République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme *de DOCTORAT LMD*

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques appliquées

Option : Analyse fonctionnelle appliquée

Thème

Résultats d'existence de solution faible non triviale pour un problème aux limites

Présenté Par :

MENASRIA Linda

Devant le jury :

ZARAI Abderrahmane	Professeur	Univérsité larbi Tébessi	Président
BOUALI Tahar	MCA	Univérsité larbi Tébessi	Rapporteur
GUEFAIFIA Rafik	MCA	Univérsité larbi Tébessi	Co-Rapporteur
AKROUT Kamel	Professeur	Univérsité larbi Tébessi	Examinateur
BELLOUFI Mohammed	MCA	Univérsité de Souk Ahras	Examinateur
SELLAMI Badreddine	MCA	Univérsité de Souk Ahras	Examinateur

Date de soutenance : 11/01/2022

Résumé

Les équations différentielles impulsives apparaissent naturellement dans domaines scientifiques comme la physique, la médicine, la théorie du contrôle, etc.

La grande efficacité de ce type d'équations dans la modélisation de nombreux phénomènes, en particulier ceux exposés à des changements soudains à court terme, a encouragé de nombreux chercheurs à les étudier et à prêter attention à leurs aspects quantitatifs et qualitatif.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de ce domaine en examinant l'existence et la multiplicité de solutions faibles des problèmes elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien soumises à des conditions impulsives dans des espaces de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques de théorème de Browder et le théorème de Fountain.

Mots clés : équations différentielles impulsives, opérateur p- Laplacien, solutions faibles, théorème de Browder, théorème de Fountain.

Abstract

Impulsive differential equations naturally appear in scientific fields such as physics, medicine, control theory, etc.

The efficiency of these equations in the modelling of many problems, especially those exposed to sudden short-term changes, encouraged many researchers to study them and pay attention to their quantitative and qualitative aspects.

The objective of this thesis is to contribute to the development of this field by examining the existence and multiplicity of weak solutions of nonlinear elliptic problems involving the p-Laplacian operator subjected to impulsive conditions in Banach spaces. The derived results are based on some of Browder's theory and Fountain theory.

Keywords : impulsive differential equation, p-Laplacian operator, weak solutions, Browder theorem, Fountain theorem.

ملخص

تظهر المعادلات التفاضلية النبضية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل الفيزياء، الطب، نظرية التحكم...الخ.

الفعالية الكبيرة لهذا النوع من المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر خاصة التى تتعرض لتغيرات مفاجئة قصيرة المدى شجعت الكثير من الباحثين لدراستها و الاهتمام بجوانبها الكمية و النوعية.

الهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير هذا المجال و ذلك من خلال دراسة وجود و تعدد الحلول الضعيفة لنوعين من المسائل الاهليجية الغير خطية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية ذات المؤثر p لابلاس و الخاضعة لنبضات، حيث تمت الدراسة في فضاءات بناخ و ذلك باستعمال تقنيات نظرية براودر و نظرية فانتان.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية النبضية، المؤثر p لابلاس، الحلول الضعيفة، نظرية براودر، نظرية فانتان .

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent au Monsieur *BOUALI Tahar*, qui m'a fait confiance en acceptant de diriger ma thèse, et je tiens à lui exprimer ici ma gratitude et le remercier vivement pour m'avoir proposé le sujet de ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur *GUEFAIFIA Rafik* pour sa participation à l'évaluation scientifique de ce travail en tant que co-rapporteur.

J'adresse mes sincères remerciements le Professeur *ZARAI Abderrahmane* pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je tien à remercier aussi Professeur *AKROUT Kamel* d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également Monsieur *BELLOUFI Mohammed* et Monsieur *SELLAMI Badreddine* d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

j'adresse un grand merci à tout ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père, ma mère, mes deux frères, mon soeur .

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin.

Table des matières

1 Préliminaires et outils de base **8**

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev 8

1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ 8

1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(I)$ 9

1.1.3 L'espace $W_0^{1,p}(I)$ 10

1.2 Théorèmes d'injections de Sobolev 10

1.3 Quelques Différentiabilité et points critiques 12

1.4 Opérateurs de Nemytskii 13

1.5 Théorie des opérateurs monotones 14

1.6 L'opérateur p-Laplacien 16

1.7 Quelques théorèmes utilisés 20

1.7.1 Théorème de Browder 20

1.7.2 Condition de Cerami 21

1.7.3 Théorème de Fountain 21

2 Problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien avec effets impulsives dans $\mathbb{R}$. **23**

2.1 Introduction 24

2.2 Résultat préliminaire 25

2.3 Hypothèses 27

2.4 Résultat principal 28

3 Existence des solutions faibles pour le problème p-Laplacien avec effets impulsives 38

3.1 Introduction 39

3.2 Résultat préliminaire 40

3.3 Hypothéèses 43

3.4 Résultat principal 43

4 Anexe1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations 57

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

∇u : gradient de u.

Δu : Laplacien de u.

$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$: p-Laplacien de u.

$X,\ Y$: espaces de Banach.

X^* : espace dual de X.

N_f : opérateur de Nemytskii.

$A,\ \mathcal{L},\ \pounds,\ L_i\ (i = 1, 2, 3)$: opérateur.

ω : ouvert de X.

I : intervalle borné ou non.

$C(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues dans Ω.

$C^\infty(\Omega)$: l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.

$D(\Omega)$: l'espace des fonctions différentiables à support compact dans Ω.

$L^p(\Omega),\ p \in [1, \infty[$: l'espace des fonctions mesurables de puissance p intégrable sur Ω.

$L^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.

$W^{1,p}(\Omega)$: espace de Sobolev avec dérivées d'ordre 1 dans $L^p(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: espace de Sobolev avec trace nulle.

$W^{-1,q}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\| \, . \, \|_p$: norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.

$\| \, . \, \|_{1,\,p}$: norme dans l'espace $W^{1,\,p}(\Omega)$.

$\| \, . \, \|$: norme dans l'espace de Banach X.

$2^* := \begin{cases} \infty, & n = 1, 2, \\ \frac{2n}{(n-2)}, & n \geq 3. \end{cases}$

$\langle \, . \, , \, . \, \rangle$: crocher de dualité.

$\hookrightarrow$: injection continue.

$\hookrightarrow\hookrightarrow$: injection compacte.

$\longrightarrow$: flèche de convergence forte.

$\rightharpoonup$: flèche de convergence faible.

$i.e.$: c'est-à-dire.

$p.p.$: presque partout.

essinf : borne inférieure essentielle.

$u' = \frac{du}{dx}$: la dérivée de la variable u par rapport x.

Introduction

Les équations différentielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, elles apparaissent souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels. De nombreux processus réels et phénomènes naturels en biologie, physique, économie et technologie, subissent des changements brusques au cours de leurs évolutions, ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. A titre d'exemple nous citons l'effet du traitement chimiothérapique sur la dynamique des cellules cancéreuses ainsi que les effets des tremblements de terre sur la dynamique des populations, les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...), etc. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des modèles qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsives" ; ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi. Ce qui a conduit a donnée naissance aux équations différentielles impulsives (voir par exemple $[11, 28, 39]$).

La théorie des équations différentielles impulsives initiée en 1960 par V. D. Mil'man et A. Myshkis $[32]$. Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations, V. Lakshmikantham, L. Byszewski, D. Bainov et Simeonov ainsi que d'autres chercheurs ont participé à l'enrichissement et la popularisation de la théorie des équations différentielles impulsives à partir de 1991 $[5, 7, 8, 18, 38]$ a suscité beaucoup d'intérêt au cours des dernières décennies. En particulier, il y a eu un développement appréciable dans la théorie des équations différentielles impulsives avec moments d'impulsions fixes. Le champ d'applications des équations différentielles impulsives est assez large. Les développements récents dans ce domaine ont été motivés par de nombreux problèmes appliqués, en particulier dans la théorie du contrôle $[24, 26]$, la dynamique de population $[34]$, et la médecine $[23]$.

D'autre part, de nombreux chercheurs ont commencé à étudier les équations différentielles p-Laplacian avec des effets impulsives, constituent un domaine de recherche d'actualité fort intéressant.En effet, l'étude de ces équations connait une popularité croissante parmi les chercheurs, le nombre d'articles parus, traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la dépendance des solutions de ce type d'équations, témoigne de la vitalité de la recherche dans ce domaine $[2, 3, 4, 12, 16, 17, 42]$. Différentes approches ont été appliquées pour étudier l'existence de solutions pour les équations différentielles p-Laplacien effets impulsives : les théorèmes des points critique $[3, 12]$, la théorie du degré topologique $[44]$, la méthode de Browder $[31, 45]$.

Présentation de la thèse :

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude de deux d'équations différentielles p-Laplacian effets impulsives du type elliptique non-linéaire, elle est organisée en trois chapitres.

Le premier présente des notions et des résultats sur les espaces de Sobolev et nous rappellerons quelques théorèmes d'injections de Sobolev. De plus, nous faisons appel à la théorie des opérateurs monotones en vue d'étudier les différentes propriétés de l'opérateur p-Laplacien défini sur un espace de Sobolev. Enfin, la dernière section est consacrée aux théorème de Browder et théorème de Fountaine, et condition de Cerami utilisés dans ce travail.

L'objet du deuxième chapitre est l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions faibles pour le problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien avec effets impulsives dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u), \text{ dans } \Omega, \\ \Delta |u'(x_j)|^{p-2} u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ u(0) = -u(T), \ u'(0) = -u'(T), \end{cases}$$

où Δ_p est l'opérateur p-Laplacien définie par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\left|u^{'}\right|^{p-2} u'\right).$$

Soit $p > 1$, $T > 0$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = T$, $\Omega = [0,T] \diagdown \{x_1, \cdots, x_n\}$, $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j = 1, 2, \cdots, n$. $\Delta |u'(x_j)|^{p-2} u'(x_j) = |u'(x_j^+)|^{p-2} u'(x_j^+) - |u'(x_j^-)|^{p-2} u'(x_j^-)$.

Appropriée des résultats d'existence et la multiplicité des solutions faibles sont obtenus moyennant du théorème de Browder et théorème de Fountaine est une version symétrique du théorème de passe-Montagne.

On étudiera dans le troisième chapitre une nouvelle classe de problème p-Laplacien avec effets impulsive de la forme :

$$\begin{cases} -(\rho(x) \left|u'\right|^{p-2} u')' + s(x) |u|^{p-2} u = f(x,u), \ x \in [0,T], \\ \Delta(|u'(x_j)|^{p-2} u'(x_j)) = I_j(u(x_j)), \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

où $p > 0$, $T > 0$, $\rho(x)$, $s(x) \in L^\infty([0,T])$ satisfaisant des conditions $\operatorname{essinf}_{x \in [0,T]} \rho(x) > 0$, $\operatorname{essinf}_{x \in [0,T]} s(x) > 0$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = T$. $I_j : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\Delta(|u'(x_j)|^{p-2} u'(x_j)) = |u'(x_j^+)|^{p-2} u'(x_j^+) - |u'(x_j^-)|^{p-2} u'\left(x_j^-\right)$.

L'outil utilisé principalement tout au long de ce chapitre est toujours le principe du théorème de Browder et du théorème de Fountain, où nous avons prouvé à travers ces deux théorèmes l'existence et la multiplicité des solutions faibles du problème posé.

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont fréquemment utilisés dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Par conséquent, il est judicieux de donner une brève introduction sur les espaces de Sobolev avant d'aborder pour résoudre ces équations. Pour une large introduction sur les espaces Sobolev, ou pour la preuve des résultats que nous avons annoncés ici, nous référons le lecteur, par exemple, à H. Brezis [13–15] et R. A. Adams [1].

1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u(x)|dx, \ u \in L^1(\Omega).$$

Définition 1.1 *(Espace de Lebesgue) [37]*
Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}; \ u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$$

Soit $u \in L^p(\Omega)$. On munit l'espace $L^p(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ *et* $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *mesurable, on définit* $\| \cdot \|_\infty$ *par :*

$$\|u\|_\infty = ess\text{-}sup|u| = \inf\{M > 0;\ |u(x)| \leq M \ p.p.\}.$$

Proposition 1.1 *(Fischer-Riesz)*
L^p *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.2 *L'espace* L^p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$*, et son dual est* L^q *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 1.3 $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.1 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* L^1*. On suppose que :*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ *p.p. sur* Ω *;*
ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* n*,* $|u_n(x)| \leq v(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors $u \in L^1(\Omega)$ *et* $\|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0$.

Proposition 1.4 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $u \in L^p(\Omega)$ *tels que* $\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0$*. Alors il existe une fonction* $v \in L^p(\Omega)$ *et une sous-suite extraite* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telles que :*

i) $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ *p.p. sur* Ω.
ii) $|u_{n_k}(x)| \leq v(x)$ *pour tout* k *p.p. sur* Ω.

1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit $\Omega = I$ un intervalle borné ou non et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On désigne par $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur I, à support compact inclus dans I.

Définition 1.2 *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *est défini par :*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I),\ \exists v \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I v\varphi \ ,\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \right\}.$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ *on note* $u' = v$.

L'espace $W^{1,p}(I)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

Si $p = +\infty$, on définit $\| \cdot \|_{1,\infty}$ par :

$$\|u\|_{1,\infty} = \max(\|u\|_\infty,\ \|u'\|_\infty).$$

Quand $p = 2$, on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. Cet espace muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 1.1 *La norme $\|u\|_{1,p}$ est équivalente à la norme $\left(\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, si $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.5 *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \leq p < \infty$.*

1.1.3 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.3 *Étant donné $1 \leq p < \infty$, nous utilisons $W_0^{1,p}$ pour désigner la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$.*

Proposition 1.6 *L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.*

1.2 Théorèmes d'injections de Sobolev

Dans cette section nous mentionnons quelques théorèmes d'injections.

Définition 1.4 *[10] Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On dit que X s'injecte continûment dans Y s'il existe une injection continue i de X dans Y, c'est-à-dire une injection i qui vérifie, $\exists M > 0$ telle que :*

$$\forall x \in X,\ \|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

On note alors

$$X \hookrightarrow Y.$$

Si X et Y sont des espaces de Banach, on dit que X va s'injecte de manière compacte dans Y, et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, si :

1) X s'injecte de façon continue dans Y ;

2) toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.

Quelques théorèmes d'injections dans les domaines bornés

Théorème 1.2 *(Théorème de Rellich-Kondrachov)* [14]
On suppose que Ω est un ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$. On a :

- *Si $p < n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
- *Si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ pour tout $q \in]n, +\infty[$.*

Théorème 1.3 [14] *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il existe une constante M (dépendante seulement de $|I| \leq \infty$) telle que :*

$$\|u\|_\infty \leq M\|u\|_{1,p}, \; \forall u \in W^{1,p}(I), \; 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque I est borné, on a :

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{I}) \text{ pour } 1 < p \leq \infty,$$
$$W^{1,1}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I) \text{ pour } 1 \leq q < \infty.$$

Théorème 1.4 [25] *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors l'espace $L^p(I)$ où $1 \leq p < \infty$ s'injecte de manière continue dans $L^q(I)$ pour $1 \leq q \leq p$*

De plus, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|u\|_q \leq M\|u\|_p, \; \forall u \in L^p(I), \; 1 \leq q \leq p,$$

et $L^p(I) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I)$ pour $1 \leq q < p$.

Théorème 1.5 *[13] Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné et $p > 1$. Alors*

$$W_0^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I).$$

1.3 Quelques Différentiabilité et points critiques

Les fonctions définies dans l'espace de Banach ont de nombreux concepts dérivés, (voir [27]).

Définition 1.5 *(Différentiabilité au sens de Fréchet)*
Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X et $J : \omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in \omega$. On dit que J est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $\ell \in X^*$, tel que :

$$\forall v \in \omega, \;\; J(v) - J(u) = \langle \ell, v - u \rangle + o(v - u).$$

Si J est différentiable, ℓ est unique et on note $J'(u) = \ell$. L'ensemble des fonctions différentiables de $\omega \longmapsto \mathbb{R}$ sera noté $C^1(\omega, \mathbb{R})$.

Définition 1.6 *(Dérivée directionnelle)*
Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $J : \omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \omega$ et $v \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in \omega$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si la limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

existe. On notera cette limite $J'_v(u)$.

Définition 1.7 *(Différentiabilité au sens de Gâteaux)*
Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $J : \omega \longmapsto \mathbb{R}$. Soit $u \in \omega$. On dit que J est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $\ell \in X^*$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle \ell, v \rangle \, .$$

On posera $J'(u) = \ell$.

Remarque 1.2 *Si J est différentiable au sens de Fréchet, alors J est différentiable au sens de Gâteaux.*

Définition 1.8 *(Point critique)*
Soient X un espace de Banach, $\omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \omega$ est un

point critique de J, si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J.

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J.

1.4 Opérateurs de Nemytskii

Dans cette partie, nous définissons l'opérateur de Nemytskii. Cet opérateur est intimement lié à la fonction de Carathéodory. Les opérateurs de Nemytskii sont une classe d'opérateurs non linéaires continus bornés dans les espaces L^p, ils prennent leurs nom du mathématicien Viktor Vladimirovich Nemytskii, (voir [22]).

Définition 1.9 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory si, et seulement si*

a) $f(., s)$ est mesurable sur Ω pour tout $s \in \mathbb{R}$;

b) $f(x, .)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.10 *Nous disons que N_f est un opérateur de Nemytskii associé à une fonction de Carathéodory $f(x, u)$ de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'il est défini par*

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x)).$$

Proposition 1.7 *On suppose que Ω est de mesure finie. Soit (u_n) une suite dans M qui converge on mesure vers $u \in M$. Alors $N_f u_n$ converge en mesure vers $N_f u$.*

Proposition 1.8 *Soit $1 \leq p,\ q \leq \infty$ des réels et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On suppose qu'il existe $b \in L^q(\Omega)$ et $C \geq 0$ tels que la condition de croissance suivante :*

$$|f(x,\ u)| \leq C\,|u|^{\frac{p}{q}} + b(x) \text{ p.p sur } \Omega \text{ et pour tout } u \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

sont satisfaite. Alors $N_f(L^p(\Omega)) \subset L^q(\Omega)$ et N_f est un opérateur continu et borné de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Preuve. Soit $u \in L^p(\Omega)$ d'après (1.1) et l'inégalité Minkowski on a

$$\int_{\Omega} |f(x,\ u(x))|^q\, dx \leq C \int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx + \int_{\Omega} |b(x)|^q\, dx < \infty.$$

Donc $N_f(u) \in L^q(\Omega)$ est borné.

Montrons maintenant la continuité de N_f.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u. D'après la Proposition 1.4, il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite (u_{n_k}), telles que

$$u_{n_k} \longrightarrow u,\ \ |u_{n_k}(x)| \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

On en déduit que p.p sur Ω on a $f(x,\ u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(x,\ u(x))$ et

$$|f(x,\ u_{n_k}(x))| \leq C\, |u_{n_k}(x)|^{\frac{p}{q}} + b(x) \leq C\, |g(x)|^{\frac{p}{q}} + b(x)\,.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut que $N_f(u_{n_k}) \longrightarrow N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$. En vertu de l'unicité de la limite, toute la suite $(N_f(u_n))_n$ converge vers $N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$.

Ce qui prouve que N_f est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. ■

Proposition 1.9 *[40] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, p et q deux réels, $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'opérateur défini sur $L^p(\Omega)$ par*

$$u \longmapsto |u|^{p-2}u,$$

est à valeurs dans $L^q(\Omega)$. De plus il est continu.

1.5 Théorie des opérateurs monotones

Dans ce que suit, X est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de X dans X^*, $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ désigne le crochet de dualité entre X et X^*.

Définition 1.11 *[21] On dit que*

1) *A est monotone si :*

$$\forall u, v \in X,\ \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0.$$

2) *A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ implique $u = v$.*

3) *A est hémicontinue si pour tous u, $v \in X$, l'application $t \longmapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longmapsto H^{-1}$ défini par $Au = -\Delta u$ est monotone et hémicontinu, $H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme du gradient.

En effet,

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v)dx \\ &= \|u - v\|^2 \\ &\geq 0, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Soient u, v, $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle A(u + \lambda v), w\rangle &= \int_\Omega \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla w \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + \lambda \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \\ &= a + \lambda b,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \longmapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle$ est continue.

Remarque 1.3 *[21] Si A est continue de X fort dans X^* faible, alors A est hémicontinue.*

Lemme 1.1 *[21] Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de X fort dans X^* faible.*

Définition 1.12 *[20] On dit que A est demi-continu si A maps des suites fortement convergentes dans X à des suites faiblement convergentes dans X^**

$(ie.\ u_n \to u$ quand $n \to \infty$ implique $Au_n \rightharpoonup Au$ quand n $\to \infty)$.

Remarque 1.4 *Si A est demi-continu, alors A est hémicontinu.*

Définition 1.13 *On dit que A est coercive si*

$$\lim_{\|u\|_X \longrightarrow \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} = +\infty.$$

Corollaire 1.1 *[21] Soit $A : X \longmapsto X^*$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercive. Alors A est surjectif.*

1.6 L'opérateur p-Laplacien

Le mot "p-Laplacien" est devenu un mot clé dans l'analyse non linéaire et les problèmes impliquant cet opérateur quasilinéaire du second ordre sont maintenant largement étudiés dans la littérature. On peut se demander : "pourquoi il y a tant de documents traitant de ce sujet ?" Nous pensons qu'il y a plusieurs raisons à cela. D'une part, il y en a de sérieuses. Il semble que certains modèles mathématiques non linéaires conduisent à des équations différentielles avec le p-Laplacien.

Maintenant, nous allons donner quelques définitions et propriétés liées à l'opérateur p-Laplacien [19, 30].

Définition 1.14 *L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par*

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-4}\{|\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\},$$

avec $1 < p < +\infty$*, cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque* $p \neq 2$ *et pour* $p = 2$*, le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel* Δ*.*

Quelques valeurs de p :

- $p = 1$:
$$\Delta_1 u = \mathrm{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = -H,$$
où H est l'opérateur courbure moyenne.
- $p = 2$: on a l'opérateur de Laplace
$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$
- $p = \infty$: comme $p \to \infty$, on rencontre l'équation $\Delta_\infty u = 0$ ou
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$
c'est l'équation l'infini d'harmoniques.

Théorème 1.6 *Pour tout* u *de* $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}, \ v \longmapsto a(u, v),$$

est une forme linéaire continue. D'où il existe un unique élément de $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$*, noté* $A(u)$*, tel que*

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle \,,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longmapsto (W_0^{1,p}(\Omega))^*$*,* $u \longmapsto A(u)$*, est notée*

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Proposition 1.10 *L'opérateur* $-\Delta_p$ *est borné de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $W^{-1,q}(\Omega)$*.*

Preuve. De l'expression de la norme dans un espace dual, on déduit

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \| -\Delta_p(u)\|_{-1,\,q} = \sup_{v \in W_0^{1,\,p}(\Omega),\ \|v\| \le 1} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle|.$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$|\,\langle -\Delta_p(u), v\rangle\,| \le \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\| \le \Big(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{p}{q}}\Big) \|v\|_{W_0^{1,\,p}(\Omega)}.$$

Donc

$$\| -\Delta_p(u)\|_{-1,\,q} \le \|u\|^{\frac{p}{q}}_{W_0^{1,\,p}}.$$

Soit B un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\exists M > 0,\ \forall u \in B,\ \|u\| \le M \Longrightarrow \| -\Delta_p(u)\|_{-1,\,q} \le M^{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi l'image par $-\Delta_p$ d'un borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$. ∎

Proposition 1.11 *L'opérateur* $-\Delta_p$ *est hémicontinu de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans son dual* $W^{-1,q}(\Omega)$*.*

Preuve. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que pour tout $(u,v,w) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^3$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \langle -\Delta_p(u+tv), w\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i}|^{p-2}(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}dx,$$

est continue. ∎

Proposition 1.12 *L'opérateur* $-\Delta_p$ *est monotone de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $W^{-1,q}(\Omega)$*.*

Preuve. L'application qui à t de $\mathbb{R}$ associe $|t|^p$ dans $\mathbb{R}$ étant convexe, on déduit que sa dérivée est une fonction croissante, donc

$$\forall (t,r) \in \mathbb{R}^2,\ (|t|^{p-2}t - |r|^{p-2}r) \geq 0.$$

D'où

$$\langle -\Delta_p(u) - (-\Delta_p(v)), u - v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} - |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i})(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i})dx \geq 0.$$

Par conséquent $-\Delta_p$ est monotone. ∎

Proposition 1.13 *L'opérateur $-\Delta_p$ est coercive de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve. Comme Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\langle -\Delta_p(u), u\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p dx = \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où

$$\lim_{\|u\|\longrightarrow\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\longrightarrow\infty} \frac{\|u\|^p}{\|u\|} = +\infty \text{ car } p > 1.$$

∎

Théorème 1.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.*

i) $-\Delta_p : W_0^{1,p} \longmapsto W^{-1,q}(\Omega)$ *est uniformément continu sur tout ensemble borné de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q} \longmapsto W_0^{1,p}(\Omega)$ *est continu.*

iii) L'opérateur composé $(-\Delta_p)^{-1}$ *:*

$$W^{-1,q} \longmapsto W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

est compact si $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$.

Théorème 1.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$. Pour $p \in]1, +\infty[$, nous définissons la fonctionnelle $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ par*

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

alors Ψ est différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \langle -\Delta_p u, v\rangle.$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$, qui est une fonction de classe C^1 et $\nabla\varphi(x) = |x|^{p-2}x$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} = |x|^{p-2}xy.$$

Par conséquent

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{|\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Par le théorème de Lagrange il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $|\theta| \leq |t|$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{|\nabla u+t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\right| &\leq ||\nabla u+\theta\nabla v|^{p-2}(\nabla u+\theta\nabla v)\nabla v| \\ &\leq M(|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + |\nabla v|^p) \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega \frac{|\nabla u+t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx.$$

Enfin Ψ est Gâteaux différentiable et

$$\langle \Psi'_G(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx.$$

Nous allons maintenant montrer que $\Psi'_G : W_0^{1,p}(\Omega) \longmapsto (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ est continue. A cet effet nous considérons une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_k \longrightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la Proposition 1.4, il existe une sous-suite qu'on note aussi (u_k) telle que

- $\nabla u_k(x) \longrightarrow \nabla u(x)$ p.p. sur Ω quand $k \longrightarrow \infty$.
- Il existe $w \in L^1(\Omega)$ telle que $|\nabla u_k(x)|^p \leq w(x)$ p.p. sur Ω et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons

$$\langle \Psi'_G(u) - \Psi'_G(u_k), v\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k)\nabla v dx,$$

et

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k)\nabla v dx\right| \\ &\qquad \leq \left(\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leq \left(\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme on a

$$\|\Psi'_G(u) - \Psi'_G(u_k)\| = \sup\{| \langle \Psi'_G(u) - \Psi'_G(u_k), v\rangle |,\ v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|v\| = 1\},$$

donc

$$\|\Psi'_G(u) - \Psi'_G(u_k)\| \leq \left(\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Or

$$|\nabla u_k(x)|^{p-2}\nabla u_k(x) \longrightarrow |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \text{ p.p. sur } \Omega,$$

et

$$||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k|^{\frac{p}{p-1}} \leq M(|\nabla u_k|^p + |\nabla u|^p) \leq M(w + |\nabla u|^p) \in L^1(\Omega).$$

Par le théorème de la convergence dominée, nous obtenons

$$\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k|^{\frac{p}{p-1}} dx \longrightarrow 0,$$

et donc

$$\|\Psi'_G(u_k) - \Psi'_G(u)\| \longrightarrow 0.$$

D'où Ψ'_G est continue. Par conséquent Ψ est Fréchet différentiable avec $\Psi' = \Psi'_G$. ■

1.7 Quelques théorèmes utilisés

Dans cette section, en utilisant le théorème de Browder et le théorème de Fountain, on peut montrer l'existence des solutions faibles du problème.

1.7.1 Théorème de Browder

Théorème 1.9 *(théorème de Browder) [20]*
Soit X un espace de Banach réel réflexif et A un opérateur de $X \longmapsto X^*$ vérifiant les conditions suivantes :

i) A est borné ;

ii) A est hémicontinu ;

iii) A est coercive ;

iv) A est monotone.

Alors

$$\forall f^* \in X^*,\ \exists u \in X \text{ tel que } Au = f^*. \tag{1.2}$$

1.7.2 Condition de Cerami

Définition 1.15 *(Condition de Cerami) [35]*
Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, et $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$. On dit que ψ satisfait la condition de Cerami (C) si pour tout $d \in \mathbb{R}$,

i) toute suite bornée $\{u_n\} \subset X$ satisfaisant $\psi(u_n) \longrightarrow d$, $\psi'(u_n) \longrightarrow 0$ possède une sous suite convergente ;

ii) il existe $\delta, \zeta, \tau > 0$ tel que pour tout $u \in \psi^{-1}([d-\delta, d+\delta])$ avec $\|u\| \geq \zeta$, $\|\psi'(u)\|.\|u\| \geq \tau$.

Comme X est un espace de Banach réflexif il existe (voir [46] section 17) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tel que $f_n(e_m) = \delta_{n,m}$, $X = \overline{span}\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ et $X^* = \overline{span}^{W^*}\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$.

Pour $j, k \in \mathbb{N}$, notons $X_j = span\{e_j\}$ ($span\,\{e_j\}$ ie. tout les combinaisons linéaires possibles de e_j), $Y_k := \oplus_{j=1}^{k} X_j$, et $Z_k := \overline{\oplus_{j=1}^{\infty} X_j}$. Clairement $X = \overline{\oplus_{j\in\mathbb{N}} X_j}$ avec $\dim X_j < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Notons $S_\tau := \{u \in X :\ \|u\| = \tau\}$.

1.7.3 Théorème de Fountain

Maintenant nous énonçons le théorème de Fountain, cet théorème a été obtenu sous la condition Palais-Smale (PS) (voir [29, 41]). Bien que la condition (C) soit plus faible que (PS), le théorème de déformation bien connu est toujours vrai sous la condition (C) (voir [9]). Le théorème de Fountain suivant est sous la condition (C).

Théorème 1.10 *(Théorème de Fountain) [35]*
Soient X, Y_k, Z_k définis comme ci-dessus. Supposons que $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfait la condition (C) et $\psi(-u) = \psi(u)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\tau_k > r_k > 0$ tel que

i) $b_k = \inf_{u \in Z_k \cap S_{r_k}} \psi(u) \longrightarrow +\infty,\ k \longrightarrow \infty$,

ii) $\varsigma_k = \max_{u \in Y_k \cap S_{\tau_k}} \psi(u) \leq 0$.

Alors ψ a une suite de points critiques u_n, tel que $\psi(u_n) \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Lemme 1.2 *[43] Si* $1 \leq p < 2^*$ *alors nous avons* $\eta_k = \sup_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|=1}} \||u\|_p \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$.

Théorème 1.11 *(Ascoli-Arzela) [36]*

Un sous-ensemble $M \subset C([0,T],E)$ *est relativement compact si, et seulement si :*

1) *M est équicontinu ;*

2) *pour tout* $t \in [0,T]$, $M(t) = \{x(t) : \ x(.) \in M\}$ *est relativement compact dans* E.

Chapitre 2

Problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien avec effets impulsives dans $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre (voir [45]), nous allons rappeler un résultats que Keyu Zhang, Jiafa Xu et Wei Dong [45] l'a établi en 2013.

2.1 Introduction

Nous traitons dans ce chapitre un problème elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien impulsive soumise à conditions antipériodiques ou bord, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$.

Nous allons étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,\ u), \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ \Delta \left|u'(x_j)\right|^{p-2} u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \\ u(0) = -u(T), \quad u'(0) = -u'(T). \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici Δ_p est l'opérateur p-Laplacien d'expression $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\left|u'\right|^{p-2} u'\right)$, soit $p > 1$, $T > 0$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = T$, $\Omega = [0,\ T] \setminus \{x_{1,}\ \cdots,\ x_n\}$, $f \in C([0,\ T] \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$, et $I_j \in C(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Où

$$\Delta \left|u'(x_j)\right|^{p-2} u'(x_j) = \left|u'\left(x_j^+\right)\right|^{p-2} u'\left(x_j^+\right) - \left|u'\left(x_j^-\right)\right|^{p-2} u'\left(x_j^-\right), \tag{2.2}$$

$u'\left(x_j^+\right)$ et $u'\left(x_j^-\right)$ désignent respectivement les limites droite et gauche de $u'(x)$ en $x = x_j$, pour $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, u est la solution faible recherchée.

Dans [42], L. Wang, W. Ge, et M Pei. faisens l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,\ u) \quad x \in (0,\ 1) \setminus \{x_1,\ x_2, \cdots, x_n\}, \\ \Delta \left|u'(x_j)\right|^{p-2} u'(x_j) - \sigma_j u(x_j) = 0 \quad j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}, \\ u'(0) - \mu_0 u(0) = 0 \quad u'(1) + \mu_1 u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 > 0$ et $\sigma_j \geq 0$ pour $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Elle a démontré par la méthode de point critique et la méthode des solutions inférieures et supérieures l'existence des solutions du problème (2.3).

I. Bogun [12], a étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f\left(x,\ u\right) \quad x \in (0,\ 1) \setminus \{x_1,\ x_2, \cdots, x_n\}, \\ \Delta \left|u'\left(x_j\right)\right|^{p-2} u'\left(x_j\right) = I_j\left(u\left(x_j\right)\right) \quad j = 1,\ \cdots,\ n, \\ u\left(1\right) = u\left(0\right) = 0, \quad u\left(x_j^+\right) = u\left(x_j^-\right) \quad j = 1,\ \cdots,\ n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Sous certaines hypothèses précises sur la fonction f et I_j, $j = 1, \cdots, n$, par le théorème de point critique, il montra que le probleme (2.4) admet une infinite des solutions faibles.

Cependant, du problème (2.1) sur le domaine $\Omega = (0,\ 1) \setminus \{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$, sous les conditions de Dirichlet $(u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0)$, les auteurs dans [44] ont montré en utilisant la théorie des degrés topologiques et la théorie des points critiques que le problème (2.1) admet infinite des solutions faibles.

les auteurs dans [45], ont montré que le problème (2.1) admet une solution faible par du théorème de Browder. Sous les conditions de Cerami et conditions appropriées sur f et I_j les auteurs ont prouvé l'existence d'un infinite des solutions faibles de probléme (2.1).

Le taravail de ce chapitre peut être vu comme une généralisation [45]. Le plan de ce chapitre est comme suit : section 2, on définit la solution faible du p-Laplacien impulsive, section 3, nous introduisons les hypothèses de base et nous démontrons quelques lemmes. Dans la section 4, on fait la démonstration d'existence des solutions faibles de problème (2.1).

2.2 Résultat préliminaire

Nous commençons cette section par la définition de la solution faible du problème (2.1)

On introduit l'espace des solutions faibles

$$X = \left\{u \in W^{1,\,p}\left([0,\ T]\right) :\ u\left(0\right) = -u\left(T\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int_0^T \left|u'\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.5}$$

l'espace $(X,\ \|.\|)$ est un espace de Banach réflexif et séparable.

Pour tout $v \in X$, on multiplie l'équation $-\Delta_p u = f(x,\ u)$ par v et intégrez entre 0 et T, on obtient

$$\int_0^T -\left(\left|u'\right|^{p-2} u'\right)' v dx = \int_0^T f(x,\ u) v dx, \tag{2.6}$$

comme les effects impulsive, et du fait que $(x_0 = 0, x_{n+1} = T$ et $v(0) = -v(T))$, l'intégrale à gouche de (2.6) devient

$$\begin{aligned}
\int_0^T -\left(\left|u'\right|^{p-2} u'\right)' v dx &= \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j^+}^{x_{j+1}^-} -\left(\left|u'\right|^{p-2} u'\right)' v dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} -\left|u'\right|^{p-2} u' v \Big|_{x_j^+}^{x_{j+1}^-} + \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j^+}^{x_{j+1}^-} \left|u'\right|^{p-2} u' v' dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\left|u'\left(x_j^+\right)\right|^{p-2} u'\left(x_j^+\right) - \left|u'\left(x_j^-\right)\right|^{p-2} u'\left(x_j^-\right) v\left(x_j\right)\right] \\
&\quad + \int_0^T \left|u'\right|^{p-2} u' v' dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} I_j\left(u\left(x_j\right)\right) v\left(x_j\right) + \int_0^T \left|u'\right|^{p-2} u' v' dx
\end{aligned} \tag{2.7}$$

En utilisant (2.7) dans (2.6), on obtient

$$\int_0^T \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) v'(x) dx + \sum_{j=1}^{n} I_j\left(u\left(x_j\right)\right) v\left(x_j\right) = \int_0^T f(x,\ u(x)) v(x) dx.$$

Alors nous avons le definition suivant

Définition 2.1 *La fonction $u \in X$ est une solution faible de (2.1) si pour tout $v \in X$ on a*

$$\int_0^T \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) v'(x) dx + \sum_{j=1}^{n} I_j\left(u\left(x_j\right)\right) v\left(x_j\right) - \int_0^T f(x,\ u(x)) v(x) dx = 0. \tag{2.8}$$

Nous allons introduire des conditions sur f et I_j pour prouver l'existence des solutions faibles non triviales du problème (2.1).

2.3 Hypothèses

Nous étudions le problème (2.1) sous les hypothèses suivantes :

Posons $F(x,\ u) = \int_0^u f(x,\ t)\,dt$

$(H1)$ $f(x,\ u)$ est une fonction décroissante sur u, uniformément sur $x \in [0,\ T]$, et $I_j(u)$ sont des fonctions croissantes avec u.

$(H2)$ Il existe $\alpha_j,\ \beta_j > 0$ et $\gamma_j \in [1,\ p)$ tels que $|I_j(u)| \leq \alpha_j + \beta_j |u|^{\gamma_j - 1}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $j = 1, 2, \ldots, n$.

$(H3)$ Il existe $c_1,\ c_2 > 0$ telle que $f(x,\ u) \leq c_1 + c_2 |u|^{p-1}$, pour tous $u \in \mathbb{R}$, $x \in [0,\ T]$.

$(H4)$ Il y a une constante positive $a > 0$ tels que $\lim_{|u| \longrightarrow \infty} \frac{-pF(x,\ u) + f(x,\ u)u}{|u|} \geq a$, uniformément dans $x \in [0,\ T]$.

$(H5)$ $p \int_0^u I_j(s)\,ds - I_j(u)\,u \geq 0$, $\int_0^u I_j(s)\,ds \geq 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

$(H6)$ $\lim_{|u| \longrightarrow \infty} \frac{F(x,\ u)}{|u|^p} = +\infty$, uniformément sur $x \in [0,\ T]$.

$(H7)$ $F(x,\ u)$ est une fonction paire à propos de u et $I_j(u)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sont des fonctions impaires à propos de u, pour tout $x \in [0,\ T]$.

Avant de démontrer cette proposition on a besoin du résultat suivant.

Lemme 2.1 *Soit $u \in X$, alors*

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\ T] \text{ et } X \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,\ T]).$$

Preuve. Soit $u \in X$, et comme $u(0) = -u(T)$ on pose

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[u(0) + \int_0^x u'(s)\,ds + u(T) - \int_x^T u'(s)\,ds\right].$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\left[u(0)+\int_0^x u'(s)\,ds + u(T) - \int_x^T u'(s)\,ds\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \left|u'(s)\right| ds \\ &\leq \frac{1}{2}T^{\frac{(p-1)}{p}} \|u\|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donc

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}T^{\frac{(p-1)}{p}} \|u\|, \quad \forall u \in X. \tag{2.10}$$

D'autre part, pour $u \in X$, nous avons $t,\ s \in [0,\ T]$

$$|u(t) - u(s)| = \left|\int_s^t u'(\tau)\,d\tau\right| \leq \int_0^T \left|u'(\tau)\right| d\tau \leq T^{\frac{(p-1)}{p}} \|u\|, \tag{2.11}$$

par conséquent chaque ensemble borné dans X est équicontinue en $C[0,\ T]$, et par le théorème Arzela-Ascoli (cf. théorème 1.11, chapitre 1), d'où $X \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\ T]$.

D'aprés (2.10) on a

$$\|u\|_p \leq \frac{T}{2}\|u\|, \quad \forall u \in X. \tag{2.12}$$

Ainsi on a montré que l'injection $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,\ T])$. La preuve du Lemme 2.1 est ainsi complète. ∎

2.4 Résultat principal

Le résultat principal de ce travail est le théorème qui suit :

Théorème 2.1 *Si* $0 < c_2 < \left(\frac{T}{2}\right)^{-p}$ *et* $(H1)-(H3)$ *sont vérifiées. Alors le problème* (2.1) *admet au moins une solution faible.*

L'approche étant variationnelle, on définit tout d'abord la fonctionnelle d'énergie correspondant au problème (2.1) par

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_0^T \left|u'(x)\right|^p dx + \sum_{j=1}^{n}\int_0^{u(x_j)} I_j(x)\,dx - \int_0^T F(x,\ u(x))\,dx, \tag{2.13}$$

Proposition 2.1 *La fonctionnelle J est de classe C^1 sur X. Sa différentielle est donnée par*

$$\begin{array}{c} \left\langle J'(u),\ v\right\rangle = \int_0^T \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\,v'(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} I_j(u(x_j))\,v(x_j) \\ - \int_0^T f(x,\ u(x))\,v(x)\,dx\ \forall u, v \in X. \end{array} \tag{2.14}$$

On définie les opérateurs $L_1, L_2, L_3 : X \longmapsto X^*$ par :

$$\begin{aligned} \langle L_1(u),\ v\rangle &= \int_0^T \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\,v'(x)\,dx, \\ \langle L_2(u),\ v\rangle &= \sum_{j=1}^{n} I_j(u(x_j))\,v(x_j), \\ \langle L_3(u),\ v\rangle &= \int_0^T f(x,\ u(x))\,v(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

On pose

$$\langle \mathcal{L}(u),\ v\rangle = \langle L_1(u),\ v\rangle + \langle L_2(u),\ v\rangle + \langle L_3(u),\ v\rangle, \quad \forall u, v \in X. \tag{2.16}$$

On peut vérifier aisément qu'une fonction u est solution du problème (2.1) i.e. $\mathcal{L}(u) = 0$ dans X^*. La preuve de théorème (2.1) est donnée par le théorème de Browder [20]. Cette preuve se fait en trois étapes :

Preuve. **Etape 1** : Montrer que $\mathcal{L}$ est borné et hémicontinu.

Nous démontrons en premier lieu que $L_i\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ sont des opérateurs bornés, en appliquant l'inégalité de Hölder sur les opérateurs $L_i\,(i = 1,\ 2,\ 3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle L_1(u)\,,\ v\rangle &= \int_0^T \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\, v'(x)\, dx \\
&\leq \left(\int_0^T \left|\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\right|^{\frac{p}{(p-1)}} dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \left(\int_0^T \left|v'(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^T \left|u'(x)\right|^p dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \left(\int_0^T \left|v'(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|^{p-1}\|v\| \\
&< \infty, \quad \forall u,\ v \in X. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Donc L_1 est un opérateur borné de X dans X^*.

On a par l'hypothèse $(H2)$ et $(H3)$ et la relation (2.10) et (2.12), on a pour tout $u, v \in X$

$$\begin{aligned}
\left|\langle L_2(u)\,,\ v\rangle\right| &\leq \sum_{j=1}^{n} \left|I_j(u(x_j))\right| \left|v(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j + \beta_j \left|u(x_j)\right|^{\gamma_j-1}\right) \left|v(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j + \beta_j \|u\|_\infty^{\gamma_j-1}\right) \|v\|_\infty \\
&\leq \frac{n}{2} T^{\frac{(p-1)}{p}} \left(\alpha_j + \beta_j \left(\frac{1}{2} T^{\frac{(p-1)}{p}}\right)^{\gamma_j-1} \|u\|^{\gamma_j-1}\right) \|v\| \\
&< \infty, \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\left|\langle L_3(u)\,,\ v\rangle\right| &= \left|\int_0^T f(x,\ u(x))\, v(x)\, dx\right| \\
&\leq \int_0^T \left|f(x,\ u(x))\right| \left|v(x)\right| dx \\
&\leq \int_0^T \left(c_1 + c_2 \left|u(x)\right|^{p-1}\right) \left|v(x)\right| dx \\
&\leq c_1 T^{\frac{(p-1)}{p}} \|v\|_p + c_2 \|u\|_p^{p-1} \|v\|_p \\
&\leq \frac{c_1}{2} T^{\frac{(2p-1)}{p}} \|v\| + c_2 \left(\frac{T}{2}\right)^p \|u\|^{p-1} \|v\| \\
&< \infty, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

alors L_2, L_3 sont des opérateurs bornés. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{L}$ est borné.

Ensuite, on démontre que l'opérateur $\mathcal{L}$ est demi-continu de X dans X^*. Soient u_k, $u \in X$, on a

$$\begin{aligned} |\langle L_1(u_k) - L_1(u), v\rangle| &= \left| \int_0^T \left(\left| u_k'(x) \right|^{p-2} u_k'(x) - \left| u'(x) \right|^{p-2} u'(x) \right) v'(x)\, dx \right| \\ &\leq \left(\int_0^T \left| \left| u_k'(x) \right|^{p-2} u_k'(x) - \left| u'(x) \right|^{p-2} u'(x) \right|^{\frac{p}{(p-1)}} dx \right)^{\frac{(p-1)}{p}} \|v\|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

la dernière intégrale tend vers 0 quand $\|u_k - u\| \longrightarrow 0$, à cause la continuité de l'opérateur de Nemytskii $N_f(s) = |s|^{p-2}s$ (cf. proposition 1.9, chapitre $1)$, donc L_1 est un opérateur continu.

Comme $f \in C([0,\ T] \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ et grâce au théorème convergence dominée de Lebesgue $($cf. théorème 1.1, chapitre $1)$, on obtient

$$\int_0^T f(x,\ u_k(x))\, dx \longrightarrow \int_0^T f(x,\ u(x))\, dx \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty,$$

donc

$$|\langle L_3(u_k) - L_3(u), v\rangle| = \left| \int_0^T (f(x,\ u_k(x)) - f(x,\ u(x)))\, v(x)\, dx \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.21}$$

Et de la même manière, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} [I_j(u_k(x_j)) - I_j(u(x_j))] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty$$

où

$$|\langle L_2(u_k) - L_2(u), v\rangle| = \left| \sum_{j=1}^{n} [I_j(u_k(x_j)) - I_j(u(x_j))]\, v(x_j) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.22}$$

Par conséquent, L_2 et L_3 sont continus, donc l'opérateur $\mathcal{L}$ est continu alors il est aussi demi-continu de X dans X^*

Etape 2 : Maintenant on vérifient la coercivité de $\mathcal{L}$.

par l'hypothèse $(H2)$ et $(H3)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}(u), u \rangle &= \|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} I_j(u(x_j))\, u(x_j) - \int_0^T f(x, u(x))\, u(x)\, dx \\
&\geq \|u\|^p - \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j + \beta_j |u(x_j)|^{\gamma_j - 1}\right) |u(x_j)| - \int_0^T \left(c_1 + c_2 |u(x)|^{p-1}\right) |u(x)|\, dx \\
&\geq \left(1 - c_2 \left(\frac{T}{2}\right)^p\right) \|u\|^p - \left(\frac{n\alpha_j}{2} T^{\frac{(p-1)}{p}} + \frac{c_1}{2} T^{\frac{(2p-1)}{p}}\right) \|u\| - n\beta_j \left(\frac{1}{2} T^{\frac{(p-1)}{p}}\right),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

si $c_2 \in \left(0, \left(\frac{T}{2}\right)^{-p}\right)$, alors $\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle \mathcal{L}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty$. Donc l'opérateur $\mathcal{L}$ est coercive si $c_2 \in \left(0, \left(\frac{T}{2}\right)^{-p}\right)$.

Etape 3 Maintenant on vérifient la dernière partie de Théorème de Browder.

par l'hypothèse $(H1)$, pour $u, v \in X$, et $u \neq v$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v), u - v \rangle &= \int_0^T \left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) - \left|v'(x)\right|^{p-2} v'(x) \right) \left(u'(x) - v'(x)\right) dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(I_j(u(x_j)) - I_j(v(x_j))\right)\left(u(x_j) - v(x_j)\right) \\
&\quad - \int_0^T \left(f(x, u(x)) - f(x, v(x))\right)\left(u(x) - v(x)\right) dx \\
&\geq \int_0^T \left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) - \left|v'(x)\right|^{p-2} v'(x) \right) \left(u'(x) - v'(x)\right) dx \\
&\geq \|u\|^p - \|u\|^{p-1}\|v\| - \|v\|^{p-1}\|u\| + \|v\|^p \\
&\geq \left(\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1}\right)\left(\|u\| - \|v\|\right) \\
&> 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ainsi d'après le théorème de Browder nous pouvons conclure que l'équation $\mathcal{L}(u) = 0$ admet au moins une solution u dans X. Cette solution est une solution faible non triviale du problème (2.1) puisque

$\mathcal{L}(0) \neq 0$. La preuve du théorème 2.1 est ainsi complète. ∎

Lemme 2.2 *Supposons que $(H3) - (H5)$ vérifient. Alors la fonctionnelle J satisfait la* *condition de Cerami* (C).

Preuve. pour tout $d \in \mathbb{R}$, nous supposons que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ est borné et

$$J(u_k) \longrightarrow d, \quad J'(u_k) \longrightarrow 0, \ k \longrightarrow \infty. \tag{2.25}$$

Promenez-vous si nécessaire à une sous-suite, on peut supposer $u_k \rightharpoonup u$ faiblement convergente dans X, et puis :

$$\begin{aligned}\left\langle J'(u_k) - J'(u), \, u_k - u \right\rangle &= \int_0^T \left(\left| u_k' \right|^{p-2} u_k' - \left| u' \right|^{p-2} u' \right) \left(u_k' - u' \right) dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(I_j(u_k(x_j)) - I_j(u(x_j)) \right) \left(u_k(x_j) - u(x_j) \right) \\ &\quad - \int_0^T \left(f(x, \, u_k) - f(x, \, u) \right) (u_k - u) \, dx.\end{aligned} \tag{2.26}$$

En utilisant le Lemme 2.1, et l'injection de X dans $C[0, T]$, et d'après la continuité de f et la continuité de I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} \left(I_j(u_k(x_j)) - I_j(u(x_j)) \right) \left(u_k(x_j) - u(x_j) \right) \longrightarrow 0, \tag{2.27}$$

$$\int_0^T \left(f(x, \, u_k) - f(x, \, u) \right) (u_k - u) \, dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.28}$$

D'après $\lim_{k \longrightarrow \infty} J'(u_k) = 0$ et $u_k \rightharpoonup u$, nous obtenons

$$\left\langle J'(u_k) - J'(u), \, u_k - u \right\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.29}$$

De $(2.26) - (2.28)$ et (2.29), nous déduisons que

$$\int_0^T \left(\left| u_k' \right|^{p-2} u_k' - \left| u' \right|^{p-2} u' \right) \left(u_k' - u' \right) dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.30}$$

Par (2.24), nous avons

$$\left(\|u_k\|^{p-1} - \|u\|^{p-1} \right) \left(\|u_k\| - \|u\| \right) \leq \int_0^T \left(\left| u_k' \right|^{p-2} u_k' - \left| u' \right|^{p-2} u' \right) \left(u_k' - u' \right) dx, \tag{2.31}$$

et par conséquent $\|u_k - u\| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.Ainsi, la condition (i) de la définition 1.15 a été vérifiée.

Maintenant nous montrons que la condition (ii) du la définition 1.15. Supposons par contradiction, qu'il y a de suite $(u_k) \subset X$, telle que

$$J(u_k) \longrightarrow d, \quad \left\|J'(u_k)\right\|.\|u_k\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty, \tag{2.32}$$

$$\|u_k\| \longrightarrow \infty, \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{2.33}$$

par (2.32), il existe une constante ε_1, telle que

$$J(u_k) - \frac{1}{p}J'(u_k)\,u_k \leq \varepsilon_1. \tag{2.34}$$

l'hypothèse $(H4)$ implique que, il existe $M > 0$ tel que $-pF(x,\ u) + f(x,\ u)\,u \geq a\,|u|$, pour tout $|u| > M$ et $x \in [0,\ T]$. de plus, $-pF(x,\ u)+f(x,\ u)\,u$ est bornée pour $|u| \leq M$ et $x \in [0,\ T]$. Par conséquent, il existe $c > 0$ tel que $-F(x,\ u) + \left(\frac{1}{p}\right) f(x,\ u)\,u \geq \left(\frac{a}{p}\right)|u| - c$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $x \in [0,\ T]$. Par l'hypothèse $(H5)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} J(u_k) - \frac{1}{p}J'(u_k)\,u_k &= \sum_{j=1}^{n}\int_0^{u_k(x_j)} I_j(x)\,dx - \frac{1}{p}I_j(u_k(x_j))\,u_k(x_j) \\ &\quad + \int_0^T \left(-F(x,\ u_k) + \frac{1}{p}f(x,\ u_k)\,u_k\right)dx \\ &\geq \int_0^T \left(-F(x,\ u_k) + \frac{1}{p}f(x,\ u_k)\,u_k\right)dx \\ &\geq \int_0^T \left(\frac{a}{p}|u_k| - c\right)dx. \end{aligned} \tag{2.35}$$

De (2.34) et (2.35), nous obtenons

$$\int_0^T |u_k|\,dx \leq pa^{-1}(Tc + \varepsilon_1). \tag{2.36}$$

Par conséquent, il existe ε_2 tel que $\|u_k\|_\infty \leq \varepsilon_2$. $(H3)$ implique l'existence d'une constante $c_3,\, c_4 > 0$, telle que

$$F(x,\ u) \leq c_3 |u| + c_4 |u|^p, \quad \forall u \in \mathbb{R},\ x \in [0,\ T]. \tag{2.37}$$

De (2.37) et l'hypothèse $(H5)$, on obtient

$$\begin{aligned}
J(u_k) &= \frac{1}{p} \int_0^T \left| u_k' \right|^p dx + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{u_k(x_j)} I_j(x)\, dx \\
&\quad - \int_0^T F(x,\ u_k)\, dx \\
&\geq \frac{1}{p} \|u_k\|^p - \int_0^T (c_3 |u_k| + c_4 |u_k|^p)\, dx \\
&\geq \frac{1}{p} \|u_k\|^p - c_3 T \|u_k\|_\infty - c_4 T \|u_k\|_\infty^p \\
&\geq \frac{1}{p} \|u_k\|^p - c_3 T \varepsilon_2 - c_4 T \varepsilon_2^p.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Il résulte que $J(u_k) \longrightarrow \infty$ par (2.33), ce qui contredit $J(u_k) \longrightarrow d$ en (2.32), ce qui montre que J satisfait la condition (C). ■

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses $(H2) - (H7)$ sont satisfaites, alors le problème (2.1) admet infiniment des solutions faibles.*

Preuve. Soit $\eta_k = \sup_{u \in Z_k \cap S_1} \|u\|_p$, et comme $\eta_k \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$ (voir Lemme $1.2,$ chapitre 1) en utilisant l'inégalité de Hölder et l'hypothese $(H5)$, nous avons pour tout $u \in Z_k$ et $\|u\| = r_k := \eta_k^{-1}$

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p} \int_0^T \left| u' \right|^p dx + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{u(x_j)} I_j(x)\, dx - \int_0^T F(x,\ u)\, dx \\
&\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \int_0^T (c_3 |u| + c_4 |u|^p)\, dx \\
&\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - c_3 T^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p - c_4 \|u\|_p^p \\
&\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - c_3 T^{\frac{p-1}{p}} \eta_k \|u\| - c_4 \eta_k^p \|u\|^p \\
&\geq \frac{\eta_k^{-p}}{p} - c_3 T^{\frac{p-1}{p}} - c_4.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Nous avons facilement $r_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$ et

$$J(u) \geq \frac{\eta_k^{-p}}{p} - c_3 T^{\frac{p-1}{p}} - c_4 \longrightarrow \infty \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty, \tag{2.40}$$

par conséquent

$$b_k = \inf_{u \in Z_k,\ \|u\| = r_k} J(u) \longrightarrow \infty \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty \tag{2.41}$$

D'autre part, par $(H6)$, on trouve qu'il y a b, $c > 0$ tels que

$$F(x,\ u) \geq b\,|u|^p - c \quad \forall u \in \mathbb{R},\ x \in [0,\ T]\,. \tag{2.42}$$

Puisque toutes les normes d'un espace normé de dimension finie sont équivalentes, notez que $\|.\|_p$ est une norme de Y_k, il existe donc un constante $\zeta > 0$ tel que

$$\|u\|_p^p \geq \zeta\,\|u\|^p\,, \quad \forall u \in Y_k. \tag{2.43}$$

De (2.10) et (2.42) , et l'hypothèse $(H2)$, nous avons

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\int_0^T \left|u^{'}\right|^p dx + \sum_{j=1}^{n}\int_0^{u(x_j)} I_j(x)\,dx - \int_0^T F(x,\ u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_0^T \left(b\,|u|^p - c\right)dx + \sum_{j=1}^{n}\int_0^{u(x_j)} \left(\alpha_j + \beta_j\,|u|^{\gamma_j - 1}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p - b\,\|u\|_p^p + cT + \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j\,|u(x_j)| + \frac{\beta_j}{\gamma_j}\,|u(x_j)|^{\gamma_j}\right) \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p - b\zeta\,\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j\,\|u\|_\infty + \frac{\beta_j}{\gamma_j}\,\|u\|_\infty^{\gamma_j}\right) + cT \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - b\zeta\right)\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j}{2}T^{\frac{p-1}{p}}\,\|u\| + \frac{\beta_j}{\gamma_j}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\gamma_j}\|u\|^{\gamma_j}\right) + cT.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Nous pouvons choisir b, suffisamment large tel que $\frac{1}{p} - b\zeta < 0$. Ainsi en utilisant l'hypothese $(H2)$ et $(H6)$ qui donnent $p > \gamma_j$, nous affirmons l'existence de constante d_k telles que

$$J(u) \leq 0 \text{ pour tout } u, \quad \|u\| \geq d_k. \tag{2.45}$$

De (2.45) et (2.41), on peut prendre $\tau_k := \max\{d_k,\ r_k + 1\}$, et donc $\varsigma_k := \max_{u \in Y_k,\ \|u\| = \tau_k} J(u) \leq 0$. Les conditions du théorème 1.10 sont satisfaites ainsi, J possède au infiniment de solutions. Alors, le problème (2.1) admet a infiniment des solutions faibles. Ceci achève la preuve du théorème 2.2. ∎

Chapitre 3

Existence des solutions faibles pour le problème p-Laplacien avec effets impulsives

Dans ce chapitre (voir [31]), nous étudions l'existence des solutions faibles pour le problème p-Laplacien avec effets impulsives sous les conditions de Dirichlet, nous établissons d'existence en utilisant le théorème du Browder [20].

3.1 Introduction

Ce chapitre, nous apportons notre contribution au développement de l'étude des problèmes elliptique lié à l'opérateur p-Laplacien avec effets impulsives en abordant la question d'existence d'une nouvelle classe d'équations différentielles impulsives soumises à des conditions aux limites de type Dirichlet de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\left(\rho(x)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' + s(x)\,|u|^{p-2}u = f(x,\ u) \quad x \in [0,\ T], \\ \\ \triangle\left(\left|u'(x_j)\right|^{p-2}u'(x_j)\right) = I_j(u(x_j)), \ \ j = 1,2,...,n, \\ \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $p > 0, T > 0, \rho(x), s(x) \in L^{\infty}([0,\ T])$ satisfaisant des conditions $\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]}\rho(x) > 0$, $\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]}s(x) > 0$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = T$. $I_j : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour tout $j = 1,2,\ldots,n$, $f : [0,\ T] \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\triangle\left(\left|u'(x_j)\right|^{p-2}u'(x_j)\right) = \left|u'\left(x_j^+\right)\right|^{p-2}u'\left(x_j^+\right) - \left|u'\left(x_j^-\right)\right|^{p-2}u'\left(x_j^-\right)$ où $u'\left(x_j^+\right)$ et $u'\left(x_j^-\right)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de $u'(x)$ au point de discontinuité $x = x_j$;pour $j = 1,2,\ldots,n$.

Dans [41], Y. Tian, w. Ge obtenu des conditions suffisantes pour garantir l'existence d'au moins deux solutions positives au problème de valeur limite implsive suivant :

$$\begin{cases} -\left(\rho(x)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' + s(x)\,|u|^{p-2}u = f(x,\ u) \quad x \in [a,\ b], \\ -\triangle\left(\rho(x_j)\left|u'(x_j)\right|^{p-2}u'(x_j)\right) = I_j(u(x_j)) \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ \alpha_1 u'(a) - \alpha_2 u(a) = A, \ \ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = B. \end{cases}$$

Où $A \leq 0, B \geq 0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0,\ f \in C([a,\ b] \times [0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty)), f(x,\ 0) \neq 0$ pour $x \in [a,\ b]$ et $I_j \in C([0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty)), j = 1,2,\ldots,n$.

Dans le papier de [3], l'étude porte sur le problème :

$$\begin{cases} \left(\rho(x)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' - s(x)\,|u|^{p-2}u + \lambda f(x,\ u) = 0 \ x \in [a,\ b], \\ -\triangle\left(\rho(x_j)\left|u'(x_j)\right|^{p-2}u'(x_j)\right) = I_j(u(x_j)) \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ \alpha_1 u'(a) - \alpha_2 u(a) = A, \ \ \beta_1 u'(b) + \beta_2 u(b) = B. \end{cases}$$

Où $A,\ B$ sont des constantes, $0 < \rho(a),\ \rho(b) < +\infty$; $f \in C([a,\ b] \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $I_j \in C(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, λ est un paramètre. Les auteurs ont prouvé l'existence et la multiplicite de solutions faibles lorsque le paramètre se trouve dans des intervalles différents, en utilisant la théorie du point critique.

En utilisant le méthode variationnelle, dans [2] les auteurs ont prouvé l'existence de trois solutions faibles de problème suivante :

$$\begin{cases} -\left(\rho(x)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' + s(x)|u|^{p-2}u = \lambda f(x,\ u) + \mu g(x,\ u) \ \ x \in]a,\ b[\,, \\ u(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Avec $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$ sont des nombres réels: $f,\ g : [a,\ b] \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions de Caratheodory sur L^1.

Le but de ce chapitre étudions l'existence et la multiplicité des solutions faibles non null du problème (3.1) en utilisant le théorème de Browder [20].

3.2 Résultat préliminaire

Nous nous intéressons à l'existence des solutions faibles non triviales du problème (3.1), nous considérons donc l'espace de Banach réflexif et séparable X, défini par

$$X = \left\{u \in W^{1,\,p}([0,\ T]) : \ u(0) = u(T) = 0\right\}, \tag{3.2}$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^p + \int_0^T s(x)|u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Soit $v \in X$, multiplions l'équation $-\left(\rho(x)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' + s(x)|u|^{p-2}u = f(x,\ u)$ par v et intégrons entre 0 et T, nous obtenons

$$-\int_0^T \left(\rho(x)\left|u'(x)\right|^{p-2}u'(x)\right)' v(x)\,dx + \int_0^T s(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\,dx = \int_0^T f(x,\ u(x))v(x)\,dx. \tag{3.4}$$

De plus, puisque $v(0)=v(T)$ et $\triangle\left(\left|u^{'}(x_j)\right|^{p-2}u^{'}(x_j)\right)=I_j(u(x_j))\,,$

l'inégrale $-\int\limits_0^T\left(\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\right)^{'}v(x)\,dx$ donne

$$\begin{aligned}
-\int\limits_0^T\left(\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\right)^{'}v(x)\,dx &= \sum_{j=0}^{n}\int\limits_{x_j^+}^{x_{j+1}^-}-\left(\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\right)^{'}v(x)\,dx \\
&= \int\limits_0^T\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\,v^{'}(x)\,dx \\
&= \int\limits_0^T\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\,v^{'}(x)\,dx \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\rho(x_j)\,\Delta\left(\left|u^{'}(x_j)\right|^{p-2}u^{'}(x_j)\right)v(x_j) \\
&= \int\limits_0^T\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\,v^{'}(x)\,dx \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\rho(x_j)\,I_j(u(x_j))\,v(x_j)\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.5) dans (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^T\rho(x)\left|u^{'}(x)\right|^{p-2}u^{'}(x)\,v^{'}(x)\,dx+\int\limits_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p-2}u(x)\,v(x)\,dx+\sum_{j=1}^{n}\rho(x_j)\,I_j(u(x_j))\,v(x_j) \\
=\int\limits_0^T f(x,\ u(x))\,v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Alors nous avons la definition suivant :

Définition 3.1 *Une solution faible de* (3.1) *est une fonction* $u\in X$ *telle que*

$$\int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\, v'(x)\, dx + \int_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p-2} u(x)\, v(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j)\, I_j(u(x_j))\, v(x_j)$$
$$= \int_0^T f(x,\ u(x))\, v(x)\, dx. \tag{3.6}$$

pour tout $v \in X$.

Lemme 3.1 [33] *Soit $u \in X$, alors*

$$\|u\|_p^p \leq M_0 \|u\|^p, \tag{3.7}$$

où $M_0 := \max\left\{\frac{1}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]}\rho(x)};\ \frac{1}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]}s(x)}\right\}$.

Preuve. On

$$\begin{aligned}
\int_0^T |u(x)|^p\, dx &\leq \int_0^T \frac{s(x)}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} s(x)} |u(x)|^p\, dx \\
&\leq \int_0^T \frac{\rho(x)}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} \rho(x)} \left|u'(x)\right|^p dx + \int_0^T \frac{s(x)}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} s(x)} |u(x)|^p\, dx \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} \rho(x)};\ \frac{1}{\operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} s(x)}\right\} \\
&\quad \int_0^T \left(\rho(x)\left|u'(x)\right|^p + s(x)\,|u(x)|^p\right) dx \\
&= M_0 \|u\|^p.
\end{aligned}$$

pour tout $x \in [0.T]$. ■

Lemme 3.2 [33] *Soit $u \in X$. alors*

$$\|u\|_\infty \leq \left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|, \tag{3.8}$$

où $\rho_0 := \operatorname{essinf}_{x\in[0,\,T]} \rho(x)$.

Preuve. L'utilisation l'inégalité de Hölder, nous permet d'obtenir l'inégalité (3.8), à savoir

$$\|u\|_\infty \leq \left(T^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|u^{'}\right\|_p \leq \left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|,$$

tels que $\rho_0 := \operatorname{essinf}_{x\in[0,\, T]} \rho(x)$. ■

3.3 Hypothéèses

Afin d'établir l'existence des solutions faibles du problème (3.1) nous proposons les hypothèses suivantes :

Posons $F(x,\, u) = \int_0^u f(x,\, t)\, dt$.

$(H1)$ $f(x,\, u)$ est une fonction décroissante sur u, uniformément sur $x \in [0,\, T]$, et $I_j(u)$ sont des fonctions croissantes avec u.

$(H2)$ Il existe $\alpha_j, \beta_j > 0$ et $\gamma_j \in [1,\, p)$ tels que $|I_j(u)| \leq \alpha_j + \beta_j |u|^{\gamma_j - 1}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $j = 1, 2, \ldots, n$.

$(H3)$ Il existe $c_1, c_2 > 0$ telle que $f(x,\, u) \leq c_1 + c_2 |u|^{p-1}$, pour tous $u \in \mathbb{R}$, $x \in [0,\, T]$.

$(H4)$ Il y a une constante positive $a > 0$ tels que $\lim_{|u|\longrightarrow\infty} \frac{-pF(x,\, u) + f(x,\, u)u}{|u|} \geq a$, uniformément dans $x \in [0,\, T]$.

$(H5)$ $p\int_0^u I_j(s)\, ds - I_j(u)\, u \geq 0$, $\int_0^u I_j(s)\, ds \geq 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

$(H6)$ $\lim_{|u|\longrightarrow\infty} \frac{F(x,\, u)}{|u|^p} = +\infty$, uniformément sur $x \in [0,\, T]$.

$(H7)$ $F(x,\, u)$ est une fonction paire à propos de u et $I_j(u)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions impaires à propos de u, pour tout $x \in [0,\, T]$.

3.4 Résultat principal

Dans la suite, nous énnonçons notre théorème d'existence de la solution faible du problème (3.1).

Théorème 3.1 *Si $0 < c_2 < \frac{1}{M_0}$ et $(H1)-(H3)$ sont vérifiées. Alors le problème (3.1) admet au moins une solution faible.*

On cherche à démontrer l'existence des solutions faibles du problème (3.1) qui sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$\phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \int_0^{u(x_j)} I_j(x)\,dx - \int_0^T F(x,\ u(x))\,dx, \tag{3.9}$$

Proposition 3.1 *La fonctionnelle ϕ est de classe C^1 sur X. Sa différentielle est donnée par*

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi'(u),\ v \right\rangle &= \int_0^T \rho(x) \left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\, v'(x)\,dx + \int_0^T s(x)\,|u(x)|^{p-2}\, u(x)\, v(x)\,dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j)\, I_j(u(x_j))\, v(x_j) \\
&\quad - \int_0^T f(x,\ u(x))\, v(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant ce proposition nous pouvons maintenant démontrer le Théorème (3.1).

Preuve. Pour montrer l'existence de la solution faible du problème (3.1) il suffit de vérifier les conditions du théorème du Browder $[20]$.

On prend les opérateurs $L_1,\ L_2,\ L_3 : X \longmapsto X^*$ défini par

$$\begin{aligned}
\langle L_1(u),\ v\rangle &= \int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\, v'(x)\,dx + \int_0^T s(x)\,|u(x)|^{p-2}\, u(x)\, v(x)\,dx, \\
\langle L_2(u),\ v\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j)\, I_j(u(x_j))\, v(x_j), \\
\langle L_3(u),\ v\rangle &= \int_0^T f(x,\ u(x))\, v(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On pose :

$$\langle \pounds(u),\ v\rangle = \langle L_1(u),\ v\rangle + \langle L_2(u),\ v\rangle - \langle L_3(u),\ v\rangle, \quad \forall u,\ v \in X. \tag{3.12}$$

On peut vérifier aisément qu'une fonction u est solution du problème (3.1) i.e. $\pounds(u) = 0$ dans X^*. Nous devons montrer que $\pounds$ vérifier les conditions de théorème 1.9. Regardons de plus près les propriétés de l'opérateur $\pounds$.

En appliquant l'inégalité de Hölder sur L_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\langle (L_1(u), v)\rangle\right| &= \left|\int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\,v'(x)\,dx + \int_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p-2} u(x)\,v(x)\,dx\right| \\
&\leq \left(\int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^T \rho(x)\left|v'(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^T s(x)\left|v(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

L'utilisation de l'inégalité

$$(a+b)^{\beta}(c+d)^{1-\beta} \geq a^{\beta}c^{1-\beta} + b^{\beta}d^{1-\beta} \tag{3.14}$$

et choisissez

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p} dx & b &= \int_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p} dx, \\
c &= \int_0^T \rho(x)\left|v'(x)\right|^{p} dx & d &= \int_0^T s(x)\left|v(x)\right|^{p} dx,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

l'identité (3.13) devient :

$$\begin{aligned}
\left|\langle L_1(u), v\rangle\right| &\leq \left(\int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^{p} dx + \int_0^T s(x)\left|u(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \left(\int_0^T \rho(x)\left|v'(x)\right|^{p} dx + \int_0^T s(x)\left|v(x)\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|^{p-1}\|v\| \\
&< \infty \qquad \forall u,\ v \in X.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Par conséquent L_1 est opérateur borné de X dans X^*.

D'autre part, l'opérateur L_1 est continu.

En effet, on choisir $v = u_k - u$, on arrive à :

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle L_1\left(u_k\right)-L_1\left(u\right),\ u_k-u\right\rangle\right| \leq \\
&\left(\begin{array}{l}
\int_0^T \rho\left(x\right)\left(\left|u_k'\left(x\right)\right|^{p-2} u_k'\left(x\right)-\left|u'\left(x\right)\right|^{p-2} u'\left(x\right)\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
+\int_0^T s\left(x\right)\left(\left|u_k\left(x\right)\right|^{p-2} u_k\left(x\right)-\left|u\left(x\right)\right|^{p-2} u\left(x\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}
\end{array}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\left(\int_0^T\left(\rho\left(x\right)\left|u_k'\left(x\right)-u'\left(x\right)\right|^p+s\left(x\right)\left|u_k-u\right|^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq\left(\begin{array}{l}
\int_0^T \rho\left(x\right)\left(\left|u_k'\left(x\right)\right|^{p-2} u_k'\left(x\right)-\left|u'\left(x\right)\right|^{p-2} u'\left(x\right)\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
+\int_0^T s\left(x\right)\left(\left|u_k\left(x\right)\right|^{p-2} u_k\left(x\right)-\left|u\left(x\right)\right|^{p-2} u\left(x\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}
\end{array}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\|u_k-u\right\| .
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

La dernière intégrale tend vers 0. Par conséquent L_1 est continu.

La suite (u_k) étant faiblement convergente vers u dans X, et comme l'espace $X \hookrightarrow\hookrightarrow C\left([0,\ T]\right)$ (voir Lemme 3.2) .

Alors u_k converge fortement vers u dans $C\left([0,\ T]\right)$, et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$
f\left(x,\ u_k\left(x\right)\right) \longrightarrow f\left(t,\ u\left(x\right)\right), \quad \forall x \in [0,\ T],
$$

et

$$
\left|f\left(x,\ u_k\left(x\right)\right)\right| \leq \sup_{y\in[-M,\ M]} \left|f\left(x,\ y\right)\right| = K\left(x\right) \in L^1\left([0,\ T]\right).
$$

De plus, la continuité de f, entraine

$$
\int_0^T f\left(x,\ u_k\left(x\right)\right) dt \longrightarrow \int_0^T f\left(x,\ u\left(x\right)\right) dx \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty.
$$

Alors

$$
\left|\left\langle L_3\left(u_k\right)-L_3\left(u\right), v\right\rangle\right| = \left|\int_0^T \left(f\left(x, u_k\left(x\right)\right)-f\left(x, u\left(x\right)\right)\right) v\left(x\right) dx\right| \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.
$$

L'estimation ci-dessus montrent que l'opérateur L_3 est continu. De la même manière, nous montrons que L_2 est continu.

De (3.8) et l'hypothèse $(H3)$ nous obtenons pour tout $u,\, v \in X$

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle L_2(u),\ v\right\rangle\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \rho(x_j)\, I_j(u(x_j))\, v(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left|\rho(x_j)\, I_j(u(x_j))\right| \left|v(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left|\rho(x_j)\right| \left(\alpha_j + \beta_j \left|u(x_j)\right|^{\gamma_j - 1}\right) \left|v(x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|\rho\|_\infty \left(\alpha_j + \beta_j \|u\|_\infty^{\gamma_j - 1}\right) \|v\|_\infty \\
&\leq n\rho_1 \left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha_j + \beta_j \left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma_j - 1}{p}} \|u\|^{\gamma_j - 1}\right) \|v\| \\
&< \infty \qquad \forall u,\ v \in X,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où $\rho_1 = \mathrm{esssup}_{x\in[0,\,T]}\, \rho(x)$.

De plus, en utilisant l'hypothèse $(H3)$ et l'inégalité (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle L_3(u),\ v\right\rangle\right| &= \left|\int_0^T f(x,\ u(x))\, v(x)\, dx\right| \\
&\leq \int_0^T \left|f(x,\ u(x))\right| \left|v(x)\right| dx \\
&\leq \int_0^T \left(c_1 + c_2 |u|^{p-1}\right) \left|v(x)\right| \\
&\leq c_1 T^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_p + c_2 \|u\|_p^{p-1} \|v\|_p \\
&\leq c_1 T^{\frac{p-1}{p}} M_0^{\frac{1}{p}} \|v\| + c_2 \left(M_0^{\frac{1}{p}} \|u\|\right)^{p-1} M_0^{\frac{1}{p}} \|v\| \\
&\leq M_0^{\frac{1}{p}} \left(c_1 T^{\frac{p-1}{p}} + c_2 M_0^{\frac{p-1}{p}} \|u\|^{p-1}\right) \|v\| \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Les estimations (3.18) et (3.19) montrent que les opérateurs L_2, L_3 sont bornés.

Nous concluons immédiatement que la condition (i) du théorème 1.9 est satisfaite (i.e. l'opérateur $\pounds$ est continu et borné).

Maintenant, nous montrons que l'opérateur $\pounds$ est monotone.

l'hypothèse $(H1)$ implique que, pour tout $u,\, v \in X$, on a

$$\begin{aligned}
&\langle \pounds(u) - \pounds(v),\ u - v\rangle \\
= \ & \int_0^T \rho(x)\left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) - \left|v'(x)\right|^{p-2} v'(x)\right)\left(u'(x) - v'(x)\right)dx \\
&+ \int_0^T s(x)\left[|u(x)|^{p-2} u(x) - |v(x)|^{p-2} v(x)\right](u(x) - v(x))\,dx \\
&- \int_0^T (f(x,\ u(x)) - f(x,\ v(x)))(u(x) - v(x))\,dx \\
&+ \sum_{j=1}^{n} (\rho(x_j) I_j(u(x_j)) - \rho(x_j) I_j(v(x_j)))(u(x_j) - v(x_j)) \\
\geq \ & \int_0^T \rho(x)\left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) - \left|v'(x)\right|^{p-2} v'(x)\right)\left(u'(x) - v'(x)\right)dx \\
&+ \int_0^T \left(s(x)|u(x)|^{p-2} u(x) - |v(x)|^{p-2} v(x)\right)(u(x) - v(x))\,dx,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

D'après l'inégalité(3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \pounds(u) - \pounds(v),\ u - v\rangle \ \geq \ & \int_0^T \rho(x)\left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x) - \left|v'(x)\right|^{p-2} v'(x)\right)\left(u'(x) - v'(x)\right)dx \\
&+ \int_0^T s(x)\left(|u(x)|^{p-2} u(x) - |v(x)|^{p-2} v(x)\right)(u(x) - v(x))\,dx \\
\geq \ & \left(\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1}\right)(\|u\| - \|v\|) \\
> \ & 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Par conséquent, l'opérateur $\pounds$ est monotone.

Enfin, nous prouvons que $\pounds$ est coercive.

De (3.7) et (3.8), et implique l'hypothèse $(H2)$, $(H3)$

$$
\begin{aligned}
\langle \pounds(u), u\rangle &= \int_0^T \rho(x)\left|u'(x)\right|^p dx + \int_0^T s(x)\,|u(x)|^p\,dx + \sum_{j=1}^n \rho(x_j)\,I_j(u(x_j))\,u(x_j) \\
&\quad - \int_0^T f(x, u(x))\,u(x)\,dx \\
&= \|u\|^p + \sum_{j=1}^n \rho(x_j)\,I_j(u(x_j))\,u(x_j) - \int_0^T f(x, u(x))\,u(x)\,dx \\
&\geq \|u\|^p - \left|\sum_{j=1}^n \rho(x_j)\,I_j(u(x_j))\,u(x_j)\right| - \int_0^T f(x, u(x))\,u(x)\,dx \\
&\geq \|u\|^p - \sum_{j=1}^n \rho(x_j)\left(\alpha_j + \beta_j\,|u(x_j)|^{\gamma_j - 1}\right)u(x_j) - \int_0^T \left(c_1 + c_2\,|u|^{p-1}\right)|u|\,dx \\
&\geq \|u\|^p - \sum_{j=1}^n \|\rho\|_\infty \left(\alpha_j + \beta_j\,\|u\|_\infty^{\gamma_j - 1}\right)\|u\|_\infty - c_1 T^{\frac{p-1}{p}}\,\|u\|_p - c_2\,\|u\|_p^p \\
&\geq (1 - c_2 M_0)\,\|u\|^p - n\rho_1\left(\alpha_j\left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{p}} + c_1 T^{\frac{p-1}{p}} M_0^{\frac{1}{p}}\right)\|u\| \\
&\quad - n\beta_j\rho_1\left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma_j}{p}}\|u\|^{\gamma_j}. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

si $c_2 \in \left(0, \frac{1}{M_0}\right)$, $\lim_{\|u\|\longrightarrow\infty} \frac{\langle \pounds(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty$. Donc l'opérateur $\pounds$ est coercive si $c_2 \in \left(0, \frac{1}{M_0}\right)$

En conclusion, si $c_2 \in \left(0, \frac{1}{M_0}\right)$ toutes les conditions du théorème 1.9 sont vérifiées, donc le problème (3.1) admet au moins une solution faible $u \in X$. La preuve du théorème 3.1 est ainsi complète. ∎

Exemple 3.1 *Considérons le problème suivantes*

$$
\begin{cases}
-\left((1+\sqrt{x})\left|u'\right|^2 u'\right)' + \frac{1}{2+x}\,|u|^2\,u = f(x, u) \quad \text{dans } [0, \pi]; \\
\Delta\left(\left|u'(x_1)\right|^2 u(x_1)\right) = \sqrt[3]{u(x_1)}; \\
u(0) = u(\pi) = 0,
\end{cases} \qquad (\mathrm{P})
$$

avec $p = 4$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ et $f(x, u) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - c_2 u^3$, $I_j(u(x_1)) = \sqrt[3]{u(x_1)}$, $M_0 = \max\left\{1, \frac{1}{2+\pi}\right\}$. Donc $f(x, u)$ et $I_j(u(x_1))$ satisfaite l'hypothèse $(H1)$.

D'autre part,

$$|I_j(u(x_1))| \leq \alpha_j + \beta_j |u|^{\frac{4}{3}-1} \quad j = 1,$$

et donc $(H2)$ est satisfaite avec $\alpha_j, \beta_j > 0$ et $\gamma_j = \frac{4}{3} \in [1,\ 4)$

Il découle de la condition $(H3)$ que

$$|f(x,\ u)| \leq 1 + c_2 |u|^3,$$

d'où $c_1 = 1$. En conclusion, pour $0 < c_2 < 1$ tout les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées, donc le problème (P) admet au moins une solution faible.

Lemme 3.3 *Supposons que* $(H3) - (H5)$ *vérifient. Alors la fonctionnelle* ϕ *satisfait la condition de Cerami* (C) *.*

Preuve. Pour tout $d \in \mathbb{R}$, nous supposons que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ est borné et

$$\phi(u_k) \longrightarrow d, \quad \phi'(u_k) \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty. \tag{3.23}$$

En allant, si nécessaire, à une sous-suite, nous pouvons supposer que $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans X, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle \phi'(u_k) - \phi'(u),\ u_k - u \right\rangle &= \int_0^T \rho(x) \left(\left|u_k'\right|^{p-2} u_k' - \left|u'\right|^{p-2} u' \right) \left(u_k' - u' \right) dx \\ &+ \int_0^T s(x) \left(|u_k|^{p-2} u_k - |u|^{p-2} u \right) (u_k - u)\, dx \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \left(I_j(u_k(x_j)) - I_j(u(x_j)) \right) (u_k(x_j) - u(x_j)) \\ &- \int_0 (f(x,\ u_k) - f(x,\ u)) (u_k - u)\, dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant le lemme (3.2) et d'après la continuité de f et I_j , $j = 1, 2, \ldots, n$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{n}\rho\left(x_j\right)\left(I_j\left(u_k\left(x_j\right)\right)-I_j\left(u\left(x_j\right)\right)\right)\left(u_k\left(x_j\right)-u\left(x_j\right)\right)\longrightarrow 0 \text{ quand } k\longrightarrow\infty. \tag{3.25}$$

$$\int_0^T\left(f\left(x,\ u_k\right)-f\left(x,\ u\right)\right)\left(u_k-u\right)dx\ \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } k\longrightarrow\infty. \tag{3.26}$$

D'après $\lim_{k\longrightarrow\infty}\phi^{'}\left(u_k\right)=0$ et $u_k\rightharpoonup u$, nous obtenons :

$$\left\langle\phi^{'}\left(u_k\right)-\phi^{'}\left(u\right),\ u_k-u\right\rangle\longrightarrow 0 \text{ quand } k\longrightarrow\infty. \tag{3.27}$$

De $(3.24)-(3.26)$ et (3.27), nous avons :

$$\int_0^T\rho\left(x\right)\left(\left|u_k^{'}\right|^{p-2}u_k^{'}-\left|u^{'}\right|^{p-2}u^{'}\right)\left(u_k^{'}-u^{'}\right)dx+\int_0^T s\left(x\right)\left(\left|u_k\right|^{p-2}u_k-\left|u\right|^{p-2}u\right)\left(u_k-u\right)dx\ \longrightarrow\ 0 \quad \text{quand } k\ \longrightarrow\ \infty, \tag{3.28}$$

d'autre part, l'inégalité (3.21) donne

$$\begin{aligned}\left(\left\|u_k\right\|^{p-1}-\left\|u\right\|^{p-1}\right)\left(\left\|u_k\right\|-\left\|u\right\|\right)\ \leq\ &\int_0^T\rho\left(x\right)\left(\left|u_k^{'}\right|^{p-2}u_k^{'}-\left|u^{'}\right|^{p-2}u^{'}\right)\left(u_k^{'}-u^{'}\right)dx\\ &+\int_0^T s\left(x\right)\left(\left|u_k\right|^{p-2}u_k-\left|u\right|^{p-2}u\right)\left(u_k-u\right),\end{aligned} \tag{3.29}$$

par l'inégalité (3.28) et (3.29), nous trouvons que $\left\|u_k-u\right\|\longrightarrow 0$ quand $k\longrightarrow\infty$. qui représente exactement la condition (i) du définition 1.15.

Maintenant nous montrons que la condition (ii) du la définition 1.15, Supposons par contradiction, qu'il y a de suite (u_k) X, telle que

$$\phi\left(u_k\right)\longrightarrow d,\ \left\|\phi^{'}\left(u_k\right)\right\|.\left\|u_k\right\|\longrightarrow 0,\quad k\longrightarrow\infty, \tag{3.30}$$

et

$$\|u_k\| \longrightarrow \infty, \quad k \longrightarrow \infty. \tag{3.31}$$

De (3.30) , il existe une constante $\varepsilon_1 > 0$, telle que

$$\phi(u_k) - \frac{1}{p}\phi'(u_k)\,u_k \leq \varepsilon_1. \tag{3.32}$$

l'hypothèse $(H4)$ implique que, il existe $L > 0$ tel que $-pF(x,\ u) + f(x,\ u)\,u \geq a\,|u|$, $\forall\,|u| > L$ et $x \in [0,\ T]$. de plus, $-pF(x,\ u) + f(x,\ u)\,u$ est bornée pour $|u| \leq L$ et $x \in [0,\ T]$. Par conséquent, il existe $c > 0$ tel que $-F(x,\ u) + \frac{1}{p}f(x,\ u)\,u \geq \frac{a}{p}|u| - c$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \in [0,\ T]$. En utilisant l'hypothèse $(H5)$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(u_k) - \frac{1}{p}\phi'(u_k)\,u_k &= \sum_{j=1}^{n}\rho(x_j)\int_0^{u_k(x_j)} I_j(x)\,dx - \frac{1}{p}I_j(u_k(x_j))\,u_k(x_j) \\
&\quad + \int_0^T \left(-F(x,\ u_k) + \frac{1}{p}f(x,\ u_k)\,u_k\right)dx \\
&\geq \int_0^T \left(-F(x,\ u_k) + \frac{1}{p}f(x,\ u_k)\,u_k\right)dx \\
&\geq \int_0^T \left(\frac{a}{p}|u_k| - c\right)dx,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

De (3.32) et (3.33), on obtient

$$\int_0^T |u_k|\,dx \leq \frac{p}{a}(Tc + \varepsilon_1) \tag{3.34}$$

Cela veut dire que, il existe ε_2 tel que $\|u_k\|_\infty \leq \varepsilon_2$. $(H3)$ implique il existe deux constantes $c_3,\, c_4 > 0$ telle que

$$F(x,\ u) \leq c_3\,|u| + c_4\,|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R},\ x \in [0,\ T]\,. \tag{3.35}$$

Il découle de l'hypothèse $(H5)$ et (3.35) que

$$
\begin{aligned}
\phi\left(u_k\right) &= \frac{1}{p}\left\|u_k\right\|^p+\sum_{j=1}^{n} \rho\left(x_j\right) \int_0^{u_k\left(x_j\right)} I_j(x)\, dx-\int_0^T F\left(x,\ u_k\right) dx \\
&\geq \frac{1}{p}\left\|u_k\right\|^p-\int_0^T\left(c_3\left|u_k\right|+c_4\left|u_k\right|^p\right) dx \\
&\geq \frac{1}{p}\left\|u_k\right\|^p-c_3 T\left\|u_k\right\|_{\infty}-c_4 T\left\|u_k\right\|_{\infty}^p \\
&\geq \frac{1}{p}\left\|u_k\right\|^p-c_3 T \varepsilon_2-c_4 T \varepsilon_2^p,
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

ce que prouve que $\phi\left(u_k\right) \longrightarrow \infty$ par (3.31), ce qui contredi $\phi\left(u_k\right) \longrightarrow d$ dans (3.30). En conclusion, ϕ satisfait la condition de Cerami (C), ce qui prouve la lemme 3.3. ■

Théorème 3.2 *Supposons que les hypothèses* $(H2)-(H7)$ *sont satisfaites. Alors le problème* (3.1) *admet infiniment des solutions faibles.*

Preuve. Par l'hypothèse $(H7)$, nous savons que ϕ est pair, soit $\eta_k=\sup_{u \in Z_k \cap S_1}\|u\|_p$, par la compacité de l'injection de X dans $L^p([0,\ T])$, nous savons que $\eta_k \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$ (voir lemme 1.2, chapitre 1). Notez que (3.36), nous avons par $(H5)$ et l'inégalité de Hölder, pour tout $u \in Z_k$ et $\|u\|=r_k:=\eta_k^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p-\int_0^T\left(c_3|u|+c_4|u|^p\right) dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p-c_3 T^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_p-c_4\|u\|_p^p \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p-c_3 T^{\frac{p-1}{p}} \eta_k\|u\|-c_4 \eta_k^p\|u\|^p \\
&\geq \frac{\eta_k^{-p}}{p}-c_3 T^{\frac{p-1}{p}}-c_4,
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

comme $r_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$, on a :

$$
\phi(u) \geq \frac{\eta_k^{-p}}{p}-c_3 T^{\frac{p-1}{p}}-c_4 \longrightarrow \infty \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty. \tag{3.38}
$$

par conséquent

$$
b_k:=\inf_{u \in Z_k,\ \|u\|=r_k} \phi(u) \longrightarrow \infty \text{ quand } k \longrightarrow \infty. \tag{3.39}
$$

D'autre part, $(H6)$ implique l'existence d'une constante b, $c > 0$, telle que

$$F(x,\ u) \geq b|u|^p - c,\ \forall u \in \mathbb{R},\ x \in [0,\ T]. \tag{3.40}$$

Comme dans espace normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, notez que $\|.\|_{L^p}$ est une norme de Y_k, il existe donc un constante $\zeta > 0$, telle que

$$\|u\|_p^p \geq \zeta \|u\|^p, \quad \forall u \in Y_k. \tag{3.41}$$

(3.8) et (3.41), et l'hypothèse $(H2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \int_0^{u(x_j)} I_j(x)\, dx - \int_0^T F(x,\ u)\, dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \int_0^{u(x_j)} \left(\alpha_j + \beta_j |u|^{\gamma_j - 1}\right) dx - \int_0^T (b|u|^p - c)\, dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \left(\alpha_j |u(x_j)| + \frac{\beta_j}{\gamma_j} |u(x_j)|^{\gamma_j}\right) - b\|u\|_p^p + cT \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p - b\zeta\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \|\rho\|_\infty \left(\alpha_j \|u\|_\infty + \frac{\beta_j}{\gamma_j} \|u\|_\infty^{\gamma_j}\right) + cT \\
&\leq \left(\frac{1}{p} - b\zeta\right)\|u\|^p + \sum_{j=1}^{n} \rho_1 \left(\alpha_j \left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{p}} \|u\| + \frac{\beta_j}{\gamma_j}\left(\frac{T^{p-1}}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma_j}{p}} \|u\|^{\gamma_j}\right) + cT.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Nous pouvons choisir b, suffisamment grand tel que $\frac{1}{p} - b\zeta < 0$. Ainsi, par l'hypothese $(H6)$ et $(H2)$ qui donnent $p > \gamma_j$, nous affirmons l'existence de constante d_k telles que

$$\phi(u) \leq 0, \quad \text{pour tout } u \in Y_k,\ \|u\| \geq d_k. \tag{3.43}$$

De (3.43) et (3.39), on peut prendre $\tau_k := \max\{d_k,\ r_k + 1\}$, et donc $\varsigma_k := \max_{u \in Y_k,\ \|u\| = \tau_k} \phi(u) \leq 0$. Par conséquent, la fonctionnelle énergie ϕ satisfait les conditions du théorème 1.10. Alors ϕ a infiniment des solutions. De manière équivalente (3.1) un infiniment des solutions faibles. Ce qui complète la preuve. de Théorème 3.2. ■

Exemple 3.2 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} -\left((x+3)\left|u'\right|^{p-2}u'\right)' - (3x^2+1)\left|u\right|^{p-2}u = f(x,\ u) \quad \text{dans } [0,\ \text{T}], \\ \Delta\left|u'(x_j)\right|^{p-2}u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j=1,2,3, \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

On prend $p = 4$, $x_1 = \frac{T}{4}$ et

$$f(x,\ u) = -\eta + \left(\zeta^{-1}+4\right)u^3, \quad \eta > 0 \text{ et } \zeta \text{ est défini par } (3.41).$$

$$I_j(u(x_j)) = \sqrt[3]{u(x_1)}.$$

Remarque 3.1 $(H6)$ *peut être affaiblir que*

$$\lim_{|u|\longrightarrow\infty} \frac{F(x,\ u)}{|u|^p} > (p\zeta)^{-1} \quad \text{uniformément sur } x \in [0,\ T] \tag{3.45}$$

Pour $I_j(u)$, on peut facilement avoir $(H2)$ et $(H7)$ hold.

L'hypothèse $(H5)$ donne

$$\int_0^u I_j(s)\,ds = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} \geq 0$$

$$p\int_0^u I_j(s)\,ds - I_j(u)\,u = 2\sqrt[3]{u^4} \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Quant à l'hypothèse $(H3)$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,\ u) &= -\eta + \left(\zeta^{-1}+4\right)u^3 \\ &\leq \eta + \left(\zeta^{-1}+4\right)|u|^3 \quad \forall u \in \mathbb{R},\ x \in [0,\ T] \end{aligned}$$

donc $(H3)$ est satisfaite.

D'autre part

$$\begin{aligned} F(x,\ u) &= \int_0^u f(x,\ s)\,ds \\ &= -\eta\,|u| + \frac{\left(\zeta^{-1}+4\right)}{4}|u|^4 \end{aligned}$$

donc $F(x,\ u)$ vérifier l'hypothese $(H7)$.

Maintenant, nous allons vérifier l'hypothèse $(H4)$

$$\begin{aligned} -pF(x,\ u)+f(x,\ u)u &= -4\left[-\eta|u|+\frac{\zeta^{-1}+4}{4}|u|^{4}\right]+\left(-\eta+\left(\zeta^{-1}+4\right)u^{3}\right)u \\ &= 4\eta|u|-\eta u \\ &\geq 3\eta|u| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{|u|\longrightarrow\infty}\frac{-pF(x,\ u)+f(x,\ u)u}{|u|} &\geq \lim_{|u|\longrightarrow\infty}\frac{3\eta|u|}{|u|} \\ &= 3\eta. \end{aligned}$$

Alors $(H3)$ est satisfaite avec $a=3\eta$.

Finalement, l'hypothese $(H6)$ donne

$$\begin{aligned} \lim_{|u|\longrightarrow\infty}\frac{F(x,\ u)}{|u|^{4}} &= \lim_{|u|\longrightarrow\infty}\frac{-\eta|u|+\frac{\zeta^{-1}+4}{4}|u|^{4}}{|u|^{4}} \\ &= \frac{\zeta^{-1}+4}{4}>(4\zeta)^{-1} \end{aligned}$$

En conséquence, (3.45) (c.-à-d., $(H6)$) est vrai.

Comme toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites, alors le problème (3.44) admet infiniment des solutions faibles.

Chapitre 4

Anexe1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations

• **Inégalité de Hölder**

Soit $u \in L^p$ et $v \in L^q$. Alors $u.v \in L^1$ et

$$\int |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

• **Inégalité algébrique**

$$(a+b)^\beta (c+d)^{1-\beta} \geq a^\beta c^{1-\beta} + b^\beta d^{1-\beta}.$$

Preuve. Soient $x = \frac{a}{a+b}$ et $y = \frac{c}{c+d}$

$t \longmapsto t^\beta$ est concave donc :

$$\begin{aligned}
& y\left(\frac{x}{y}\right)^\beta + (1-y)\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^\beta \leq 1 \\
\Longrightarrow\ & x^\beta y^{1-\beta} + (1-x)^\beta (1-y)^{1-\beta} \leq 1 \\
\Longrightarrow\ & a^\beta c^{1-\beta} + b^\beta d^{1-\beta} \leq (a+b)^\beta (c+d)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

■

• **Inégalité de Poincaré**

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ (1 \leq p < \infty).$$

• **Inégalité de Minkowski**

Si $p \in [1,\ +\infty[$ et $u, v \in L^p(\Omega)$, alors $u + v \in L^p(\Omega)$ et

$$\left(\int_{\Omega} |u+v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié des problèmes elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien soumises à des conditions impulsives. Nous avons présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail. Ainsi, en utilisant les techniques de la théorème de Browder et la théorème de Fountain, nous avons répondu à des questions concernant l'existence et la multiplicité des solutions faibles pour certains types des problèmes elliptiques non linéaires aux limites impulsive dans espace de Banach.

Bibliographie

[1] **R.A. Adams**, Sobolev spaces, Academic press, New york, 1975.

[2] **G. D'Agui, S. Heidarkhani, and G. M. Bisci**, Multiple solutions for a perturbed mixed boundary value problem involving the one- dimensional p-Laplacian, Electronic journal of qualitative theory of differential equations, No. 24, 2013, pp. 1-4, http ://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/, 2013.

[3] **L. Bai, B. Dai**, Existence and multiplicity of solutions for an impulsive boundary value problem with a parameter via critical point theory, Mathematical and computer modelling 53(2011) , pp. 1844-1855, 2011.

[4] **L. Bai and B. Dai,** Three solutions for a p-Laplacian boundary value problem with impulsive effects, Applied mathematics and computation, Vol. 217, no. 24, pp. 9895-9904, 2011.

[5] **D. Bainov and V. Covachev,** Impulsive differential equations with a small parameter, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, Vol. 24, 1994.

[6] **D. Bainov and P. Simeonov,** Systems with impulse effect, Ellis Horwood Series : Mathematics and its applications, chichester, 1989.

[7] **D.Bainov and P. Simeonov,** Impulsive differential equations : Asymptotic properties of the solutions, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, world scientific, singapore, Vol. 28, 1995.

[8] **D.Bainov and P. Simeonov,** Oscillation theory of impulsive differential equations, International Publications, Orlando, Fla, USA, 1998

[9] **P. Bartolo, V. Benci, and D. Fortunato**, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity, Nonlinear Analysis : Theory, Method & Applications, Vol. 7, No. 9, pp. 981-1012, 1983.

[10] **Y. Belgaid**, Les injections compactes, théorie et applications, thése de magister, ENS-Kouba, Alger, 2015.

[11] **M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas,** Impulsive differential equations and inclusions, Contemporary mathematics and its applications hindawi publishing corporation, 2, (2006).

[12] **I. Bogun**, Existence of weak solutions for impulsive p-Laplacian problem with superlinear impulses, Nonlinear Analysis : Real World Applications, No. 13, pp.2701-2707, 2012.

[13] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[14] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[15] **H. Brezis**, Functional analysis, Sobolev spaces and paricial differential equation, Springer, 2010.

[16] **P. Chen** and **X. H. Tang,** Existence of solutions for a class of p-Laplacian systems with impulsive effects, Taiwanese journal of mathematics, Vol. 16, no. 3, pp. 803-828, 2012.

[17] **P. Chen and X. Tang,** Existence and multiplicity of solutions for second-order impulsive differential equations with dirichlet problems, Applied mathematics and computation, Vol. 218, no. 24, pp. 11775-11789, 2012.

[18] **A. Dishliev and D. Bainov,** Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, International Journal of Theoretical physics, Vol. 29, pp. 655-676, 1990.

[19] **P. Drábek**, The p-Laplacian- mascot of nonlinear analysis, Acta math. Univ comenianae, Vol. LXXVI, 1(2007) , pp. 85-98, 2007.

[20] **P. Drábek, J. Milota**, Methods of nonlinear analysis applications to differential equations, Springer Basel Heidelberg-New york, 2013, doi : 10.1007/978-3-0348-0387-8.

[21] **H. L. Dret**, Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Mathématique et Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, doi : 10.1007/978-3-642-36175-3, 2013.

[22] **D. G. De Figueiredo**, Lectures on the ekeland variational principle with applications and detours, Tata Institute of fundamental research, Springer -Verlag, 1989.

[23] **S. Gao, L. Chen, J. J. Nieto, A. Torres**, Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, Vaccine 24(2006), pp. 6037-6045, doi : 10.1016/j.vaccine.2006.05.018, 2006.

[24] **R. A. George, A. K. Nandakumaran, and A. Arapostathis**, A note on controllability of impulsive systems, Journal of mathematical analysis and applications, 241(2000), pp. 276-283, doi 10.1006/jmaa.1999.6632, http ://www.idealibrary.com.

[25] **E. W. C. V. Groesen,** Variational methods for nonlinear operator equations, Mathematisch centrum, Amsterdam, 1979.

[26] **G. Jiang, Q. Lu**, Imulsive state feedback control of a predator- prey model, Journal of computational and applied mathematics 200(2007), pp. 193-207, doi : 10.1016/j.cam.2005.12.013, 2007.

[27] **O. Kavian**, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, 1993.

[28] **V. Lakshmikantham, D. Bainov and P. Simeonov,** Theory of impulsive differential equations, Series in modern Applied Mathematics, World scientific, New Jersy, Vol. 6, 1989

[29] **S. Li and Z. Q. Wang**, Ljusternik-Schnirelman theory in partially ordered Hilbert spaces, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 354, no. 8, pp. 3207-3227, 2002.

[30] **P. Lindqvist**, Note on the p-Laplace equation -second edition-, Univ. Printing House Jyväskylä, 2017.

[31] **L. Menasria, T. Bouali. R. Guefaifia and M. Biomy**, Existence of weak solutions for p-Laplacian problem with impulsive effects ,Applied sciences, Vol. 22(2020), pp. 128-145, http ://www.researchgate.net/publication/344513779.

[32] **V. D. Mil'man and A. D. Myshkis,** On the stability of motion in the presence of impulses, Sib. Math. J., 1, pp. 233-237, 1960.

[33] **M. K. Moghadam, and H.Kazemi, and J. Henderson**, Existence results for second-order boundary- value problems involving lipschitz nonlinearity with small

perturbations of impulses, Dynamics of continuous, Discrete and Impulsive systems, Vol. 23(2016) , pp. 379-397, 2016.

[34] **S. I. Nenov**, Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics , Nonlinear analysis 36(1999) , pp. 881-890.

[35] **A. Qian, and C. Li**, Infinitely many solutions for a robin boundary value problem, Hindawi publishing corporation international journal of differential equations, Article ID 548702, pp. 9, doi : 10.1155/2010/548702, 2009.

[36] **D. O' Regan, Y. J. Cho, Y. Q. Chen**, Topological degree theory and applications, Taylor, Francis Group, LLC, Vol. 10(2006) , pp. 219, 2006.

[37] **J. Rochat**, Les espaces de sobolev, École polytechnique fédérale de lausanne, 2009.

[38] **A. V. Roup et. al.,** Limit cycle analysis of the verge and foliot clock escapement using impulsive differential equations and poincar maps, Int. J. Control, 76, pp. 1685-1698, 2003.

[39] **A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk,** Impulsive differential equations, World scientific, Singapore, 1995.

[40] **M. T. L. Sonrie**r, Distributions, espaces de sobolev applications, ellipses marketing, Paris, 1999.

[41] **Y. Tian, W. Ge**, Applicational methods to boundary value problem for impulsive differential equations, Proc. Edinb. Math. Soc. 51(2008), 509-527.

[42] **L. Wang, W. G. Beijing, and M. P. Jilin**, Infinitely many solutions of a second-order p-Laplacian problem with impulsive condition, Applications of mathematics, 55(2010) , No 5, pp. 405-418, 2010.

[43] **M. Willem**, Minimax theorems, Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, Boston, Vol. 24, doi : 10.1007/978-1-4612-4146-1, 1996.

[44] **J. Xu, Z. Wei, and Y. Ding**, Existence of weak solutions for p-Laplacian problem with impulsive effects, Taiwanese journal of mathematics, Vol. 17, No. 2, pp. 501-515, doi : 10.11650/tjm.17.2013.2081, 2013.

[45] **K. Zhang, J. Xu, and W. Dong**, Weak solutions for a p-Laplacian antiperiodic boundary value problem with impulsive effects, Hindawi publishing corporation, Vol. 2013, Article ID 786548, pp. 8, doi : 10.1155/2013/786548, 2013.

[46] **J. Zhao,** Structure theory of Banach spaces, Wuhan universitu Press, Wuhan, China, 1991.