

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Larbi Tébessi – Tébessa  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil

Polycopié de : Élasticité

Master I – Génie Civil

Spécialité : Structures

Réalisé par

Docteur

Sifeddine Abderrahmani

## INTRODUCTION

Le présent polycopié intitulé « **Élasticité** », qui s'adresse aux étudiants de **Master I – Génie Civil, Spécialité : Structures**. Il est rédigé de manière simplifiée avec des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours.

Le cours est structuré en huit chapitres selon le programme. Le premier chapitre est consacré à une introduction sur la théorie d'élasticité : Généralité, hypothèses fondamentales et rappels de Mathématiques.

Le second chapitre concerne les contraintes : Vecteur, tenseur, équations d'équilibre, contrainte et direction principales et aussi cercles de Mohr des contraintes.

Chapitre 3ème on s'intéresse à l'étude des déformations : Vecteur déplacement, tenseur gradient de la transformation, tenseur de déformation de Green-Lagrange et équations de compatibilité et aussi cercles de Mohr des déformations.

Le quatrième chapitre présente la loi de comportement ou loi constitutive : Loi générale de Hooke, l'influence de la température et l'énergie de déformation.

Le cinquième chapitre présente les équations générales de l'élasticité linéaire : Equations de Lamé, Equations de Beltrami-Michell et Conditions de Saint Venant.

Le 6ème chapitre concerne la résolution des problèmes d'élasticité plane : Contraintes planes, déformation plane, condition aux limites et fonction contrainte ou fonction d'Airy et résolution des problèmes plans par les polynômes.

Le chapitre suivant est basé sur l'étude de la flexion des poutres : Poutre de Timoshenko et poutre de Bernoulli.

Enfin, le 8ème chapitre présente l'étude des plaques minces : Généralité, définition, classification et la théorie des plaques minces.

# SOMMAIRE

## Chapitre 1

### Introduction sur la théorie d'élasticité

1.1	Généralités sur l'élasticité	1
1.2	Hypothèses fondamentales	1
1.2.1	Le principe d'équivalence des actions	1
1.2.2	Le principe de superposition des effets	2
1.2.3	Le principe de superposition des sections	2
1.2.4	Le critère de sécurité	2
1.2.5	Le critère de stabilité de l'équilibre	2
1.3	Rappels de Mathématiques	3
1.3.1	Rappels sur le calcul matriciel	3
1.3.1.1	Addition	3
1.3.1.2	Produit	3
1.3.1.3	Matrice transposée	5
1.3.1.4	Matrices carrées	5
1.3.1.4.1	Matrice identité	5
1.3.1.4.2	Matrice inverse	6

## Chapitre 2

### Théorie de l'état de contraintes

2.1	Vecteur contraintes	8
2.2	Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte	9
2.3	Tenseur de contrainte (formule de Cauchy)	9
2.4	Equations d'équilibre	12
2.5	contrainte principales et direction principales	13

2.6	Cercles de Mohr des contraintes	15
2.6.1	Equation du cercle de Mohr	15
2.6.2	Cercle de Mohr dans le cas d'un état triaxial des contraintes	16
2.6.3	État de contrainte plan	18

### **Chapitre 3**

#### **Théorie de l'état de déformation**

3.1	Vecteur déplacement	22
3.2	Tenseur gradient de la transformation	23
3.3	Tenseur des dilatations	25
3.4	Tenseur de déformation de Green-Lagrange	26
3.5	Tenseur des déformations linéarisé	28
3.6	Equations de compatibilité des déformations	28
3.7	Direction et valeur principale	29
3.8	Cercles de Mohr des déformations	29

### **Chapitre 4**

#### **Loi de comportement**

4.1	Loi générale de Hooke	31
4.2	Influence de la température	33
4.3	Énergie de déformation	34

### **Chapitre 5**

#### **Equations générales de l'élasticité linéaire**

5.1	Equations de Lamé, Equations de Beltrami-Michell	35
5.2	Conditions de Saint Venant	38

## **Chapitre 6**

### **Résolution des problèmes d'élasticité plane**

6.1	Contraintes planes	39
6.2	Déformation plane	40
6.3	Équations d'équilibre	41
6.4	Condition aux limites	42
6.5	Condition de compatibilité	43
6.6	Fonction contrainte ou fonction d'Airy	45
6.7	Résolution des problèmes plans par les polynômes	46

## **Chapitre 7**

### **Flexion des poutres**

7.1	Poutre de Timoshenko	49
7.1.1	Poutre de Timoshenko	49
7.1.1.1	Cinématique	49
7.1.1.2	Equilibre	50
7.1.1.3	Loi de comportement	52
7.1.1.4	Déformée	54
7.1.1.5	Expression des contraintes	54
7.1.2	Poutre de Bernoulli	55
7.1.2.1	Loi de comportement	55
7.1.2.2	Déformée	56

## **Chapitre 8**

### **Etude des plaques minces**

8.1	Généralité sur les plaques	59
8.2	Définition d'une plaque	59
8.3	Plaque circulaire	60

8.4	Classification des plaques	60
8.5	Théorie des plaques minces	61
8.5.1	Hypothèses	61
8.5.2	Champs de déplacement	62
8.5.3	Champs de déformation	63

## Chapitre 1

### Introduction sur la théorie d'élasticité

#### 1.1 Généralités sur l'élasticité :

La théorie de l'élasticité s'occupe, en fait, des mêmes questions que la résistance des matériaux mais d'un point de vue plus rigoureux.

La théorie de l'élasticité concerne les déformations « élastiques » des solides, c'est-à-dire les déformations réversibles — généralement faibles — comme par exemple les vibrations d'une barre métallique ou de la surface d'un tambour.

La théorie de l'élasticité s'intéresse à l'étude des déplacements, déformations et des contraintes dans les solides soumis à des forces extérieures.

Les matériaux doivent être :

- 1) homogène : même propriétés (caractéristique) physiques pour tous les points (masse volumique, densité, Inertie.)
- 2) isotropie : même caractéristique mécanique dans toutes les directions (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , etc...).
- 3) continuité : le matériau reste continu, même après déformation.
- 4) Elasticité : l'évaluation du comportement du matériau reste dans le domaine élastique.

#### 1.2 Hypothèses fondamentales :

La théorie de l'élasticité, repose des principes et des critères très développés et, allant dans le sens de la simplification des méthodes de résolution des problèmes pratiques.

##### 1.2.1 Le principe d'équivalence des actions :

Chaque système de forces extérieures ayant les mêmes paramètres produit le même effet. « Les contraintes et les déformations dans une région éloignée des points d'application d'un système

de forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces ».

### **1.2.2 Le principe de superposition des effets :**

Les forces appliquées à une structure produisent différents effets observables : réactions des liaisons, contraintes et déformations, moments,....

Chacun de ces effets satisfait au principe suivant « l'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces supposée agir séparément ».

### **1.2.3 Le principe de superposition des sections :**

L'hypothèse de Navier-Bernoulli consiste à supposer que les sections restent planes pendant la déformation des poutres. Cette hypothèse est bien vérifiée pour les déformations dues au seul moment fléchissant, mais non à l'effort tranchant et au moment de torsion.

Cela a mené à formuler le principe de Navier-Bernoulli généralisé :

« Deux sections infiniment voisines de la poutre deviennent après déformation deux autres sections infiniment voisines, en général gauches, mais superposables par déplacement. »

### **1.2.4 Le critère de sécurité :**

La résistance d'une construction doit être assurée lorsque les valeurs des forces extérieures sont telles qu'il soit possible qu'elles atteignent des valeurs « **S** » fois plus grandes sans que n'advienne la rupture mais tout en conservant une distribution similaire de ces forces. Le nombre « **S** » est appelé « coefficient de sécurité ». Il doit être suffisamment supérieur à « **1** » et sa valeur doit être confirmée par l'expérience.

### **1.2.5 Le critère de stabilité de l'équilibre :**

En certains cas, il peut arriver que l'équilibre entre les actions extérieures et intérieures, tout en subsistant, ne doit pas être stable et qu'il se développe, par conséquent, une tendance de la structure à se déformer toujours davantage jusqu'à la rupture.

### 1.3 Rappels de Mathématiques :

#### 1.3.1 Rappels sur le calcul matriciel :

##### 1.3.1.1 Addition :

Soit deux matrices  $[A]$  et  $[B]$  de dimensions  $n \times m$ , la matrice  $[C]$  de mêmes dimensions, somme des matrices  $[A]$  et  $[B]$ , sera obtenue en posant que chacun des termes  $c_{ij}$  est égal à

$$a_{ij} + b_{ij}. \quad (1.1)$$

Dans le cas d'une différence des matrices  $[A]$  et  $[B]$ , on posera de la même façon :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (1.2)$$

Exemple : soit les matrices  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  et  $[B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 12 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] - [B] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

##### 1.3.1.2 Produit :

###### ■ Produit d'une matrice par un scalaire

Soit une matrice  $[A]$  de dimensions  $n \times m$ , la matrice  $[C]$ , produit de la matrice  $[A]$  par le scalaire  $\lambda$  sera obtenue en multipliant chacun des termes de la matrice  $[A]$  par  $\lambda$ . On aura donc :

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad (1.3)$$

Exemple :  $[C] = 3 \cdot [A] = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 18 \\ 12 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

■ **Produit de 2 matrices**

Soit deux matrices  $[A]$  et  $[B]$  de dimensions respectives  $n \times m$  et  $m \times l$ , la matrice  $[C]$ , produit des matrices  $[A]$  et  $[B]$ , de dimensions  $n \times l$ ,

Sera obtenue en posant que les termes  $c_{ij}$  sont égaux à :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \times b_{kj} \tag{1.4}$$

Par exemple, on trouvera pour le premier terme :

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1m} \cdot b_{m1}$$

Exemple : soit les matrices  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $[B] = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$[C] = [A] \times [B] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 9 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 9 & 3 \cdot 9 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 15 & 28 \end{bmatrix}$$

■ **Produit de 3 matrices**

Soit trois matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  de dimensions respectives  $n \times m$ ,  $m \times l$  et  $l \times p$ , la matrice  $[F]$ , produit des matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$ , de dimensions  $n \times p$  sera obtenue en effectuant dans un premier temps soit le produit  $[A] \cdot [B]$  soit celui de  $[B] \cdot [C]$ , les deux approches amenant au même résultat.

$$[F] = [A] \cdot [B] \cdot [C] = [A] \cdot ([B] \cdot [C]) = [A] \cdot [D] = ([A] \cdot [B]) \cdot [C] = [E] \cdot [C] \tag{1.5}$$

Exemple :

soit les matrices  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $[B] = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $[C] = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix}$

$$([A] \cdot [B]) \cdot [C] = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2529 & 2880 \\ 4000 & 4609 \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 558 & 621 \\ 131 & 161 \\ 327 & 354 \\ 439 & 317 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2529 & 2880 \\ 4000 & 4609 \end{bmatrix}$$

### 1.3.1.3 Matrice transposée :

Soit la matrice  $[A]$  de dimensions  $n \times m$ , la matrice  $[B]$  de dimensions  $m \times n$  transposée de  $[A]$  (notée  $[A]^T$ ) sera obtenue en posant pour chacun des termes de  $[B]$  que  $b_{ij} = a_{ij}$ . Pratiquement, ce calcul revient à échanger les lignes et les colonnes de la matrice  $[A]$ .

Exemple : soit la matrice  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,

$$[B] = [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.3.1.4 Matrices carrées :

#### 1.3.1.4.1 Matrice identité :

La matrice identité, notée  $[I]$ , est une matrice carrée dont les termes diagonaux sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. De ce fait, le produit de la matrice identité par une matrice  $[A]$  quelconque (ou inversement) est égal à la matrice  $[A]$  elle-même.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad [I] \cdot [A] = [A] \cdot [I] = [A] \quad (1.6)$$

**1.3.1.4.2 Matrice inverse :**

La matrice inverse de  $[A]$  notée  $[A]^{-1}$  est définie telle que  $[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [I]$  et peut être calculée en posant :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \text{com}[A]^T \tag{1.7}$$

où  $\text{Com}[A]$  et  $\det[A]$  sont respectivement la comatrice et le déterminant de la matrice  $[A]$ .

**■ Calcul du déterminant**

- 2 dimensions

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{1.8}$$

- 3 dimensions

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.9}$$

**■ Calcul de la comatrice et la matrice inverse**

La comatrice de  $[A]$ , notée  $\text{Com}[A]$ , correspond à la matrice des cofacteurs de  $[A]$ . Le cofacteur du terme  $i, j$  de la matrice  $[A]$  est obtenu en multipliant par  $(-1)^{i+j}$  le déterminant de la sous-matrice issue de la suppression des lignes  $i$  et colonne  $j$ .

- 1 dimension

$$[A] = a_{11} \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \tag{1.10}$$

- 2 dimensions

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{com}[A] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

- 3 dimensions

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{com}[A] = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} & a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} & a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} & a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{12} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} \\ a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} & a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{bmatrix}$$

## Chapitre 2

### Théorie de l'état de contraintes

#### 2.1 Vecteur contraintes :

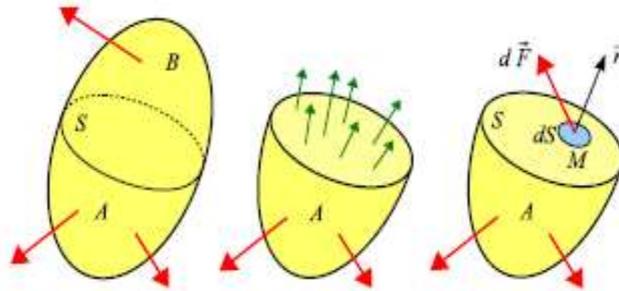


Figure 2.1 : coupure et facette  $\vec{n}$  en M

- Soit un solide soumis à un ensemble des forces extérieures.
- Le solide est décomposé en 2 parties par la surface (s).
- Nous considérons un point M sur la surface (S). Soit dS un élément infinitésimal de surface de (S) entourant le point M. Par ailleurs, nous définissons la normale extérieure n à l'élément dS orientée de **A** vers **B**. L'ensemble de l'élément de surface et de sa normale extérieure est nommé facette.
- La densité surfacique de force  $T(M, n)$  est plutôt appelé vecteur contrainte. Ce nouvel élément mécanique est relatif à un point M du milieu et dépend de l'orientation n de la facette choisie.
- le vecteur contrainte au un point M sur un facette normale (s) aux vecteur unitaire ( $\vec{n}$ ) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{2.1}$$

dF est la résultante des efforts élémentaires qui s'applique sur la facette.

**2.2 Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte :**

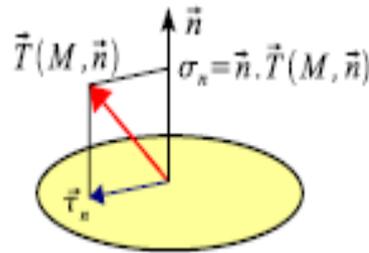


Figure 2.2 : Vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en M

Le vecteur contrainte défini précédemment peut être décomposé suivant la normale à la facette  $n$  et sur le plan tangent à la facette au point M.

On a la relation  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n$  (2.2)

$\sigma_n$  : La contrainte normale

$\tau_n$  : Le vecteur cisaillement ou contrainte tangentielle

$\sigma_n$  est valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression)

\*Remarque :

On a la relation (théorème de Pythagore)

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \tag{2.3}$$

$$T(M, \vec{n}) = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \tag{2.4}$$

$$T^2(M, \vec{n}) = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \tag{2.5}$$

$$\text{Soit : } \tau_n = \sqrt{T^2(M, \vec{n}) - \sigma_n^2} \tag{2.6}$$

**2.3 Tenseur de contrainte (formule de Cauchy) :**

Nous écrivons l'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit défini autour d'un point M du solide.

Soit MABC ce tétraèdre appuyé sur les axes d'un repère associé à la base définie précédemment (Figure 2.3).

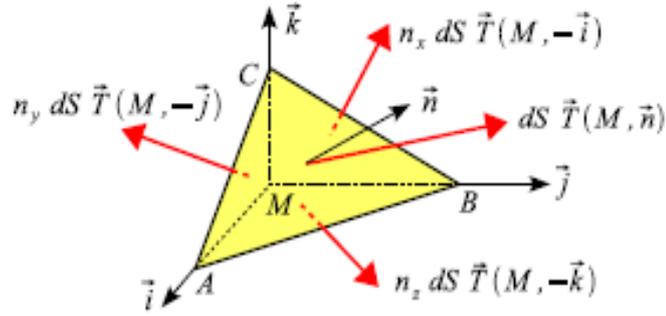


Figure 2.3 : Equilibre du Cauchy

Nous avons donc :

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 2ds \cdot \vec{n} = 2ds \cdot n_x \cdot \vec{i} + 2ds \cdot n_y \cdot \vec{j} + 2ds \cdot n_z \cdot \vec{k} \quad (2.7)$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = (\overline{MB} - \overline{MA}) \wedge (\overline{MC} - \overline{MA}) = \overline{MB} \wedge \overline{MC} - \overline{MB} \wedge \overline{MA} - \overline{MA} \wedge \overline{MC} \quad (2.8)$$

On en déduit par identification :

$$\overline{MB} \wedge \overline{MC} = 2ds \cdot n_x \cdot \vec{i} \quad (2.9)$$

$$\overline{MB} \wedge \overline{MA} = 2ds \cdot n_z \cdot \vec{k} \quad (2.10)$$

$$\overline{MA} \wedge \overline{MC} = 2ds \cdot n_y \cdot \vec{j} \quad (2.11)$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces :

$$\vec{T}(M, \vec{n})ds + \vec{T}(M, -\vec{i})dsn_x + \vec{T}(M, -\vec{j})dsn_y + \vec{T}(M, -\vec{k})dsn_z = 0 \quad (2.12)$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{i})n_x - \vec{T}(M, -\vec{j})n_y - \vec{T}(M, -\vec{k})n_z \quad (2.13)$$

$$\text{On a: } \vec{T}(M, \vec{n}) + \vec{T}(M, -\vec{n}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{n}) \quad (2.15)$$

$$\text{Donc : } \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{i})n_x + \vec{T}(M, \vec{j})n_y + \vec{T}(M, \vec{k})n_z \quad (2.16)$$

$$\text{Soit : } \vec{T}(M, \vec{n}) = [\boldsymbol{\sigma}(M, \vec{n})]\{\mathbf{n}\} \text{ (formule de Cauchy)} \quad (2.17)$$

Ou :  $[\sigma(M)]$  est le **tenseur** des contraintes en M

$\vec{T}(M, \vec{n})$  est le vecteur contrainte qui agit sur une facette normale au vecteur unitaire ( $\vec{n}$ )

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (2.18)$$

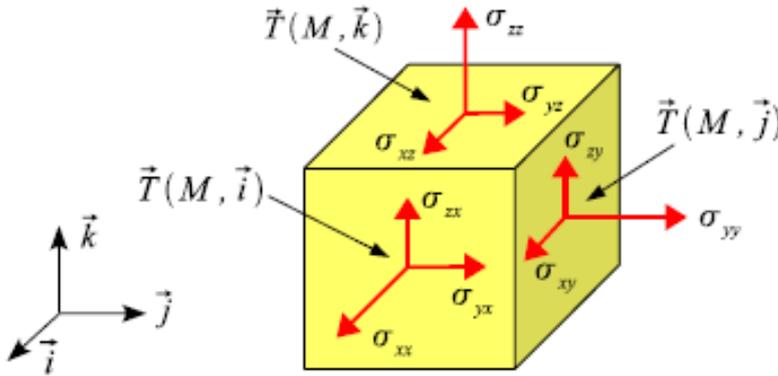


Figure 2.4 : Vecteur contraintes sur les facettes  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  en M

Les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k} \quad (2.19)$$

$$\vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k} \quad (2.20)$$

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \quad (2.21)$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

La contrainte normale sur la facette  $\vec{n}$  en M est égale :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M, \vec{n})] \{n\} \quad (2.23)$$

$$\sigma_n = \{n_x, n_y, n_z\} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

2.4 Equations d'équilibre :

Nous allons écrire l'équation d'équilibre sur un parallélépipède infiniment petit qui a pour origine le point M du solide (figure 2.5).

Soit  $f$  le vecteur des forces de volume  $f(f_x, f_y, f_z)$

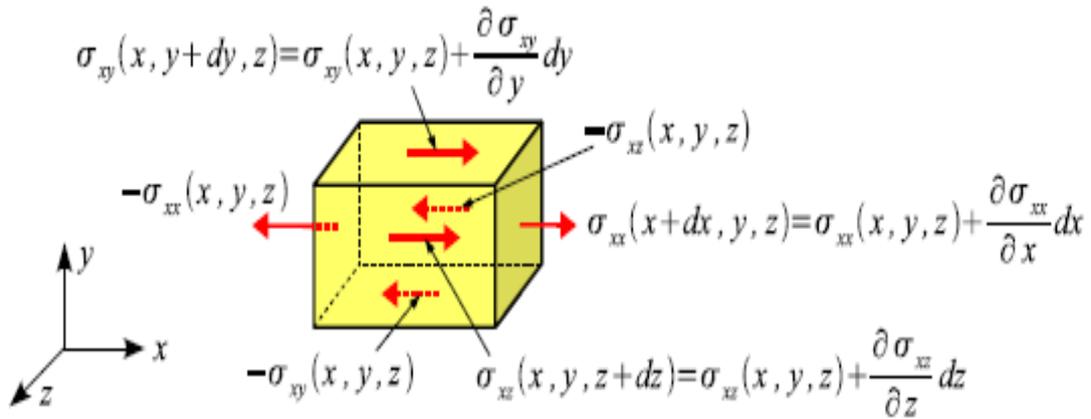


Figure 2.5 : équations d'équilibre

-équation translation :

$$\sum f_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy - \sigma_{xz} dxdy + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \sigma_{xy} dx dz + f_x dxdydz = 0 \tag{2.25}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz + f_x dxdydz = 0 \tag{2.26}$$

On simplifie par dx dy dz on aura :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \tag{2.27}$$

De la même manière, on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (2.29)$$

### 2.5 Contrainte principales et direction principales :

Un vecteur unitaire  $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$

Nous avons vu d'après la formule de Cauchy que le vecteur contrainte  $T(M, n)$  peut être calculé en appliquant le tenseur  $\sigma$  au vecteur direction  $n$  de la facette en question.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M, \vec{n})]\{n\} \quad (2.30)$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (2.31)$$

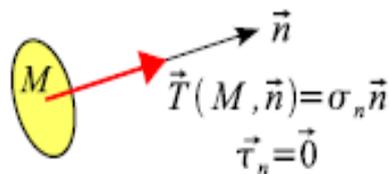


Figure 2.6 : face et contrainte principale en M

Il existe en M, une direction ( $\vec{n}$ ) on le vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n}$  c'est-à-dire que la composante tangentielle est nulle.

Les directions  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  sont les directions principales.

La valeur de T est dite principale.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M, \vec{n})]\{n\} = \sigma_n \vec{n} \quad (2.32)$$

D'un point de vue mathématique, la recherche d'une direction principale et d'une valeur principale revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$[\sigma(M)]\{n\} - \sigma_n \{n\} = 0 \quad (2.33)$$

Et donc à écrire

$$([\sigma(M)] - \sigma_n [I])\{n\} = 0 \quad (2.34)$$

Ou  $[I]$  est la matrice unité,  $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , soit  $(n)=0$ .

$$\text{On la solution : } \det ([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) = 0 \quad (2.35)$$

$$\text{Soit : } \det \left( \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.36)$$

$$P(\sigma_n) = 0$$

$P(\sigma_n)$  : Polynôme caractéristique de 3<sup>ème</sup> degré.

- les contraintes principales notées :  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$

$$\det ([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (2.37)$$

$-I_1, I_2$  et  $I_3$  sont des invariants (tenseur  $[\sigma(n)]$ ).

$$I_1 = \text{tr}(\sigma(M)) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr}(\sigma(M)))^2 - \text{tr}(\sigma(M)^2) \right] = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$I_3 = \det(\sigma(M)) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.40)$$

- dans le repère principale des vecteur unitaire sont  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  et ce tenseur sera donné par

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Les composantes du vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  sont :

$$\vec{T} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = [\sigma(M)]\{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Où  $n_1, n_2$  et  $n_3$  sont les composantes de  $\vec{n}$ . Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.42)$$

On en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2.43)$$

On obtient l'ellipsoïde **de Lamé** dont les axes sont les directions principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$

## 2.6 Cercles de Mohr des contraintes :

### 2.6.1 Equation du cercle de Mohr :

On considère la famille de facettes contenant la direction  $\vec{n}_3$ . (Figure 2.7) Soit la facette de normale  $n$  ( $n_1 = \cos\theta, n_2 = \sin\theta, n_3 = 0$ ) dans le repère principal  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  Sur cette facette les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos\theta \\ \sigma_2 \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  est donc situé dans le plan  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ .

Soit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire, situé dans le plan  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$  et faisant avec  $\vec{n}$  un angle égal à  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\{t\} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projetons le vecteur contrainte sur les axes  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad (2.44)$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{n\} = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (2.45)$$

Soit :

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad (2.46)$$

Avec

$$d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

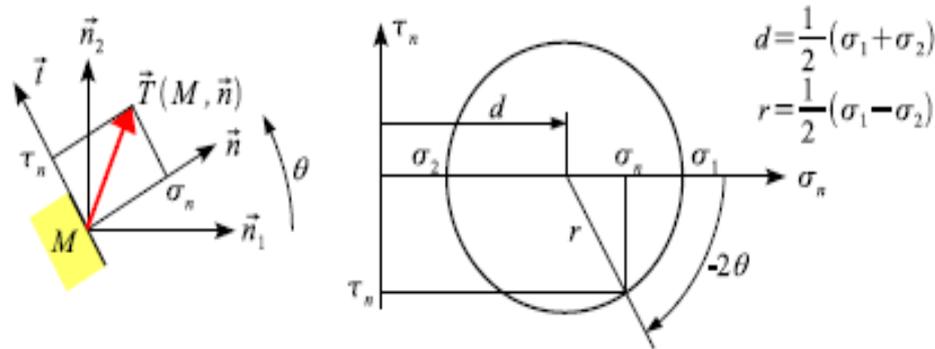


Figure 2.7 : Cercle de Mohr des contraintes

### 2.6.2 Cercle de Mohr dans le cas d'un état triaxial des contraintes :

Soit  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$  le vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en M. les relations :

$$\begin{cases} \sigma_n = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \\ \sigma_n = \{n_1, n_2, n_3\} \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix} \\ \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} \{n\}^T \{n\} = 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\begin{cases} T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \end{cases} \quad (2.49)$$

Dans le repère principal  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  :

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Si les trois contraintes principales, on en déduit :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{cases} \quad (2.51)$$

On suppose que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , les inégalités :

$$n_1^2 \gg 0, n_2^2 \gg 0, n_3^2 \geq 0$$

$$\text{S'écrivent : } \begin{cases} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

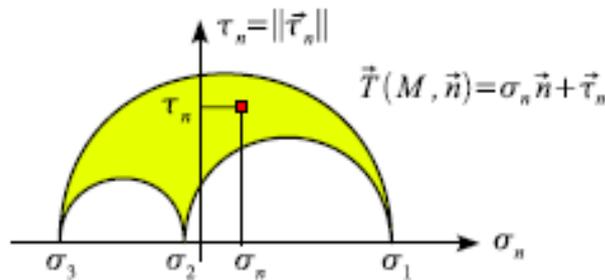


Figure 2.8 : cercle de Mohrs des contraintes

-à l'extérieur du demi-cercle de centre  $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ , et de rayon  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ .

-à l'extérieur du demi-cercle de centre  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ , et de rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

-à l'intérieur du demi-cercle de centre  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$ , et de rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

2.6.3 État de contrainte plan :

Le tenseur des contraintes soit de la forme (Figure 2.9) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

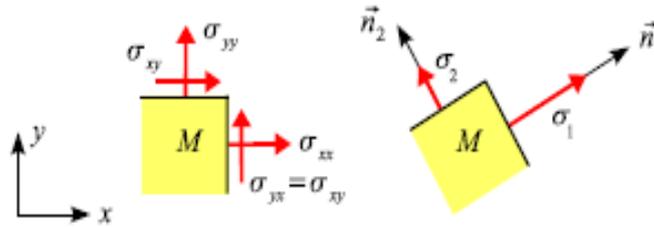


Figure 2.9 : état de contrainte plan : composantes du tenseur des contraintes

La direction  $\vec{k}$  est direction principale et la contrainte principale est nulle :

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \vec{n}_3 = \vec{k}$$

Les deux autres directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M, \vec{n})]\{n\} \tag{2.53}$$

Avec :  $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$

Soit :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$  (2.54)

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}\cos\alpha + \sigma_{xy}\sin\alpha \\ \sigma_{xy}\cos\alpha + \sigma_{yy}\sin\alpha \end{Bmatrix} \tag{2.55}$$

On a:

$$\sigma_n = \{n\}^T \vec{T}(M, \vec{n}) \tag{2.56}$$

$$\sigma_n = \{\cos\alpha, \sin\alpha\} \vec{T}(M, \vec{n}) \tag{2.57}$$

$$\sigma_n = \sigma_x(\cos\alpha)^2 + \sigma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_y(\sin\alpha)^2 \tag{2.58}$$

$$\sigma_n = \sigma_x(\cos\alpha)^2 + \sigma_y(\sin\alpha)^2 + 2\sigma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha \tag{2.59}$$

Soit :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.60)$$

- dans la facette  $\vec{j}$  (figure 2.10) :  $\tau_n = \vec{t}\vec{T}(M, \vec{n}) = -\sigma_{xy}$  (2.61)

Avec :  $\{n\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}$

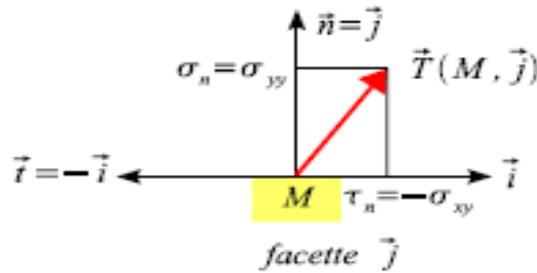


Figure 2.10 : état de contrainte plan : facette  $\vec{j}$

$$\tau_n = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha \\ \sigma_{xy} \cos\alpha + \sigma_{yy} \sin\alpha \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\tau_n = -\sigma_x \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_{xy} (\sin\alpha)^2 + \sigma_{xy} (\cos\alpha)^2 + \sigma_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad (2.63)$$

Soit :

$$\tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.64)$$

-  $\sigma_n$ : contrainte principale  $\rightarrow \tau_n = 0$

$$-\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

Soit :

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.65)$$

-les deux directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\} \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.68)$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution  $n_x = n_y = 0$  que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad (2.69)$$

Soit :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n) - (\sigma_{xy})^2 &= 0 \\ \sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x\sigma_y - (\sigma_{xy})^2 &= 0 \\ \Delta &= (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\sigma_{xy})^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Les contraintes principales :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\sigma_{xy})^2} \quad (2.71)$$

On en déduit la construction géométrique du cercle de Mohr (Figure 2.11), on mesure à l'aide d'une règle les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , puis à l'aide d'un rapporteur l'angle  $2\theta_1$ .

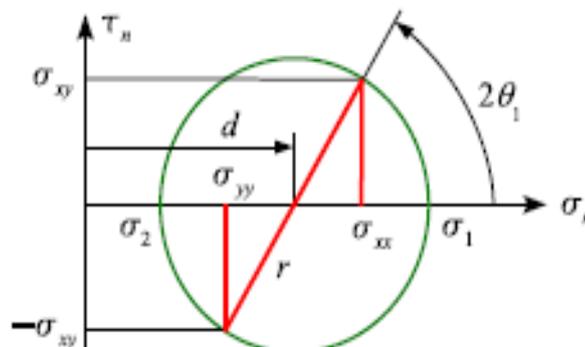


Figure 2.11 : Cercle de Mohr

- Dans un repère principal :

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_{xy} = 0 \quad (2.72)$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_n = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (2.73)$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = A \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\begin{cases} \sigma_n = A + R \cos 2\alpha \\ \tau_n = -R \sin 2\alpha \end{cases} \quad (2.75)$$

Soit :

$$(\sigma_n - A)^2 + \tau_n^2 = R^2 \quad (2.76)$$

### Chapitre 3 Théorie de l'état de déformation

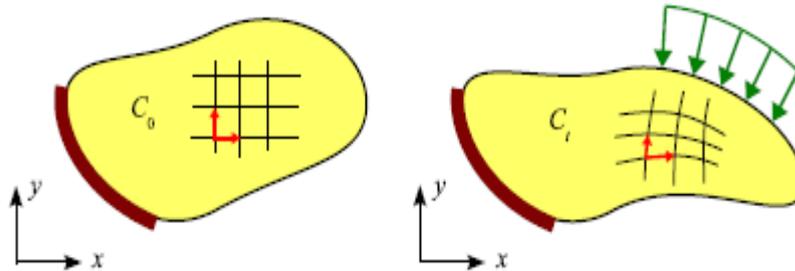


Figure 3.1 : Déformation dans un solide

- sous l'action des forces appliquées, le point du solide se déplace, il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des variations de longueur et des variations d'angle appelées **déformations**.

#### 3.1 Vecteur déplacement :

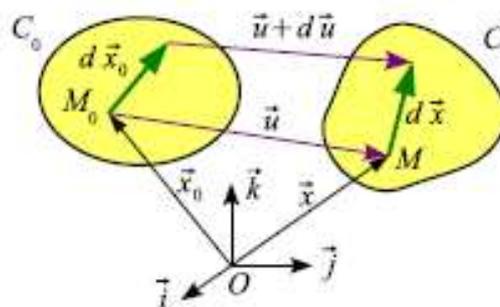


Figure 3.2 : Transformation d'un point et d'un vecteur

Au cours de la transformation imposée par les sollicitations extérieures, le solide passe d'une configuration initiale notée  $C_0$  à une configuration  $C_t$  à l'instant  $t$ . Au cours du chargement une particule de matière en  $M_0$  de coordonnées initiales  $X_0$  se déplace pour occuper une position au point  $M$  de coordonnées  $X$ .

$$C_0: \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{X_0} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad (3.1)$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$C_t: \overrightarrow{OM} = \vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (3.3)$$

On appelle Vecteur déplacement du point  $M_0$  le vecteur :

$$\vec{U} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \quad (3.4)$$

$$\vec{U} = \vec{X} - \vec{X}_0 \quad (3.5)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

-  $u, v$  et  $w$  sont des fonctions continues et dérivables de  $x_0, y_0$  et  $z_0$ .

-  $x_0, y_0$  et  $z_0$  sont les **coordonnés de Lagrange**.

- l'équation (3.6) définit la transformation qui fait passer le solide de la configuration initiale  $C_0$  à la configuration  $C_t$ .

### 3.2 Tenseur gradient de la transformation :

Comme nous l'avons vu précédemment, l'application des actions mécaniques sur un milieu induit des déplacements relatifs des particules du matériau. Il en résulte des variations d'angle et des variations de longueur.

Si l'on suit le mouvement d'une particule qui à l'instant initiale  $t_0$  occupe la position  $M_0$  et la position  $M$  à l'instant  $t$  on peut écrire la relation suivante :

$$d\vec{U} = d\vec{X} - d\vec{X}_0 \quad (3.7)$$

Ou bien

$$d\vec{X} = d\vec{X}_0 + d\vec{U} \quad (3.8)$$

Ou :

$d\vec{X}$  : Le vecteur infiniment en M dans la configuration Ct

$d\vec{X}_0$  : Le vecteur infiniment petit en  $M_0$ .

$\vec{U}$  : Le vecteur déplacement de la particule entre les instants  $t_0$  et  $t$ .

$$\{dX_0\} = \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix}, \{dX\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}, \{dU\} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial u}{\partial z_0} dz_0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial v}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial v}{\partial z_0} dz_0 \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial w}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial w}{\partial z_0} dz_0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

L'expression précédente peut aussi se mettre sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\{dx\} = [I] + \{dx_0\} + [L] + \{dx_0\} = ([I] + [L])\{dx_0\} \quad (3.13)$$

$$\{dx\} = [F]\{dx_0\} \quad (3.14)$$

$$\text{Ou : } [F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$[F]$  est le **tenseur gradient de la transformation** ou tenseur gradient de la déformation

- dans le cas d'un problème plan :

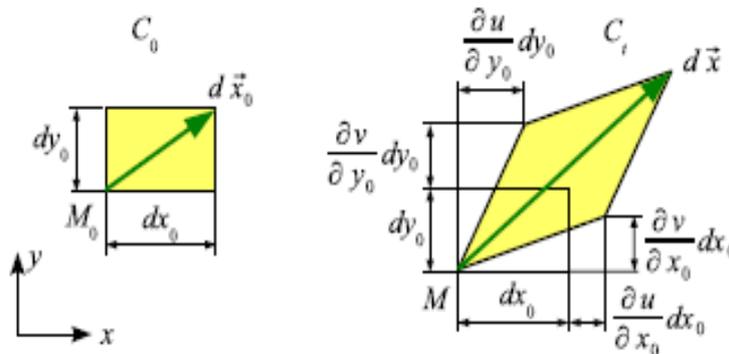


Figure 3.3 : transformation d'un vecteur

$[L]$  peut-être décomposé en sa partie symétrique  $[\varepsilon]$  et sa partie antisymétrique  $[\Omega]$  :

$$[L] = [\varepsilon] + [\Omega] \quad (3.16)$$

$$\text{Avec : } [\Omega] = \frac{1}{2} ([L] - [L]^T) \quad (3.17)$$

$$\text{et : } [\varepsilon] = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) \quad (3.18)$$

Soit :

$$[F] = [I] + [\varepsilon] + [\Omega] \quad (3.19)$$

### 3.3 Tenseur des dilatations :

En un point  $M_0$  on considère deux vecteur  $\{dx_0\}$  et  $\{d\hat{x}_0\}$ , le vecteur  $\{dx_0\}$  devient  $\{dx\}$ , le vecteur  $\{d\hat{x}_0\}$  devient  $\{d\hat{x}\}$ .

$$\{dx\} = [F]\{dx_0\} \quad (3.20)$$

$$\{d\dot{x}\} = [F]\{d\dot{x}_0\} \quad (3.21)$$

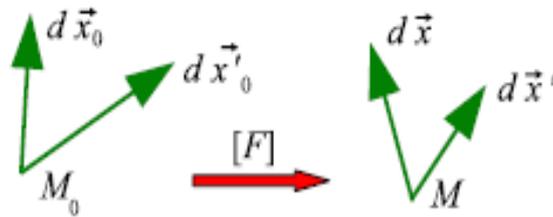


Figure 3.4 : Transformation des Vecteurs  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$

Le produit des deux vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \{d\dot{x}\} = [F]^T \{dx_0\}^T [F] \{d\dot{x}_0\} \quad (3.22)$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx_0\}^T [C] \{d\dot{x}_0\} \quad (3.23)$$

$$\text{Ou : } [C] = [F]^T [F] = ([I] + [L]^T)([I] + [L]) = [I] + [L] + [L]^T + [L]^T [L] \quad (3.24)$$

$[C]$  est le **tenseur des dilatations**

Si  $d\vec{x}'_0 = d\vec{x}_0$ , il vient :

$$\{dx\}^T \{d\dot{x}\} = \{dx_0\}^T [C] \{d\dot{x}_0\} > 0 \quad (3.25)$$

$[C]$  est une matrice définie positive

### 3.4 Tenseur de déformation de Green-Lagrange :

Soit  $ds_0$  la longueur du Vecteur  $d\vec{x}_0$ , la différence  $ds^2 - ds_0^2$  :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx\}^T \{dx\} - \{dx_0\}^T \{dx_0\} = \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\ &= 2\{dx_0\}^T [E] \{dx_0\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{Ou : } [E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \frac{1}{2}(|L|^T + [L]) + \frac{1}{2}|L|^T[L] \quad (3.27)$$

Remarque :

$\frac{1}{2}(|L|^T + [L])$  termes linéaires

$\frac{1}{2}(|L|^T + [L])$  termes non linéaires

$[E]$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

-Si  $[E] = 0$

$$[C] = [F]^T[F] = [I] \text{ d'où } [F]^T = [F]^{-1} \quad (3.28)$$

-Dans le repère  $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Remarque : le tenseur des dilatations s'écrit en fonction du tenseur des déformations :

$$[C] = [I] + 2[E] \quad (3.30)$$

### 3.5 Tenseur des déformations linéarisé :

Le tenseur des déformations :

$$[E] \simeq \frac{1}{2}([L] + |L|^T) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Ou :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (3.32)$$

Le tenseur  $[\varepsilon]$  est appelé tenseur des déformations linéarisé.

$$\text{Le tenseur des dilatations : } [C] = [I] + 2[\varepsilon] \quad (3.33)$$

### 3.6 Equations de compatibilité des déformations :

Les équations (3.32) traduisent qu'il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-même.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3.34)$$

Les équations (3.34) sont appelées les **équations de compatibilité**.

### 3.7 Direction et valeur principale :

L'état des déformations étant représenté par une matrice symétrique à coefficients réels, on montre que dans le cas général il existe trois directions  $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ .

Le tenseur des déformations est représenté dans cette base par :

$$[\varepsilon]_{\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Les quantités  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sont les déformations principales.

La recherche des déformations principales et du repère principal revient à résoudre l'équation :

$$([\varepsilon(M)] - \lambda[I]) = 0 \quad (3.35)$$

### 3.8 Cercles de Mohr des déformations :

Nous allons, comme dans le cas des contraintes, établir que la déformation et la distorsion pour la famille de facettes passant par une direction principale (par exemple  $\varepsilon_3$ ) définissent un cercle dans le plan de Mohr des déformations.

Nous pouvons associer les deux quantités  $\varepsilon_n, \gamma_{nt}$  définies par les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \\ \gamma_{nt} = \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = 2\{t\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = -2\varepsilon_1 \cos \theta \sin \theta + 2\varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.36)$$

Soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_n(\theta) = d + r \cos(-2\theta) \\ \frac{1}{2} \gamma_{nt} = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{Avec : } d = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

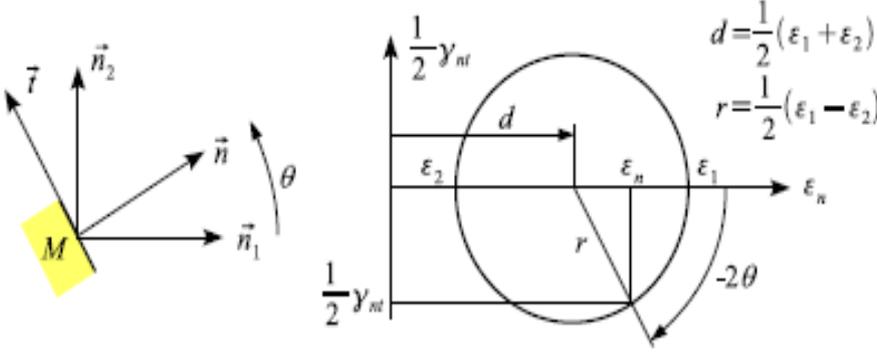


Figure 3.5 : Cercles de Mohrs des déformations

## Chapitre 4

### Loi de comportement

#### 4.1 Loi générale de Hooke :

Cette loi permet de définir la loi de comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène isotrope et pour un état de sollicitation quelconque.

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à six composantes :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Pour un matériaux isotrope, les déformations et les contraintes sont liées par La relation (Loi de comportement ou loi de Hooke) :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.3)$$

Nous écrivons la relation qui lie le tenseur des déformations aux tenseur des contraintes :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (4.4.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (4.4.b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (4.4.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad (4.4.d)$$

Où :

$E$  : Module de Young.

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ est le module d'élasticité transversal.}$$

**Remarque :**

$\nu$  est compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

Nous écrivons la relation (4.4) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Ou bien :  $\{\varepsilon\} = [S].\{\sigma\}$  (4.6)

Cette expression s'inverse sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2u & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2u & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\} \quad (4.8)$$

Avec :  $\lambda$  et  $\nu$  sont les coefficients de Lamé.

Où :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[D] = [S]^{-1} \quad (4.9)$$

#### 4.2 Influence de la température :

$\Delta T$  : Variation de température influe sur le tenseur de déformation.

$$\varepsilon_{xx}^T = \varepsilon_{yy}^T = \varepsilon_{zz}^T = \alpha\Delta T \quad \text{et} \quad \gamma_{xy}^T = \gamma_{xz}^T = \gamma_{yz}^T = 0 \quad (4.10)$$

Où  $\alpha$  : Coefficient de dilatation thermique du solide.

Si un corps quelconque est soumis en plus des forces extérieures, à une variation de température (par superposition).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T \quad (4.11.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T \quad (4.11.b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha\Delta T \quad (4.11.c)$$

En exprimant les contraintes en fonction des déformations, on a :

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T \quad (4.12.a)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T \quad (4.12.b)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T \quad (4.12.c)$$

- Formules de Lamé effet  $T^\circ$  :

Si :

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha(ax + by + cz) \quad (4.13)$$

Alors :

$$\Delta T = ax + by + cz$$

- La déformation volumique s'écrit en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_v = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + 3\alpha\Delta T \quad (4.14)$$

### 4.3 Énergie de déformation :

La densité d'énergie de déformation est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_{th}\}^T)\{\sigma\} &= \frac{1}{2}(\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_{th}\}^T)[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \\ &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon_{th}\} + \frac{1}{2}\{\varepsilon_{th}\}^T[D]\{\varepsilon_{th}\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Où :

$\{\varepsilon_{th}\}$  Représente les déformations thermiques.

## Chapitre 5

### Equations générales de l'élasticité linéaire

#### 5.1 Equations de Lamé, Equations de Beltrami-Michell :

La résolution d'un problème de mécanique requière la plupart du temps l'utilisation d'une équation fondamentale qui puisse s'appliquer un tout point du solide. Nous proposons ici d'utiliser les lois de comportement mises en place dans le chapitre précédent pour établir l'équation fondamentale de l'élastostatique, dite équation de **Lamé-Clapeyron**.

Considérant un système solide de volume  $V$  délimité par la surface  $S$ , l'équation fondamentale de la statique s'exprime :

$$\iiint_V \vec{f}_V dV + \iint_S \vec{f}_S dS = \vec{0} \quad (5.1)$$

Où  $\vec{f}_V$  et  $\vec{f}_S$  sont respectivement les forces volumique et surfacique.

La force surfacique correspond à la contrainte s'exerçant sur un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$ , d'où :

$$\vec{f}_S = \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T} \cdot \vec{n} \quad (5.2)$$

Le théorème d'*Ostrogradsky* permet alors de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\iint_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla}(\vec{T}) dV \quad (5.3)$$

L'équation fondamentale de la statique peut donc se réécrire :

$$\iiint_V \vec{f}_V dV + \iiint_V \vec{\nabla}(\vec{T}) dV = \vec{0} \quad (5.4)$$

Qui devient naturellement une équation locale, vérifiable en tout point du solide :

$$\vec{f}_V + \vec{\nabla}(\vec{T}) = \vec{0} \quad (5.5)$$

Par projection sur les trois axes d'un repère orthonormé, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ f_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ f_3 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow f_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (5.6)$$

Selon la loi de comportement déjà établie entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations, on peut développer le gradient de  $\vec{T}$  :

$$\vec{T} = \lambda \theta \vec{1} + 2u \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{T}) = \lambda \vec{\nabla} \theta + 2u \vec{\nabla}(\vec{E}) \quad (5.7)$$

Où  $\vec{\nabla} \theta = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$  et d'autre part :

$$(\vec{\nabla}(\vec{E}))_i = \sum_j \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \quad (5.8)$$

Soit :

$$(\vec{\nabla}(\vec{E}))_i = \frac{1}{2} \Delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \Delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5.9)$$

Par conséquent, on a :

$$\vec{\nabla}(\vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5.10)$$

Et le gradient du tenseur des contraintes se développe comme :

$$\vec{\nabla}(\vec{T}) = \lambda \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + u \Delta \vec{u} + u \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = u \Delta \vec{u} + (\lambda + u) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5.11)$$

La forme locale de l'équation fondamentale s'écrit alors :

$$\vec{f}_V + \vec{\nabla}(\vec{T}) = \vec{0} = \vec{f}_V + u \Delta \vec{u} + (\lambda + u) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (5.12)$$

Constituant l'équation fondamentale de l'élastostatique, encore appelée **équation de Lamé-Clapeyron**.

En notation indicielle, cette équation s'écrit :

$$\vec{f}_i + u \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + u) \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad (5.13)$$

La résolution d'un problème d'élasticité consiste alors à résoudre cette équation à laquelle il convient d'adjoindre les conditions aux limites.

Une approche différente peut néanmoins être utilisée. Il s'agira alors de déterminer les contraintes s'exerçant sur le système et d'en déduire les déformations subies à l'aide de la loi de comportement élastique :

$$\bar{E} = -\frac{\nu}{E} S \bar{T} + \frac{1+\nu}{E} \bar{T} \quad (5.14)$$

Ou :

$$\vec{f}_V + \vec{V}(\bar{T}) = \vec{0} \quad (5.15)$$

Il est toutefois nécessaire de s'assurer que les composantes du tenseur des déformations obtenues présentent les propriétés d'un tenseur des déformations pures ; autrement dit, il doit exister un champ de déplacement  $\vec{u}$  vérifiant, pour chacun des éléments tensoriels, que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.16)$$

Cette nécessité introduit de fait des conditions portant sur les contraintes ; en plus des conditions aux limites, on doit alors vérifier les 6 équations suivantes, communément appelées « **conditions de Beltrami** » :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (5.17a)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (5.17b)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (5.17c)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (5.17d)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{\partial^2 s}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \quad (5.17e)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (5.17f)$$

**5.2 Conditions de Saint Venant :**

Ces conditions ont été établies par saint venant (1854), leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements.

Les équations de compatibilité sont sous forme développés comme suit :

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial k_x}{\partial y} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial k_y}{\partial x}$$

Les courbures sont données ci-dessous :

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.19)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

## Chapitre 6

### Résolution des problèmes d'élasticité plane

#### 6.1 Contraintes planes :

Exemple : Plaque mince, membrane, dalle planche, etc... Lors d'une dimension négligeable devant les autres.

$$\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

- Le tenseur des contraintes soit de la forme suivante :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

- La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \end{cases} \quad (6.2)$$

Nous écrivons la relation (6.2) sous la forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

L'inversion de ces relations donne :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

D'où la forme du tenseur des déformations est comme suit :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

- Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $u(x; y)$  et  $v(x; y)$  parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

### 6.2 Déformation plane :

- Cas d'un ouvrage de dimension suivant l'axe  $O_z$  est très importante par rapport à celle de  $O_x$  et  $O_y$  ;  $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$

Le champ de déplacement soit de la forme :

$$\begin{cases} U = u(x; y) \\ V = v(x; y) \\ W = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.8.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.8.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.8.c)$$

-La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2u & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

D'où la forme du tenseur des contraintes est comme suit :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Avec :  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  (6.11)

### 6.3 Équations d'équilibre :

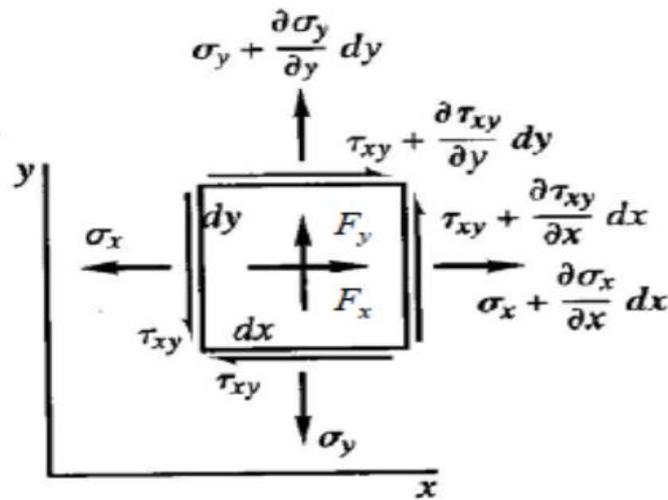


Figure 6.1 : Plaque sollicitée dans son plan

Dans le cas de l'élasticité plane,  $f$  le vecteur des forces de volume  $f(f_x, f_y)$ .

Force de volume nulle.

$$\sum F_x = 0 \quad ;$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx\right) dx - \tau_{xy} dx + X dx dy = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + Xdxdy = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \tag{6.12}$$

Remarque :

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy}$$

Dans la même manière, on obtient :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \tag{6.13}$$

#### 6.4 Conditions aux limites :

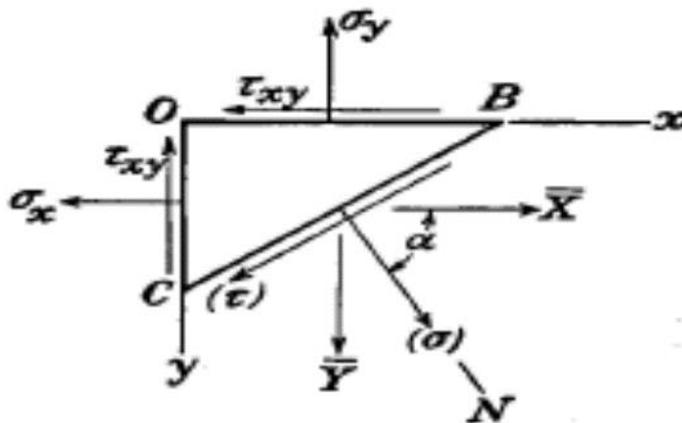


Figure 6.2 : conditions en contrainte plan

$\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  : Fonctions extérieures à la limite.

$\sigma_y, \sigma_{xy}$  : Fonction intérieure.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes sur la figure 6.2 :

$$\sum F_x = 0$$

$$\bar{X} dl - \sigma_x dy - \tau_{xy} dx = 0$$

On a :

$$dx = dl.m \quad ; \quad \cos\alpha = l$$

$$dy = dl.l \quad ; \quad \sin\alpha = m$$

Soit

$$\bar{X} dl = \sigma_x dl.l + \tau_{xy} dl.m$$

On simplifie par  $dl$  on aura :

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (6.14)$$

$$\sum y = 0$$

$$\bar{Y} dl - \sigma_y dx - \tau_{xy} dy = 0$$

$$\bar{Y} dl = \sigma_y dl.m + \tau_{xy} dl.l$$

On simplifie par  $dl$  on aura :

$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{xy} l \quad (6.15)$$

### 6.5 Conditions de compatibilité :

Dans le cas de l'élasticité plane, les déformations  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de  $z$ , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.16)$$

On a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad (6.17.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad (6.17.b)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad (6.18)$$

On a :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y \quad (6.19.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (6.19.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (6.19.c)$$

Donc les conditions de compatibilité sont :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \right] \quad (6.20)$$

On a :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6.21)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.22)$$

On a :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \quad (6.23)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (6.24)$$

$$(6.22) + (6.24) \Rightarrow \frac{2\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (6.25)$$

En remplaçant dans l'équation (6.20) par leurs valeurs données par l'équation (6.25), nous obtenons :

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{E} \left[ 2(1 + \nu) \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \right] \quad (6.26)$$

On simplifie l'équation (6.26), on aura :

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\nu\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (6.27)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0 \quad (6.28)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (6.29)$$

Dans le cas général :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (5.29)$$

### 6.6 Fonction contrainte ou fonction d'Airy :

Équation de compatibilité :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (6.31)$$

Pour résoudre ce problème, Airy a introduit une fonction  $\phi(x; y)$ .

Dite fonction de contrainte telle que :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \quad (6.32)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont négligées, pour vérifier cette solution, il faut faire la vérification de l'équation de compatibilité.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi(x;y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x;y)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial y^2 \partial x^2} = 0 \quad (6.34)$$

Ou bien :

$$\frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial y^4} = 0 \quad (6.35)$$

### 6.7 Résolution des problèmes plans par les polynômes :

Le choix de la résolution des problèmes plans par les polynômes doit obligatoirement satisfaire aux conditions de la fonction d'Airy.

Dans les cas des poutres ayant une section rectangulaire de faible épaisseur, on peut trouver des solutions pratiquement intéressantes en adaptant comme expression de  $\phi$  des polynômes de divers degrés et en ajustant leurs coefficients de façon adéquate.

a) Polynôme de 2<sup>ème</sup> degré :

$$\phi_2(x; y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \quad (6.36)$$

-La vérification de l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi(x;y)}{\partial y^4} = 0 \quad (6.37)$$

Est vérifiée. Donc Les contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2c_2 ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2a_2 \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -b_2 \quad (6.38)$$

b) Polynôme de 3<sup>ème</sup> degré :

$$\phi_3(x; y) = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3 \quad (6.39)$$

-La fonction  $\phi_3(x; y)$  est vérifiée.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3(x; y)}{\partial y^2} = 2c_3x + 6d_3y \quad (6.40.a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3(x; y)}{\partial x^2} = 6a_3x + 2b_3y \quad (6.40.b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -(2b_3x + 2c_3y) \quad (6.40.c)$$

c) Polynôme de 4<sup>ème</sup> degré :

$$\phi_4(x; y) = a_4x^4 + b_4x^3y + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 + e_4y^4 \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial x^4} = 24a_4 ; \quad \frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial y^4} = 24e_4 ; \quad \frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 4c_4$$

$$\frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_4(x; y)}{\partial y^4} = 24a_4 + 8c_4 + 24e_4$$

Il faut que :

$$24a_4 + 8c_4 + 24e_4 = 0$$

-Les contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2} = 2c_4x^2 + 6d_4xy + 12e_4y^2 \quad (6.42.a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = 12a_4x^2 + 6b_4xy + 2c_4y^2 \quad (6.42.b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -(3b_4x^2y + 4c_4xy + 3d_4y^2) \quad (6.42.c)$$

d) Polynôme de 5<sup>ème</sup> degré :

$$\phi_5(x; y) = a_5x^5 + b_5x^4y + c_5x^3y^2 + d_5x^2y^3 + e_5xy^4 + f_5y^5 \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial^4 \phi_5(x; y)}{\partial x^4} = 120d_5x + 24b_5y$$

$$\frac{\partial^4 \phi_5(x; y)}{\partial y^4} = 24e_4x + 120f_5y$$

$$\frac{\partial^4 \phi_5(x; y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 12c_5x + 12d_5y$$

$$\frac{\partial^4 \phi_5}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi_5}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_5}{\partial y^4} = 120d_5x + 24b_5y + 24e_4x + 120f_5y + 24c_5x + 24d_5y$$

Il faut que :

$$120d_5x + 24b_5y + 24e_4x + 120f_5y + 24c_5x + 24d_5y = 0$$

-Les contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = 2c_5x^3 + 6d_5x^2y + 12e_5xy^2 + 20f_5y^3 \quad (6.44.a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = 20a_5x^3 + 12b_5x^2y + 6c_5xy^2 + 2d_5y^3 \quad (6.44.b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -(4b_5x^3 + 6c_5x^2y + 6d_5xy^2 + 4e_5y^3) \quad (6.44.c)$$

## Chapitre 7

### Flexion des poutres

La construction d'une théorie de poutre consiste à reprendre, pour un milieu curviligne (Formé par des lignes courbes), le cheminement suivi pour le milieu continu. Les étapes successives du traitement sont donc la définition d'une cinématique, l'application des équations d'équilibre, l'introduction de lois de comportement. On en déduit des relations globales entre force, couples, flèches et angles de rotation des sections.

#### 7.1 Poutre Isotrope :

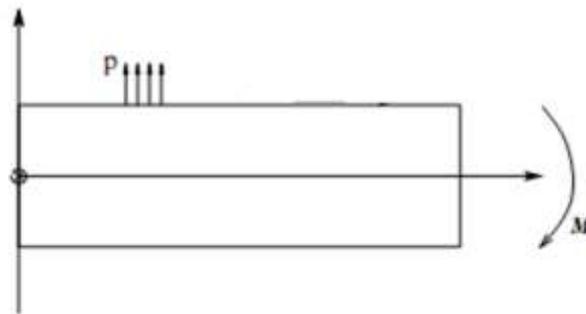


Figure 7.1 : Géométrie et efforts extérieurs considérés

#### 7.1.1 Poutre de Timoshenko :

##### 7.1.1.1 Cinématique :

L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane. En un point quelconque du milieu curviligne, il est donc possible de résumer la solution du problème par la connaissance de trois composantes de déplacement (selon  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), et de trois rotations (de type flexion autour de  $y$  et  $z$ , et de type torsion autour de  $x$ ). Pour le cas d'une poutre plane chargée dans son plan, il ne subsiste que trois inconnues, deux translations de la ligne moyenne (respectivement  $U(s)$  et  $V(s)$  selon  $x$  et  $y$  à l'abscisse  $s$ ), et une rotation

(angle  $\theta(s)$ , caractérisant la flexion autour de  $z$ ). Le champ de déplacement pour un point  $M(x, y, z)$  quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues :

$$u_x = U(s) + \theta_x \quad (7.1)$$

$$u_y = V(s) \quad (7.2)$$

Ces relations sont indépendantes du comportement du matériau. La ligne moyenne est définie par :

$$\int_S y ds = 0 \quad (7.3)$$

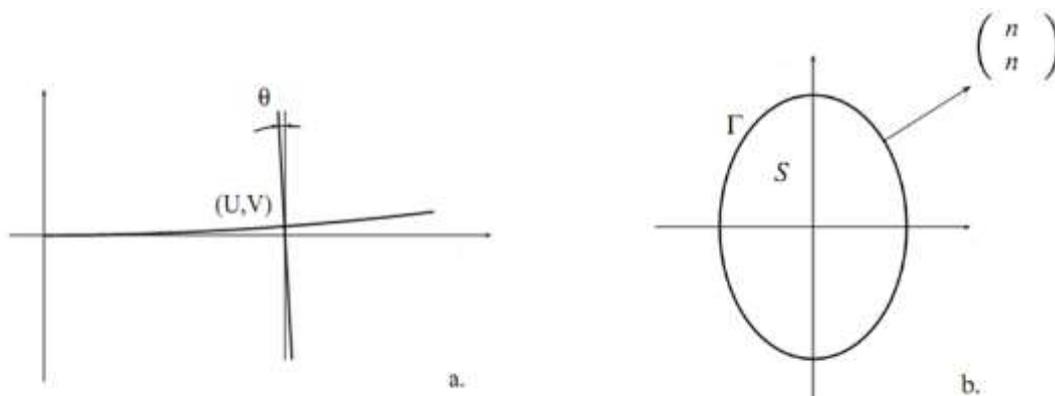


Figure 7.2 : Déplacements et efforts sur une poutre plane, (a) plan de la ligne neutre, (b) section.

Si la section est symétrique par rapport au plan  $x$ - $y$ , ce sera l'axe  $x$ , on fait dans la suite une hypothèse de petites perturbation, ce qui permet d'utiliser simplement  $x$  pour mesurer l'abscisse curviligne  $s$  sur la poutre.

Dans le cas d'une poutre droite, l'abscisse curviligne  $s$  se mesure directement sur l'axe  $x$ , les équations d'équilibre et les équations de comportement doivent alors être comprimées en terme de  $U, V, \theta$  et de  $N, T, M$ , qui désignent respectivement les forces normales et tangentielle à la section droite et le moment de flexion autour de  $z$ .

### 7.1.1.2 Equilibre :

On n'écrit qu'une forme faible de l'équilibre, en considérant uniquement la résultante sur la section  $S$ , en l'absence de force de volume, les équations d'équilibre s'écrivent :  $\sigma_{ij,i} = \mathbf{0}$  ce qui donne :

$$\int_S \sigma_{xx,x} ds + \int (\sigma_{xz,z} + \sigma_{xy,y}) ds = 0 \quad (7.4)$$

- (a) La première intégrale est la dérivée par rapport à x de l'effort normale N,
- (b) En transformant la seconde intégrale sur le contour extérieur  $\Gamma$  de la section, il apparaît qu'elle est nulle, si le cisaillement sur la surface extérieure est nul, car en notant par  $\eta_z$  et  $\eta_y$  les composantes du vecteur normale à  $\Gamma$ , il vient (théorème de la divergence) :

$$\int_S (\sigma_{xz,z} + \sigma_{xy,y}) ds = \int_{\Gamma} (\sigma_{xz} \cdot \eta_z + \sigma_{xy,y} \cdot \eta_y) ds = 0 \quad (7.5)$$

- (c) Il en résulte que  $N_{,x} = 0$

$$T = \int_S \sigma_{xy} ds \quad (7.6)$$

De la même manière :  $T_{,x} + p = 0$ , ou  $\mathbf{p}$  est la charge linéique répartie sur la poutre, selon la direction y.

Il ne reste plus qu'à considérer la flexion, soit :

$$\int_S y \sigma_{xx,x} ds + \int_S y (\sigma_{xz,z} + \sigma_{xy,y}) ds = 0 \quad (7.7)$$

- (a) La première intégrale désigne la dérivée du moment en flexion  $M_{,x}$
- (b) En l'absence de moment linéique, la seconde intégrale est égale à  $-T$

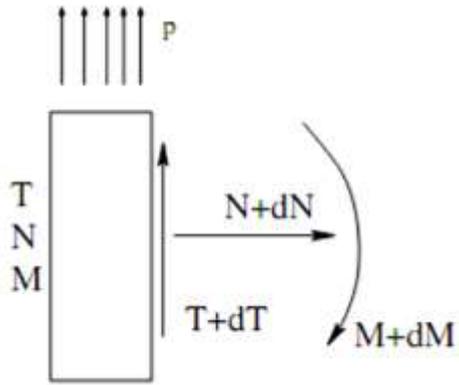
Les relations statique (indépendantes du comportement du matériau) sont donc les suivantes :

$$N_{,x} = 0 ; T_{,x} + p = 0 ; M_{,x} - T = 0$$

$$N = \int_S \sigma_{xx} ds \quad (7.8.a)$$

$$T = \int_S \sigma_{xy} ds \quad (7.8.b)$$

$$M = \int_S y \sigma_{xx} ds \quad (7.8.c)$$



- $\frac{dN}{dx} = 0$
- $dT = -pdx$
- $dM = Tdx$

Figure.7.3 : Equilibre d'une « tranche » de poutre.

### 7.1.1.3 Loi de comportement :

On particularise maintenant la théorie au cas d'un comportement élastique isotrope, en utilisant les relations donnant  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{xy}$  en fonction des contraintes, du module de young  $E$  (module d'élasticité longitudinale) et du coefficient de poisson  $\nu$ ,  $G=\mu$  module de cisaillement (module d'élasticité transversale).

$$\text{Soit } E\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \text{ et } 2\mu\epsilon_{xy} = \sigma_{xy} \tag{7.9}$$

Il en vient en moyenne :

- Pour la déformation selon l'axe x :

$$\int_S \epsilon_{xx} ds = \int_S u_{x,x} ds, \quad u_x = U(s) + \theta y \tag{7.10}$$

$$\int_S \epsilon_{xx} ds = \int_S U_{,x} ds + \int_S (\theta y)_{,x} ds = U_{,x} S \tag{7.11}$$

Si bien Que :

$$N = \int_S \sigma_{xx} ds, \quad \sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} + \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \tag{7.12}$$

$$N = \int_S E\epsilon_{xx} ds + \int_S \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) ds \tag{7.13}$$

$$N = EU_{,x}S + \nu \int_S (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) ds \tag{6.14}$$

- De même :

$$\int_S y \varepsilon_{xx} ds = \int_S y U_{,x} ds + \int_S y (\theta y)_{,x} ds \quad (7.15)$$

$$\theta_{,x} \int_S y^2 ds = \theta_x I \quad (7.16)$$

Avec  $I = \int_S y^2 ds$ , moment quadratique par rapport a z

$$M = \int_S y \sigma_{xx} ds = \int_S y E \varepsilon_{xx} ds + \int_S y \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) ds \quad (7.17)$$

$$M = E \cdot \theta_{,x} \cdot I + \nu \int_S y (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) ds \quad (7.18)$$

$EI$  : rigidité à la flexion.

- Enfin :

$$2 \int_S \varepsilon_{xy} ds = \int_S (u_{x,y} + u_{y,x}) ds = \int_S U_{x,y} ds + \int_S U_{y,x} ds \quad (7.19)$$

$$2 \int_S \varepsilon_{xy} ds = \int_S U_{,y} ds + \int_S (\theta y)_{,y} ds + \int_S V_{,x} ds \quad (7.20)$$

$$2 \int_S \varepsilon_{xy} ds = (\theta + V_{,x}) \cdot S \quad (7.21)$$

$$T = \int_S \varepsilon_{xy} ds = 2\mu \int_S \varepsilon_{xy} ds = \mu S (\theta + V_{,x}) \quad (7.22)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\mu S$  : rigidité au cisaillement.

- Si les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées devant  $\sigma_{xx}$ , ces relations deviennent :

$$N = ES U_{,x} \quad T = \mu S (\theta + V_{,x}) \quad M = EI \theta_{,x}$$

7.1.1.4 Déformée :

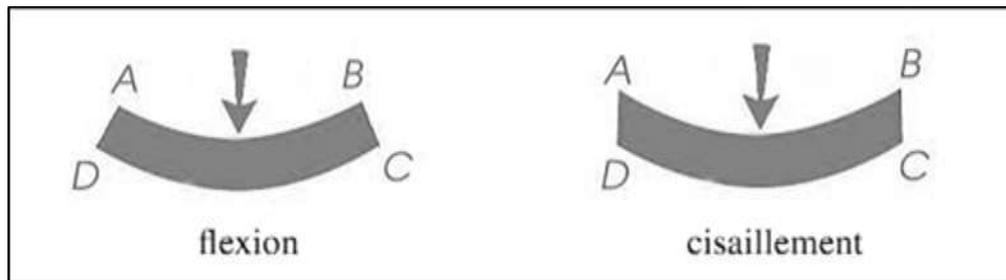


Figure.7.4 : Forme de la déformée de la ligne moyenne

- Le déplacement horizontal s'obtient en intégrant la relation :

$$U_{,x} = N/ES$$

- La rotation relative entre les sections s'obtient en intégrant la relation :

$$\theta_{,x} = M/EI$$

- La flèche est le résultat de la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation elle-même, et l'autre de l'effort tranchant  $\mathbf{T}$  :

$$T = \mu S \theta + \mu S V_{,x} \Rightarrow V_{,x} = -\theta + T/\mu S$$

7.1.1.5 Expression des contraintes :

La Connaissance de U, V et  $\theta$  permet de remonter aux champs de déformation et de contrainte locaux. En continuant à négliger  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  on trouve :  $\sigma_{xx} (\cong E \varepsilon_{xx} = E u_{x,x})$  comme une somme de deux termes, due à l'élongation et à la flexion :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E u_{x,x} = E U_x + E \theta y \tag{7.23}$$

$$\sigma_{xx} = E \frac{N}{ES} + E \frac{M}{EI} y \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{N}{S} + \frac{M}{I} y \tag{7.24}$$

$$2 \int_S \varepsilon_{xy} ds = (\theta + V_{,x}) S \Rightarrow 2 \varepsilon_{xy} S = (\theta + V_{,x}) S \tag{7.25}$$

$$2 \int_S \varepsilon_{xy} = (\theta + (-\theta) + T/\mu S) = \frac{T}{\mu S} \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{T}{S} \tag{7.26}$$

$$\sigma_{xy} = \mu(\theta + V_{,x}) \tag{7.27}$$

### 7.1.2 Poutre de Bernoulli :

La théorie de Bernoulli est une application de la [théorie de l'élasticité](#) isotrope. Pour mener les calculs de résistance des matériaux, on considère les hypothèses suivantes :

- au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne ;
- les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli.

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant.

#### 7.1.2.1 Loi de comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées *loi de comportement*.

✓ Le comportement *axial* est décrit par les équations :

- Cinématique (déformation)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Loi de comportement (Hooke)

$$\sigma = E \varepsilon_x = \frac{N}{S} \Leftrightarrow N = E S \varepsilon_x$$

Où :

$N$  : L'effort normal.

$S$  : La section.

$E$  : Module de Young.

✓ Le comportement *flexionnel* (ou transversal) est décrit par les équations :

- Cinématique (déformation)

La déformation dans la fibre a situé une distance  $z$  de l'axe neutre est :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2w}{dx^2} \tag{7.28}$$

- Loi de comportement (Hooke)

$$\sigma_x = -Ey \frac{d^2w}{dx^2} = E y k_x \tag{7.29}$$

Où :

$$\text{La courbure } k_x = - \frac{d^2w}{dx^2} \quad \sigma_x = \frac{M_x}{I} \cdot y \tag{7.30}$$

Le moment de flexion appliquée nécessaire pour causer la courbure  $k_x$ , est donnée par :

$$M_x = \int \sigma_x y dy = \int E y^2 k_x dy = EI k_x , \text{ Où } I = \int y^2 dy$$

**EI**: La Rigidité flexionnel (produit du module élastique, E, et du moment de l'inertie, I.

**7.1.2.2 Déformée :**

Dans le cas d'une poutre on s'intéresse exclusivement à la forme finale de la fibre neutre, l'équation de  $V(x)$  de cette courbe est appelée « déformée ».

D'après l'hypothèse de Bernoulli, les normales restent perpendiculaires à l'axe déformé, donc l'angle interceptant l'élément  $ds$  vaut donc  $\theta$  et l'on a  $ds = r d\theta$ .

La courbure est ainsi égale à la variation de l'ange :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}$$

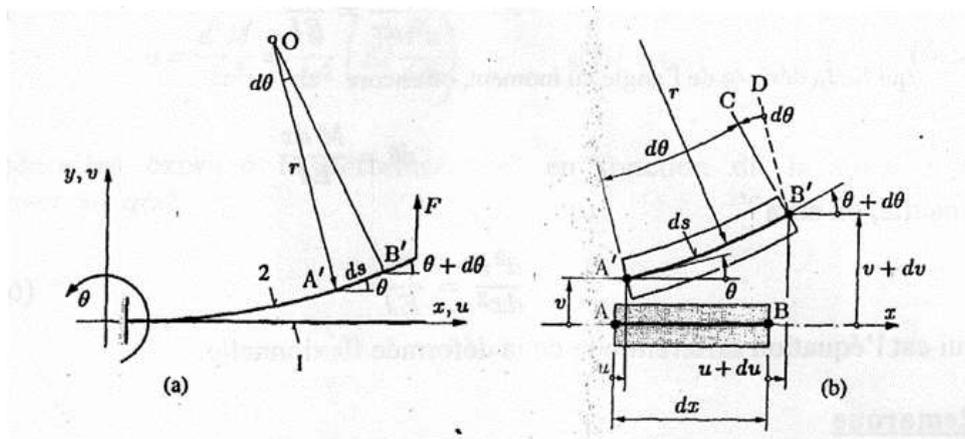


Figure.7.5 : Déplacement en flexion : (a) déformé d'ensemble, (b) déformé de l'élément AB

On introduit maintenant la linéarisation géométrique. Les angles doivent rester petits, d'où

$$tg^2\theta \ll 1tg\theta \cong \theta \cos\theta \cong 1$$

Un élément  $dx$  de l'axe devient  $ds$  dans la configuration déformée (figure 7.5) ; mais, sur l'axe, on a  $\varepsilon = 0$  (plan neutre), et les longueurs  $dx$  et  $ds$  sont égales. La projection de  $ds$  sur  $x$  donne

$$ds \cos\theta \cong ds \cong dx$$

D'où il résulte, puisque :  $u + ds \cos\theta = dx + u + dv$

$$du = 0$$

L'approximation des  $tg^2\theta$ ,  $tg\theta$ ,  $\cos\theta$  permet ensuite de dire que : l'angle de rotation tant des sections droites que l'axe est égale à la pente de déformée

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (7.31)$$

On déduit l'écriture suivante de la courbure :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.32)$$

Et s'exprime donc par la dérivée seconde de la flèche.

Avec  $1/r = M/EI$  on obtient d'abord la relation

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Qui lie la dérivée de l'angle au moment, ou encore :

$$d\theta = \frac{Mdx}{EI} \quad (7.33)$$

Ensuite, on aura :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (7.34)$$

Qui est l'équation différentielle de la déformée flexionnelle.

➤ Equation différentielle des poutres fléchies :

Les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{dV}{dx} = -q \qquad \frac{dM}{dx} = -V \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = q$$

$V(x)$  équation de la déformée

$$\frac{dV}{dx} = \theta \text{ Pente ou rotation}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = EI \frac{d^2V}{dx^2} \qquad (7.35)$$

## Chapitre 8

### Etude des plaques minces

#### 8.1 Généralité sur les plaques :

Il existe différentes configurations de plaques. Dans la littérature, les plaques sont très souvent classées selon leur géométrie (plaque rectangulaire, circulaire), selon les sollicitations subies (charges ponctuelles, réparties), mais également selon leur comportement type (membrane, flexion) et la prise en compte ou non du cisaillement transverse. Pour ce dernier aspect, on distingue les plaques sans cisaillement (souvent minces et homogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Love-Kirchhoff, et les plaques prenant en compte le cisaillement (souvent épaisses et/ou hétérogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Hencky- Mindlin.

#### 8.2 Définition d'une plaque :

On appelle plaque tout corps plan ou prismatique de hauteur "h" (épaisseur) plus petite en comparaison avec les deux autres dimensions longueur "L" et largeur " b" (Fig. 8.1).

En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. Si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la plaque sont différentes selon les directions, la plaque est dite anisotrope (Fig. 8.2).

Dans une plaque on trouve :

Le plan moyen "plan médian, ou feuillet neutre" : plan situé à équidistance entre les faces d'équation  $z = 0$  (équivalent de la ligne moyenne des poutres).

La fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian ou à un endroit  $(x, y)$  donné, elle a pour direction  $z$ .

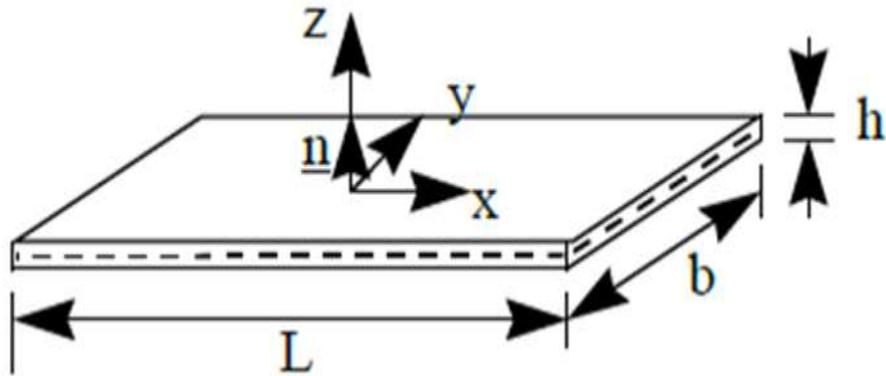


Figure 8.1 : Description géométrique d'une plaque

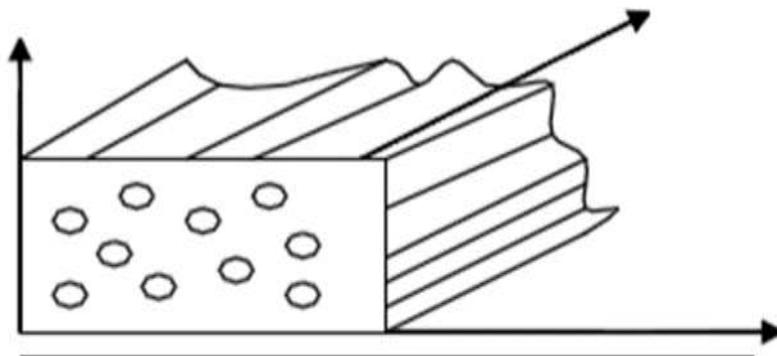


Figure 8.2 : Plaque anisotrope (orthotrope)

### 8.3 Plaque circulaire :

Les plaques circulaires sont courantes dans de nombreuses structures telles que les couvertures de buses, les fermetures d'extrémité dans les récipients sous pression, membranes de pompes, les disques de turbine, et les cloisons dans les sous-marins et avions, etc. Lors de l'analyse des plaques circulaires, il est commode d'exprimer les équations différentielles régissant, en coordonnées polaires. Cela peut être facilement accompli par une transformation de coordonnées.

### 8.4 Classification des plaques :

- La théorie de Henky-Mindlin relative aux plaques épaisses s'applique quand les rapports dimensions-épaisseur sont compris entre 4 et 20 ( $4 \leq L/h \leq 20$ ).

- La théorie de Kirchhoff relative aux plaques minces, est applicable lorsque le rapport de la plus petite de leurs dimensions sur l'épaisseur est supérieur ou égal à 20 ( $L/h > 20$ ).

$L$  : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y).

$h$  : est l'épaisseur de la plaque

$L/h$  : est le facteur d'élancement de la plaque

### 8.5 Théorie des plaques minces :

La théorie des plaques minces énoncée par Love en 1888 sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli.

#### 8.5.1 Hypothèses :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent celles à deux dimensions adoptées pour les poutres sans déformation sous l'effort tranchant. (Fig.8.3)

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle quelque soit  $z$ .

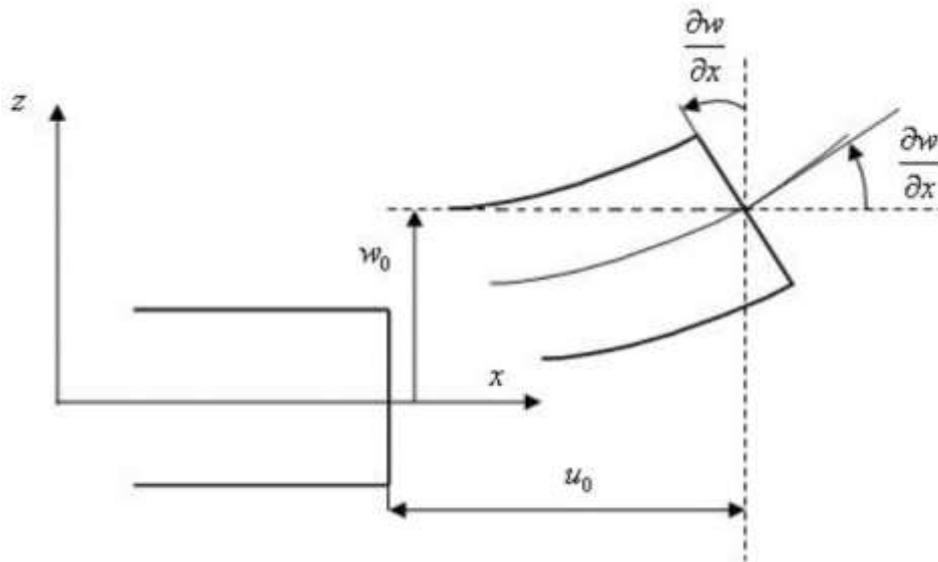


Figure 8.3 : Cinématique de love- Kirchhoff

### 8.5.2 Champs de déplacement :

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} u_\alpha (x_1, x_2, x_3 = z) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) & \alpha = 1, 2 \\ u_3 (x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Avec :

$u_\alpha$  : Le déplacement de membrane dans la direction

$w$  : La flèche de la plaque

$w_\alpha$  : La rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (8.2)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse.

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = W(x, y) \end{cases} \quad (8.3)$$

### 8.5.3 Champs de déformation :

D'après la définition du tenseur des déformations, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{z}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_y - \theta_y) = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\theta_x + \theta_x) = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (8.5)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

# Références Bibliographies

- [1] Yves Debard, Élasticité. Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique. mars 2006
- [2] S. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New  
York, 1951.
- [3] J. Molimard, Introduction à la Résistance des Matériaux, Ecole Nationale  
Supérieure des Mines de Saint-Etienne, Février 2007- Version 0.1
- [4] G. Cailletaud, M. Tijani. Mécanique des matériaux solides notes de cours.  
MINES ParisTech, mars 2011.
- [5] S.P. Timoshenko. *Résistance des matériaux*. Dunod, Tome 1, 1968.
- [6] Love A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells.  
Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. s'erie A, N0 17  
p. 491–549.
- [7] Drapier .S & Fortunier .R, Méthodes numériques d'approximation et de  
résolution en mécanique. Ecole Nationale supérieure des mines, 15 décembre  
2010- Version  $\beta$
- [8] A.ALLICHE, MECANIQUE DES SOLIDES, ELASTICITE, Université Pierre  
Marie Curie.
- [9] Michel Cazenave, Méthode des éléments finis, Approche pratique en  
mécanique des structures, Dunod, Paris, 2010 ISBN 978-2-10-055065-4