 g(r, s) \text{ , pour tout } r, s \text{ , } \lambda_2 s = cr + ds \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 f(r, s) \leq af(r, s) + bg(r, s) \text{ , pour tout } r, s \text{ , } \lambda_1 r = ar + bs \\ af(r, s) + bg(r, s) \leq \lambda_2 f(r, s) \text{ , pour tout } r, s \text{ , } \lambda_2 r = ar + bs \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

Soient λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) les valeurs propres de la matrice A^t associé aux vecteurs propres $(\alpha, \gamma), (\beta, \zeta)$ respectivement.

Multipliant la première équation de (1.7) par α , puis par β , et la deuxième par γ , puis par ζ , on obtient

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha a \Delta u + \alpha b \Delta v + \alpha f(u, v) \quad (1.16)$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} = \beta a \Delta u + \beta b \Delta v + \beta f(u, v) \quad (1.17)$$

et

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma c \Delta u + \gamma d \Delta v + \gamma g(u, v) \quad (1.18)$$

$$\zeta \frac{\partial v}{\partial t} = \zeta c \Delta u + \zeta d \Delta v + \zeta g(u, v) \quad (1.19)$$

additionnant (1.16) et (1.18), on trouve

$$\frac{\partial (au + \gamma v)}{\partial t} - \Delta [(a\alpha + c\gamma)u + (b\alpha + d\gamma)v] = \alpha f + \gamma g \quad (1.20)$$

puis l'addition de (1.17) et (1.19), donne

$$\frac{\partial (\beta u + \zeta v)}{\partial t} - \Delta [(a\beta + c\zeta)u + (b\beta + d\zeta)v] = \beta f + \zeta g \quad (1.21)$$

On choisit α, γ de sorte que (1.20) devient

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \lambda_1 \Delta w_1 = \alpha f + \gamma g$$

même chose pour le choix de β, ζ de sorte que (1.21) devient

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \lambda_2 \Delta w_2 = \beta f + \zeta g$$

Donc, on trouve le système

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} = \lambda_1 \Delta w_1 + F_1(w_1, w_2), & \text{sur }]0, T^*[\times \Omega \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = \lambda_2 \Delta w_2 + F_2(w_1, w_2), & \text{sur }]0, T^*[\times \Omega \end{cases} \quad (1.22)$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = 0,]0, T^*[\times \partial \Omega \quad (1.23)$$

et les conditions initiales

$$w_1(0, x) = w_{01}(x), w_2(0, x) = w_{02}(x), x \in \Omega \quad (1.24)$$

où

$$\begin{cases} w_1 = \alpha u + \gamma v & \text{sur }]0, T^*[\times \Omega \\ w_2 = \beta u + \zeta v & \text{sur }]0, T^*[\times \Omega \end{cases} \quad (1.25)$$

et

$$\begin{cases} F_1(w_1, w_2) = \alpha f + \gamma g \\ F_2(w_1, w_2) = \beta f + \zeta g \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour prouver que Σ est une région invariante pour (1.7), il suffit de prouver que la région

$$\{(w_{01}, w_{02}) \in \mathbb{R}^2 \text{ telle que, } w_{01} = \alpha u_0 + \gamma v_0 \geq 0, w_{02} = \beta u_0 + \zeta v_0 \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

est région invariante pour le système de réaction diffusion (1.22) Supposons que : $a \leq d$. Puisque λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice A^t associés respectivement aux vecteurs propres (α, γ) et (β, ζ) on obtient par calcul simple, les deux équations suivantes

$$(a - \lambda_1) \alpha + c \gamma = 0 \quad (1.27)$$

$$(d - \lambda_1) \gamma + b \alpha = 0 \quad (1.28)$$

même technique de calcul, on obtient

$$(a - \lambda_2) \beta + c \zeta = 0 \quad (1.29)$$

$$(d - \lambda_2) \zeta + b \beta = 0 \quad (1.30)$$

On choisit α, β, γ et ζ de sorte que les équations (1.27) – (1.30) vérifiant $a - \lambda_1 = \gamma$, alors de l'équation (1.27), on obtient $\alpha = -c$. $a - \lambda_2 = -\zeta$, alors de l'équation (1.29), on obtient $\beta = c$, implique $\beta = c = -\alpha$ même technique de calcul, on obtient $d - \lambda_1 = \alpha$, alors de l'équation (1.28), on obtient $\gamma = -b$, $d - \lambda_2 = -\beta$, de l'équation (1.30), on obtient $\zeta = b$ donc $\zeta = b = -\gamma$, alors

$$\begin{cases} w_{01} = \alpha u_0 + \gamma v_0 \geq 0 \\ w_{02} = \beta u_0 + \zeta v_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Puisque $\beta = c = -\alpha$, $\gamma = a - \lambda_1 = d - \lambda_2$, $\zeta = \lambda_2 - a = d - \lambda_1$, alors (1.31) devient

$$\begin{cases} w_{01} = -c u_0 + (a - \lambda_1) v_0 \geq 0 \\ w_{02} = c u_0 + (d - \lambda_1) v_0 \geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} w_{01} = -cu_0 + (\lambda_2 - d)v_0 \geq 0 \\ w_{02} = cu_0 + (d - \lambda_1)v_0 \geq 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lambda_1 v_0 \leq cu_0 + dv_0 \leq \lambda_2 v_0, \forall (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$

On montre que

$$\begin{cases} F_1(w_1, w_2) \geq 0, \text{ pour tout } (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \text{ tq } w_1 = 0, w_2 \geq 0 \\ F_2(w_1, w_2) \geq 0, \text{ pour tout } (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \text{ tq } w_1 \geq 0, w_2 = 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha = -c$, $\gamma = \lambda_2 - d$, $\beta = c$, $\zeta = d - \lambda_1$, on a

$$\begin{cases} F_1(w_1, w_2) = -cf + (\lambda_2 - d)g \geq 0, \text{ tq } w_1 = 0, w_2 \geq 0 \\ F_2(w_1, w_2) = cf + (d - \lambda_1)g \geq 0, \text{ tq } w_1 \geq 0, w_2 = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} cf + dg \leq \lambda_2 g, \text{ telle que } cu + dv \geq \lambda_1 v \\ cf + dg \geq \lambda_1 g, \text{ telle que } cu + dv \leq \lambda_2 v \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\lambda_1 g \leq cf + dg \leq \lambda_2 g$$

alors la condition (1.14) est vérifiée. Même méthode appliquée pour les conditions $\alpha = \lambda_2 - a$, $\beta = a - \lambda_1$, $\gamma = -b$, $\zeta = b$, et grâce à la méthode de régions invariantes, on a

$$\begin{cases} F_1(w_1, w_2) = (\lambda_2 - a)f - bg \geq 0 \text{ tq } w_1 = 0, w_2 \geq 0 \\ F_2(w_1, w_2) = (a - \lambda_1)f + bg \geq 0 \text{ tq } w_1 \geq 0, w_2 = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} af + bg \leq \lambda_2 f, \text{ tq } au + bv \geq \lambda_1 u \\ af + bg \geq \lambda_1 f, \text{ tq } au + bv \leq \lambda_2 u \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\lambda_1 f \leq af + bg \leq \lambda_2 f$$

Finalement, (1.13) est une région invariante pour le système de réaction diffusion (1.7).

Chapitre 2

Origine de systèmes de réaction diffusion

Contents

2.1	Lois de Fick	13
2.1.1	Première loi de Fick	13
2.1.2	Seconde loi de Fick	13
2.1.3	Modélisation des systèmes de réaction-diffusion	13
2.2	Exemples biologiques de réaction diffusion	15
2.3	phénomène d'explosion en temps fini	17
2.3.1	Notion de phénomène	17
2.3.2	Exemple élémentaire	17
2.3.3	Exemple de réaction diffusion	17
2.4	Existence globale et locale d'un système de réaction diffusion	20
2.4.1	Existence locale	20
2.4.2	Existence globale	21
2.5	Méthode de la Fonctionnelles de Lyapunov	21
2.6	Existence globale par effet régularisant	22

2.1 Lois de Fick

2.1.1 Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$J_i = -d\nabla C_i \quad (2.1)$$

2.1.2 Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i , $\iiint_V C_i dV$ dans un volume donné V est égale au flux sortant $\iint_S J_i dS$ du vecteur densité de courant J_i de particules i à travers la surface fermée S délimitant le volume V .

En utilisant le théorème de la divergence, et en identifiant les deux intégrants ci-dessous, on obtient la deuxième loi de Fick suivante

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C_i dV = \iint_S J_i dS = \iiint_V \nabla J_i dV \quad (2.2)$$

Le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla J_i = 0 \quad (2.3)$$

2.1.3 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

Les systèmes de réaction-diffusion décrivent le comportement et les interactions de deux types de particules ou plus. Les termes Δu et Δv sont les termes de diffusion et décrivent la propagation de ces particules. Les termes de réaction sont représentés par f et g , et ces termes décrivent comment les particules interagissent les unes avec les autres. u et v apparaissent dans les deux équations, en général, le système ne peut pas être écrit en deux équations distinctes. Les systèmes de réaction-diffusion peuvent être obtenus à partir d'équations de conservation de la masse. Supposons qu'on étudie un système contenant P quantités C_1, C_2, \dots, C_p , qui peuvent représenter des densités des concentrations de réactifs chimiques, de population, etc. Les densités des espèces sont représentées par un vecteur

$$C(t, x) = (C_1(t, x), C_2(t, x), \dots, C_p(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega$$

où Ω est un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^n . On note J_i le flux de l'espèce C_i et f_i son taux de création volumique horaire. Pour tout $A \subset \Omega$ borné, régulier, la conservation de la masse pour C_i à l'intérieur de A s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int C_i + \int_{\partial A} J_i \cdot \nu = \int_A f_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (2.4)$$

où ν est la dérivée normale extérieure sur la frontière ∂A de A . D'après le théorème de Gauss Green,

$$\frac{d}{dt} \int C_i + \int_A \operatorname{div} J_i = \int_A f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

Comme A est quelconque, on obtient l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (2.5)$$

D'après la loi de Fick, J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces, ce qui donne,

$$J_i = - \sum_{j=1}^p d_{ij} \nabla C_j, i = 1, \dots, p \quad (2.6)$$

où les d_{ii} sont les coefficients de diffusion, $D = (d_{ii})$, $1 \leq i \leq p$ est une matrice diagonale avec $d_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, p$.

on retrouve finalement le système de réaction-diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} + D \Delta C = f(C) \quad (2.7)$$

le système de réaction-diffusion s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié. S'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière de Ω sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. Lorsque les données initiales sont suffisamment régulières, l'existence locale de solutions pour les systèmes de la forme (2.7) est bien connue.

L'existence globale est un problème ouvert en général, et on sait qu'elle ne peut avoir lieu sans hypothèses supplémentaires sur les f_i , termes de réaction cinétique.

Laissez-nous faire quelques commentaires sur la structure des non-linéarités f_i .

Tout d'abord, on supposera toujours que le modèle préserve la positivité des solutions. Il est bien connu que cela revient à supposer que $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ est quasi-positif, ce qui signifie

(H₁) $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $f(t, x, c) \geq 0$ pour tout $(t, x, c) \in (0, +\infty) \times \Omega \times [0, +\infty)^p$ tel que $c_i = 0$.

Ensuite, pour espérer l'existence de solutions globales en temps, f doit satisfaire des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses viennent souvent du modèle qu'on étudie.

Par exemple, la conservation de la masse correspond à supposer $\sum_{i=1}^p f_i = 0$. Plus généralement, la masse totale décroît si

(H₂) $\sum_{i=1}^p f_i \leq 0$.

On vérifie facilement que les hypothèses (H_1) et (H_2) , avec des conditions de Neumann homogène au bord, garantissent que les solutions de (2.7) sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$ étant donné que pour tout $t > 0$,

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^p c_i(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p c_i(0, x) dx$$

et $\|c_i(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} c_i(t, x) dx$ puisque c_i est positive. Dans le cas homogène, où les fonctions c_i ne dépendent pas de x , on peut remarquer qu'elles sont aussi solutions du système d'équations différentielle ordinaire associé

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = & f_1(t, x, c) \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial C_p}{\partial t} = & f_p(t, x, c) \end{cases}$$

Pour des données initiales positives, les solutions restent positives. Étant donné que

$$\sum_{i=1}^p c_i(t) \leq \sum_{i=1}^p c_i(0)$$

elles sont uniformément bornées sur leur intervalle maximal de définition. Par conséquent, dans ce cas particulier, les solutions maximales sont globales.

Il est alors naturel de se demander si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont suffisantes pour assurer l'existence de solutions globales fortes pour le système de réaction diffusion (2.7).

La réponse est non : des solutions explicites d'un système du type (2.7) avec les propriétés (H_1) et (H_2) ont été construites dans [34], et ces solutions explosent en norme $L^\infty(\Omega)$ en temps fini. Dans ce dernier exemple, les coefficients de diffusion sont pourtant constants, et les nonlinéarités sont bornées par des expressions polynomiales.

L'explosion peut même avoir lieu en dimension $N = 1$, à condition que la croissance des nonlinéarités soit assez rapide. Ceci prouve que lorsqu'on s'intéresse à l'existence globale de solutions fortes, on doit faire des hypothèses supplémentaires sur $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Il existe de nombreuses références sur les problèmes d'existence globale pour ces systèmes, où diverses hypothèses sur les fonctions (f_1, f_2, \dots, f_p) sont examinées [53, 23, 14]. Pour une vue d'ensemble, voir [35].

L'existence de solutions globales faibles est plus facile à obtenir dans le cas de coefficients de diffusion constants et pour des nonlinéarités a priori bornées pour tout $T > 0$ dans $L^1((0, T), \Omega)$. L'existence de solutions globales faibles est prouvée dans [35]. Ce résultat implique que si la croissance de f_i par-rapport à c est au plus quadratique, on a l'existence de solutions globales faibles sous les hypothèses (H_1) et (H_2) . Ce résultat repose de façon essentielle sur une estimation L^2 , pour les coefficients de diffusion d_i constants, cette estimation garantit que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , les solutions de (2.7) satisfont les estimations a priori

$$\forall T > 0, \exists C = C(T, \|c(0)\|_{L^2(\Omega)^p, d_i}) > 0 : \|c\|_{L^2((0, T) \times \Omega)^p} \leq C$$

2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion

Nous présentons trois exemples de phénomènes biologiques modélisés par des équations de réaction diffusion : le modèle de Schnakenberg, le modèle de glycolyse et le modèle de coagulation sanguine. On va donner une petite introduction sur ces trois modèles.

Modèle de Schnakenberg

Le modèle de Schnakenberg utilise des équations aux dérivées partielles pour décrire une réaction autocatalytique avec un comportement oscillatoire possible. Le modèle de Schnakenberg est représenté par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma(a - u + u^2v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \gamma(b - u^2v) \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système ci-dessus est représenté sous sa forme sans dimension.

Modèle de glycolyse

Le processus appelé glycolyse est une voie métabolique composée d'un ensemble de dix réactions chimiques catalysées par des enzymes. Ce processus se produit dans le cytosol de la cellule. Une molécule de glucose a six atomes de carbone et lorsqu'elle est brisée, deux molécules se forment, chacune avec 3 atomes de carbone. Ces molécules sont appelées pyruvate ou acide. Les produits finaux de ce processus sont deux molécules d'ATP, deux molécules de pyruvate et deux molécules de NADH+.

Le NAD (nicotinamide adénine dinucléotide) est une coenzyme, c'est-à-dire une substance organique non protéique nécessaire au fonctionnement de certaines enzymes.

La forme sans dimension du modèle de glycolyse est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + i - ku - uv^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + ku + uv^2 - v \end{cases} \quad (2.9)$$

L'interprétation biologique est la suivante : u représente la concentration de glucose, v la concentration de produit pyruvate, $d = \frac{D_v}{D_u}$, où D_u et D_v sont les coefficients de diffusion.

Le terme uv^2 représente la consommation non linéaire de u pour la première équation et l'activation de v pour la deuxième équation. Le paramètre positif i représente une quantité initiale de glucose. Le paramètre k , également positif, est lié dans la première équation à la consommation naturelle de glucose et dans la seconde à la production de pyruvate.

Modèle de coagulation du sang

Lorsqu'un vaisseau sanguin est blessé, le corps commence un processus pour arrêter le saignement, appelé hémostase. La coagulation du sang est une partie importante de l'hémostase et se compose d'une voie complexe d'événements moléculaires et cellulaires qui aboutit à la formation d'un caillot de fibrine. Ce caillot de fibrine recouvre la paroi du vaisseau sanguin blessé pour arrêter la perte de sang et pour commencer la réparation des tissus endommagés. Trois étapes principales peuvent être utilisées pour illustrer de manière simplifiée le processus de formation de caillots. Dans la première étape, après la rupture d'un vaisseau sanguin, un complexe de substances, appelé activateur de la prothrombine, se forme. Dans la deuxième étape se produit la conversion de la prothrombine en thrombine par l'action de l'activateur de la prothrombine. Dans la troisième et dernière étape, la thrombine agit comme une enzyme pour catalyser la conversion du fibrinogène en filaments de fibrine, qui

retiendront les érythrocytes, les plaquettes et le plasma, formant le caillot de fibrine. Les équations qui modélisent la coagulation sanguine sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \delta - ku - uv^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \beta + ku + uv^2 - v \end{cases} \quad (2.10)$$

Le système ci-dessus est écrit sous la forme sans dimension, où u est la concentration de thrombine, v est la concentration de fibrinogène, δ est la quantité initiale de thrombine, k est la consommation initiale de thrombine, d est le coefficient de diffusion et β est la quantité initiale de granules libérés par les plaquettes.

2.3 phénomène d'explosion en temps fini

2.3.1 Notion de phénomène

Le phénomène d'explosion se produit dans divers types d'équations d'évolution non linéaires. Dans ce travail, nous ne traiterons que quelques exemples des équations paraboliques.

2.3.2 Exemple élémentaire

L'exemple le plus simple d'apparition du phénomène d'explosion est le problème des DEO.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 & t > 0 \\ u(0) = a > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

La solution unique est définie uniquement dans l'intervalle fini $[0, T)$, où $T = \frac{1}{a}$. La solution est explicité comme suit

$$u(t) = \frac{1}{T - t}$$

et satisfait $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$. Nous considérons la variable t comme un temps et nous disons que la solution explose en temps fini $t = T$. Par cet exemple, le concept d'explosion peut être décrit comme un phénomène pour lequel la solution n'est pas définie globalement car elle tend à l'infini dans un temps infini.

2.3.3 Exemple de réaction diffusion

Nous considérons l'exemple suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u + u^p, \quad 0 < x < \pi \quad t > 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0 \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

où p est fixé.

L'existence et la non-négativité peuvent être montrées (nous en parlerons plus tard). Nous définissons (comme fonction auxiliaire)

$$\psi(t) = \int_0^\pi u(x, t) \sin x dx$$

Nous pouvons donc multiplier l'EDP (2.12) par $\sin(x)$ et une intégration sur $[0, \pi]$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t} \sin x dx \\ &= \int_0^\pi \Delta u \sin x dx - \psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx \end{aligned}$$

Une intégration par parties pour l'intégrale $\int_0^\pi \Delta u \sin x dx$ donne

$$\int_0^\pi \Delta u \sin x dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx$$

D'après les conditions aux limites (2.13) et un autre intégration par parties pour $\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx$ on obtient

$$\int_0^\pi \Delta u \sin x dx = - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx = - \int_0^\pi u \sin x dx = -\psi$$

Finalement

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx$$

de l'inégalité de Hölder il vient

$$\int_0^\pi |gh| dx \leq \left[\int_0^\pi |g|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_0^\pi |h|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{1-\frac{1}{p}}$$

Choisir $g = u(\sin x)^{\frac{1}{p}}$ et $h = (\sin x)^{1-\frac{1}{p}}$, avec une intégration sur l'intervalle $[0, \pi]$, alors nous obtenons

$$\int_0^\pi u \sin x dx \leq \left[\int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_0^\pi ((\sin x)^{1-\frac{1}{p}})^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\int_0^\pi u \sin x dx \leq \left[\int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_0^\pi \sin x dx \right]^{1-\frac{1}{p}}$$

ce qui équivaut à

$$\left(\int_0^\pi u \sin x dx \right)^p \leq \left(\left[\int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \right)^p \left(\left[\int_0^\pi \sin x dx \right]^{1-\frac{1}{p}} \right)^p$$

Cette inéquation nous conduit à

$$\psi^p \leq \int_0^\pi u^p \sin x dx \times (2)^{p-1}$$

ce qui donne

$$\int_0^\pi u^p \sin x dx \geq \frac{\psi^p}{2^{p-1}}$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx \geq -2\psi + \frac{\psi^p}{2^{p-1}}$$

Par conséquent, si nous partons d'une valeur initiale satisfaisante

$$\psi(0) = \int_0^\pi u_0(x) \sin x dx > 2^{\frac{p}{p-1}}$$

alors nous obtenons

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial t} \geq -2\psi(0) + \frac{\psi^p(0)}{2^{p-1}} = \psi(0) \left[\frac{\psi^p(0)}{2^{p-1}} - 2 \right] > 0$$

une fonction croissante monotone.

On montre que la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \frac{\psi^p}{2^{p-1}} \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}$$

est

$$\psi(t) = \left[2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}}$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-1}{p-1} \left[2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}-1} 2(p-1) e^{2(p-1)t} [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}]$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= - \left[2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-p}{p-1}} 2e^{2(p-1)t} [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}] \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2e^{2(p-1)t} \left[\left[2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}} \right]^p [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}] \end{aligned}$$

D'autre part

$$\psi(t) = \left[2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}}$$

Alors

$$\psi^{-(p-1)} = 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p})$$

par suite

$$e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) = \psi^{-(p-1)} - 2^{-p}$$

Remplaçant dans

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi^p [\psi^{-(p-1)} - 2^{-p}]$$

Finalement on trouve l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\psi + \frac{\psi^p}{2^{p-1}} \\ \psi(0) &= \left[2^{-p} + (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}} = \psi_0 \end{aligned}$$

La solution tend à l'infini, comme

$$\psi^{-(p-1)} = 2^{-p} + e^{2(p-1)t^*} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) = 0 \iff t^* = \frac{1}{2(p-1)} \ln \left[\frac{2^{-p}}{2^{-p} - \psi_0^{-p+1}} \right]$$

$$\lim \psi(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow t^* = T_{\max} = \frac{1}{2(p-1)} \ln \left[\frac{2^{-p}}{2^{-p} - \psi_0^{-p+1}} < +\infty \right]$$

c'est-à-dire temps fini de l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous trouvons

$$\|\psi\| = \left\| \int_0^\pi u \sin x dx \right\| \leq \int_0^\pi \|u\| \|\sin x\| dx \leq \|u\|_{L^2(0, \pi)} \times \|\sin x\|_{L^2(0, \pi)}$$

Nous savons déjà que $\psi \rightarrow +\infty$, donc il en résulte directement que $\|u\|_{L^2(0, \pi)} \rightarrow +\infty$, en cas de $\psi(0) > 2^{\frac{p}{p-1}}$

$$\lim \|\psi(t)\|_\infty = +\infty, \quad t \rightarrow T_{\max}$$

et donc explosion en temps fini des solutions.

2.4 Existence globale et locale d'un système de réaction diffusion

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations a priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov.

2.4.1 Existence locale

Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière. Considérons le système de réaction-diffusion à deux composante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u, v) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \lambda_1 u + (1 - \lambda_1) \partial_\eta u = \beta_1 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \lambda_2 v + (1 - \lambda_2) \partial_\eta v = \beta_2 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

où les propriétés suivantes sont supposées vérifiées (H_1) $a, b, \lambda_i, i = 1, 2$, sont des constantes strictement positives, $\beta_i \geq 0$ et soit $0 < \lambda_i < 1, \lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 0$. Aussi $\beta_i = 0$ si $\lambda_i = 0$. (H_2) Les nonlinéarités f et g sont deux fonctions continûment différentiables de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} avec

$$f(0, v) \geq 0, \quad g(u, 0) \geq 0 \quad \text{pour tout } u, v \geq 0.$$

ce qui assure que le système (2.14) préserve la positivité. (H_3) $(u_0, v_0) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ avec $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 2.1. [53]

Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), le système (2.14) admet une unique solution locale (u, v) sur $[0, T_{\max}) \times \Omega$, et il existe deux fonctions $N_1, N_2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continues telles que $0 \leq u(t, x) \leq N_1(t)$ et $0 \leq v(t, x) \leq N_2(t)$ pour tout $(t, x) \in [0, T_{\max}) \times \Omega$. De plus le temps maximal d'existence T_{\max} est caractérisé par

$$\text{si } T_{\max} < +\infty, \quad \text{alors } \lim (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty, \quad t \rightarrow T_{\max} \quad (2.15)$$

2.4.2 Existence globale

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes de réaction diffusion On passe maintenant à l'existence globale, l'existence globale de la solution du système (2.14), c'est-à-dire déterminer si $T_{\max} = +\infty$, nous utilisons la contraposée de la caractérisation (2.15) du temps maximal d'existence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s' il existe une fonction } M : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty) \text{ continue telle que} \\ \|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty} \leq M(t) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}) \\ \text{alors } T_{\max} = +\infty \end{array} \right. \quad (2.16)$$

c'est-à-dire, si les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ sont bornées pour tout $t \in [0, T]$, $T < T_{\max}$, alors, $T_{\max} = +\infty$.

Abdelmalek et Kouachi[46], a généralisé le système d'une matrice diagonale à m composants, et utiliser une seule inégalité pour la condition de croissance polynomiale des termes de réaction.

Proposition 2.1.

On considère des problèmes paraboliques semilinéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) & x \in \Omega \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , D est une matrice diagonale définie positive, dite la matrice de diffusion. $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction localement Lipchitzienne.

Soit X un espace de Banach des fonctions définies dans Ω . On suppose que le problème (2.17) possède pour tout $u_0 \in X$ une solution unique u dans l'intervalle $[0, T]$, où $T = T(u_0)$: Alors il existe $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :

i) La solution u est continue dans l'intervalle $[0, T_{\max})$:

ii) Si $T_{\max} < \infty$, alors u ne peut être continue dans $[0; \tau)$ pour tout $\tau > T_{\max}$

On appelle u la solution maximale et T_{\max} est son temps maximal d'existence.

iii) D'autre côté on considère que $T = T(\|u_0\|_X)$. Alors l'un des deux :

$T_{\max} = \infty$ ou $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$ est satisfait.

Le principe de prolongement de la solution nous conduit à l'alternative suivante :

a) ou bien $T_{\max} = +\infty$ et la solution est dite globale

b) ou bien $T_{\max} < +\infty$ et la solution explose en temps fini c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$$

Ainsi pour étudier l'existence globale des solutions, il suffit d'avoir des estimations uniformes sur ces solutions.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

2.5 Méthode de la Fonctionnelles de Lyapunov

Ici, nous n'exposons pas les deux premières méthodes puisqu'elles ne donnent pas toujours l'existence globale vu la difficulté et la complexité des termes de réaction de certains

systemes de réaction-diffusion, mais nous nous consacrons à la dernière méthode qui donne des résultats satisfaisants.

Nous considérons le système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u, v, w) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v, w) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial t} - c\Delta w = h(u, v, w) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + (1 - \lambda_1) \partial_\eta u &= \beta_1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \lambda_2 v + (1 - \lambda_2) \partial_\eta v &= \beta_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \lambda_3 w + (1 - \lambda_3) \partial_\eta w &= \beta_3 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{aligned}$$

et les données initiales

$$u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x), w(0, x) = w_0(x) \quad \text{sur } \Omega$$

Théorème 2.2.

Supposons que les fonctions f, g et h soient de croissance polynomiale et satisfaire pour certaines constantes positives D et E suffisamment grand la condition suivante

$$Df(u, v, w) + Eg(u, v, w) + h(u, v, w) \leq C_1(u + v + w + 1)$$

pour tous $u, v, w \geq 0$ et toutes les constantes $D \geq D_1$ et $E \geq E_1$ où D_1 et E_1 sont des constantes positives.

Soit $(u(t, \cdot), v(t, \cdot), w(t, \cdot))$ une solution de (2.18) et soit

$$L(t) = \int_{\Omega} H_n(u(t, x), v(t, x), w(t, x)) dx \quad (2.19)$$

où

$$H_n(u(t, x), v(t, x), w(t, x)) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p C_n^p C_p^q \theta_q \sigma_p u^q v^{p-q} w^{n-p} \quad (2.20)$$

Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T_{\max}]$

Corollaire 2.1.

Sous les hypothèses du théorème 2.2, toutes les solutions de (2.18) avec des données initiales positives sont globales. [50].

2.6 Existence globale par effet régularisant

Proposition [10]

Soit le système (2.17), $f(t, x, u) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$ pour $p > \frac{n}{2}$, où $n = \dim \Omega$
Par définition

$$\begin{aligned} f(t, x, u) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega)) &\iff \text{Sup} \|f(t, x, u)\|_{L^p(\Omega)} < +\infty, 0 \leq t \leq T, x \in \Omega \\ &\iff \exists C > 0, \int_{\Omega} |f(t, x, u)|^p dx \leq C, \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

alors la solution de (2.17) est globale.

Chapitre 3

Existence globale de solutions d'un système de réaction diffusion à m composants d'une matrice pleine $m \times m$

Contents

3.1	Introduction	24
3.2	système de réaction diffusion à m composants d'une matrice de diffusion pleine $m \times m$	24
3.3	Diagonalisation du système	26
3.4	Sur la condition de parabolicité	26
3.5	Régions invariantes et diagonalisation	27
3.6	Exemple de diagonalisation d'une matrice 3×3	28
3.7	Existence de solutions	30
3.7.1	Existence locale	30
3.7.2	Existence globale	30
3.8	Existence globale d'un système symétrique à m composants de type spécial	31

3.1 Introduction

Cet chapitre s'intéresse à l'existence globale de solutions pour un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine et croissance polynomiale. La principale motivation de ce travail est le fait que la plupart des systèmes de réaction diffusion trouvés dans la littérature supposent que la matrice de diffusion est une matrice diagonale, ce qui signifie que la dispersion spatiale de chaque espèce dans une région donnée n'est que le résultat du même gradient de concentration d'espèce (auto-diffusion). Bien que supposé par beaucoup en raison du fait que cela simplifie grandement les calculs et les preuves, cela peut ne pas être réaliste dans de nombreux scénarios. Certaines études récentes, notamment [57], ont montré que, dans de nombreux cas, la diffusion d'une espèce due à un gradient de concentration dans une autre (diffusion croisée) est considérable et peut même dépasser l'autodiffusion. [37]

3.2 système de réaction diffusion à m composants d'une matrice de diffusion pleine $m \times m$

nous considérons le système général donné par

$$\frac{\partial C}{\partial t} - A\Delta C = F(C) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.1)$$

avec conditions aux limites

$$\alpha C + (1 - \alpha) \frac{\partial C}{\partial \eta} = B \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty) \quad (3.2)$$

ou

$$\alpha C + (1 - \alpha) A \frac{\partial C}{\partial \eta} = B \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty) \quad (3.3)$$

et les données initiales

$$C(0, x) = C_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (3.4)$$

Dans le contexte de cette thèse, Ω est un domaine borné ouvert de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale vers l'extérieur sur Ω .

Nous définissons les vecteurs C , F et B trivialement comme

$$C = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$$

et la matrice carrée $m \times m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

contient les coefficients réels de diffusion du système. La matrice A^T est supposé être diagonalisable avec valeurs propres distinctes et positives $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ et vecteurs propres V_1, V_2, \dots, V_m avec

$$V_\ell = (v_{1\ell}, v_{2\ell}, \dots, v_{m\ell})$$

pour $\ell = 1, \dots, m$. Notez que les valeurs propres de A^T sont identiques à celles de A . Cependant, les vecteurs propres sont différents. Il en résulte que le déterminant est égal à

$$\det(A^T) = \prod_{\ell=1}^k \lambda_\ell^{m_\ell}$$

où m_ℓ désigne la multiplicité algébrique correspondant à la valeur propre λ_ℓ . Évidemment, la somme des multiplicités doit être égale au nombre de colonnes dans A^T , c'est-à-dire

$$\sum_{\ell=1}^k m_\ell = m$$

Définissons les vecteurs propres associés à la ℓ ème valeur propre distincte λ_ℓ comme

$$V_{\sigma_{\ell+1}}, V_{\sigma_{\ell+2}}, \dots, V_{\sigma_{\ell+m_\ell}}, \ell = 1, \dots, k$$

avec

$$\sigma_\ell = \begin{cases} 0, & \ell = 1 \\ \sum_{i=1}^{\ell-1} m_i, & \ell = 2, \dots, k \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont disposés dans la matrice P définie comme

$$P = \left((-1)^{i_1} V_1 \quad (-1)^{i_2} V_2 \quad \dots \quad (-1)^{i_m} V_m \right) \quad (3.6)$$

avec chaque puissance i_ℓ étant 1 ou 2. Nous définissons les ensembles $\mathcal{F} = \{\ell, i_\ell = 1\}$ et $\mathcal{L} = \{\ell, i_\ell = 2\}$, qui satisfont les propriétés

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{F} = \emptyset \text{ et } \mathcal{L} \cup \mathcal{F} = \{1, 2, \dots, m\} \quad (3.7)$$

La donnée initiale est supposée dans la région

$$\Sigma_{\mathcal{L}, \phi} = \{C_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_\ell, C_0 \rangle \geq 0, \ell \in \mathcal{L}\} \quad (3.8)$$

tel que

$$\langle V_\ell, B \rangle \geq 0, \ell \in \mathcal{L} \quad (3.9)$$

Étant donné cette région, la matrice P dans (3.6) se réduit à sa forme la plus simple.

$$P = (V_1 V_2 \dots V_m) \quad (3.10)$$

Notons ici que la matrice P peut être utilisée pour diagonaliser la matrice système A par l'utilisation de la relation de transformation suivante

$$P^T A (P^T)^{-1} = (P^{-1} A^T P)^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (3.11)$$

différents types de conditions aux limites peuvent être supposés car ils n'affectent pas aux limites

- (i) non homogène de Robin : $0 < \alpha < 1, B \in \mathbb{R}^m$
- (ii) homogène de Neumann : $\alpha = 0$ et $B = 0$
- (iii) homogène de Dirichlet : $1 - \alpha = 0$ et $B = 0$.

3.3 Diagonalisation du système

Dans cette section, nous montrons comment le système propose peut être diagonalisé, ce qui est une étape nécessaire pour établir l'existence de solutions localement et globalement. Premièrement, nous discutons de la question de savoir si la condition de parabolicité considérée dans les études précédentes est nécessaire pour que le système soit diagonalisable. Ensuite, nous identifions les régions invariantes du système et montrons comment le système peut être diagonalisé en prenant comme exemple une seule région invariante.

3.4 Sur la condition de parabolicité

De nombreuses études trouvées dans la littérature indiquent que la parabolicité d'un système est une condition suffisante pour qu'il s'agisse d'une réaction diffusion. Cependant, la condition pour la parabolicité d'un certain système ne semble pas être acceptée. Par exemple, la plupart des études trouvées dans la littérature, y compris celles présentées dans la section précédente, utilisent une forme de la proposition suivante, énoncée dans [42].

Proposition 3.1.

Une forme quadratique $Q = \langle X, AX \rangle = X^T AX$, avec A étant une matrice symétrique, est définie positive pour chaque vecteur de colonne X non nul si tous les principaux mineurs dans le coin supérieur gauche de A sont positifs. Si A n'est pas symétrique, Q est défini positif ssi les principaux mineurs dans le coin supérieur gauche de $\frac{1}{2}(A + A^T)$ sont positifs.

La condition énoncée dans cette proposition est la même que celle énoncée par Capasso dans [56]. Nous notons que Capasso s'est en effet référé à la définition inventée par Friedman dans [01]. Cependant, lorsque nous renvoyons à [01], la condition est très différente. La proposition suivante résume l'état de parabolicité de Friedman.

Proposition 3.2.

Le système (3.1) est parabolique au sens de Petrowski si les parties réelles des valeurs propres de la matrice A sont positives.

Clairement, la condition énoncée dans la proposition 3.2 est plus forte que celle de la proposition 3.1. Ceci peut être facilement illustré, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.4.1. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.0132 \\ 3.49 & 0.654 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond à un modèle réaliste de réaction diffusion lié au transport d'électrolytes dans le polyéthylène glycol (PEG), voir [57].

La matrice représente un PEG2000 (0,1250) –NaCl (1,2485) H_2O . la matrice A a des valeurs propres

$$\lambda_1 = 0.1403 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0.7437$$

et donc cela satisfait la proposition 3.2. Cependant, la condition de la proposition 3.1 n'est pas satisfaite car les valeurs propres de $\frac{A+A^t}{2}$ sont données par

$$\hat{\lambda}_1 = -1.3224 \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_2 = 2.2064$$

Tout au long de cette thèse, nous considérerons les conditions de Friedman énoncées dans la proposition 3.2. Comme nous le verrons plus tard, nous supposons que notre matrice système est diagonalisable avec des valeurs propres positives, et donc une parabolicité. la condition est inhérente et aucune autre condition n'est requise.

3.5 Régions invariantes et diagonalisation

Puisque ses valeurs propres sont supposées positives, la matrice A^T est unitaire diagonalisable par la matrice P dans (3.6) contenant ses vecteurs propres sous forme de colonnes. Nous notons que chaque permutation de \mathcal{F} et \mathcal{L} satisfaisant (3.7) donne une matrice de diagonalisation valide. Puisque le nombre total de permutations possibles est de 2^m , on peut dire que le nombre de régions invariantes $\Sigma_{\mathcal{F},\mathcal{L}}$ pour le système proposé est également 2^m , dont lune est la région décrite par (3.8) - (3.9), correspondant à $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, m\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$. Ces régions de 2^m peuvent être écrites comme[37]

$$\Sigma_{\mathcal{F},\mathcal{L}} = \{C_0, \in \mathbb{R}^m : \langle V_z, C_0 \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, C_0 \rangle, \ell \in \mathcal{L}, z \in \mathcal{F}\} \quad (3.12)$$

telle que

$$\langle V_z, B \rangle \leq 0 \leq \langle V_\ell, B \rangle, \ell \in \mathcal{L}, z \in \mathcal{F} \quad (3.13)$$

Par souci de simplicité, nous ne considérerons qu'une des régions invariantes qui correspond aux ensembles $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, m\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$ et est défini dans (3.12) et (3.13).

Notez que les travaux effectués dans les sous-sections suivantes peuvent être étendus de manière triviale aux régions restantes de $2^m - 1$.

Afin d'établir l'existence locale et globale de solutions pour le système proposé (3.1), nous commençons par diagonaliser le système à l'aide de la matrice de diagonalisation définie dans (3.10). Soit

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T = P^T C \quad (3.14)$$

où

$$w_\ell = \langle V_\ell, C \rangle = \begin{cases} \langle V_\ell, C \rangle, \ell \in \mathcal{L} \\ \langle -V_\ell, C \rangle, \ell \in \mathcal{F} \end{cases}$$

et

$$F(W) = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T = P^T F(C) \quad (3.15)$$

avec

$$F_\ell = \langle V_\ell, F \rangle, \text{ pour } \ell = 1, \dots, m$$

Pour certaines fonctions positives uniformément bornées C_1 et C_2 définies sur \mathbb{R}^{m+} , chaque fonction de réaction F_ℓ est supposée

(A1) être continu et différentiable sur \mathbb{R}_+^m pour tous $\ell = 1, \dots, m$, satisfaisante

$F_\ell(w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1}, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m) \geq 0$, pour tous $w_\ell \geq 0$, $\ell = 1, \dots, m$.

(A2) avoir une croissance polynomiale, c'est-à-dire pour $\ell = 1, \dots, m$

$$|F_\ell(W)| \leq C_1(1 + \langle W, 1 \rangle)^N, N \in \mathbb{N}, \text{ sur } (0, +\infty)^m \quad (3.16)$$

(A3) satisfaire

$$\langle D, F(W) \rangle \leq C_2(1 + \langle W, 1 \rangle) \quad (3.17)$$

où

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_{m-1}, 1)^T$$

pour tous $w_\ell \geq 0, \ell = 1, \dots, m$, Les constantes $D_\ell \geq \bar{D}_\ell, \ell = 1, \dots, m$ où \bar{D}_ℓ sont des constantes positives suffisamment grandes.

Pour terminer le processus de diagonalisation, supposons que

$$\Lambda = P^T B$$

En utilisant ces définitions, le système peut être diagonalisé comme indiqué dans la proposition suivante. Pour la preuve de la proposition, il est fait référence au lecteur [43] et à des études antérieures réalisées par le même auteur.

Proposition 3.3.

diagonalisation du Système (3.1) par P^T donne

$$W_t = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \Delta W = F(W) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.18)$$

avec la condition aux limites

$$\alpha W + (1 - \alpha) \frac{\partial W}{\partial \eta} = \Lambda \text{ sur } \partial \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.19)$$

ou

$$\alpha W + (1 - \alpha) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \frac{\partial W}{\partial \eta} = \Lambda \text{ sur } \partial \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.20)$$

avec les données initiales

$$W(x, 0) = W_0 \text{ sur } \Omega \quad (3.21)$$

3.6 Exemple de diagonalisation d'une matrice 3×3

Soit le système de réaction diffusion associé à une matrice de diffusion pleine

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{11} \Delta u - a_{12} \Delta v - a_{13} \Delta w = f(u, v, w) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - a_{21} \Delta u - a_{22} \Delta v - a_{23} \Delta w = g(u, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a_{31} \Delta u - a_{32} \Delta v - a_{33} \Delta w = h(u, v, w) \end{cases} \quad (3.22)$$

$(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^t, i = 1, 2, 3$ les vecteurs propres de la matrice A^t associés à ses valeurs propres $\lambda_i, i = 1, 2, 3$

En multipliant les équations du système (3.22) par x_{i1}, x_{i2} , et $x_{i3}, i = 1, 2, 3$ respectivement, on obtient

$$\begin{cases} x_{11} \frac{\partial u}{\partial t} - x_{11} a_{11} \Delta u - x_{11} a_{12} \Delta v - x_{11} a_{13} \Delta w = x_{11} f(u, v, w) \\ x_{12} \frac{\partial v}{\partial t} - x_{12} a_{21} \Delta u - x_{12} a_{22} \Delta v - x_{12} a_{23} \Delta w = x_{12} g(u, v, w) \\ x_{13} \frac{\partial w}{\partial t} - x_{13} a_{31} \Delta u - x_{13} a_{32} \Delta v - x_{13} a_{33} \Delta w = x_{13} h(u, v, w) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} x_{21} \frac{\partial u}{\partial t} - x_{21} a_{11} \Delta u - x_{21} a_{12} \Delta v - x_{21} a_{13} \Delta w = x_{21} f(u, v, w) \\ x_{22} \frac{\partial v}{\partial t} - x_{22} a_{21} \Delta u - x_{22} a_{22} \Delta v - x_{22} a_{23} \Delta w = x_{22} g(u, v, w) \\ x_{23} \frac{\partial w}{\partial t} - x_{23} a_{31} \Delta u - x_{23} a_{32} \Delta v - x_{23} a_{33} \Delta w = x_{23} h(u, v, w) \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} x_{31} \frac{\partial u}{\partial t} - x_{31} a_{11} \Delta u - x_{31} a_{12} \Delta v - x_{31} a_{13} \Delta w = x_{31} f(u, v, w) \\ x_{32} \frac{\partial v}{\partial t} - x_{32} a_{21} \Delta u - x_{32} a_{22} \Delta v - x_{32} a_{23} \Delta w = x_{32} g(u, v, w) \\ x_{33} \frac{\partial w}{\partial t} - x_{33} a_{31} \Delta u - x_{33} a_{32} \Delta v - x_{33} a_{33} \Delta w = x_{33} h(u, v, w) \end{cases} \quad (3.25)$$

Puis en additionnant les équations (3.23), (3.24) et (3.25), on obtient

$$\frac{\partial (x_{11}u + x_{12}v + x_{13}w)}{\partial t} - p_{11} \Delta u - p_{12} \Delta v - p_{13} \Delta w = x_{11}f + x_{12}g + x_{13}h$$

où

$$\begin{cases} p_{11} = x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + x_{13}a_{31} \\ p_{12} = x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + x_{13}a_{32} \\ p_{13} = x_{11}a_{13} + x_{12}a_{23} + x_{13}a_{33} \end{cases}$$

$$\frac{\partial (x_{21}u + x_{22}v + x_{23}w)}{\partial t} - p_{21} \Delta u - p_{22} \Delta v - p_{23} \Delta w = x_{21}f + x_{22}g + x_{23}h$$

où

$$\begin{cases} p_{21} = x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} + x_{23}a_{31} \\ p_{22} = x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} + x_{23}a_{32} \\ p_{23} = x_{21}a_{13} + x_{22}a_{23} + x_{23}a_{33} \end{cases}$$

$$\frac{\partial (x_{31}u + x_{32}v + x_{33}w)}{\partial t} - p_{31} \Delta u - p_{32} \Delta v - p_{33} \Delta w = x_{31}f + x_{32}g + x_{33}h$$

où

$$\begin{cases} p_{31} = x_{31}a_{11} + x_{32}a_{21} + x_{33}a_{31} \\ p_{32} = x_{31}a_{12} + x_{32}a_{22} + x_{33}a_{32} \\ p_{33} = x_{31}a_{13} + x_{32}a_{23} + x_{33}a_{33} \end{cases}$$

Posons

$$U = x_{11}u + x_{12}v + x_{13}w, \quad V = x_{21}u + x_{22}v + x_{23}w, \quad W = x_{31}u + x_{32}v + x_{33}w$$

d'autre part, on a

$$\begin{cases} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + x_{13}a_{31} = \lambda_1 x_{11} \\ x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + x_{13}a_{32} = \lambda_1 x_{12} \\ x_{11}a_{13} + x_{12}a_{23} + x_{13}a_{33} = \lambda_1 x_{13} \\ x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} + x_{23}a_{31} = \lambda_2 x_{21} \\ x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} + x_{23}a_{32} = \lambda_2 x_{22} \\ x_{21}a_{13} + x_{22}a_{23} + x_{23}a_{33} = \lambda_2 x_{23} \\ x_{31}a_{11} + x_{32}a_{21} + x_{33}a_{31} = \lambda_3 x_{31} \\ x_{31}a_{12} + x_{32}a_{22} + x_{33}a_{32} = \lambda_3 x_{32} \\ x_{31}a_{13} + x_{32}a_{23} + x_{33}a_{33} = \lambda_3 x_{33} \end{cases}$$

on trouve le système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion diagonale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \lambda_1 \Delta U = F_1 \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda_2 \Delta V = F_2 \\ \frac{\partial W}{\partial t} - \lambda_3 \Delta W = F_3 \end{cases} \quad (3.26)$$

où

$$\begin{cases} F_1 = x_{11}f + x_{12}g + x_{13}h \\ F_2 = x_{21}f + x_{22}g + x_{23}h \\ F_3 = x_{31}f + x_{32}g + x_{33}h \end{cases}$$

le système de réaction diffusion (3.26) est équivalent au système de réaction diffusion (3.22)

3.7 Existence de solutions

Dans cette partie, nous établissons l'existence locale et globale de solutions utilisant le système diagonalisé dans (3.18), pour les détaillées voir [47-32], car elles sont similaires.

3.7.1 Existence locale

Tout d'abord, nous définissons les normes

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \text{ dans } L^p(\Omega)$$

$$\|u\|_{\infty} = \text{ess sup } |u(x)| \text{ dans } L^{\infty}(\Omega)$$

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \max |u(x)| \text{ dans } \mathcal{C}(\bar{\Omega})$$

Le système diagonal de (3.18) équivaut à (3.1) dans la région invariante donnée en (3.8) - (3.9). En considérant le système équivalent, nous pouvons maintenant établir l'existence locale et l'unicité des solutions pour le système d'origine (3.1) avec les données initiales sur $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ou $L^p(\Omega)$, $p \in (1, +\infty)$, utilisant la théorie de l'existence classique (basic existence theory) pour les équations différentielles semi-linéaires abstraites, voir [10]. Il s'ensuit simplement que les solutions sont classiques sur $(0, T_{\max})$, avec T_{\max} désigne l'explosion éventuelle en temps fini dans $L^{\infty}(\Omega)$. La solution locale est globalement continué par des estimations a priori.

3.7.2 Existence globale

Il est bien connu que pour prouver l'existence globale de solutions à un système de réaction diffusion, voir [10-03], il suffit d'obtenir une estimation uniforme du terme de réaction associé sur $[0, T_{\max})$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$. Notre objectif est de construire des fonctionnelles polynomiales de Lyapunov nous permettant d'obtenir des composants bornées sur L^p qui mène à l'existence globale. Puisque les termes de la réaction sont continues et différentiable sur \mathbb{R}_+^m , ensuite, pour toute donnée initiale sur $C(\bar{\Omega})$, il est facile de vérifier directement la continuité lipschitzienne sur des sous-ensembles bornés du domaine d'une puissance fractionnaire de l'opérateur

$$D = -\text{diag}(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta, \dots, \lambda_m \Delta) \quad (3.27)$$

L'hypothèse (3.11) implique que D est un opérateur fortement elliptique au sens de Petrowski, voir Friedman [01]. Définissons maintenant

$$K_l^r = K_{r-1}^{r-1} K_l^{r-1} - [H_l^{r-1}]^2, \quad r = 3, \dots, l \quad (3.28)$$

où

$$H_l^r = \det((a_{\ell,k})_{\ell \neq l, \dots, r+1, k \neq \ell-1, \dots, r}) \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det[k])^{2(r-k-2)}, \quad r = 3, \dots, l-1$$

$$K_l^2 = \lambda_1 \lambda_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)^2} \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} \left[\prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2 \right]$$

3.8 Existence globale d'un système symétrique à m composants de type spécial

et

$$H_l^2 = \lambda_1 \sqrt{\lambda_2 \lambda_l} \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{l-1} \theta_k^{(p_k+2)^2 + (p_k+1)^2} \prod_{k=l}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} [\theta_1^2 A_{21} - A_{12} A_{1l}]$$

Le terme $\det((a_{\ell,k})_{\ell \neq l, \dots, r+1, k \neq \ell-1, \dots, r})$ denotes the determinant of the r square symmetric matrix obtained from $(a_{l,k})_{1 \leq l, k \leq m}$ en enlevant le $(r+1)th, (r+2)th, \dots, lth$ les rangées et les $rth, (r+1)th, \dots, (l-1)th$ colonnes où $\det[1], \dots, \det[m]$ sont les mineurs de la matrice $(a_{l,k})_{1 \leq l, k \leq m}$. Les éléments de la matrice sont

$$a_{\ell k} = \frac{\lambda_\ell + \lambda_k}{2} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(\ell-1)}^{p_{(\ell-1)}^2} \theta_\ell^{(p_\ell+1)^2} \dots \theta_{(k-1)}^{(p_{(k-1)}+1)^2} \theta_k^{(p_k+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \quad (3.29)$$

Notez que $A_{\ell k} = \frac{\lambda_\ell + \lambda_k}{2\sqrt{\lambda_\ell \lambda_k}}$ pour tous $\ell, k = 1, \dots, m$ et $\theta_\ell; \ell = 1, \dots, (m-1)$ sont des constantes positives.

Théorème 3.1.

Supposons que les fonctions $F_\ell, \ell = 1, \dots, m$ sont des fonctions polynomiales croissances et satisfaire la condition (3.17) (2.6) pour certaines constantes positives $D_\ell, \ell = 1, \dots, m$ suffisamment grand. Soit $(w_1(t, \cdot), w_2(t, \cdot), \dots, w_m(t, \cdot))$ une solution de (3.18) et

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_m(t, x)) dx \quad (3.30)$$

où

$$H_{p_m}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \dots \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} w_1^{p_1} w_2^{p_2 - p_1} \dots w_m^{p_m - p_{m-1}}$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_k}^{p_\ell} = \frac{p_k!}{p_\ell(p_k - p_\ell)!}$

Supposons également que la condition suivante est satisfait

$$K_l^l > 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (3.31)$$

Il s'ensuit que la fonction L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*], T^* < T_{\max}$

Corollaire 3.1.

Sous les hypothèses du théorème 3.1, toutes les solutions de (3.18) avec des données initiales positives dans $L^\infty(\Omega)$ sont dans $L^\infty(0, T^*; L^p(\Omega))$ pour certains $p \geq 1$.

3.8 Existence globale d'un système symétrique à m composants de type spécial

Considérons un système à m composant avec la matrice de diffusion de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_1 & a_1 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ . & . & \dots & b_1 \\ b_1 & \dots & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

3.8 Existence globale d'un système symétrique à m composants de type spécial

Comme nous l'avons vu précédemment, le système possède 2^m régions invariantes. La matrice $A = A^T$ a seulement 2 valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = a_1 - b_1$ avec une multiplicité algébrique $m - 1$ et $\lambda_2 = a_1 + (m - 1)b_1$ avec une multiplicité algébrique de 1. Les vecteurs propres correspondant à λ_1 sont

$$\begin{cases} v_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0)^T \\ v_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)^T \\ \vdots \\ v_{m-1} = (-1, 0, 0, \dots, 1, 0)^T \end{cases}$$

où comme le vecteur propre correspondant à λ_2 est

$$v_m = (1, 1, \dots, 1)^T$$

Les m vecteurs propres sont disposés selon (3.10) pour former la matrice de diagonalisation P . Notre condition pour diagonaliser le système et établir l'existence locale et globale de solutions est simplement que les valeurs propres soient positives, ce qui se réduit simplement à

$$a_1 > b_1 \quad \text{et} \quad a_1 + (m - 1)b_1 > 0$$

Le système (3.1) avec la matrice de diffusion (3.32) est équivalent au système diagonalisé

$$\begin{cases} \frac{\partial w_\ell}{\partial t} - (a_1 - b_1) \Delta w_\ell = F_\ell(w_1, w_2, \dots, w_m), & \text{pour } \ell = 1, \dots, m - 1 \\ \frac{\partial w_m}{\partial t} - (a_1 + (m - 1)b_1) \Delta w_m = F_m(w_1, w_2, \dots, w_m) & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \end{cases}$$

Chapitre 4

Existence globale d'un système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion pleine 3×3

Contents

4.1	Introduction	34
4.2	système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion pleine 3×3	34
4.2.1	Équation de polynôme caractéristique	34
4.2.2	Discussion sur la positivité des valeurs propres de la matrice	36
4.3	Conditions de diagonalisabilité et positivité des valeurs propres	39
4.4	Cas des systèmes spéciaux	42
4.5	Application numérique	46

4.1 Introduction

Dans cet chapitre, nous examinons un cas particulier du système proposé (3.1) avec $m = 3$. L'objectif est de déterminer les conditions nécessaires pour garantir la positivité des valeurs propres. Nous montrerons également que des travaux précédents présentés dans l'introduction sont en fait des cas particuliers de notre système proposé.

4.2 système de réaction diffusion d'une matrice de diffusion pleine 3×3

on considère le système de réaction diffusion (3.1) dans le cas $m = 3$ avec une matrice pleine 3×3

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{11}\Delta u + a_{12}\Delta v + a_{13}\Delta w + f(u, v, w) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a_{21}\Delta u + a_{22}\Delta v + a_{23}\Delta w + g(u, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a_{31}\Delta u + a_{32}\Delta v + a_{33}\Delta w + h(u, v, w) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec la matrice du diffusion pleine 3×3 , de coefficients a_{ij} réels et a_{ii} sont strictement positives

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

4.2.1 Équation de polynôme caractéristique

L'équation caractéristique de la matrice de diffusion du système (4.1) est donnée par

$$-\lambda^3 + \text{tr} A \lambda^2 + (a_{12} + a_{13} + a_{23} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33}) \lambda + \det A = 0 \quad (4.3)$$

Posons

$$\begin{cases} a = -\frac{\text{tr} A}{3} \\ b = \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}) \\ c = -\det A \end{cases}$$

on obtient la forme suivante de l'équation (4.3)

$$\lambda^3 + 3a\lambda^2 + 3b\lambda + c = 0 \quad (4.4)$$

Par le changement $\lambda = w - a$ et une substitution dans (4.4), on trouve

$$\begin{aligned} (w - a)^3 + 3a(w - a)^2 + 3b(w - a) + c &= 0 \\ (w - a)^3 &= w^3 + a^2w - 2aw^2 - aw^2 - a^3 + 2a^2w \\ w^3 - 3(a^2 - b)w + 2a^3 - 3ab + c &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec

$$\alpha = a^2 - b, \quad \beta = 2a^3 - 3ab + c$$

L'équation (4.5) prend la forme d'une équation cubique suivante

$$w^3 - 3\alpha w + \beta = 0$$

Puisque l'équation caractéristique ici est cubique, nous renvoyons à [41], qui a étudié les racines d'une équation cubique générale.

Le théorème suivant est un résumé des résultats pertinents de ces études.

Théorème 4.1.

Le polynôme

$$\lambda^3 + 3a\lambda^2 + 3b\lambda + c = 0 \tag{4.6}$$

où $c \neq 0$, a toutes les racines réelles si et seulement si

$$\begin{cases} \beta = 0 & \text{et } \alpha \geq 0 \\ & \text{ou} \\ 0 < |\beta| \leq 2\sqrt{\alpha^3} \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b \\ \beta = 2a^3 - 3ab + c \end{cases} \tag{4.8}$$

Soit la fonction polynomiale P définie par

$$P(w) = w^3 - 3\alpha w + \beta = 0 \tag{4.9}$$

nous avons

$$\frac{dP(w)}{dw} = 3w^2 - 3\alpha w$$

lorsqu'il est mis à zéro, nous donne

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{\alpha} \\ w_2 = -\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

Nous observons que $P(w)$ n'aura que trois racines réelles si

$$P(\sqrt{\alpha}) \leq 0 \text{ et } P(-\sqrt{\alpha}) \geq 0$$

La substitution produit $|\beta| \leq 2\alpha^{\frac{3}{2}}$. Ceci conclut la deuxième partie de (4.7).

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$	
$\frac{dP(x)}{dx}$	+	0	-	0	+
$P(x)$					

TABLE 4.1 – Caractéristiques de $P(x)$ pour différentes valeurs de x .

Le comportement de $P(w)$ est résumé dans le tableau 4.1.

4.2.2 Discussion sur la positivité des valeurs propres de la matrice

Nous allons diviser la discussion en deux parties.
Considérons d'abord le cas où $\beta = 0$, (4.9) conduit à

$$P(w) = (w^2 - 3\alpha)w = 0$$

Le polynôme a donc trois racines réelles

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = \sqrt{3\alpha} \\ w_3 = -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

Si $\alpha \geq 0$. Ceci établit la première condition de (4.7).

En ce qui concerne le second cas, $\beta \neq 0$, puisque les deux α et β sont réels, le polynôme aura soit trois racines réelles, soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Examinons les caractéristiques générales de $P(w)$.

Corollaire 4.1.

Si $\beta = 0$ et $\alpha \geq 0$, alors les racines de (4.6) sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3\alpha} - a \\ \lambda_2 = -a \\ \lambda_3 = \sqrt{3\alpha} - a \end{cases} \quad (4.10)$$

De même, si $0 < |\beta| \leq 2\sqrt{\alpha^3}$, les racines sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) - a \\ \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \sin \phi - a \\ \lambda_3 = 2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - a \end{cases} \quad (4.11)$$

où $-\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$ et

$$\phi = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\beta}{2\alpha^3}\right) \quad (4.12)$$

Démonstration.

Nous aborderons les deux cas séparément

Premier cas : $\beta = 0$ et $\alpha \geq 0$. Les racines de $P(w)$ sont $w = 0$ ou $w = \pm\sqrt{3\alpha}$. Nous utilisons

$$w = \lambda + a \quad (4.13)$$

obtenir

$$\begin{cases} \lambda_1 + a = 0 \\ \lambda_2 + a = -\sqrt{3\alpha} \\ \lambda_3 + a = \sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

Par conséquent, les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -\sqrt{3\alpha} - a \\ \lambda_3 = \sqrt{3\alpha} - a \end{cases}$$

Deuxième cas : pour le cas $0 < |\beta| \leq 2\sqrt{\alpha^3}$, soit

$$\Gamma = \frac{w}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{et} \quad \Upsilon = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}} \quad (4.14)$$

La substitution dans l'équation $P(w) = 0$ donne

$$J(\Gamma) = \Gamma^3 - 3\Gamma + \Upsilon = 0 \quad (4.15)$$

Nous pouvons écrire

$$|\beta| = |\Upsilon| \sqrt{\alpha^3} \leq 2\sqrt{\alpha^3}$$

conduisant aux inégalités

$$0 < \Upsilon \leq 2$$

Afin de trouver les valeurs propres pour ce cas, nous observons le comportement de la courbe $J(\Gamma)$ en examinant sa dérivée

$$J'(\Gamma) = 3\Gamma^2 - 3$$

Le polynôme $J(\Gamma)$ à deux pics à $\Gamma = \pm 1$. Nous savons d'après le théorème 4.1 que $J(-1) \geq 0$, $J(1) \leq 0$, conduisant aux limites $-2 \leq \Upsilon \leq 2$. Pour $\Upsilon = -2$, les trois racines réelles de $J(\Gamma)$ sont -1 racine double et 2 , alors que pour $\Upsilon = 2$, les racines sont -2 et 1 racine double. La courbe $J(\Gamma)$ est représentée sur la figure 4.1 pour différentes valeurs de Υ dans l'intervalle $[-2, 2]$. En évaluant le polynôme à son racines, nous observons qu'il peut être caractérisé par le tableau 4.2. Il est donc évident que les trois racines réelles se situent dans l'intervalle $[-2, 2]$ et que, d'après la figure 4.1, il est évident que toutes les racines de $J(\Gamma)$ sont dans l'intervalle $[-2, 2]$. Par conséquent, nous pouvons choisir

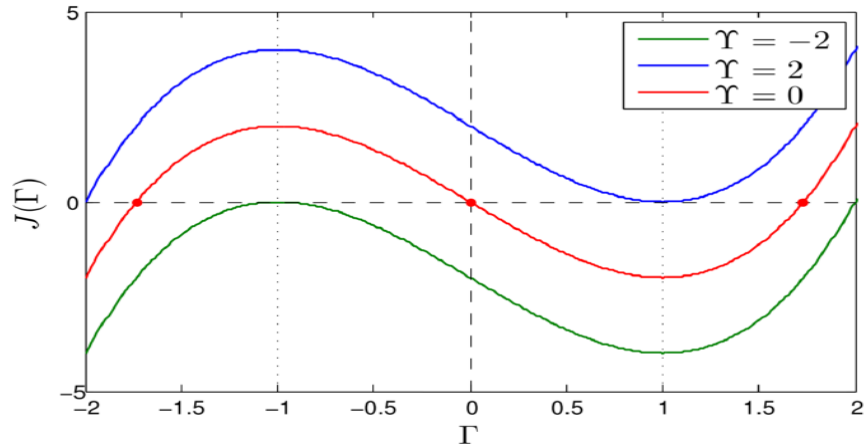
$$\Gamma = 2 \sin \phi$$

une Substitution dans (4.15) donne

$$4 \sin^3 \phi - 3 \sin \phi + \frac{1}{2} \Upsilon = 0$$

Γ	-2	-1	1	2
$J(\Gamma)$	$\Upsilon - 2$	$\Upsilon + 2$	$\Upsilon - 2$	$\Upsilon + 2$
Sign de $J(\Gamma)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Tableau 4.2 : Caractéristiques de $J(\Gamma)$ pour différentes valeurs de Υ .

FIGURE 4.1 – Le polynôme $J(\Gamma)$ pour différentes valeurs de Υ .

Rappel de l'identité trigonométrique

$$4 \sin^3 \phi - 3 \sin \phi + \sin 3\phi = 0$$

et donc nous avons

$$\Upsilon = 2 \sin 3\phi$$

menant à

$$\phi = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{\Upsilon}{2} \right)$$

avec

$$-\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$$

Les trois racines réelles de $J(\Gamma)$ peuvent maintenant être formulées comme suit :

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) & -2 \leq \Gamma_1 \leq -1 \\ \Gamma_2 = 2 \sin \phi & -1 \leq \Gamma_2 \leq 1 \\ \Gamma_3 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) & 1 \leq \Gamma_3 \leq 2 \end{cases} \quad (4.16)$$

En utilisant (4.13), nous obtenons les valeurs propres comme suit

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) - a \\ \lambda_2 = 2 \sin \phi - a \\ \lambda_3 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) - a \end{cases} \quad (4.17)$$

□

Nous notons que le premier cas du théorème 4.1 et du corollaire 4.1 est en fait un cas spécial du second cas dans lequel le paramètre $\beta = 0$ donne $\phi = 0$, et donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3\alpha} - a \\ \lambda_2 = -a \\ \lambda_3 = \sqrt{3\alpha} - a \end{cases}$$

Lemme 4.1.

Une matrice $n \times n$ carrée non diagonale A qui a une seule valeur propre λ avec une multiplicité algébrique de n est non diagonalisable

Démonstration.

Soit A une matrice $n \times n$ non diagonale qui a une seule valeur propre λ avec une multiplicité algébrique de n , et soit

$$B = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$$

En supposant que A soit diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PBP^{-1} = \lambda PIP^{-1} = B$$

Ceci est une contradiction, car A est supposé non diagonal

□

4.3 Conditions de diagonalisabilité et positivité des valeurs propres

Maintenant, en utilisant le théorème 4.1 et le corollaire 4.1, pour déterminer les conditions exactes de la positivité des valeurs propres pour le système (4.1) à 3 composants.

L'équation caractéristique de la matrice A dans (4.2) est donnée par

$$-\lambda^3 + \text{tr} A \lambda^2 + (a_{12} + a_{13} + a_{23} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33}) \lambda + \det A = 0$$

Ceci peut être simplifié sous la même forme que dans (4.3) avec

$$\begin{cases} a = -\frac{\text{tr} A}{3} \\ b = \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}) \\ c = -\det A \end{cases} \quad (4.18)$$

Nous passons maintenant à la définition des conditions de diagonalisabilité du système 3×3 représenté par la matrice A dans (4.2).

Proposition 4.1.

La matrice A est diagonalisable à valeurs propres positives si :

$C_1)$ $\beta = 0, \alpha > 0$ et $\sqrt{3\alpha} + a < 0$, or

$C_2)$ $0 < |\beta| < 2\sqrt{\alpha^3}$ et $2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) + a < 0$, or

$C_3)$ $0 < \beta = 2\sqrt{\alpha^3}, 2\sqrt{\alpha} + a < 0$ et $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $a_{ii} - \lambda_2 \neq 0, \forall j, k$ tel que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, tel que $\det A_{ij}^1 = \det A_{ijk}^2$ or

$C_4)$ $0 < -\beta = 2\sqrt{\alpha^3}, \sqrt{\alpha} + a < 0$ et $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $a_{ii} - \lambda_2 \neq 0, \forall j, k$ tel que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ tel que $\det A_{ij}^1 = \det A_{ijk}^2 = 0$ tel que

$$A_{ij}^1 = \begin{pmatrix} a_{ii} - \lambda_2 & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} - \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{ijk}^2 = \begin{pmatrix} a_{ii} - \lambda_2 & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jk} \end{pmatrix}$$

avec $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et λ_2 et λ_2 avec une multiplicité algébrique de 2.

Démonstration. Examinons d'abord le cas où $\beta = 0$ et $\alpha \geq 0$. Les valeurs propres sont données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3\alpha} - a \\ \lambda_2 = -a \\ \lambda_3 = \sqrt{3\alpha} - a \end{cases}$$

Donc, pour $\alpha > 0$, les trois valeurs propres sont distinctes de $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, et donc pour prouver la positivité des valeurs propres, il suffit d'établir que

$$\sqrt{3\alpha} + a < 0$$

Par contre, pour $\alpha = \beta = 0$, les valeurs propres se réduisent à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -a$. Il est bien connu que les valeurs propres d'une matrice 3×3 auront au plus 2 vecteurs propres distincts, voir le **lemme 4.1**.

Par conséquent, la matrice ne sera pas diagonalisable dans ce cas.

Le second cas est $0 < |\beta| \leq 2\sqrt{\alpha^3}$. La Figure 4.1 montre que les valeurs propres réelles sont distinctes pour $|\Upsilon| < 2$, ce qui rend la matrice diagonalisable. Quant à $|\Upsilon| = 2$, ou de manière équivalente $|\beta| = 2\sqrt{\alpha^3}$, nous devons le scinder en deux cas distincts :

Pour $\beta = 2\sqrt{\alpha^3}$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2\sqrt{\alpha} - a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\alpha} - a \end{cases}$$

Clairement, les valeurs propres sont toutes positives tant que $2\sqrt{\alpha} + a < 0$. Nous devons encore établir les conditions pour la distinction des vecteurs propres. La valeur propre répétée $\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\alpha} - a$ doit être associée à deux vecteurs propres distincts, à savoir le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

doit être égal à 1. On commence par supposer que $a_{11} - \lambda_2 = a_{22} - \lambda_2 = a_{33} - \lambda_2$. Dans ce cas, la matrice B devient

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

qui peut facilement être démontré avoir le rang 1 si

$$a_{21} = a_{23} = a_{12} = a_{13} = 0$$

Si cette condition est satisfaite, donc, la matrice devient de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

qui a des valeurs propres identiques. C'est évidemment une contradiction. ce qui signifie que ce cas est impossible. Par conséquent, nous pouvons affirmer que

$$\exists i \in \{1, 2, 3\}, a_{ii} - \lambda_2 \neq 0$$

Il apparaît que la valeur de i n'a aucun effet sur la preuve, et nous choisirons donc $i = 1$. Nous subdivisons ce cas en 4 parties :

Cas $a_{21} \neq 0$ et $a_{31} \neq 0$: Une simple manipulation de B utilisant des opérations élémentaires donne

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22} - \lambda_2) - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11} - \lambda_2} & a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11} - \lambda_2} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} & (a_{33} - \lambda_2) - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} \end{pmatrix}$$

qui aura un rang 1, si

$$\begin{cases} (a_{22} - \lambda_2) - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11} - \lambda_2} = 0 \\ a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11} - \lambda_2} = 0 \\ a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} = 0 \\ (a_{33} - \lambda_2) - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} = 0 \end{cases}$$

Cela peut facilement être réorganisé sous la forme

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)(a_{22} - \lambda_2) - a_{21}a_{12} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)(a_{33} - \lambda_2) - a_{13}a_{31} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{23} - a_{13}a_{21} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{32} - a_{12}a_{31} = 0 \end{cases}$$

qui est satisfait selon la condition (C_3) .

Cas $a_{21} = 0$ et $a_{31} = 0$: Notre matrice se simplifie à

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Cela donne les conditions

$$\begin{cases} a_{22} - \lambda_2 = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{33} - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

qui, encore une fois, est satisfaite par la condition (C_3) .

Cas $a_{21} = 0$ et $a_{31} \neq 0$: la matrice B devient

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Élimination des rendements en a_{31}

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} & (a_{33} - \lambda_2) - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11} - \lambda_2} \end{pmatrix}$$

qui a un rang si

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)(a_{22} - \lambda_2) = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{23} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{32} - a_{21}a_{31} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)(a_{33} - \lambda_2) - a_{13}a_{31} = 0 \end{cases}$$

Une fois de plus, ceci est satisfait par la condition (C_3) .

Cas $a_{21} \neq 0$ et $a_{31} = 0$: la matrice B devient

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Élimination des rendements en élément a_{21}

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22} - \lambda_2) - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11} - \lambda_2} & a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11} - \lambda_2} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et donc les conditions pour un seul rang sont

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)(a_{22} - \lambda_2) - a_{21}a_{12} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{23} - a_{13}a_{21} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)a_{32} = 0 \\ (a_{11} - \lambda_2)(a_{33} - \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

encore, ces conditions sont satisfaites sous réserve de la condition (C_3) . Pour $-\beta = 2\sqrt{\alpha^3}$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt{\alpha} - a \\ \lambda_3 = 2\sqrt{\alpha} - a \end{cases}$$

Dans ce cas, il est garanti que les valeurs propres sont positives sous la condition $\sqrt{\alpha} + a < 0$. Afin d'établir les conditions pour avoir trois vecteurs propres distincts, on peut suivre la même procédure que dans le cas précédent. Les résultats sont similaires et sont satisfaits par la condition (C_4) . Enfin, la preuve peut être répétée pour $i \in \{2, 3\}$ de manière triviale. \square

4.4 Cas des systèmes spéciaux

Examinons maintenant quelques cas particuliers trouvés dans la littérature et voyons comment la méthode proposée présente des conditions plus faibles par rapport aux résultats précédents.

Cas 1. Considérons le cas particulier de [43] où le système de réaction diffusion est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_1 \Delta u + b_1 \Delta v + f(u, v, w) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_1 \Delta u + a_1 \Delta v + b_1 \Delta w + g(u, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c_1 \Delta v + a_1 \Delta w + h(u, v, w) \end{cases} \quad (4.19)$$

où la matrice du diffusion est prend la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

L'objet de l'article [43], est la construction de régions invariantes dans lesquelles nous établissons l'existence globale de solutions pour les systèmes de réaction-diffusion avec une

matrice tridiagonale (4.20) et des conditions aux limites non homogènes. Le terme de réaction non linéaire a été supposé être de croissance polynomiale. Les a , b et c sont des constantes positives satisfaisant la condition $b + c \leq \sqrt{2}a$ qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion est défini positif.

Dans ce cas, $\beta = 0$ et $\alpha > 0$. Nous avons

$$\begin{cases} a = -a_1 \\ b = a_1^2 - \frac{2}{3}b_1c_1 \\ c = 2b_1c_1a_1 - a_1^3 \end{cases}$$

On peut vérifier que ce système se situe dans le cas $\beta = 0$ et $\alpha > 0$ en utilisant (4,5) (4.8) pour obtenir

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}b_1c_1 > 0 \\ \text{et} \\ \beta = 2(-a_1)^3 - 3(-a_1)\left(a_1^2 - \frac{2}{3}b_1c_1\right) + (2b_1c_1a_1 - a_1^3) = 0 \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3\alpha} - a = a_1 - \sqrt{2b_1c_1} > 0 \\ \lambda_2 = -a = a_1 > 0 \\ \lambda_3 = \sqrt{3\alpha} - a = a_1 + \sqrt{2b_1c_1} > 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Cela réduit à une seule condition

$$0 < b_1c_1 < \frac{a_1^2}{2} \quad (4.22)$$

La condition de parabolicité considérée dans [49] et donnée par

$$b_1 + c_1 < \sqrt{2}a_1$$

qui peut être réécrit sous la forme

$$\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)^2 < \frac{a_1^2}{2}$$

Une simple comparaison des deux conditions montre que

$$b_1c_1 \leq \left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)^2 < \frac{a_1^2}{2}$$

Il est clair que la nouvelle condition est plus faible.

Cas 2. Nous considérons le cas particulier de [44] où le système de réaction diffusion est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_1\Delta u + b_1\Delta v + f(u, v, w) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_1\Delta u + a_2\Delta v + b_2\Delta w + g(u, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c_2\Delta v + a_1\Delta w + h(u, v, w) \end{cases} \quad (4.23)$$

où la matrice du diffusion est prend la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

L'objectif de l'étude [49] est de prouver l'existence globale de solutions pour les systèmes de réaction-diffusion à matrice tridiagonale (4.24) de termes de diffusion a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) et $(i, j) \neq (1, 3), (3, 1)$, les termes sont supposés des constantes positives avec $a_{11} = a_{33}$ et $(a_{12} + a_{21})^2 + (a_{23} + a_{32})^2 < 4a_{11}a_{22}$, qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion est défini positif.

On a [37]

$$\begin{cases} a = -\frac{2a_1+a_2}{3} \\ b = \frac{1}{3}(a_1^2 + 2a_1a_2 - b_1c_1 - b_2c_2) \\ c = -a_1(a_1a_2 - b_1c_1 - b_2c_2) \end{cases}$$

Nous pouvons montrer que ce système est en fait dans l'état actuel en utilisant (4.8), ce qui donne [37]

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b = \frac{1}{9}((a_1 - a_2)^2 + 3b_2c_2) > 0 \\ \text{et} \\ \beta = \frac{1}{27}(a_1 - a_2)(2(a_1 - a_2)^2 + 9b_1c_1 + 9b_2c_2) \end{cases}$$

Nous avons deux cas distincts. D'abord, si $a_1 = a_2$, alors

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(b_1c_1 + b_2c_2) > 0 \\ \text{et} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, les valeurs propres peuvent être données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_1 - \sqrt{b_1c_1 + b_2c_2} \\ \lambda_2 = a_1 \\ \lambda_3 = a_1 + \sqrt{b_1c_1 + b_2c_2} \end{cases}$$

Puisque les valeurs propres doivent être réelles et positives, nos conditions se réduisent à

$$a_1 - \sqrt{b_1c_1 + b_2c_2} > 0 \quad \text{et} \quad b_1c_1 + b_2c_2 > 0$$

Alternativement, si $a_1 \neq a_2$, on note que la condition $0 < |\beta| < 2\sqrt{\alpha^3}$ qui est satisfait en tant que

$$4\alpha^3 - \beta^2 = \frac{1}{27}(b_1c_1 + b_2c_2)^2((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2) > 0$$

Rappeler que

$$\Upsilon = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}} = \frac{2(a_1 - a_2)^3 + (a_1 - a_2)(9b_1c_1 + 9b_2c_2)}{\sqrt{((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2)^3}}$$

Puisque $\Upsilon = 2 \sin 3\phi$, on se retrouve avec

$$\sin 3\phi = \frac{2(a_1 - a_2)^3 + (a_1 - a_2)(9b_1c_1 + 9b_2c_2)}{2\sqrt{((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2)^3}}$$

$$= \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2\right)^3}} \left[3 - 4 \left(\frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2\right)^3}} \right)^2 \right]$$

qui en utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin 3\phi = \sin \phi (3 - 4 \sin^2 \phi)$$

ce qui donne

$$\sin \phi = \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2\right)^3}}$$

En utilisant $\sin \phi$, nous pouvons déterminer les valeurs propres de la matrice. Tout d'abord, nous avons [37]

$$\lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \sin \phi - a = a_1$$

Aussi, en observant que

$$\sin 3\phi = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) - 3 \right)$$

nous pouvons écrire

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) = \frac{a_1 - a_2 + 3\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2\right)}}{4\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2\right)}}$$

Cela nous permet de formuler λ_1 comme

$$\lambda_1 = -2\sqrt{\alpha} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \phi \right) - a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2\right)}$$

De même, comme

$$\sin 3\phi = \sin (\pi - 3\phi) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) \left(3 - 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) \right)$$

nous trouvons que

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) = \frac{a_2 - a_1 + 3\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2\right)}}{4\sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 3b_1c_1 + 3b_2c_2\right)}}$$

Et ainsi

$$\lambda_3 = 2\sqrt{\alpha} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right) - a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) + \frac{1}{2} \sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2\right)}$$

Quant à la diagonalisabilité de notre matrice, il suffit que la plus petite valeur propre soit positive. C'est

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\left((a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2\right)} > 0$$

qui peut être simplifié à

$$(a_1 + a_2)^2 > (a_1 - a_2)^2 + 4b_1c_1 + 4b_2c_2 > 0$$

En gardant à l'esprit les éléments de A sont positifs, cela peut être réduit à

$$b_1c_1 + b_2c_2 < a_1a_2$$

Ceci est évidemment une condition plus faible comparée à celle de [44], qui est

$$\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2 + c_2}{2}\right)^2 < a_1a_2$$

comme

$$b_1c_1 + b_2c_2 \leq \left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2 + c_2}{2}\right)^2 < a_1a_2$$

Notez également qu'en utilisant notre méthode, nous avons pu dériver des expressions analytiques pour les valeurs propres. Ceci n'a pas été réalisé auparavant par les auteurs de [44].

4.5 Application numérique

Considérons le modèle de réaction chimique à trois composantes de diffusion croisées proposé dans [57]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_{11}\nabla^2 u + \operatorname{div}(D_{UW}\nabla w) - k_1u + k_2v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_{22}\nabla^2 v + \operatorname{div}(D_{VW}\nabla w) + k_1u - k_2v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{WU}\nabla u) + \operatorname{div}(D_{WV}\nabla v) + D_{33}\nabla^2 w \end{cases} \quad (4.25)$$

où u , v et w désignent les concentrations de trois substances chimiques, D_{ij} désigne la constante de diffusivité de la substance i en raison de la distribution spatiale de la substance j , et

$$\begin{cases} D_{UW} = D_{13} \frac{u}{u+K_u} \\ D_{VW} = D_{23} \frac{v}{v+K_v} \\ D_{WU} = 0 \\ D_{WV} = D_{32} \frac{w}{w+K_w} \end{cases}$$

sont les facteurs de diffusion croisée. La dépendance de ces variables sur les concentrations de nos substances permet d'introduire une variation temporelle corrélée, ce qui rend généralement le modèle plus réaliste. Cependant, pour simplifier, considérons le cas où $K_u = K_v = K_w = 0$ conduisant au système réduit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_{11}\Delta u + D_{13}\Delta w - k_1u + k_2v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_{22}\Delta v + D_{23}\Delta w + k_1u - k_2v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_{32}\Delta v + D_{33}\Delta w \end{cases} \quad (4.26)$$

avec des termes de diffusion croisée constants. Ce système réduit est représenté sous forme de matrice

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A\Delta U + F$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & D_{13} \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -k_1 u + k_2 v \\ k_1 u - k_2 v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notez que la matrice de diffusion A n'est ni diagonale ni symétrique. Par conséquent, pour que la méthode proposée dans notre étude soit applicable, nous devons d'abord nous assurer que toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement positives. Pour cela, considérons la même matrice de diffusion de [57] donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 1.45 \\ 0 & 2.5 & 27 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Pour cette matrice particulière, nous avons

$$\begin{cases} a = -\frac{\text{tr} A}{3} = -2 \\ b = \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}) = 3.12 \\ c = -\det A = -1.525 \end{cases}$$

menant à

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b = 0.88 \\ \beta = 2a^3 - 3ab + c = 1.195 \\ \phi = \frac{1}{3}ar \sin\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha^3}}\right) = 0.26976 \end{cases}$$

Clairement, la condition (C_2) de la proposition 4.1 est satisfaite comme

$$\begin{cases} 0 < |\beta| = 1.195 < 2\sqrt{\alpha^3} = 1.651 \\ \text{et} \\ 2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) + a = -0.18395 < 0 \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont donc données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) - a = 0.184 \\ \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \sin \phi - a = 2.500 \\ \lambda_3 = 2\sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - a = 3.316 \end{cases}$$

qui sont tous strictement positifs. Par conséquent, cet exemple satisfait notre condition selon la proposition 4.2

Rappelons que les régions invariantes du système proposé défini entre (3.12) -(3.13)

$$\Sigma_{\mathcal{L}, \exists} = \{U_0 \in \mathbb{R}^m : \langle V_z, U_0 \rangle \leq 0 \leq \langle V_l, U_0 \rangle, l \in \mathcal{L}, z \in \exists\}$$

Nous supposons les conditions initiales

$$U_0 = \begin{pmatrix} g_1(x) + 2 \\ g_2(x) + 3 \\ g_3(x) + 4 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

où les fonctions $g_i(x)$ représentent des perturbations aléatoires gaussiennes utilisées pour introduire une non-homogénéité spatiale dans les données initiales. Il résulte des simulations informatiques que

$$\begin{cases} \langle V_1, U_0 \rangle \leq 0 \\ \langle V_2, U_0 \rangle \geq 0 \\ \langle V_3, U_0 \rangle \leq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, afin de diagonaliser le système, nous formons d'abord la matrice P correspondant à cette région invariante particulière.

$$P = (-V_1, V_2, -V_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0.8810 & 0 \\ -0.2893 & -0.4731 & 0.6511 \\ 0.9572 & 0 & 0.7590 \end{pmatrix}$$

qui diagonalise le système en utilisant la transformation de similarité

$$D = P^T A (P^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.184 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.316 \end{pmatrix}$$

Le nouveau système est de la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W + F(W)$$

tel que

$$W = P^T U$$

et

$$F(W) = \begin{pmatrix} 0.13991k_1 & -0.26053k_2 & -0.32838k_1 & 0.32856k_2 & -0.17644k_1 \\ 0.65484k_1 & -1.2194k_2 & -1.537k_1 & 1.5379k_2 & -0.82585k_1 \\ 0.58635k_2 & -0.31487k_1 & 0.78906k_1 & 0.39710k_1 & -0.73945k_2 \end{pmatrix} W$$

Des simulations sur ordinateur ont été effectuées à l'aide de la méthode numérique explicite aux différences finies avec

$$\begin{cases} k_1 = 15 \\ k_2 = 10 \end{cases} \quad (4.30)$$

Les conditions aux limites pour le système ont été supposées nulles. L'évolution temporelle des solutions en (4.26) est illustrée à la **figure 4.2** pour le cas unidimensionnel. Il est facile de voir que les solutions sont stables car elles convergent vers un état stable spatialement homogène constant avec suffisamment de temps.

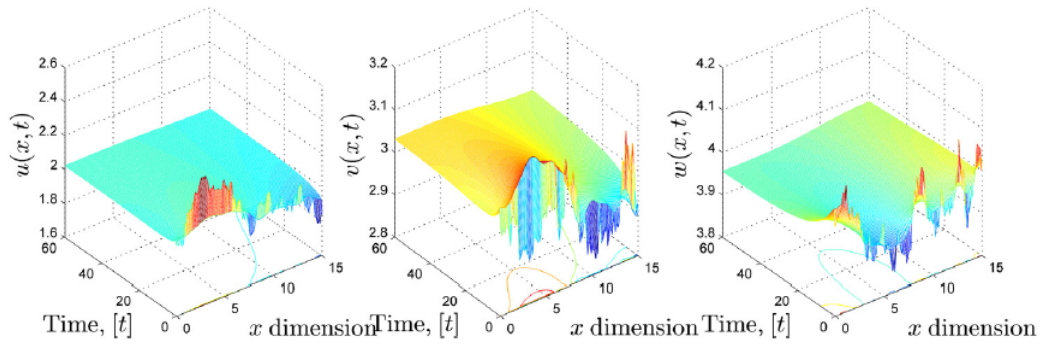


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des solutions pour le système (4.26) dans le cas unidimensionnel soumis à la matrice de diffusion (4.27), aux paramètres (4.30) et aux données initiales (4.28).

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence locale et globale de solutions pour un système de réaction diffusion à m composant générique avec une matrice de diffusion pleine (complète). Nous avons examiné les différences dans la littérature concernant la condition nécessaire à la diagonalisation d'une matrice. Nous avons discuté de la question de savoir si la condition de parabolicité considéré dans les études précédentes est nécessaire pour que le système soit diagonalisable, parce que beaucoup d'études trouvées dans la littératures se réfèrent à la parabolicité d'un système comme étant une condition suffisante, ce pendant, la condition pour la parabolicité d'un certain système ne semble pas être acceptée.

Pour ça, nous avons adopté la condition plus faible stipulant que : un système de réaction diffusion est parabolique au sens de Petroweski si les parties réelles de toutes les valeurs propres de la matrice de diffusion doivent être positives (Proposition 3.2). Une fois la diagonalisation établie, le reste suit les mêmes lignes que [44].

Afin d'illustrer les résultats de notre étude, nous avons considéré deux exemples. Le premier exemple est un système à m composant avec un type spécial de matrice, comme indiqué dans (3.32). Le second cas est plus intéressant car il concerne une matrice de diffusion pleine (complète) 3×3 . Les conditions exactes ont été calculées pour la positivité des valeurs propres et la diagonalisabilité du système. Des exemples numériques ont été utilisés pour confirmer nos résultats.

Comme perspective, je serais intéressée de continuer l'étude de phénomènes de formation de motifs de trois espèces.

Bibliographie

- [01] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J, 1964.
- [02] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, *Kybernetik* 12 (1972), 30-39.
- [03] A. Haraux, M. Kirane, Estimations C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires, 1983, pp. 265–280.
- [04] A. William. H. Adkins Steven Weintraub, *Algebra, an Approach via Module Theory*, Springer Verlag, 1999.
- [05] A.J. Koch and H. Meinhardt, Biological pattern formation from basic mechanisms to complex structures. *Rev. of Modern Phys*, 66 (1994) 1481-1507.
- [06] A.S. Bendhia, M. Lenoir, *Outils élémentaires d'Analyse pour les équations aux dérivées Partielles*, 2004.
- [07] B. L. Niremberg; The development of travelling waves in quadratic and cubic auto catalysis with unigual diffusion rates. *Trans. R. SOC. Londol, Collège de France. Note Math*, 65-129.
- [08] C. Caisheng, Global existence and asymptotic behaviour of solution for a strongly coupled parabolic system, *J. Math. Res. Exp.* 14 (2) (1994) 187–200.
- [09] C. Kuttler, *Reaction diffusion equation with applications*, Sommer semester 2011.
- [10] D. Henry, *Geometric Theory of Semi-Linear Parabolic Equations*, in : *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 840, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [11] D. Rodrigues and Luis Paulo Barra, *Analysis of Turing Instability for Biological Models*, Federal University of Juiz de Fora, Graduate Program in Computational Modelling Juiz de Fora, Brazil, 2014.
- [12] D. Serre, *Matrices, Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2001.
- [13] E.P. Zemskov, K. Kassner, M.J.B. Hauser, Wavy fronts and speed bifurcation in excitable systems with cross diffusion, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 1–6.
- [14] F. Rothe, Uniform bounds from bounded-Lp-functionals in reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, 45 (1982), pp. 207–233.
- [15] G. Gambino, M.C. Lombardo, S. Lupo, M. Sammartino, Super-critical and sub-critical bifurcations in a reaction–diffusion Schnakenberg model with linear cross-diffusion, *Ricerche Mat.* 65 (2) (2016) 449–467.

- [16] G. Koeper, *Equations aux d'érivées partielles*, 2001.
- [17] G. Rolland, *Global existence and fast-reaction limit in reaction-diffusion systems with cross effects*, Dissertation, Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, 2013.
- [18] I. Kanel, M. Kirane ; *Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction-diffusion system*, *Dier. Integral Equ. Appl.* 13(1–3) (2000), 255–264.
- [19] J. A. Smoller, *Shock wave and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [20] J. B. Duncan and H. L. Toor, *An experimental study of three component gas diffusion*, *AIChE Journal*, 8 (1962). 38–41.
- [21] J. D. Murray, *Mathematical biology : I-II*. Springer Verlag, 2003.
- [22] J. Espenson, *Chemical Kinetics and Reaction Mechanisms*, Mcgraw-Hill, 2nd ed., 1995.
- [23] J. Morgan, S. Waggoner, *Global existence for a class of quasi linear reaction diffusion systems*, *Commun. Appl. Anal.*, 8 (2004). 153–166.
- [24] J.C. Song, *Decay results in a doubly diffusive problem*, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009) 444–447.
- [25] J.D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2002.
- [26] L. Edelstein Keshner, *Mathematical Models in Biology*, C.L.A.S.S.I.C.S In Applied Mathematics, SIAM, 2005.
- [27] L. Onsager and R. Fuoss, *Irreversible processes in electrolytes. Diffusion, conductance, and viscous flow in arbitrary mixtures of strong electrolytes.*, *J. Phys. Chem*, 36 (1932), pp. 2686–2778.
- [28] M. A. Tsyganov, V. N. Biktashev, J. Brindley, A.V. Holden, G.R. Ivanitskii, *Waves in systems with cross-diffusion as a new*.
- [29] M. A. Tsyganova, J. Brindleyb, A.V. Holdenc, V.N. Biktashev, *Soliton-like phenomena in one-dimensional cross-diffusion systems : a predator-prey pursuit and evasion example*, *Physica D* 197 (2004) 18–33. *class of nonlinear waves*, *UFN* 177 (3) (2007) 275–300.
- [30] M. Frittelli, A. Madzvamuse, I. Sgura, C. Venkataraman, *Lumped finite elements for reaction-cross-diffusion*.
- [31] M. Kirane, *Global bounds of solutions for a strongly coupled system of reaction-diffusion equations*, *Appl. Anal.* 40 (1991) 73–87.
- [32] M. Kirane, *Global bounds on asymptotics for a system of reaction-diffusion equations*, *Math. Anal. Appl.* 138 (1989) 328–342.

- [33] M. Mebarki, A. Moumeni; Global solution of system reaction-diffusion with full matrix. *global journal of mathematical analysis*, (2015) , 04-25.
- [34] M. Pierre, D. Schmitt, Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass, *SIAM Rev.*, 42 (2000). 93–106 (electronic).
- [35] M. Pierre, Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey, *Milan J. Math.*, 78 (2010), pp. 417–455.
- [36] M. Yahia and K. Saoudi, Asymptotic Behavior for Solution of Reaction-Diffusion Systems, *Journal of Mathematics and Statistics*, (2007)-88-92.
- [37] M. Zaidi, Samir Bendoukha, Salem Abdelmalek, Global existence of solutions for an m-component cross-diffusion system with a 3-component case study, *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 45(2019) 262-284.
- [38] P. Collet, J. Xin; Global Existence and Large Time Asymptotic Bounds of L^1 Solutions of Thermal Diffusive Combustion Systems on \mathbb{R}^n , *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc.*, IV. Ser. 23(1996), 625-642.
- [39] P. Malbos, *Analyse Matricielle et Algèbre Linéaire Appliquée*, Notes de cours et de travaux dirigés, Université Claude Bernard Lyon1.
- [40] P. Quittner, P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems Blow-up, Global Existence and Steady States*, 2007.
- [41] R.M. Miura, Explicit roots of the cubic polynomial and roots, *Appl. Math. Notes* 5 (1) (1980) 22–40.
- [42] S. Abdelmalek, Existence of global solutions via invariant regions for a generalized reaction–diffusion system with a tridiagonal Toeplitz matrix of diffusion coefficients, *Funct. Anal. TMA* 2 (2016) 12–27.
- [43] S. Abdelmalek, Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *J. Appl. Math.* (2007) 1–15.
- [44] S. Abdelmalek, Invariant regions and global solutions for reaction–diffusion systems with a tridiagonal symmetric Toeplitz matrix of diffusion coefficients, *Electron. J. Differential Equations* 2014 (247) (2014) 1–14.
- [45] S. Abdelmalek, S. Bendoukha, Global existence of solutions for an m–component reaction–diffusion system with a tridiagonal 2–Toeplitz diffusion matrix and polynomially growing reaction terms, *Communications in Nonlinear Anal.* 1 (2017) 1–14.
- [46] S. Abdelmalek, S. Kouachi, Proof of existence of global solutions for m–component reaction–diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method, *J. Phys. A* 40 (2007) 12335–12350.

- [47] S. Bendoukha, S. Abdelmalek, Invariant regions and existence of global solutions to reaction–diffusion systems without conditions on the growth of nonlinearities, *Electron. Differential Equations* 2016 (156) (2016) 1–11. systems on stationary surfaces, *Comput. Math. Appl.* 74 (2017) 3008–3023.
- [48] S. Godounov, *Equations de la physique mathématiques*, éditions Mir, 1978.
- [49] S. Kouachi, B. Rebiai, Invariant regions and global existence for reaction–diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 51 (2010) 93–108.
- [50] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with non-homogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2002(2002), No. 88. 1-13.
- [51] S. Kouachi ; Global existence of solutions in invariant regions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients, *Electron. J. Qual.Theory Difer. Equ.* 2 (2003), 1-10.
- [52] S. Kouachi ; Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Georgian Math. J.* 11 (2004), 349-359.
- [53] S. L. Hollis, R. H. Martin, JR., and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 18 (1987), pp. 744–761.
- [54] T. Trong Nguyen, B.S, Cross diffusion systems, Thesis, The University of Texas at San Antonio, 2006.
- [55] V. Capasso, A. Di Liddo, Asymptotic behaviour of reaction–diffusion systems in population and epidemic models, *J. Math. Biol.* 32 (1994) 453–463.
- [56] V. Capasso, A. Di Liddo, Global attractivity for reaction–diffusion systems. The case of nondiagonal diffusion matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 177 (1993) 510–529.
- [57] V. K. Vanag, I.R. Epstein, Cross-diffusion and pattern formation in reaction diffusion systems, *Phys. Chem. Chem. Phys.* 11 (2009) 897–912.