Opérateur quotient sur un espace de Hilbert

Présentée par : Djamel Abid
Dirigé par : **Ismail Bouzenada**
Département de Mathématiques
Université Chikh Laarbi tebessi
– Tebessa –
Juin 2017

21 mai 2017

TABLE DES MATIÈRES

1 Préliminaires **3**

1.1 Espace de Hilbert et opérateurs linéiares bornés 3

1.2 Opérateurs non bornés 7

1.3 Opérateurs fermés et fermables 8

1.4 Opérateurs symétriques et auto-adjoints 10

2 Concepts liés aux opérateurs quotients **13**

2.1 Lemme de Douglas 13

2.2 Opérateurs à images fermées 21

3 Quotient de deux opérateurs bornés **24**

3.1 Généralités 24

3.2 Opérations sur les opérateurs quotients 26

3.2.1 Somme 26

3.2.2 Multiplication par un scalaire 27

3.2.3 Produit 28

3.2.4 Itérés 29

3.3 Exemples matriciels 30

4 Caractérisations des opérateurs quotients **33**

4.1 Bornitude 33

4.2 Compacité 35

4.3 Inversibilité 36

4.4 Fermeture 37

4.5 Adjoint 39

Dédicace

A mon pére et ma mére,

A mes fréres et mes soéurs,

A tout mes enseignants d'Universite de Tebéssa,

A tout mes amis,

A tout les etudiants de departement de Maths et Inf.

Remerciements

Je tiens a adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude a mon encadreur de mmoire Monsieur **"Smail Bouzenada"**, pour m'avoir proposer le sujet de ce memoire. C'est gràce a sa grande disponibilite, ses conseils, ses orientations, ses encouragements que j'ai pumené a bien ce travail.

Mes remerciements vont egalement a Monsieur **"Abdellatif Toualbia"**, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de presider le jury. De mème je remercie Monsieur **"Hakima Degaichia"**, pour l'honneur qu'elle m'a fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enn, merci a toute ma famille et tous mes amis et tous mes collegues.

Résumé

Soit H un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur H.

Pour $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tels que le noyau de A inclu dans le noyau de B, on définit l'opérateur quotient B/A de l'image de A dans l'image de B pour tout $u \in H$ par : $Au \mapsto Bu$.

Dans ce travail nous étudions la classe des opérateurs quotients, nous présentons des résultats montrent que la somme et le produit préservent le caractère quotient, puis nous donnons comme applications des exemples matriciels.

Dans une autre partie nous étudions les caractérisations topologiques des opérateurs quotient tels que la bornitude, la compacité, l'adjoint, la fermeture,...etc.

Résumé Arabe

Abstact

Let H be a complex Hilbert space and $\mathcal{L}(H)$ be the space of linear and bounded operators on H.

For $A, B \in \mathcal{L}(H)$, such that the kernel of A included in the kernel of B, we define the quotient operator B/A from the range of A to range of B for all $u \in H$ by : $Au \mapsto Bu$.

In this work we study the class of quotient operators, we present results show that the sum and the product preserve the quotient character, and then we give as applications matrix examples.

In another part, we study some topological characterizations of quotient operators such as boundarity, compactness, adjoint, closure, etc.

Introduction

La notion du quotient est l'une des anciens concepts, bien qu'elle apparaisse dans beaucoup de sciences, sa valeur dans les mathématiques est la plus remarquable, Euclide par exemple, quand il a défini la division euclidienne, il a utilisé la notion du quotient pour décrire la partie entière du résultat de la division euclidienne de deux nombres entiers. Le mot quotient est utilisé dans plusieurs branches des mathématiques, pour décrire les structures algébriques dont les éléments sont des classes d'équivalences de certaines relations d'équivalences et les espaces comme L'ensemble quotient, groupe quotient, les espaces quotients, et aussi l'espace quotient d'un espace topologique dans la théorie de la topologie des espace...etc.

La notion du quotient des opérateurs est nouvelle, elle est actuellement exploitée par plusieurs chercheurs dans différents domaines de mathématiques pures et appliquées.

La notion d'opérateurs quotients est apparue pour la première fois en 1949 par Jacque Dixmier [] sous l'appellation (opérateurs J uniforme). En 1978 l'appellation opérateur quotient avant vu la lumière par Kaufman [].

Plus tard plusieurs auteurs comme Izumino [][] , Koliha[],Hirasawa et Messirdi[][], On etudier les différent propriétés algébriques topologiques et spectrales.

Notre mémoire est d'objectif l'étude des opérateurs quotients et leurs caractérisations algébrique et topologiques.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Premier chapitre : nous abordons les notions de bases nécessaires pour notre sujet. On commence par la définition d'un espace de Hilbert et la définition d'un opérateur borné et l'opérateur non borné, la caractérisation d'opérateur fermé, fermable, compact,...etc et quelques théorèmes et propriétés.

Deuxième chapitre : On expose ici un résultat très intéressant dans l'élaboration de notre travail .Ce résultat est connue sous le nom du lemme de Douglas a pour objet la factorisation, Le lemme de Douglas est incontournable tout au long de la mémoire, il coupe une place importante dans ce travail. Il en est de même pour la notion d'opérateur à image fermée.

Troisième chapitre : est une introduction à la notion du quotient des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. Nous commençons par la définition du quotient B/A de deux opérateurs bornés A et B sur H. Nous précisons également les différentes propriétés algébriques d'un opérateur quotient telles que les opérations algébrique usuelles (somme et produit), et l'itérés et la multiplication par un scalaire.

Quatrième chapitre : Nous précisons également les différentes propretés topologique d'un opérateur quotient telles que la borgnitude, la compacité, l'invisibilité, aussi que le caractérisation d'un opérateur quotient fermé, fermable adjoint du quotient, et le quotient symétrique, auto-adjoint, normal, hyponormal, idempotent, nilpotent.

CE travail est achevé par des perspectives de recherche et d'une bibliographie composée de 16 références.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert et opérateurs linéiares bornés

H désigne un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire, noté $\langle .,. \rangle$.

Proposition 1.1.1

Le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ définie une norme sur H, tel que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H.$$

Définition 1.1.1

Deux vecteurs x et y dans H sont dit **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Définition 1.1.2

(3) Le **complémentaire orthogonal** d'un sous-ensemble $M \subset H$ est défini par :

$$M^{\perp} = \{x \in H, \forall y \in M; \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Théorème1.1.1

Pour x et y dans H, l'inégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Définition 1.1.3

Soient H et K deux espaces de Hilbert :

(1) Un opérateur linéaire T de H dans K est **borné** s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $||Tx|| \leq c||x||$ pour tout $x \in H$.

(2) $\mathcal{L}(H, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K, et si $H = K$, on note $\mathcal{L}(H, K) = \mathcal{L}(H)$.

(3) Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, **l'image de** A est l'ensemble défini par $R(T) = \{Tx, x \in H\}$, et **le noyau de** T est l'ensemble défini par $\ker(T) = \{x \in H; Tx = 0\}$.

(4) La **norme** d'un opérateur linéaire borné T est défini par

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| .$$

(5) On appelle opérateur **adjoint** de $T \in \mathcal{L}(H)$ l'unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

et de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Remarque

Le caractère borné pour un opérateur linéaire coincide avec la continuité.

Définition 1.1.4

Si $H = H_1 \oplus H_2$ et $K = K_1 \oplus K_2$ et $T \in \mathcal{L}(H, K)$, alors T prend la forme matricielle

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

où $T_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$.

Définition 1.1.5

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$.

Définition 1.1.6

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **isométrique**, si $U^* U = I$.

Définition 1.1.7

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **unitaire**, si $U^*U = UU^* = I$.

Définition 1.1.8

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = 0$ et est dit n-**nilpotent** si $T^n = 0$ et $T^{n-1} \neq 0$.

Définition 1.1.9

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **idempotent** si $T^2 = T$, et est dit n- **idempotent** si $T^n = T$ avec n est le plus petit entier verifié $T^n = T$.

Définition 1.1.10

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **isométrie partielle** s'il existe un sous-espace fermé E dans H tel que :

$$||Ux|| = ||x||, \text{ pour tout } x \in E \text{ et } Ux = 0, \text{ pour tout } x \in E^\perp.$$

Définition 1.1.11

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **positif**, s'il est auto-adjoint et si $(Tx, x) \geq 0$ pour tout $x \in H$. On note $T \geq 0$.

Notation

Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints de $\mathcal{L}(H)$ tels que $A - B$ soit positif, on note $A \geq B$.

Proposition 1.1.2

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est positif si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $T = B^*B$.

Proposition 1.1.3

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est positif si et seulement s'il existe un unique opérateur positif C tel que $T = C^2$. L'opérateur C est appelé la racine carrée de T et est noté $C = \sqrt{T}$.

Définition 1.1.12

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. **La racine carée** de l'opérateur positif T^*T est appelé la valeur absolue de T et est noté $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Théorème 1.1.2(Décomposition polaire)

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe une unique isométrie partielle U définie de $\overline{R(|T|)}$ à valeurs dans $R(T)$, telle que $T = U|T|$.L'unicité de U d'écoule du fait que $N(U) = N(T)$.

Définition 1.1.13

Soit T un opérateur linéaire sur H. On dit que T est **compact** s'il transforme tout sous-ensemble borné de H en un ensemble relativement compact (d'adhérence compact).

En d'autre terme, T est un opérateur compact si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ dans H la suite $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans H.

On note par $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H dans lui-même.

Théorème 1.1.3

(1) $\mathcal{K}(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H)$.

(2) $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$.

Définition 1.1.14

Un opérateur borné T est **de rang fini** si sont image est de dimension finie. Le rang de T est la dimension de son image.

L'ensemble des opérateurs de rang fini de H dans H sera noté $\mathcal{K}_0(H)$.

Proposition 1.1.4

(1) Tout opérateur de rang fini est compact.

(2) Tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Définition 1.1.15

Un opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ est dit **inverse généralisé** d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ si $TST = T$.

Théorème 1.1.4

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ admet un inverse généralisé si et seulement si $R(T)$ est fermé dans H .

Corollaire 1.1.1

L'inverse généralisé d'un opérateur borné n'est pas unique.

Théorème 1.1.5

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $R(T)$ est fermé dans H. Alors, il existe un unique opérateur dans $\mathcal{L}(H)$ noté $T^{\#}$ possède les propriétes suivantes :
1. $TT^{\#}T = T$.
2. $T^{\#}TT^{\#} = T^{\#}$.
3. $(TT^{\#})^* = TT^{\#}$.
4. $(T^{\#}T)^* = T^{\#}T$.

Définition 1.1.16

L 'opérateur $T^{\#}$ défini ci-déssus appelé **l'inverse généralisé de Moore-Penrose** de T.

Remarque

Si T est inversible on a $T^{\#} = T^{-1}$.

1.2 Opérateurs non bornés

Soit H un espace de Hilbert complexe.

Définition 1.2.1

Un opérateur **non borné** sur H est une applicaton linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset H$ à valeur dans H. $D(T)$ est appelé le **domaine** de l'opérateur T.

Généralement, on note un opérateur non borné par $(T, D(T))$, mais s'il n'y a pas d'ambiguité concernant son domaine on note tout simplement T.

Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dans H. Alors :

- Le **noyau** et **l'image** de T sont respectivement les sous-espace de H définis par

$$N(T) = \{x \in D(T); Tx = 0\} \text{ et } R(T) = \{Tx \ ; \ x \in D(H)\}.$$

- Le **graphe** de T est le sous-espace de $H \times H$ donné par

$$G(T) = \{(x; Tx); x \in D(T)\}.$$

- La **norme du graphe** de T est définie pour tout $x \in D(T)$ par

$$||x||_T = ||x|| + ||Tx||.$$

- Les opérations usuelles telles que la somme, le produit et le passage à la limite sont toujours définis dans la classe des opérateurs non bornés, en faisant attention aux domaines. En fait : Si S est un autre opérateur non borné de domaine $D(S)$, on a

$(T + S)x = Tx + Sx$ pour tout $x \in D(T + S) = D(T) \cap D(S)$, et

$(TS)x = T(Sx)$ pour tout $x \in D(TS) = \{x \in D(S); Sx \in D(T)\}$.

L'opérateur T est inversible si il existe un opérateur borné noté T^{-1} dit l'inverse de T défini de H à valeurs dans $D(T)$ tel que $TT^{-1} = I$, où I désigne l'opérateur identité sur H.

Si le domaine $D(T)$ de T est dense dans H , on dit que T est densément défini.

Si T est borné défini partiellement sur un domaine dense $D(T)$ de H , il est alors prolongeable par continuité en un opérateur borné défini sur H tout entier. Au contraire, si T est non borné ce prolongement n'existe pas en général.

1.3 Opérateurs fermés et fermables

Soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T)$ dans l'espace de Hilbert H.

Définition 1.3.1

On dit que T est **fermé** si son graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de $H \times H$.

proposition 1.3.1

T est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in H$ et $Tx_n \longrightarrow y$ on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Théorème 1.3.1

T est fermé si et seulement si $(D(T), ||.||_T)$,est un espace de Hilbert.

Notation

On note par $C(H)$ L'ensemble des opérateurs fermés dans H et $\mathcal{C}(H) = \{T \in C(H);\ D(T)$ est dense

Remarque

(1) La somme et le produit de deux opérateurs fermés n'est pas forcément un opérateur fermé, il peut aussi être à domaine trivail réduit a $\{0\}$.

(2) Soit S un autre opérateur sur H. Alors :

(a) Si S est borné, alors $T + S$ est fermé si T l'est aussi.

(b) Si S et T sont fermés, alors le produit ST est fermé si S est inversible ou T est borné.

Lemme 1.3.1

Un sous-espace G de $H \times H$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si pour $v \in H$

$$(0.v) \in G \Longrightarrow v = 0.$$

Définition 1.3.2

Étant donnés deux opérateurs S et T non bornés de domaines respectifs $D(S)$ et $D(T)$ dans H. On dit que S est une **extension** de T où que T est une **restriction** de S et on écrit $T \subset S$ si et seulement si $G(T) \subset G(S)$.

Ceci est équivalent à dire que $T \subset S$ si et seulment si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx$ pour tout $x \in D(T)$.

Remarque

On veut souvent savoir si un opérateur donné T a une extension fermée. Ceci est toujours vrais si T est borné, vu qu'on peut prendre S l'opérateur correspond au graphe, $\overline{G(T)}$; ici $\overline{G(T)}$ est évidement un graphe car $x_n \to 0 \in H$. implique $Tx_n \to 0$.

Mais, si T est non borné, rien ne garantit l'existence d'une certaine extension fermée de T.Si S est une extension fermée de T, alors $G(S)$ est sous-espace fermé de $H \times H$ contenant $G(T)$, et donc $\overline{G(T)}$.

Notation

Dans le cas où $\overline{G(T)}$ est un graphe, il sera le graphe de la plus petite extension fermée de T notée $\overline{T}$.

Définition 1.3.3

On dit qu'un opérateur $(T, D(T))$ est **fermable** s'il possède une extension fermée.

proposition 1.3.2

Tout opérateur fermable T admet un plus petite extension fermée notée $\overline{T}$ telle que $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

proposition 1.3.3

Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dans H. Les conditons suivantes sont équivalentes :

1. T est fermable.
2. $\overline{G(T)}$ est un graphe d'un opérateur, c-a-d : si $(0, y) \in \overline{G(T)}$ alors $y = 0$.
3. Pour toute suite $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que $x_n \to 0 \in H$ et $Tx_n \to y$ on a $y = 0$.

Remarque

1. Tout opérateur fermé est fermable. La réciproque n'est pas vraie.
2. La somme et le produit de deux opérateurs fermables n'est pas en général un opérateur fermable.

1.4 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 1.4.1

Soit T un opérateur fermé de domaine $D(T)$ dense dans H. On note $D(T^*)$ l'ensemble des vecteurs $v \in H$ pour lesquels il existe $y \in H$ tel que

$$(Tu, v) = (u, y) \text{ pour tout } u \in D(T).$$

Pour tout $v \in D(T^*)$, on pose $T^*v = y$ où y est le vecteur vérifiant l'égalité ci-dessus. T^* est appelé l'opérateur **adjoint** de T.

Théorème 1.4.1

Soit T un opérateur densément défini sur H. Alors, les propriétés suivantes ont lieu :

1. T^* est fermé.

2. T est fermable si et seulement si T^* est densément défini sur H, et dans ce cas $\overline{T} = T^{**}$.

3. Si T est fermable alors $(\overline{T})^* = T^*$.

Proposition 1.4.1

Si T est un opérateur fermable de domaine dense dans H. Alors

$$N(T)^\perp = \overline{R(T^*)} \text{ et } N(T) = R(T)^\perp.$$

$$N(T) = R(T^*)^\perp \text{ et } N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}.$$

Proposition 1.4.2

Soient S et T deux opérateurs de domaines respectifs $D(S)$ et $D(T)$ denses dans H. On a

1. $Si\ T \subset S$ alors $S^* \subset T^*$.
2. $T^*S^* \subset (ST)^*$ si $D(ST)$ est dense dans H.
3. $T^*S^* = (ST)$ si $S \in \mathcal{L}(H)$.
4. $T^* + S^* \subset (T+S)^*$.
5. $T^* + S^* = (T+S)^*$si T ou S est borné.
6. Si T est injectif, alors $D(T^{-1})$ est dense dans H et on a $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Définition 1.4.2

Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans H. On dit que T est :

Symétrique si $T \subset T^*$.

Auto-adjoint si $T = T^*$.

Essentiellement auto-adjoint si $\overline{T} = T^*$.

Remarque

Soit T opérateur de domaine $D(T)$ dense dans H. Alors :

1. Si T est symétrique borné, il est alors auto-adjoint.

2. Si T est symétrique, alors $D(T) \subset D(T^*)$ ce qui implique que T^* est densément défini. Autrement dit, T est fermable et on a $\overline{T} = T^{**} \subset T^*$. D'où, si T est essentiellment

auto-adjoint, alors $T = T^{**} \subset T^*$.

3. Si T est auto-adjoint, alors $T = T^{**} = T^*$.

4. Si T est auto-adjoint, bijectif sur son image dense dans H. Alors l'opérateur inverse T^{-1} est aussi auto-adjoint.

CHAPITRE 2

Concepts liés aux opérateurs quotients

2.1 Lemme de Douglas

Lemme 2.1.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $R(B) \subset R(A)$.

2. $BB^* \leq \lambda AA^*$ pour $\lambda > 0$.

3. Il existe $C \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AC$.

De plus, si l'une de ces conditions est réalisée, il existe alors un unique opérateur C tel que :

(a) $||C|| = \inf\{\mu > 0; AA^* \leq \mu BB^*\}$,

(b) $N(B) = N(C)$,

(c) $R(C) \subset \overline{R(A^*)}.$

Preuve

(3) $\Rightarrow$ (2)

On suppose que $B = AC$ où $C \in \mathcal{L}(H)$. Alors,car

$$BB^* = ACC^*A^* = ||C||^2AA^* - A(||C||^2I - CC^*)A^* \leq ||C||^2AA^*,$$

$$A(||C||^2I - CC^*)A^* \geq 0.$$

En effet, pour tout $u \in H$ on a

$$\begin{aligned}\langle A(||C||^2 I - CC^*)A^*u, u\rangle &= \langle(||C||^2 I - CC^*)A^*u, A^*u\rangle \\ &= \langle ||C||^2 A^*u, A^*u\rangle - ||CC^*A^*u, A^*u\rangle \\ &= ||C||^2||A^*u||^2 - ||C^*A^*u||^2 \geq 0.\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) C'est claire.

(1) $\Rightarrow$ (3) Supposons maintenant que $R(B) \subset R(A)$.

Pour tout $f \in H$ on a : $Bf \in R(B) \subset R(A)$, il existe alors $h \in (N(A))^{\perp}$ tel que $Ah = Bf$.

Soit C_1 un opérateur défini de H dans H par $C_1 f = h$. Alors, $\forall f \in H$, $Bf = AC_1 f$, i.e $B = AC_1$.

Montrons que C_1 est borné .

On sait d'après le théorème du graphe fermé que C_1 est borné si seulement si le graphe G_1 de l' operateur C_1 est fermé dans $H \times H$.

Vérifions que G_1 est fermé : Soit $(f_n, h_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de G_1 telle que :

$$lim(f_n, h_n) = (f, h) \in H \times H.$$

Alors

$$limBf_n = Bf \text{ et } limAh_n = Ah.$$

Ainsi, $Bf = Ah$ et $h \in (N(A))^{\perp}$. D'où, $C_1 f = h$, et par conséquent G_1 est fermé et donc C_1est borné .

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que

$$BB^* \leq \lambda^2 AA^*.$$

Soit D une application définie de $R(A^*)$ dans $R(B^*)$ par $D(A^*f) = B^*f$. Alors

$$||D(A^*f)||^2 = ||B^*f||^2 = \langle B^*f, B^*f\rangle = \langle BB^*f, f\rangle \leq \lambda^2\langle AA^*f, f\rangle = \lambda^2||A^*f||^2.$$

Donc, on peut prolonger D sur $R(A^*)$ en posant $D = 0$ sur $(R(A^*))^{\perp}$. Alors, $DA^* = B^*$.

Posons $D = C_2^*$. On a donc $B = AD$ et par conséquent (2) implique (3).

De plus

$$N(D) = N(C_2^*) = (R(C_2))^{\perp} = (R(B^*))^{\perp} = N(B) \text{ et } (R(A^*))^{\perp} \subset N(C_2) = (R(D))^{\perp}.$$

Donc

$$R(D) \subset \overline{R(A^*)}.$$

Montrons que D est unique :

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AT$ et $R(T) \subset R(A^*)$. Alors $B = AT$ implique que

$$T^*A^* = B^* = D^*A^*.$$

D'où, $Tf = Df$ pour tout $f \in R(A^*)$.

Si $f \in (R(A^*))^\perp$, alors $f \in (R(T))^\perp = N(T^*)$, i.e $T^*f = D^*f = 0$, ainsi, $D = T$.

Remarque

L'unique opérateur C vérifiant les assertions $(a), (b)$ et (c) est appelé la solution de Douglas de l'équation abstraite $B = AX$.

Corollaire 2.1.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Si $R(B) \subset R(A)$ et $R(A)$ est fermé, alors, $\{CB\ ; ACA = A\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation de Douglas $AX = B$.

Preuve

En effet : $A(CB) = ACB = B$ car AC est la projection ortogonale sur $R(A)$,

on sait d'aprés le lemme de Douglas qui'l existe une solution unique D de l'équation $AX = B$ pour laquelle $R(D) \subset R(A^*)$.

D'où, $D \in M$. Par conséquent, il existe un inverse généralisé unique C de A tel que $D = CB$.

Théorème 2.1.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et M un sous-espace fermé dans H tel que $N(A) \oplus M = H$. Alors il existe une solution unique X_M de l'équation $AX = B$. telle que $R(X_M) \subset M$.

Remarque

La solution X_M est dite solution réduite de l'équation $AX = B$ sur le sous-espace M.

Proposition

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent, si $R(A)$ est fermé dans H et $Y \in \mathcal{L}(H)$, alors Y est la solution réduite de l'équation $AX = B$ si et seulement si $Y = CB$ où C verifié les conditions (1) et (2) de l'inverse généralisé de Moore-Penrose.

Corollaire 2.1.2

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $R(A)$ est fermé et $R(B) \subset R(A)$. Alors $A^{\#}B$ est la solution de Douglas de l'équation $B = AX$.

Preuve

En effet : Il suffit de poser $M = R(A^*)$.

Théorème 2.1.2

Soient A et B deux opérateurs bornés dans H tels que ;
1. $R(A)$ est fermé dans H,
2. $N(A) \subset N(B)$,
3. $R(B) \subset R(A)$.
Alors
(a). Il existe $V = BA^{\#} \in \mathcal{L}(R(A), H)$ et $B = VA$.
(b). L'équation $AX = B$ admet une solution de Douglas $D = A^{\#}B$.
Si de plus A commute avec B on a : $V = D = A^{\#}B = BA^{\#}$.

Preuve

On se limite à montre le cas où A commute avec B.
Comme $AB = BA$, on a :

$$\begin{aligned} A^{\#}AB = A^{\#}BA \quad &\Rightarrow \quad B = A^{\#}BA \\ &\Rightarrow \quad BA^{\#} = A^{\#}BAA^{\#} \\ &\Rightarrow \quad BA^{\#} = A^{\#}B\ . \end{aligned}$$

Remarque

Si A est inversible on a $V = BA^{-1}$ et $D = A^{-1}B$.
Si de plus $AB = BA$, on a : $BA^{-1} = A^{-1}B$.

Remarque

Si $R(A) = R(B)$ il existe alors deux opérateurs C et D définis respectivement de H dans $N(B)^{\perp}$ et de H dans $N(A)^{\perp}$ tels que $B = AC$ et $A = BD$. Les opérateurs DC et CD sont respectivement les opérateurs indentités sur $N(B)^{\perp}$ et $N(A)^{\perp}$. Si on suppose maintenant que A et B ont le même noyau on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.1.3

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un opérateur inversible C tel que $B = AC$ si et seulement si A et B ont les mêmes images et noyaux.

Corollaire 2.1.4

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tels que $R(B) \subset (A)$ et $AB = BA$. Alors, il existe $C \in \mathcal{L}(H)$; $B = AC$ et $AC = CA$.

Preuve

On se limite à prouver que $AC = CA$.

$$\begin{aligned} AB = BA \quad &\Longleftrightarrow \quad AAC = ACA \\ &\Longleftrightarrow \quad AAC - ACA = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A(AC - CA) = 0. \end{aligned}$$

Alors, $R(AC - CA) \subset N(A)$. D'autre part on a $R(C) \subset N(C^*)^\perp \subset N(A)^\perp$.
Ainsi,

$$R(AC - CA) \subset R(A) + R(C) \subset (N(A))^\perp.$$

D'où, $AC = CA$.

Théorème 2.1.3

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors,

$$R(A) + R(B) = R(\sqrt{AA^* + BB^*}).$$

Preuve

Posons $\mathcal{R}_{A,B} = \sqrt{AA^* + BB^*}$. Il est claire que $R(A) \subset R(\mathcal{R}_{A,B})$ et $R(B) \subset R(\mathcal{R}_{A,B}))$. Il existe alors d'après le lemme de Daglous deux opérateurs bornés X et Y tels que $\mathcal{R}_{A,B}X = A$ et $\mathcal{R}_{A,B}Y = B$.

L'opérateur $AA^* + BB^* = AX^*YB^*$ est appelé la somme parallèle de AA^* et BB^*.

Soit

$$T = \begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un opérateur sur $H \oplus H$. On a d'une part $R(T) = (R(A) + R(B)) \oplus \{0\}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} R(T) &= R(TT^*)^{1/2} \\ &= R\left(\begin{pmatrix} AA^*+BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= R(AA^*+BB^*)^{1/2} \oplus \{0\}. \end{aligned}$$

D où, $R(A)+R(B)=R(AA^*+BB^*)^{1/2}=R(\mathcal{R}_{A,B})$.

Lemme 2.1.2

Soient $A, B, X\ , Y$ et $\mathcal{R}=\mathcal{R}_{A,B}$ les opérateurs définis ci-dessus. Alors :

1. $XX^*+YY^*=P$ est la projection orthogonale de $R(\mathcal{R})$ sur $\overline{R(\mathcal{R})}$.

2. $AA^*+BB^*=BB^*+AA^*=A(I-X^*X)A^*=B(I-Y^*Y)B^*$.

Preuve

1. On pose $Q=XX^*+YY^*$. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q\mathcal{R} &= \mathcal{R}(XX^*+YY^*)\mathcal{R} \\ &= \mathcal{R}XX^*\mathcal{R}+\mathcal{R}YY^*\mathcal{R} \\ &= AA^*+BB^*=\mathcal{R}^2. \end{aligned}$$

Or : $\mathcal{R}(Q-P)\mathcal{R}=0$. D'où, $R((Q-P)\mathcal{R})\subset N(\mathcal{R})$.

Comme

$$\begin{cases} N(\mathcal{R})\subset N(X^*) \\ N(\mathcal{R})\subset N(Y^*) \end{cases},$$

on a

$$\begin{cases} R(X)\subset N(\mathcal{R})^{\perp} \\ R(Y)\subset N(\mathcal{R})^{\perp} \end{cases}.$$

Ainsi, $R(Q-P)\mathcal{R}\subset R(Q-P)\ \subset N(\mathcal{R})^{\perp}$. D'où, $(Q-P)\mathcal{R}=0$, et comme $R(Q-P)=0$, on aura $Q-P=0\Rightarrow Q=P=XX^*+YY^*$.

2. Comme $PX=X$, $PY=Y$ et d'après (1), on a XX^* commute avec YY^*.

D'où,

$$\begin{aligned} AA^*+BB^* &= AX^*+YB^*=RXX^*YY^*R \\ &= RYY^*XX^*R=BY^*XA^* \\ &= BB^*+AA^*. \end{aligned}$$

Montrons les égalités restantes :

$$\begin{aligned} AA^* + BB^* &= AX^*YB^* = AX^*YY^*R \\ &= AX^*(P - XX^*)R \\ &= A(X^* - X^*XX^*)R \\ &= A(I - X^*X)X^*R \\ &= A(I - X^*X)A^*. \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$BB^* + AA^* = B(I - Y^*Y)B^*.$$

Remarque

L'opérateur $AA^* \oplus BB^*$ est un opérateur borné positif.
En effet $\forall u \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (AA^* \oplus BB^*)u, u\rangle &= \langle A(I - X^*X)A^*u, u\rangle \\ &= \langle A(I - X^*X)^{1/2}(I - X^*X)^{1/2}A^*u, u\rangle \\ &= \langle (I - X^*X)^{1/2}A^*u, (I - X^*X)^{1/2}A^*u\rangle \\ &= \|(I - X^*X)1/2A^*u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.1.4

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Alors :
1. $R(\sqrt{AA^* + BB^*}) = R(A) \cap R(B)$.
2. $R(\sqrt{(I - Y^*Y)}) = B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$.

Preuve

Montrons que $R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A) \cap R(B)$
comme $R(S) = R\,(SS^*)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $S \in \mathcal{L}\,(H)$ et d'aprés le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) &= R(A(I - X^*X)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A) \\ &= R(B(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}) \subset R(B) \end{aligned}$$

D'où, $R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A) \cap R(B)$

Inversement

Soit $y \in R(A) \cap R(B)$, il exist alors $u, v \in H$ tels que $y = Au = Bv$.

$$\begin{aligned} Au - Bv = 0 &\iff RXu - RYv = 0 \\ &\iff R(Xu - RY)v = 0 \end{aligned}$$

D'où, $X^*((Xu - Yv)) = 0$ On a donc

$$u = (I - X^*X)u + X^*Yv \in R(I - X^*X) + R(X^*Y).$$

Or d'aprés le théorème (2.1.3) on a

$$\begin{aligned} R(I - X^*X) + R(X^*Y) &= R\left\{(I - X^*X)^2 + (X^*Y)(X^*Y)^*\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= R(I - X^*X)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$u \in R(I - X^*X)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow Au \in R(A(I - X^*X))^{\frac{1}{2}} = R(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}$$

D'où, $y \in R(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}$

(2)Montrons que :$R(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}} = B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$.

Comme $R(B(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}) = R(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} \subset R(A) \cap R(B)$ on a

$$R(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}} \subset B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$$

Inversement, si

$$u \in B^{-1}(R(A) \cap R(B)) \Rightarrow Bu \in R(B(I - Y^*Y)^{1/2}),$$

On pose,

$$u = (I - Y^*Y)^{1/2}v + w \text{ où } v \in H \text{ et } w \in N(B).$$

Or,

$$w \in R((I - Y^*Y)^{1/2}), \text{car } B = RY. \Rightarrow B^* = R^*Y^*.\text{et } \overline{R(B^*)} = \overline{R(Y^*)} \Rightarrow N(B) = N(Y).$$

D'où,

$$u \in R(I - Y^*Y)^{1/2}.$$

2.2 Opérateurs à images fermées

Notation

Dans la suite on note par $CR(H)$, l'ensembe de tous les opérateurs à images fermés dans H.

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaire T sur H forment respectivement deux suites croissante et décroissante de sous espaces de H :

$$N(T^0) = \{0\} \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq ...,$$

et

$$R(T^0) = H \supseteq R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq ....$$

Généralement, ces inclusions sont strictes. Mais, s'il existe un certain rang à partir duquel, ces suites deviennent constantes.

Définition 2.2.1

Soit T un opérateur linéaire sur H. On appelle :

Ascente de T, le plus petit entier naturel $p = p(T)$ tel que $N(T^p) = N(T^{p+1})$.

Descente de T, le plus petit entier naturel $q = q(T)$ tel que $R(T^q) = R(T^{q+1})$.

Si la suite $(N(T^n))_n$ (resp. $(R(T^n))_n$) est strictement croissante (resp. strictement décroissante) $p(T) = q(T) = \infty$.

Il est claire que

$$\begin{cases} p(T) = 0 \iff T \text{ est injectif} \\ q(T) = 0 \iff T \text{ est surjectif} \end{cases}.$$

Définition 2.2.2

Soit T un opérateur linéaire sur H. Alors :

- **La nulitté de** T est l'entier naturel $\alpha(T) = \dim N(T)$.
- **La déficiensse de** T est l'entier naturel $\beta(T) = \operatorname{codim} R(T)$.
- **La Conorme :** de Test la quantité $\gamma(T)$ définie par :

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin N(T)} \frac{||Tx||}{d(x, N(T))}.$$

Si $T = 0$, on prend $\gamma(T) = \infty$.

Exemple

Soit $(\lambda_k)_{k\in N}$ une suite bornée des nombres réels et soit T l'opérateur défini sur l'espace l^2 des suites complexes a carré sommable défini pour tout $x=(x_n)_{n\in N^*}$ par

$$T(x)=(T(x))_k=(\lambda_k x_k)_{k\in N^*}.$$

Posons $E=\{k\in\mathbb{N};\lambda_k\neq 0\}$. Alors, $N(T)$ est l'ensembe des éléments de type $y=(y_1,y_2,...)\in l^2$ où y_j est arbitrairesi $j\notin E$ et $y_j=0$ si $j\in E$.

On se propose de calculer $\gamma(T)$

$$\gamma(T)=\inf_{x\notin N(T)}\frac{||Tx||}{d(x,N(T))}.$$

Soit $x\in l^2$. Alors pour tout $y\in N(T)$ on a :

$$||x-y||^2=\sum_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|^2=\sum_{k\notin E}|x_k-y_k|+\sum_{k\in E}|x_k|^2.$$

Vu que les y_k sont arbitraires si $k\notin E$, choisissons $y_k=x_k$ pour $k\notin E$. D'où,

$$d(x,N(T))=(\sum_{k\notin E}|x_k|^2)^{1/2},$$

et

$$\frac{||T||}{d(x,N(T))}=\left(\frac{\sum_{k\notin E}|\lambda_k|^2|x_k|^2}{(\sum_{k\notin E}|x_k|^2)}\right)^{1/2}\geq\inf_{k\in E}|\lambda_k|^2.$$

D'où

$$\gamma(T)\geq\inf_{k\in E}|\lambda_k|^2=m.$$

D'après la définiton de la borne inf : $\forall\varepsilon>0,\ \exists i\in E;\ |\lambda|<m+\varepsilon$.

Soit $u=(0,0,...,0,1,0,0,...)\in l^2$ (la i^{eme} composante égale a 1). Alors,

$$m\leq\gamma(T)\leq\frac{||Tu||}{d(x,N(T))}=|\lambda_i|<m+\varepsilon.$$

D'où,

$$\gamma(T)=\inf_{k\in E}|\lambda_k|^2.$$

On note aussi que $\alpha(T)$ est le nombre des $\lambda_k\neq 0$ et $\beta(T)=0$ si $(1/\lambda_{\Bbbk})_k$ est une suite bornée, sinon $\beta(T)=\infty$.

Théorème 2.2.1

Soit $T \in \mathcal{C}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $R(T)$ est fermé.
2. $R(T^*)$ est fermé.
3. $R(T) = N(T^*)^\perp$.
4. $R(T^*) = N(T)^\perp$.
5. $\gamma(T) > 0$.
6. $\beta(T) < \infty$.

Rappelons que si $T \in CR(H)$, alors il existe un unique opérateur $T^\# \in \mathcal{L}(H)$ dit l'inverse généralisé de Moore-Penrose de T vérifiant

les identités suivantes :

$$TT^\#T = T,\ T^\#TT^\# = T^\#,\ (TT^\#)^* = TT^\# \text{ et } (T^\#T)^* = T^\#T.$$

Remarque

Si $T \in CR(H)$, alors $T^\# \in CR(H)$, $(T^\#)^\# = T$ et $\gamma(T) = ||T^\#||^{-1}$.

Maintenant, supposons que $S, T \in CR(H)$ tels que $D(TS) = S^{-1}(D(T))$ est non trivial. Alors le produit $(TS) \in CR(H)$ si et seulement si $TT^\#SS^\# \in CR(H)$. Dans ce cas, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.1

Soit $T, S, TS \in CR(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalantes :

1. $T^\#T$ commute avec SS^* et $SS^\#$ commute avec T^*T.
2. $(TS)^\#(TS) = S^\#T^\#ST$ et $(TS)(TS)^\# = TSS^\#T^\#$.
3. $(TS)^\# = S^\#T^\#$.

CHAPITRE 3

Quotient de deux opérateurs bornés

3.1 Généralités

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et $G(A,B) = \{(Au, Bu) : u \in H\}$ un sous ensemble de $H \times H$. Alors, $G(A,B)$ est le graphe d'un opérateur linéaire noté T sur H si pour tout $u \in H$

$$Au = 0 \Rightarrow Bu = 0.$$

Ce qui revient a dire que $G(A,B)$ est un graphe si et seulement si $N(A) \subset N(B)$. Dans ce cas T sera l'application définie par la relation suivante

$$\forall u \in H \quad Au \longmapsto Bu.$$

Ou encore, $Bu = TAu$ pour tout $u \in H$. On pose $T = B/A$. Nous avons alors la définiton suivante :

Définition 3.1.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $N(A) \subset N(B)$. On appelle le quotient de B par A et on note B/A l'opérateur : $Au \longrightarrow Bu$ pour tout $u \in H$. Il découle de cette définiton que

1. Le domaine du quotient B/A est $D(B/A) = R(A)$.
2. L'image de B/A est $R(B/A) = R(B)$.
3. Le graphe de B/A est $G(A,B)$.

Nous avons trivialement pour tout opérateur A dans $\mathcal{L}(H)$.

1. $A = A/I$ avec I est l'opérateur identité sur H.

2. $A = A^n/A^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Si A est inversible, alors $A^{-1} = I/A$.

L'opérateur quotient B/A peut être vu comme étant la solution X de l'équation abstraite $B = XA$.

Remarque

1. Le quotient de deux opérateurs bornés n'est pas forcément un opérateur borné.

2. L'opérateur A dans le lemme de Douglas peut s'exprimer comme étant le quotient des opérateurs B et D ($A = B/D$) ou D est la solution de Douglas de l' équation $B = AD$.

Exemple

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $N(A) = N(B) = E$ avec E est l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Le quotient B/A est donc la solution de l'équation $XA = B$.

$$B/A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1.1

oient A et $B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et $AB = BA$ alors l'unique soulution D de Douglas de $AX = B$ est exactemen le quotient B/A.

Preuve

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} AB = BA \quad &\Leftrightarrow \quad AAD = ADA \\ &\Leftrightarrow \quad AAD - ADA = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A(AD - DA) = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que $R(AD - DA) \subset N(A)$

D'autre part ,comme $R(D) \subset \overline{R(A^*)} = (N(A))^{\perp}$ on a $R(AD - DA) \subset R(A) + R(D) \subset (N(A))^{\perp}$.

D'où,

$$\left.\begin{array}{c} R(AD - DA) \subset N(A) \\ R(AD - DA) \subset (NA))^{\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow R(AD - DA) = \{0\}$$

i.e $AD = DA$ et par conséquent : $B = AD = DA$ alors $D = B/A$.

Remarquons d'aprés la pruve précedent que

$$BB^* \leq \lambda^2 AA \Leftrightarrow \|B^*u\| \leq \lambda \|A^*u\|, \forall u \in H$$

3.2 Opérations sur les opérateurs quotients

On définit dans ce qui suit la somme et le produit de deux opérateurs quotients et on va établir que ces opérations préservent le caractère quotient.

étant donnés deux opérateurs quotients B/A et D/C tel que $N(A) \subset N(B)$ et $N(C) \subset N(D)$. Alors,

$B/A + D/C$ et $(B/A)(D/C)$ sont des opérateurs linéaires définis respectivement sur $R(A) \cap R(C)$.et $CD^{-1}(R(A))$.

Soient $\mathcal{R}_{A,C} = \sqrt{(AA^* + CC^*)}$ et $\mathcal{R}_{A,D} = \sqrt{(AA^* + DD^*)}$ et on considère les équations $\mathcal{R}_{A,C}X = A$, $\mathcal{R}_{A,C}Y = C$; $\mathcal{R}_{A,D}Z = D$.

On a d'après le thèoréme 2.1.4

1. $R(\sqrt{AA^* + CC^*}) = R(A) \cap R(C)$.

2. Si $A = (I - Z^*Z)^{1/2}$, alors $R(A) = D^{-1}(R(A))$.

3.2.1 Somme

Théorème 3.2.1

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$ et $B/A, D/C$ deux opérateurs quotients. Alors,

$$B/A + D/C = (BC' + DA')/\sqrt{AA^* + CC^*},$$

où C' et A' sont respectivement les solutions X et Y de Douglas des équations $AX = \sqrt{AA^* + CC^*}$ et $CY = \sqrt{AA^* + CC^*}$.

Preuve

L'idée de la preuve est de réduire au même dénominateur les deux opérateurs quotients B/A et D/C. Comme

$$D(B/A) = R(A) \text{ et } D(D/C) = R(C),$$

alors, on dit qu'un oprateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un "dénominateur commun" de B/A et D/C si

$$R(T) = R(A) \cap R(C).$$

Prenons $T = \sqrt{AA^* + CC^*}$. On a d'après ce qui précède $R(\sqrt{AA^* + CC^*}) = R(A) \cap R(C)$ est inclue dans $R(A)$ et $R(C)$. D'où, l'existence de X et Y tels que

$$AX = \sqrt{AA^* + CC^*} \text{ et } CY = \sqrt{AA^* + CC^*}.$$

De plus, BX/AX et DY/CY sont respectivement les restrictions de B/A et D/C sur leur domaine commun $R(\sqrt{AA^* + CC^*})$. Donc, la somme $(B/A)+(D/C)$ est l'application

$$(\sqrt{AA^* + CC^*})u \longrightarrow BXu + DYu \text{ pour tout } u \in H.$$

3.2.2 Multiplication par un scalaire

Proposition 3.2.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors,
1. $\lambda(B/A) = (\lambda B/A)$.
2. $(1/\mu)(B/A) = (B/\mu A)$.

Preuve

Comme $R(A)$ et $R(B)$ sont des sous-espaces vectoriels, alors
1. Pour tout $x \in H$

$$\lambda(B/A)Ax = \lambda Bx = (\lambda B)x = (\lambda B/A)Ax.$$

D'où $\lambda(B/A) = (\lambda B/A)$.
2. Pour tout $x \in H$

$$(B/\mu A)(Ax) = (B/\mu A)(\mu A(1/\mu)x) = B(1/\mu)x = (1/\mu)Bx = (1/\mu)(B/A)Ax.$$

D'où $(1/\mu)\,(B/A) = (B/\mu A)$.

3.2.3 Produit

Théorème 3.2.2

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$ et B/A, D/C deux opérateurs quotients. Alors,

$$(B/A)(D/C) = BD'/CA',$$

où D' est la solution Z de Douglas de l'équation $AZ = DA'$.

Preuve

Notons par $D_\times$ le domaine du produit $(B/A)(D/C)$. Alors,

$$\begin{aligned} D_\times &= \{Cv : Dv \in R(A), v \in H\} \\ &= \{Cv : v \in D^{-1}(R(A))\} \\ &= CD^{-1}(R(A)). \end{aligned}$$

Soit $A' \in \mathcal{L}(H)$ tel que $R(A') = D^{-1}(R(A))$. Alors $D_\times = R(CA')$. D'autre part la condition $R(DA') \subset R(A)$ est équivalente à dire qu'il existe un opérateur borné noté D' tel que $DA' = AD'$.

La restriction de D/C sur $R(CA')$ est application

$$CA'u \longmapsto DA'u \text{ avec } u \in H.$$

Donc, on a par la composition des applications pour tout $u \in H$

$$CA'u \longmapsto DA'u = AD'u \longmapsto BD'u.$$

Le produit $(B/A)(D/C) = BD'/CA'$.

Remarque.

Notons que la représentation en quotient de la somme de B/A et D/C n'est pas unique. En effet : Pour la somme, il suffit de remplacer l'opérateur $\sqrt{AA^* + CC^*}$ par n'importe quel opérateur T tel que $R(T) = R(A) \cap R(C)$ et pour le produit on remplace l'opérateur A' par n'importe quel opérateur borné S tel que $R(S) = D^{-1}(R(A)))$.

Dans ce cas les opérateurs C', A' et D' sont respectivement les solutions de Douglas des équations $AX = T$, $CY = T$ et $AZ = DS$.

L'unique représentation irréductible de la somme (resp. du produit) est celle du théorème précédent.

3.2.4 Itérés

Notons au départ qu'on en besoin de supposer que $R(B) \subset R(A)$, pour qu'on puisse définir les itérés de B/A.

Théorème 3.2.3

Soit B/A un opérateur quotient tel que $AB = BA$ et $R(B) \subset R(A)$. Alors,

$$(B/A)^n = B^n/A^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve

Il suifft de procéder par récurrence sur les valeurs de n en utilisant la définition du produit des quotients.

Le quotient B/A est nilpotent (resp. idempotent) si $R(B) \subset R(A)$ et $(B/A)^2 = 0$ (resp. $(B/A)^2 = (B/A)$). Ceci implique immédiatement a l'aide du lemme de Douglas le résultat suivant.

Proposition 3.2.2

Le quotient B/A est nilpotent (resp. indempotent) si la solution X de Douglas de l'équation $AX = B$ est nilpotente (resp. idempotente).

Corollaire 3.2.1

Il découle de la proposition précédente que le quotient de deux opérateurs idempotents est idempotent et si B est nilpotent alors B/A l'est aussi.

D'une manière générale, pour $n \in \mathbb{N}$, B/A est n-nilpotent (resp. n-idempotent) si $AX = B$ et $X^n = 0$ (resp. $X^n = X$). Le quotient B/A est dit quasi-nilpotent si son rayon spectral est nul. Autrement

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||(B/A)^n Ax||^{1/n} = 0.$$

Théorème 3.2.3

Le quotient B/A est quasi-nilpotent si la solution X de Douglas de l'équation $AX = B$ est quasi-nilpotente.

Preuve

Comme
$$||(B/A)^n Ax||^{1/n} = ||AX^n x||^{1/n} \text{ pour tout } x \in H.$$

Alors, si X est quasi-nilpotent on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} ||(B/A)^n Ax||^{1/n} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} ||A||^{1/n}||X^n x||^{1/n} = 0.$$

3.3 Exemples matriciels

Prénon $T = A * C = \sqrt{(AA^* \oplus BB^*)} = AX^*YC^*$. d'prés la définition de la somme parallél.

Soient A, B, C et D les quatre matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculons B/A et D/C

En effet : Comme A et C sont inversibles on a

$$B/A = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 1.754 & -0.25 \end{pmatrix},\ D/C = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ -4.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons $B/A + D/C$.

On a d'après la définition de la somme de deux matrices

$$B/A + D/C = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ -2.75 & 3.75 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant $B/A + D/C$ comme étant la somme de deux quotients. On a d'après le théorème 3.2.1

$$B/A + D/C = (BC_1 + DA_1)/\mathcal{R},$$

où $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A,C} = \sqrt{AA^* + CC^*}$.

Calculons $\mathcal{R}$. On a par définition $\mathcal{R} = \sqrt{AA^* + CC^*} = AX^*YC^*$ où X et Y sont les solutions de Douglas de $\mathcal{R}X = A$ et $\mathcal{R}Y = C$. D'où,.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 3.685322 & 2.901448 \\ 2.901448 & 5.965031 \end{pmatrix}.$$

De plus, $X = R^{-1}A$ et $Y = R^{-1}C$.

Ainsi

$$A * C = \begin{pmatrix} 0.794575 & 0.974576 \\ 0.802084 & 1.726026 \end{pmatrix}.$$

Calculons C_1 et A_1.

On a : $AC_1 = A * C$ et $CA_1 = A * C$, alors, $C_1 = A^{-1}(A * C)$ et $A_1 = C^{-1}(A * C)$. D'où

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.554347 & 0.902173 \\ 0.858695 & 1.554347 \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0.550869 & 1.380434 \\ 0.0978260 & -0.076087 \end{pmatrix}$$

Par conséqent

$$B/A + D/C = (BC_1 + DA_1)/A * C = (BC_1 + DA_1)(A * C)^{-1}. = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ -2.75 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons $(B/A)\,(D/C)$

D'après la définition du produit matriciel

$$(B/A)\,(D/C) = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Calculons $(B/A)\,(D/C)$ comme étant le produit de deux quotients. On a d'après le théorème 3.2.2

$(B/A)\,(D/C) = BD_2/CA_2$, où D_2 est la solution Z de Douglas de l'équation $AZ = DA_2$ avec $A_2 = (I - Y^*Y)^{1/2}$ et Y est la solution de Douglas de l'équation $\mathcal{R}_{A,D}Y = D$ où $\mathcal{R}_{A,D} = \sqrt{AA^* + DD^*}$.

Commençons tout d'abors par le calcul de $\mathcal{R}_{A,D}, Y$ et A_2.

$$\mathcal{R}_{A,D} = \begin{pmatrix} 3.443782 & 1.772107 \\ 1.772107 & 4.456414 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{A,D}Y = D &\Leftrightarrow Y = \mathcal{R}_{A,D}^{-1}D \\ &\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0.294637 & 0.8004978 \\ 0.556023 & 0.128721 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.737746 & -0.244452 \\ -0.244452 & 0.5251796 \end{pmatrix}.$$

Calculons D_2.

$$\begin{aligned}AD_2 = DA_2 &\Leftrightarrow D_2 = A^{-1}(DA_2) \\ &\Leftrightarrow D_2 = \begin{pmatrix} 0.125518 & 0.735725 \\ 0.616618 & 0.350909 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où,

$$(B/A)\,(D/C) = BD_2/CA_2 = BD_2(CA_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 4

Caractérisations des opérateurs quotients

Soient A et B deux opérateurs linéaires bornés sur H.

4.1 Bornitude

Vu que le quotient B/A est la solution de l'équation $B = XA$, il sera donc utile d'établir un lieu entre la notion de la solution de Douglas d'une équation de type $B = AX$, (quand elle existe) et celle d'un opérateur quotient B/A afin d'expliciter quelques critères de bornitude de ce dernier.

On a d'après le corollaire 2.1.4 si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et $AB = BA$ alors il exite $D \in \mathcal{L}(H)$; $B = AD$ et $AD = DA$.

Par consèquent si A commute avec B alors la solution D de Douglas de l'équation $B = AX$ est une extension bornée de B/A, ce qui montre que le quotient B/A est borné

Théorème 4.1.1

B/A est borné si et seulement si $R(B^*) \subset R(A^*)$.

Preuve

L'inclusion $R(B^*) \subset R(A^*)$ entrâine (d'après le lemme de Douglas) l'existence d'un opérateur $D^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B^* = A^*D^*$.

Ceci montre en passant à l'adjoint que $B = DA$.

D est une extension bornée de B/A. D'où B/A est borné.

Inversement, si B/A est borné, on a $B = (B/A)A$. Ce qui équivalent d'après le lemme de Douglas en passant a l'adjoint à $R(B^*) \subset R(A^*)$.

Corollaire4.1.1

Si $R(B^*) = R(A^*)$, alors le quotient B/A est une isométrie partielle qui est unique si $N(A^*) \subset N(B/A)$.

On sait d'après le lemme de Douglas que la condition $R(B^*) = R(A^*)$ est équivalente à $B^*B = A^*A$.

Ainsi, pour $A = |B| = (B^*B)^{1/2}$, on obtient $B/A = B/|B|$ qui est une isométrie partielle définie sur la fermeture de l'image de $|B|$ par l'expression suivante :

$$\begin{array}{rcl} B/|B| : \overline{R(|B|)} & \longrightarrow & R(B) \\ |B|u & \longmapsto & Bu \end{array}.$$

Théorème 4.1.2

Si $R(B) \subset R(A)$ et s'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(\mu A - B)$ est fermé dans H pour tout $\mu > \lambda$ alors, le quotient B/A est borné.

Preuve

L'inclusion $R(B) \subset R(A)$ implique l'existence de $C \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AC$. Donc si $\mu > ||C|| + \lambda$, on a $(\mu I - C)$ est inversible et

$$R(A) = R(A(\mu I - C)(\mu I - C)^{-1} = R(\mu A - B).$$

Donc, $R(A)$ est fermé, ainsi que $R(A^*)$.

$$R(B^*) \subset N(B)^{\perp} \subset N(A)^{\perp} = R(A^*).$$

Proposition 4.1.1

Si $N(A) \subset N(B)$ et $R(A)$ est fermé dans H, alors $R(B^*) \subset R(A^*)$. On obtient donc le résultat suivant :

Corollaire 4.1.2

Si B/A est de domaine $R(A)$ fermé dans H, alors B/A est borné.

Cette condition est sufissante et pas nécessaire.

Exemple

On considère dans $l^2(\mathbb{N})$ l'opérateur A défini par

$$Ax = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, ..., \frac{1}{n+1}x_n, ...).$$

Alors, A est compact car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $R(A)$ est dense mais non fermé dans $l^2(\mathbb{N})$. A est inversible d'inverse A^{-1} défini comme un quotient non borné I/A.

$$(I/A)(y) = A^{-1}(y) = (2y_1, 3y_3, 4y_3, ..., (n+1)y_n, ...).$$

En vertu de [[13] Proposition 5 p 156] on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1.2

Si B/A à image fermée et $N(A) = N(B)$, alors $R(A)$ est fermé dans H.

Remarque

Rappelons que la fermeture de $R(A)$ montre l'existence de l'inverse généralisé de Moore-Penrose $A^{\#}$ de A.

Corollaire 4.1.3

Si B/A est de domaine $R(A)$ fermé dans H, alors $B/A = BA^{\#}$. De plus, si A est inversible on a $B/A = BA^{-1}$.

Dans ce cas on note que si la solution D de Douglas de l'équation $AX = B$ existe elle sera de la forme $D = A^{\#}B$. De plus si A est inversible on obtient $D = A^{-1}B$.

4.2 Compacité

Proposition 4.2.1

L'opérateur quotient B/A est compact si $R(A)$ est fermé dans H et B est compact. Inversement si B/A est compact, alors B l'est aussi.

Preuve

La fermeture de $R(A)$ assure la bornitude de B/A. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H. Comme A est borné sur H, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée dans H. D'après la compacté de B la suite $((B/A)Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est exactement la suite $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans H. Donc B/A est compact sur H.

Inversement

Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans H.

$$Bx_n = (B/A)Ax_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, comme B/A est compact la suite $((B/A)Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans H. Par conséquent B est compact sur H.

Remarque

1. Si $R(A)$ n'est pas fermé alors B/A n'est pas compact même si B est compact.
2. Le quotient de deux opérateurs compacts n'est pas forcément compact.

4.3 Inversibilité

Théorème 4.3.1

1. Si $N(A) = N(B)$, alors B/A est inversible d'inverse $(B/A)^{-1} = A/B$.

2. Si $N(A) = N(B)$, et $R(B)$ est fermé dans H, alors B/A est inversible d'inverse A/B borné sur H.

3. Si $R(A)$ et $R(B)$ sont fermés dans H, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $B^{\#}B$ commute avec $A^{\#}(A^{\#})^*$ et $A^{\#}A$ commute avec B^*B.
   (b) $(B/A)^{\#}(B/A) = AB^{\#}BA^{\#}$ et $(B/A)(B/A)^{\#} = BA^{\#}AB^{\#}$.
   (c) $(B/A)^{\#} = AB^{\#}$.

Preuve

1. L'opérateur A/B est bien défini d'après la condition $N(A) = N(B)$.

Vu que le domaine de A/B est $R(B)$ les compositions suivantes :

$$(A/B)(B/A) : Au \longmapsto Bu \longmapsto Au \text{ pour tout } u \in H$$

et

$$(B/A)(A/B) : Bv \longmapsto Av \longmapsto Bv \text{ pour tout } v \in H,$$

donnent l'égalité souhaitée.

2. Ceci découle directement de (1) et de la proposition 4.1.1.

3. Le fait que $R(A)$ et $R(B)$ sont tous les deux fermés dans H assure l'existence de $A^{\#}B^{\#}$ et $(B/A)^{\#}$. On a aussi $B/A = BA^{\#}$. Les équivalences entre (a), (b) et (c) découlent directement du corollaire 3.1.1. de [8].

Corollaire 4.3.1

Le quotient B/A admet un inverse borné défini sur H tout entier si et seulement l'opérateur B est inversible. Formellement, On a :

$$(B/A)^{-1} = A/B = AB^{-1}.$$

4.4 Fermeture

Proposition 4.4.1

Le quotient B/A est fermé sur H si et seulement si $R(A)$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{B/A}$ du graphe de B/A défini est un espace de Hilbert, où le produit scalaire du graphe de B/A est défini pour tout u, v dans H par

$$\begin{aligned} \langle Au, Av \rangle_{B/A} &= \langle Au, Av \rangle + \langle (B/A)Au, (B/A)Av \rangle \\ &= \langle Au, Av \rangle + \langle Bu, Bv \rangle. \end{aligned}$$

Dont la norme associée est

$$||Au||_{B/A} = \sqrt{||Au||^2 + ||Bu||^2}.$$

Preuve

Supposons que B/A est fermé et soit $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme du graphe $||.||_{B/A}$ dans $R(A)$. Alors,

$$||Ax_n - Ax_m||^2{}_{B/A} = ||Ax_n - Ax_m||^2 + ||Bx_n - Bx_m||^2.$$

Donc (Ax_n) et (Bx_n) sont convergentes respectivement vers u et v dans H.

Or, comme B/A est fermé il existe x dans H tel que $u = Ax$ et $v = (B/A)Ax = Bx$. Alors,

$$||Ax_n - Ax||^2{}_{B/A} = ||Ax_n - Ax||^2 + ||Bx_n - Bx||^2 \text{qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \infty.$$

Ce qui montre que $(R(A), \langle .,. \rangle_{B/A})$ est complet.

Inversement

Si $(R(A), \langle .,. \rangle_{B/A})$ est complet, on considère une suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $R(A)$ telle que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((B/A)Ax_n) = (Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent recpectivement vers u et v pour la norme de H. Alors $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(R(A), \langle .,. \rangle_{B/A})$. Elle doit converge vers Aw dans $R(A)$.

$$||Ax_n - Aw||^2 + ||Bx_n - Bw||^2 = ||Ax_n - Aw||^2{}_{B/A} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

Donc

$$Ax_x \longrightarrow Aw \text{ et } Bx_x \longrightarrow Bw.$$

D'où

$$u = Aw \text{ et } v = Bw.$$

Par conséquent B/A est fermé.

Remarque

Si B/A est fermé sur H, alors $B/A \in \mathcal{L}((R(A), \langle .,. \rangle_{B/A}), H)$.

Le théorème suivant montre que tout opérateur fermé admet une représentation en quotient de deux opérateurs bornés.

Théorème 4.4.1

Soit $(C, D(C))$ un opérateur non borné sur H. Alors C est fermé sur H si et seulement s'il existe $T, S \in \mathcal{L}(H)$ tels que $C = S/T$ et $R(T^*) + R(S^*)$ est fermé dans H.

il découl de ce théorème

Preuve

L'idée principale de la démonstration est basée sur l'identification d'une fonction J définie pour tout x dans $R(T^*) + R(S^*)$ dans $H \times H$ par

$$J(x) = (A\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x, B\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x).$$

Avec $\mathcal{R}_{T^*S^*} = (T^*T + S^*S)^{1/2}$.

J est une isométrie linéaire de $(R(T^*) + R(S^*), \langle .,. \rangle)$ dans $(G(T, S), \langle .,. \rangle)$ car

$$||Jx||^2 = ||T\mathcal{R}_{T^*,S^*}^{-1}x||^2 + ||B\mathcal{R}_{T^*,S^*}^{-1}x||^2 = \langle \mathcal{R}_{T^*,S^*}^{-1}x; (T^*T + S^*S)\mathcal{R}_{T^*,S^*}^{-1}x \rangle = ||x||^2.$$

D'où la fermeture de S/T .

Corollaire 4.4.1

Si B est inversible, alors B/A est fermé dans H.

Corollaire 4.4.2

Soit C un opérateur fermé sur H. Alors C s'exprime comme le quotient de deux opérateurs bornés T et S sur H tels que $R(T^*) + R(S^*)$ est fermé dans H.

4.5 Adjoint

Rappelons que pour défiinir l'adjoit d'un opérateur non borné il faut qu'il soit de domaine dense. De ce fait on va supposer que $R(A)$ est dense H.

Dans ce qui suit on va voir cette notion préserve le caractère quotient.

Pour cela on définit l'adjoit de B/A et on note $(B/A)^*$ comme étant l'opérateur qui a pour graphe, le sous-espace

$$G(A,B)^* = \{(x,y) \in H \times H;\ y = (B/A)^* x\} = \{(x,y) \in H \times H;\ B^* x = A^* y\}.$$

$$\begin{aligned} G(A,B)^* &= \{(x,y) \in H \times H\,;\, \langle x, (B/A)t\rangle = (y,t), \forall t \in R(A)\} \\ &= \{(x,y) \in H \times H\,;\, \langle x, (B/A)Au\rangle = (y,Au), \forall u \in H\} \\ &= \{(x,y) \in H \times H\,;\, \langle x, Bu\rangle = (y,Au), \forall u \in H\}. \end{aligned}$$

On peut aussi voir que :

$$G(A,B)^* = \{(x,y) \in H \times H; B^* x = A^* x\}.$$

L'adjoit $(B/A)^*$ admet donc pour domaine l'ensemble $B^{*-1}(R(A^*))$ qui est l'image d'un opérateur borné $A_* = (I - Y^* Y)^{1/2}$ tel que $\mathcal{R}_{A^*B^*} Y = B$, où $\mathcal{R}_{A^*B^*} = \sqrt{(A^*A + B^*B)}$.

On voit que $R(B^* A_*) \subset R(A^*)$, il existe alors d'après le lemme de Douglas un opérateur borné $B_* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B^* A_* = A^* B_*$, donc $G(A,B) = \{(A_* u, B_* u) : u \in H\}$. Par conséquent on obtient

l'expression irréductible en quotient de $(B/A)^*$ de la manière suivante :

Théorème 4.5.1

Si $R\,(A)$ est dense dans H, alors,

$$(B/A)^* = B_*/A_*,$$

avec $B_* \in \mathcal{L}(H)$; $A^*B_* = B^*A_*$.

Pour $\mathcal{R}_l = \mathcal{R}_{A_l^* B_l^*}$ on pose A_l et B_ι les solutions W et Z des équation $W\mathcal{R}_l = A$ et $Z\mathcal{R}_l = B$. Alors,

$$A_* = (I - B_l B_l^*)^{1/2} \text{ et } B_l = V_l B_l^*$$

où V_ι est une isomètrie partielle obtenue d'après la décomposition polaire $A_l = V_l|A_l|$. En effet on note par P_l, la projection orthogonale sur $\overline{R(R_l)}$. Ainsi on obtient d'après le lemme????1.2.2.(1)

$$A_l^* A_l + B_l^* B_l = P_l.$$

D'après la difinition de A_l et B_l et le fait que $|A_l| = A_l V_l$ on a

$$\begin{aligned} A^*B_* = B^*A_* \; &= R_l B_l^*(I - B_l B_l)^{1/2} = R_l(P_l - B_l^* B_l)^{1/2} B_l^* \\ &= R_l|A_l|B_l^* = R_l A_l^* V_l B_l^* = A_l^* V_l B_l^*. \end{aligned}$$

D'où, $B_* = V_l B_l^*$ car $N(A^*) = \{0\}$.

Corollaire 4.5.1

Si B/A est densément défini, alors,

$$(B/A)^* = B_*/A_* = V_l B_l^*/(I - B_l B_l^*)^{1/2}.$$

Conclusion

Le sujet traité dans cette mémoire est dans la théorie des opérateurs, dont l'objectif est l'étude globale sur les classes des opérateurs sur un espace de Hilbert,

la préparation de ce sujet est traiter de différentes façons, on commence par la définition algébrique, puis les opérations usuelles et ensuite un exemple matricielle, et on a calculé l'adjoint du quotient et aussi réalisé les propriétés topologique tels que la bornitude la compacité, la fermeture...etc.

Il reste beaucoup de questions ouvertes. Parmi ces question on peut énoncé :

(1). Etude spectrale des opérateurs quoeints matricelle

(2). caractéres du quotient d'opérateurs fermé

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. A. Barnes, *Majorization, range inclusion, and fatorization for bounded linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (205), 155-162

[2] J. Dixmier, *Etude sur les variétés et les opérateurs de Jilia*, Bull. Soc. Math. France, 77 (1949), 11-101.

[3] R.G Douglas, *On majorization and rang inclusion of operators in Hilber space*, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 413-416.

[4] P. A. Fillmore, J. P.Wiliams, *On operator ranges*, Adv. Math., 7 (1971), 254-281.

[5] A. Gherbi, *Quelques classes d'opérateurs quotients, caractérisations et applications,* Thèse de Doctorat, Université d'Oran 1, 2015.

[6] A. Gherbi, B. Messirdi. M. Benharrat. *Quotient operators : new generation of linear operators*, Funct. Anal. Approx. Comput. 7(1) (2015), 85-93.

[7] A. Gherbi, *Quelques classes d'opérateurs quotients, caractérisations et applications,* Thèse de Doctorat, Université d'Oran 1, 2015.

[8] S. Goldberg, *Unbounded LInear Operators* McGraw-Hill, New-York, 1966.

[9] G. Hirasawa, *Quotient of bounded operators and Kaufman's theorem*, Math. J. Totama Univ. 18 (1995), 215-224.

[10] S. Izumino, *The product of operators with a closed range and an extension of reverseorder law*, Tohoki Math. J., 34 (1982), 43-52.

[11] S. Izumino, *Quotient of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), 427-435.

[12] S. Izumino, *Decomposition of quotients of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc.,106 (1986), 427-435.

[13] S. Izumino, *Decomposition of quotients of bounded operators and their weak adjoints*, J. Operator theory., 29 (1993), 83-96.

[14] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math., 6 (1958), 261-322.

[15] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New-York, (1966).

[16] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as quotient of continuous operators,* Proc. Amer. Math. Soc.,72 (1978), 531-534.

[17] J. J. Koliha, *Convergent and stable operators and their generalization*, J. Math. Anal. Appl., 43 (1973), 778-794.

[18] S. Ôta, *Closed linear operators with domain containing their range*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 27 (1984),229-233.