Abstract

In this memory, we will study the problem of exact controllability for the wave equation, we will present two cases ; the first case when the control is applied on the boundary and the second case when the control is applied in the interior. The used method is the Hilbert Uniqueness Method «the method HUM» introduced by J.L. Lions [15]. This method is based on uniqueness criteria and energy inequalities in the space of initial data.

Key words : Exact controllability, HUM method, wave equation, invers inequality.

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier le problème de contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes, on va présenter deux cas ; le premier cas lorsque le contrôle est appliqué sur le bord et le second cas lorsque le contrôle est appliquée à l'intérieur. La méthode utilisée est la méthode d'unicité hilbertienne «la méthode HUM» introduite par J.L. Lions [15]. Cette méthode se base sur un critère d'unicité et des inégalités d'énergie qui caractérisent l'espace des données initiales.
Mots clés : Contrôlabilité exacte, méthode HUM, équation des ondes, inégalité inverse.

resumé

résumé

" Rendre clair l'obscur et simple le complexe "

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.

" Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenté d'innover "

Albert Einstein.

" Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous habituez juste à elles "

John Von Neumann.

" En mathématiques nous sommes davantage des serviteurs que des maitres "

Hermite.

" Notre tête est ronde pour permettre à la pensée de changer de direction "

Francis Picabia.

" Les mathématiques sont une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, et où l'on ne sait jamais si ce que l'on dit est vrai "

Bertrand Russel.

" Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes, un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies "

Stefan Banach.

" Ne dites pas : 'J'ai trouvé la vérité', mais plutôt : 'J'ai trouvé une vérité "

Gibran Khalil GIBRAN.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces L^p, les espaces de Hilbert et de Sobolev ainsi que une partie de définitions sur les semi-groupes et enfin on va considérer quelques concepts de la contrôlabilité qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces normés et espace de Banach

Définition 1.1 [11] *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$, notée $x \mapsto \|x\|$, vérifiant les propriétés suivantes*
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \;\; \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in E$ *(l'inégalité triangulaire).*
Un espace vectoriel sur lequel une norme a été spécifiée est appelé espace vectoriel normé.
Une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés (ii) et (iii), mais pas nécessairement la propriété (i), est appelée une semi-norme sur E.

Définition 1.2 [11] *On appelle espace de Banach un espace normé complet.*

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.3 [13] *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive.*

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz***

$$\boxed{|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u,v \in H.}$$

Rappelons aussi que

$$\boxed{\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}}$$

est une norme associée au produit scalaire.

Définition 1.4 [13] *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme associée $\|.\|$.*

Théorème d'identification des espaces de Hilbert

Théorème 1.1 ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)*** [13]
Etant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\boxed{\langle \varphi, v \rangle = (f,v) \quad \forall v \in H.}$$

De plus on a

$$\boxed{\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.}$$

Preuve. *voir* [13] ■

Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.5 [13] *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est*
(i) ***continue*** *s'il existe une constante C telle que*

$$\boxed{|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in H,}$$

(ii) ***coercive*** *s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\boxed{a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in H.}$$

Théorème 1.2 ***(Lax-Milgram)***[13] *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$\boxed{a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.}$$

1.1.3 Les espaces L^p

Définition 1.6 ***(Espace de Lebesgue)*** [19]
Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$\boxed{L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \textit{ mesurable et } \int_\Omega |u|^p < \infty \right\}.}$$

De plus, pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\boxed{\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.}$$

Définition 1.7 [1] *Pour $p = \infty$, l'espace de Banach $L^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\boxed{L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \textit{ mesurable et } \exists C > 0 \textit{ t.q. } |u(x)| \leq C \; p.p. \}}$$

est muni de la norme

$$\boxed{\|u\|_{L^\infty} = \sup ess(u) = \inf \{ C : |u(x)| \leq C \; p.p. \}.}$$

Remarque 1.1 [13] *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\boxed{(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx, \;\; \forall u, v \in L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

1.1.4 L'espace $L^p(0, T; V)$

Définition 1.8 [25] *Soit V un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; V)$ l'espace des fonctions mesurables $u :]0, T[\to V$ tel que*

$$\boxed{\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \;\; \textit{pour } 1 \leq p < \infty}$$

et pour $p = \infty$ on a

$$\boxed{\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \sup_{0 \leq t \leq T} ess \|u(t)\|_V < \infty.}$$

L'espace $L^p(0, T; V)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
Si V est de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$, $L^2(0, T; V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\boxed{(u, v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V \, dt.}$$

Théorème de compacité d'Aubin-Lions [17]

On se donne trois espaces de Banach B_0, B, B_1 avec

$$B_0 \subset B \subset B_1,\ \ B_i \text{ réflexif, } i = 0, 1$$
$$\text{L'injection } B_0 \to B \text{ est compacte.}$$

On définit

$$\boxed{W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}\left(0, T; B_0\right), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}\left(0, T; B_1\right) \right\}}$$

où T est fini et où $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$.
Muni de la norme

$$\boxed{\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}}$$

W est un espace de Banach.
On a alors le résultat suivant

Théorème 1.3 *Sous les hypothèses précédentes et si $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$ l'injection de W dans $L^{p_0}(0, T; B)$ est compacte.*

Preuve. voir [17] ■

Les distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; notons par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact dans Ω.
On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et on note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 1.9 ***(Dérivation des distributions)*** [19]
Soit T un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle ordre de α et on note $|\alpha|$ l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. La dérivée d'ordre $|\alpha|$ de T est l'application suivante, notée $D^\alpha T$

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \langle D^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle .$$

Remarque 1.2 *Si u est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $D^\alpha u$ la dérivée d'ordre α de u*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.1.5 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont les espaces "naturels" des solutions d'équations aux dérivées partielles. On les appelle aussi espaces d'énergie car ils s'interprètent naturellement comme les espaces de fonctions d'énergie bornée. (voir [2])
Nous rappellerons ici les définitions et les résultats qui seront utilisés par la suite.

Espace de Sobolev d'ordre entier $\mathbf{H}^m$

L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.10 [5] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$, On appelle espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur Ω l'espace*

$$\boxed{H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\}.}$$

Ici la dérivation est au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions $v_1, \dots, v_n$ dans $L^2(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i = 1, \dots, n.$$

les fonctions v_i sont notées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 &= \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \\ &= \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire noté $(u, v)_{H^1}$ et défini par

$$\begin{aligned} ((u, v))_{H^1} &= \int_\Omega u(x) v(x) dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &= (u, v) + (\nabla u, \nabla v). \end{aligned}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.11 [1] *les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$.*

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \Gamma\}}$$

sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient une norme donné par

$$\boxed{\|u\|_0^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx.}$$

L'espace $H^{-1}(\Omega)$

$$\boxed{H^{-1}(\Omega) = \text{dual topologique de } H_0^1(\Omega).}$$

Théorème 1.4 ***(de Rellich)*** [1] *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, i.e. tout ensemble borné de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On écrit*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \textit{ est compacte.}$$

On peut identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, alors on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses. (voir [13])

L'espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.12 [5] *On définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par*

$$\boxed{H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\right\}.}$$

On le munit de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

L'espace $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.13 [5] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut définir les espaces de Sobolev*

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\right\}}$$

que l'on munit de la norme

$$\boxed{\|u\|_{W^{m,p}}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx, \ \textit{si } 1 \leq p < +\infty,}$$

$$\boxed{\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}}$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.
On note

$$\boxed{H^{1}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \text{ et } H^{m}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).}$$

1.1.6 Le théorème de Banach-Steinhaus

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|Tx\|$$

Théorème 1.5 ***(Banach-Steinhaus)***[13] *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F.*
On suppose que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in E,\ \forall i \in I.$$

Preuve. voir [13] ■

Corollaire 1.1 [13] *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F tels que pour chaque $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée Tx.*
Alors on a

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \sup_{n} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty \\
&(b) \quad T \in \mathcal{L}(E,F) \\
&(c) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.
\end{aligned}$$

Preuve. voir [13] ■

1.1.7 Quelques formules d'intégration par parties

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine C^1. Pour les champs de vecteurs

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

avec $F \in C^1(\Omega)$.
La formule de divergence de Gauss est donnée par

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma} \tag{1.1}$$

où $\operatorname{div} F = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j$, ν désigne le vecteur unitaire normale extérieur sur $\partial\Omega$, et $d\sigma$ est l'élément de surface de la frontière $\partial\Omega$, données localement en termes de cartes locaux par

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\varphi(y')|} dy'.$$

Un certain nombre d'identités utiles peuvent être dérivées de (1.1). On applique (1.1) à νF, avec $v \in C^1(\overline{\Omega})$, et rappelons que l'identité

$$\operatorname{div}(vF) = v \operatorname{div} F + \nabla v \cdot F$$

nous obtenons la formule **d'intégration par partie** suivante (voir [25])

$$\boxed{\int_\Omega v \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} vF \cdot \nu d\sigma - \int_\Omega \nabla v \cdot F dx.} \tag{1.2}$$

Choisir $F = \nabla u$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, comme $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ et $\nabla u \cdot \nu = \partial_\nu u$, on obtient **l'identité de Green** (voir [25])

$$\boxed{\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u d\sigma - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx.} \tag{1.3}$$

En particulier, le choix des rendements $v \equiv 1$

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u d\sigma.} \tag{1.4}$$

Si aussi $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, nous permutons les rôles de u et v dans (1.3) et avec soustraction, nous obtenons deuxième **identité de Green** (voir [25])

$$\boxed{\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma.} \tag{1.5}$$

1.1.8 Quelques inégalités à utilisés

Inégalité de Cauchy [12]

$$\boxed{\forall u, v \in L^2(\Omega) ; \ \left| \int_\Omega uvdx \right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Inégalité de Cauchy avec ε [12]
Qu'on appelle aussi ε**-inégalité**

$$\boxed{|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et a, b arbitraire (réels).

1.2 Les semi-groupes

1.2.1 Semi-groupe uniformément continu

Définition 1.14 [22] *On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes*
$i)$ $T(0) = I$;
$ii)$ $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;
$iii)$ $\lim\limits_{t \to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$.

Définition 1.15 [22] *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire*

$$\begin{aligned} A &: E \longrightarrow E, \\ A &= \lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t}. \end{aligned}$$

1.2.2 Semi-groupes de classe C_0

Définition 1.16 [22] *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes*
$i)$ $T(0) = I$;
$ii)$ $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;
$iii)$ $\lim\limits_{t \to 0} T(t)x = x, \forall x \in E$.

Définition 1.17 [22] *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble*

$$\boxed{D(A) = \left\{ x \in E \mid \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \textit{ existe} \right\}}$$

par

$$\boxed{Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).}$$

Remarque 1.3 [22] *Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.*

1.2.3 Problèmes d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H, on veut résoudre.

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \text{ si } t \in]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Définition 1.18 [26] *Soit $f \in L^1([0,T]; H)$ et $y_0 \in H$, on appelle solution faible de (1.6) la fonction $y \in C([0,T]; H)$ donnée par*

$$\boxed{y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds, \ t \in [0,T]} \tag{1.7}$$

On appelle solution classique de (1.6) tout fonction $y \in C([0,T]; H) \cap C^1([0,T]; H)$ tel que $y \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$, et vérifiant (1.7) dans $[0,T]$.

Remarque 1.4 [26] *Par définition, le problème (1.6) admet toujours une unique solution faible.*

Théorème 1.6 [26] *Soit $f \in L^1([0,T]; H)$ et $y_0 \in H$, le problème (1.6) admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule (1.7).*

Preuve. *Il suffit de démontrer que toute solution classique est donnée par la formule (1.7).*
Soit y une solution classique, pour tout $t \in [0,T]$ on considère la fonction $z : [0,T] \to H$ défini par

$$z(s) = T(t-s)y(s), \ s \in [0,t]$$

Puisque $y \in D(A)$, la fonction $\tau \mapsto T(\tau)\,y(s)$ est dérivable pour tout $\tau > 0$. Par conséquent z est dérivable sur $[0,t]$ et on a

$$\begin{aligned} z'(t) &= -T(t-s)\,Ay(s) + T(t-s)\,y'(s) \\ &= -T(t-s)\,Ay(s) + T(t-s)\,Ay(s) + T(t-s)\,f(s) \\ &= T(t-s)\,f(s) \end{aligned}$$

comme $f \in L^1([0,T];H)$, on en déduit que $z' \in L^1([0,t];H)$ et en l'intégrant entre 0 et t, on obtient

$$z(t) = z(0) + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds$$

c'est-à-dire

$$y(t) = T(t)\,y_0 + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds.$$

■

1.3 Quelques notions de la contrôlabilité

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t) \\ y(0) = y_0 \in D(A) \end{cases} \tag{1.8}$$

où

$(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Hilbert H. Soit U un espace de Hilbert et B est un opérateur dans $\mathcal{L}(U,H)$, B excite le système pour modifier l'état (chercher un état convenable). On suppose que $v \in L^2([0,T];U)$.
La fonction $y \in H$ est dite l'état du système (1.8) et v est **le contrôle**.
Les espaces U et H sont appelés respectivement *espace des contrôles* et *espace des états*.

1.3.1 Contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $y_0 \in H$ et $y_d \in H$ du système (1.8), existe-t-il une fonction v (appelée **contrôle**) permettant de passer (en un sens à définir précisément) de l'état y_0 à l'état y_d en un temps fixé $T > 0$? Le terme “passer” peut-être interprété de différentes manières, par exemple il peut signifier que la valeur à l'instant $t = T$ de la solution qui part de l'état y_0 à l'instant $t = 0$ soit exactement égale à y_d, auquel cas on parle de contrôlabilité exacte ; mais il peut aussi signifier que la valeur de cette solution à l'instant

T soit suffisamment proche de y_d, sans nécessairement lui être égale, auquel cas on parle de contrôlabilité approchée. Les notions de contrôlabilité peuvent également différer selon la forme des cibles y_d que l'on cherche à atteindre, par exemple on peut ne chercher à atteindre que l'état nul $y_d = 0$, auquel cas on parle de contrôlabilité nulle. Ces différents concepts de contrôlabilité se définissent plus précisément de la façon suivante

Contrôlabilité exacte

Définition 1.19 [26] *On dit que le système (1.8) est exactement contrôlable au temps $T > 0$, si pour tout $y_d \in H$ il existe $v \in L^2(0, T; U)$ tel que $y_v(T) = y_d$.*

$$\boxed{\forall y_d \in H, \exists v \in L^2(0, T; U) \text{ t.q. } y_v(T) = y_d.}$$

Contrôlabilité nulle

Définition 1.20 [20] *Le système (1.8) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace H à l'origine au temps T via **un contrôle** v c.-à-d.*

$$\boxed{\forall y_d \in H, \exists v \in L^2(0, T; U) \text{ t.q. } y_v(T) = 0.}$$

Remarque 1.5 [3] *La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité nulle, mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Contrôlabilité approchée

Définition 1.21 [4] *Nous dirons que le système (1.8) est faiblement (approximativement) contrôlable sur $[0, T]$ si pour tout $y_d \in H$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe **un contrôle** $v \in L^2(0, T; U)$ réalisant*

$$\boxed{\|y_v(T) - y_d\|_H < \varepsilon.}$$

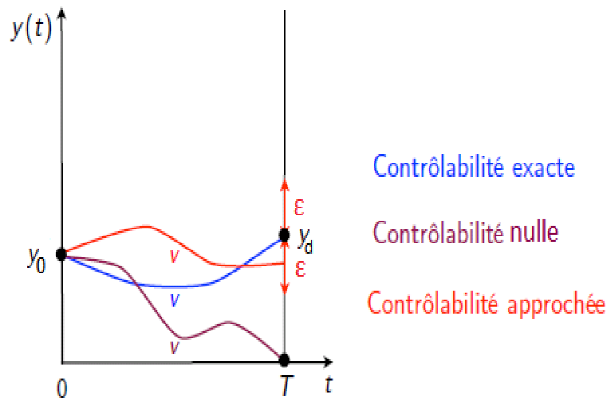


Figure 1 : Différents concepts de contrôlabilité

L'opérateur de contrôlabilité L_T

On sait que la solution de (1.8) s'écrit

$$y(t) = S(t)\,y_0 + \int_0^t S(t-s)\,Bv(s)\,ds.$$

On peut donc, introduire l'opérateur

$$\begin{cases} L_T : L^2([0,T];U) \longrightarrow H \\ u \mapsto \displaystyle\int_0^T S(T-s)\,Bv(s)\,ds. \end{cases}$$

On remarque que L_T peut aussi être défini comme $L_T\ v = y(T;0,v)$, c'est-à-dire comme la solution, à l'instant T, du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (**contrôle**) Bv.

Proposition 1.1 [3] $i)$ *Le système (1.8) est exactement contrôlable ssi L_T est surjective c.à.d.*

$$\boxed{\operatorname{Im} L_T = H.}$$

$ii)$ *Le système (1.8) est faiblement contrôlable ssi*

$$\boxed{\overline{\operatorname{Im} L_T} = H.}$$

Preuve.

$i)$ Le système (1.8) est exactement contrôlable

$$\Leftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in H, \exists v \in \left(L^2[0,T];U\right) : y_d = y_v(T) = S(t)\,y_0 + \int_0^T S(T-s)\,Bv(s)\,ds$$

$$\Leftrightarrow \quad L_T \text{ est surjectif ou } \operatorname{Im} L_T = H.$$

$ii)$ Le système (1.8) est faiblement contrôlable

$$\Leftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists v \in \left(L^2\left[0,T\right];U\right) : \left\|y_v\left(T\right) - y_d\right\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists v \in \left(L^2\left[0,T\right];U\right) : \left\|S\left(t\right)y_0 + L_T v - y_d\right\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists v \in \left(L^2\left[0,T\right];U\right) : \left\|L_T v - \left(S\left(t\right)y_0 - y_d\right)\right\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\operatorname{Im} L_T} = H.$$

■

Chapitre 2

Méthode HUM pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec un contrôle au bord

La méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) développée par J.L. Lions $[15]$ permet d'étudier **le contrôle** des solutions d'équations aux dérivées partielles de type hyperboliques. Cette méthode consiste à prouver un théorème d'unicité, en passant par une majoration de l'énergie (inégalité inverse) au moyen de la méthode des multiplicateurs, qui nous permet de construire des espaces de données pour lesquelles il existe **un contrôle** qui permet de ramener la solution du système à l'état d'équilibre.
Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode HUM dans le cas d'une action du type Dirichlet sur la frontière.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$ dans les applications), de frontière assez régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $T > 0$ un temps positif donné. On définit un cylindre $Q = \Omega \times]0, T[$ de frontière latérale $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

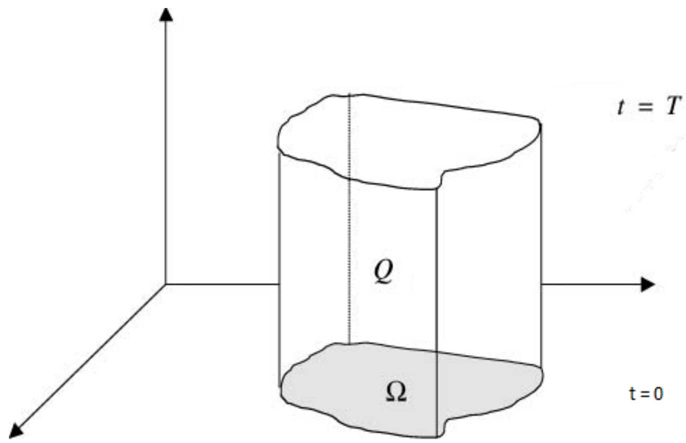


Figure 2 : Le cylindre espace-temps

On considère dans Q un système dont **l'état** $y = y\left(x, t\right)$ décrit par l'équation des ondes

$$\boxed{y'' - \Delta y = 0 \ \text{ dans } Q} \tag{2.1}$$

où

$$y' = \frac{\partial y}{\partial t},\ y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, et t est la variable de temps.

Soient les conditions initiales

$$\boxed{y\left(0\right) = y^0,\, y'\left(0\right) = y^1 \ \text{ dans } \Omega.} \tag{2.2}$$

On dénote par

$$y\left(0\right) \ \text{ la fonction } x \mapsto y\left(x, 0\right)$$

et par

$$y'\left(0\right) \ \text{ la fonction } x \mapsto y'\left(x, 0\right)$$

avec une condition aux limites non-homogène de type Dirichlet

$$\boxed{y = v \ \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[} \tag{2.3}$$

où $v = v\left(x, t\right)$ est **le contrôle** qui modélise l'action au bord Σ sur le système (2.1)–(2.3).

Le système d'évolution (2.1), (2.2) et (2.3) décrit, par exemple, les vibrations d'un corps n-dimensionnel Ω soumis à l'action d'une force v sur la frontière Γ (sur son bord) et partant d'un état initial décrit par les données $\{y^0, y^1\}$.
La question posée est : Comment arrêter ces vibrations ? C'est-à-dire : Quel est **le contrôle** qui ramène au repos les vibrations à l'instant T ?
Dans le but d'expliciter la dépendance de la solution $y = y(x,t)$ du problème (2.1)–(2.3) par rapport au **contrôle** v on utilisera la notation

$$\boxed{y = y(x,t;v) = y(v).}$$

Le problème étudié est le suivant : Soit $T > 0$ donné, peut-on, pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ donné dans un espace convenable, trouver **un contrôle** v qui ramène le système à l'état d'équilibre $\{0,0\}$ à l'instant T, c'est-à-dire on veut que la solution $y = y(x,t;v)$ de (2.1)–(2.3), vérifie la condition

$$\boxed{y(x,T;v) = y'(x,T;v) = 0 \text{ dans } \Omega.} \tag{2.4}$$

Si cela est possible, on dit alors que le système est exactement contrôlable à l'instant T.

Remarque 2.1 *A cause de la vitesse finie de propagation des ondes, le système (2.1)–(2.3) ne peut être exactement contrôlable que si T assez grand.*

Remarque 2.2 *Dans les applications, c'est rare de trouver des systèmes qui l'on peut contrôler sur tout le bord. Pour cette raison nous considérons l'action du **contrôle** uniquement sur une partie du bord.*

Dans ce cas, Considérons une partie ouverte non vide Σ_0 de Σ et on agit sur le système par la condition aux limites suivante

$$y = \left| \begin{array}{l} v \text{ sur } \Sigma_0 \\ 0 \text{ sur } \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

La formulation du problème de la contrôlabilité exacte est maintenant la suivante : "Etant donné un temps $T > 0$ et des conditions initiales $\{y^0, y^1\}$ données dans un espace convenable, existe-t-il **un contrôle** v définit sur Σ_0 tel que si $y = y(v)$ est la solution de (2.1), (2.2) et (2.5) on ait (2.4) ?"
Notre objectif est d'étudier ce problème de contrôlabilité exacte. Pour cela, on introduit les idées principales de la méthode d'unicité hilbertienne HUM qui nous allons utiliser pour résoudre le système (2.1), (2.2) et (2.5).

2.2 Description de la méthode HUM

La méthodologie du HUM est basée sur certain critères d'unicité pour le système homogène associé et la construction (par des procédés de complétion) d'espace hilbertiens adaptés à la structure du système.
L'algorithme suivant décrit les étapes fondamentales de l'application de la méthode HUM à la résolution du problème de la contrôlabilité exacte du système (2.1), (2.2) et (2.5).

Etape 1 :

Soit $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, on considère l'équation des ondes homogène

$$\left| \begin{array}{ll} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{dans } Q, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Le problème (2.6) admet une solution unique $\phi = \phi(x,t)$ (cf. paragraphe 2.3) qui satisfait (cf. le paragraphe 2.4.1) la propriété de régularité suivante

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma).$$

Etape 2 :

Ensuite, on résout le problème "rétrograde"

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi = 0 \qquad \text{dans } Q, \\ \psi = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} & \text{sur } \Sigma_0, \\ 0 & \text{sur } \Sigma \backslash \Sigma_0, \end{array} \right. \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 \ \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

où ν désigne le vecteur normale extérieur à Ω et "$\dfrac{\partial}{\partial\nu}$" la dérivée dans cette direction c'est-à-dire $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = \nabla\phi \cdot \nu = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_k}\nu_k$.
Le problème (2.7) est un système rétrograde non-homogène, car on a une condition finale $\psi(T) = \psi'(T) = 0$ dans Ω et des conditions aux limites non-homogène. Cela ne change pas le caractère "bien posé" du système, qui admet donc une solution unique ψ.

L'opérateur Λ

On définit un opérateur linéaire Λ qui associe à $\left\{\phi^0, \phi^1\right\}$ par

$$\boxed{\Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}.} \tag{2.8}$$

L'opérateur Λ est bien défini car ψ est suffisamment régulière (cf. paragraphe 2.4.2).

Etape 3 : En multipliant l'équation $(2.7)_1$ par $\phi = \phi(x,t)$ et en intégrant sur Q, on obtient

$$\underbrace{\int_Q \psi''\phi dxdt}_{(I)} - \underbrace{\int_Q \phi\Delta\psi dxdt}_{(II)} = 0.$$

Analyse de la première intégrale (I)

On a

$$(\psi', \phi)' = (\psi'', \phi) + (\psi', \phi').$$

En intégrant sur $]0,T[$, on obtient

$$\langle \psi'(T), \phi(T)\rangle - \langle \psi'(0), \phi(0)\rangle = \int_Q \psi''\phi dxdt + \int_0^T (\psi', \phi')\, dt$$

avec la condition $(2.7)_3$, on trouve

$$\int_Q \psi''\phi dxdt = -\left\langle \psi'(0), \phi^0\right\rangle - \int_0^T (\psi', \phi')\, dt \tag{2.9}$$

d'autre part, par intégration par parties, on a

$$\int_0^T (\psi', \phi')\, dt = (\psi(T), \phi'(T)) - (\psi(0), \phi'(0)) - \int_Q \psi\phi'' dxdt$$

donc

$$\int_0^T (\psi', \phi')\, dt = -\left(\psi(0), \phi^1\right) - \int_Q \psi\phi'' dxdt. \tag{2.10}$$

On substitue (2.10) dans (2.9), on obtient

$$\boxed{\int_Q \psi''\phi dxdt = -\left\langle \psi'(0), \phi^0\right\rangle + \left(\psi(0), \phi^1\right) + \int_Q \psi\phi'' dxdt.} \tag{2.11}$$

Analyse de la deuxième intégrale (II)

D'après la deuxième identité de Green (1.5), on a

$$\int_Q (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\, dxdt = \int_\Sigma \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial\nu} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right) d\Gamma dt$$

donc

$$\boxed{-\int_Q \phi\Delta\psi dxdt = -\int_Q \psi\Delta\phi dxdt + \int_\Sigma \psi\frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\Gamma dt.} \tag{2.12}$$

On ajoute (2.11) à (2.12), on obtient

$$\int_Q (\psi'' - \Delta\psi)\, \phi dxdt = \int_Q (\phi'' - \Delta\phi)\, \psi dxdt - \left\langle \psi'(0), \phi^0\right\rangle + \left(\psi(0), \phi^1\right) + \int_\Sigma \psi\frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\Gamma dt = 0$$

comme $\phi'' - \Delta\phi = 0$ dans Q et $\psi'' - \Delta\psi = 0$ dans Q, alors on trouve

$$-\left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle + \left(\psi(0), \phi^1\right) + \int_\Sigma \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma dt = 0. \tag{2.13}$$

On remarque que $\psi = \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ sur Σ_0 et $\psi = 0$ sur $\Sigma \backslash \Sigma_0$. Donc, de (2.13) il résulte

$$\left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle - \left(\psi(0), \phi^1\right) = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{2.14}$$

On considère $\left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle - \left(\psi(0), \phi^1\right)$ comme un produit scalaire de $\{\psi'(0), -\psi(0)\}$ et $\left\{\phi^0, \phi^1\right\}$. Donc, d'après (2.14) nous avons

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\rangle = \left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle - \left(\psi(0), \phi^1\right) = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{2.15}$$

On introduit alors la semi-norme

$$\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} \forall \left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.16}$$

et on suppose qu'en fait $\|.\|_F$ définit une norme dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.
Le fait que $\|.\|_F$ définisse une norme est équivalent à ce que le théorème d'unicité suivant soit vérifié.

Théorème 2.1 [14] ***(Théorème d'unicité)***
Si $\phi = \phi(x,t)$ vérifie (2.6) pour $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et la condition

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \Sigma_0$$

alors

$$\phi = 0 \ \text{ dans } Q.$$

Remarque 2.3 *Ce critère d'unicité est vraie par l'inégalité inverse ou par le théorème de Holmgren (cf. L. Hörmander [23] et J. L. Lions [14]).*

Remarque 2.4 *Si le théorème (2.1) vérifié, alors la norme (2.16) induit le produit scalaire suivant*

$$\boxed{\left(\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\zeta^0, \zeta^1\right\}\right)_F = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} d\Gamma dt} \tag{2.17}$$

où $\zeta = \zeta(x,t)$ est la solution du problème (2.6) correspondant aux données initiales $\left\{\zeta^0, \zeta^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors de (2.15) et (2.17), on déduit que

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\rangle=\left(\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right)_F\ ,\forall\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\in\mathcal{D}\left(\Omega\right)\times\mathcal{D}\left(\Omega\right). \tag{2.18}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left|\left\langle \Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\rangle\right|\leq\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_F\left\|\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\|_F\ ,\forall\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\in\mathcal{D}\left(\Omega\right)\times\mathcal{D}\left(\Omega\right) \tag{2.19}$$

L'inégalité (2.19) montre la continuité de la forme bilinéaire définie par Λ dans $\mathcal{D}\left(\Omega\right)\times\mathcal{D}\left(\Omega\right)$.
On définit par F le complété de cet espace par rapport à la norme (2.16), on obtient ainsi un espace de Hilbert. La forme bilinéaire continue $\left\{\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\}\rightarrow\left\langle \Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\rangle$ admet un prolongement par continuité à la fermeture F, nous présentons ce prolongement avec la même notation. Ensuite, on obtient une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert F qui est coercive (la coercivité de la forme bilinéaire équivaut à l'inégalité inverse qui nous allons énoncer dans la suite), alors d'après le lemme de Lax-Milgram, pour chaque $\{\eta^0,\eta^1\}\in F'$ (dual de F), il existe un unique $\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\in F$ tel que

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\rangle=\left\langle\left\{\eta^0,\eta^1\right\},\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\right\rangle_{F'\times F} \tag{2.20}$$

donc, pour tout $\left\{\zeta^0,\zeta^1\right\}\in F$ et pour chaque $\{\eta^0,\eta^1\}\in F'$, il existe un unique $\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\in F$ qui est la solution de l'équation $\Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\}=\{\eta^0,\eta^1\}$ dans F'. De tout cela, on résulte que $\Lambda:F\longrightarrow F'$ est un isomorphisme.

Etape 4 : Conclusion

On considère alors l'équation

$$\boxed{\Lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\}=\{y^1,-y^0\}.} \tag{2.21}$$

Comme Λ est un isomorphisme de F sur F', l'équation (2.21) admet une solution unique $\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\in F$ pour tout couple de données initiales $\{y^0,y^1\}$ tel que $\{y^1,-y^0\}\in F'$.
D'autre part, l'opérateur Λ a été défini par l'application (2.8), donc

$$\psi'\left(0\right)=y^1\ \text{ et }\ \psi\left(0\right)=y^0$$

où ψ désigne la solution du problème (2.7).
On choisit **le contrôle** v par

$$\boxed{v=\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\quad\text{sur }\Sigma_0.}$$

On remarque que $\psi=\psi\left(x,t\right)$ et $y=y\left(x,t\right)$ sont deux solutions du même problème non-homogène. Alors, d'après l'unicité de la solution du problème (2.1), (2.2) et (2.5) on a

$$y\left(x,t\right)=\psi\left(x,t\right)\quad\forall\left(x,t\right)\in Q.$$

De $(2.7)_3$, on déduit que

$$\boxed{y(x,T) = y'(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega.}$$

On voit que $y = y(v)$ satisfait la condition (2.4).
Finalement, on a construit **un contrôle** v qui donne la contrôlabilité exacte.
La prochaine étape est de caractériser les espaces F et F' comme des espaces de Sobolev.
Tout d'abord, on va énoncer quelques résultats préliminaires qui seront nécessaires dans l'application de HUM.

2.3 Quelques rappels sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des ondes

Dans ce paragraphe on étudie quelques résultats d'existence et de régularité des solutions de problème (2.6).
On considère le problème homogène (2.6) et l'énergie associé

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}\left\{ |\phi'(t)|^2 + |\nabla\phi(t)|^2 \right\} \ \ \forall t \in [0,T]} \tag{2.22}$$

avec les notations

$$|\phi'(t)|^2 = \|\phi'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\phi'(x,t)|^2\, dx$$

et

$$|\nabla\phi(t)|^2 = \|\nabla\phi(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_k}(x,t) \right|^2 dx.$$

On a le résultat d'existence et d'unicité de la solution de (2.6) suivant

Lemme 2.1 [24] *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipchitzienne. Alors, Pour des conditions initiales $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi^1 \in L^2(\Omega)$ il existe une solution unique $\phi = \phi(x,t)$ de (2.6) avec*

$$\phi \in C\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap C^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.23}$$

La solution ϕ de (2.6) (qui appartient à la classe (2.23) est dite solution faible de l'équation).
En plus, on a la conservation de l'énergie

$$\boxed{E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\left\{ \left|\phi^1\right|^2 + \left|\nabla\phi^0\right|^2 \right\} \ \ \forall t \in [0,T].} \tag{2.24}$$

Preuve. On a le résultat d'existence et d'unicité de la solution ϕ de (2.6) d'après [14]. Pour montrer la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation $(2.6)_1$ par $\phi'(x,t)$ et en intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\phi'' - \Delta\phi)\,\phi' dx \\ &\overset{(1.3)}{=} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right\} dx\right] - \int_\Gamma (\nabla\phi\cdot\nu)\,\phi' d\Gamma \\ &= \frac{dE(t)}{dt} - \int_\Gamma (\nabla\phi\cdot\nu)\,\phi' d\Gamma. \end{aligned}$$

D'après les conditions au bord dans (2.6), on obtient

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

et par suite on a conservation de l'énergie. ■
Pour la régularité de la solution ϕ, on a le lemme suivant qui justifiera les intégrations effectuées dans la suite

Lemme 2.2 [14] *On suppose maintenant que Γ est de classe C^2. Alors, si $\{\phi^0,\phi^1\} \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ la solution ϕ de (2.6) vérifie la propriété de régularité suivante*

$$\phi \in C\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.25}$$

Preuve. voir [14] ■
On considère maintenant l'équation des ondes non homogène

$$\left|\begin{array}{ll} \phi'' - \Delta\phi = f & \text{dans } Q, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.26}$$

On a le résultat suivant

Lemme 2.3 [14] ***(a)*** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipchitzienne. Pour tout $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi^1 \in L^2(\Omega)$ il existe une solution unique ϕ de (2.26) avec*

$$\phi \in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.27}$$

De plus, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C\left\{\left|\nabla\phi^0\right| + \left|\phi^1\right| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right\}. \tag{2.28}$$

(b) *On suppose maintenant que Ω est de classe C^2. Alors, pour tout $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$,*

$\phi^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $\phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ il existe une solution unique ϕ telle que

$$\phi \in C\left(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.29}$$

avec l'estimation

$$\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)} + \|\phi'\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\left\|\phi^0\right\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} + \left\|\phi^1\right\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}\right\} \tag{2.30}$$

Preuve. voir [14] ■

Maintenant, on établit une identité fondamentale qui permettra ensuite d'obtenir les estimations a priori nécessaires dans l'application de HUM.

Lemme 2.4 [14] *Soit $q = (q_k)$ un champ de vecteurs de classe $\left[C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right]^n$. Alors, pour toute solution faible $\phi = \phi(x,t)$ de l'équation (2.26), c'est-à-dire pour tout $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k\nu_k\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma = \left(\phi'(t), q_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt \\ + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} dxdt - \int_Q f q_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.31}$$

On a appliqué ici la convention des indices répétés de sorte que, par exemple

$$q_k\nu_k = \sum_{k=1}^n q_k\nu_k.$$

Avant de démontrer l'identité (2.31), on va énoncer le lemme suivant qui sera nécessaire dans la suite

Lemme 2.5 [21] *Si $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, alors*

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \nu_i\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \quad \textit{sur } \Gamma.$$

$$|\nabla\phi|^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2.$$

Preuve. voir [21] ■

Maintenant, on retourne à la preuve du lemme 2.4

Preuve. On établit d'abord l'identité dans le cas d'une solution forte ϕ, i.e. qui correspond à des données $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)$, $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$.

On multiplie l'équation $(2.26)_1$ par $q_k \dfrac{\partial \phi}{\partial x_k}$ et l'on intègre sur Q, il en résulte que

$$\underbrace{\int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt}_{(I)} - \underbrace{\int_Q \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt}_{(II)} = \int_Q f q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt. \tag{2.32}$$

Analyse de (II)

On a

$$-\int_Q \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt$$

d'après l'identité de Green (1.3), on obtient

$$-\int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx = -\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Gamma + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx. \tag{2.33}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \nabla \phi \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{aligned}$$

donc

$$(2.33) \Leftrightarrow -\int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx = -\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Omega q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx + \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx \tag{2.34}$$

En utilisant l'identité de Green (1.3), on obtient

$$\frac{1}{2} \int_\Omega q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx = \frac{1}{2} \int_\Gamma q_k |\nabla \phi|^2 \nu_k d\Gamma - \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx \tag{2.35}$$

On substitue (2.35) dans (2.34), on trouve

$$-\int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx = -\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma q_k |\nabla \phi|^2 \nu_k d\Gamma - \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx + \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx.$$

Par ailleurs, grâce au lemme 2.5, on a

$$-\int_\Omega \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx = -\int_\Gamma q_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma q_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx + \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx.$$

Finalement, l'intégration sur $]0, T[$ nous donne

$$\boxed{-\int_Q \Delta \phi q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = -\frac{1}{2} \int_\Sigma q_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dxdt + \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt} \tag{2.36}$$

Analyse de (I)

On a

$$\int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = \int_0^T \int_\Omega \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt.$$

et on sait que

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi', q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) dt = \int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt + \int_Q \phi' q_k \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} dxdt$$

donc

$$\int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = \left.\left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T - \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt \tag{2.37}$$

d'autre part, on observe que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q_k}{2}|\phi'|^2\right) dx = \int_\Gamma \frac{q_k}{2} |\phi'|^2 \nu_k d\Gamma = 0$$

comme conséquence de la formule de divergence de Gauss (1.1) et du fait que $\phi = 0$ sur Σ.
Alors, il résulte que

$$-\frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt \tag{2.38}$$

On substitue (2.38) dans (2.37), on obtient

$$\boxed{\int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = \left.\left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt} \tag{2.39}$$

Par suite, en reportant (2.36) et (2.39) dans (2.32), on déduit

$$\left.\left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T + \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma q_k \nu_k \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dxdt$$
$$+ \int\limits_Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = \int\limits_Q f q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt$$

alors

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \nu_k \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt = \left.\left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\phi'|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dxdt$$
$$+ \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt - \int_Q f q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt$$

d'où l'identité (2.31).

Considérons maintenant le cas général d'une solution faible $\phi = \phi(x,t)$, c'est-à-dire qui correspond à des données $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$.

On approche ces données par des données plus régulières $\left\{\phi_n^0, \phi_n^1\right\} \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)$, $\{f_n\} \in L^1\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ telles que

$$\begin{aligned} &\left\{\phi_n^0, \phi_n^1\right\} \to \left\{\phi^0, \phi^1\right\} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ et} \\ &f_n \to f \text{ dans } L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \text{ lorsque } n \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.40}$$

L'identité (2.31) est donc vérifiée par les solutions fortes ϕ_n qui correspondent aux données $\left\{\phi_n^0, \phi_n^1, f_n\right\}$, et d'après l'estimation (2.28) et les propriétés (2.40) on voit que

$$\begin{aligned} &\phi_n \to \phi \text{ dans } C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \text{ et} \\ &\phi_n' \to \phi' \text{ dans } C\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \text{ lorsque } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans le membre de droite de l'identité (2.31), d'en déduire que $q_k \nu_k \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 \in L^1(\Sigma)$ et que l'identité (2.31) et aussi vérifiée dans ce cas. ■

2.4 Régularité des solutions faibles

2.4.1 Le problème homogène

Théorème 2.2 [14] *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma \leq C(T+1)\left\{\left|\nabla \phi^0\right|^2 + \left|\phi^1\right|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right\}, \\ \forall \left\{\phi^0, \phi^1, f\right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

où $\phi = \phi(x, t)$ désigne la solution du problème (2.26).

Preuve. voir [14] ■

Remarque 2.5 [14] *D'après (2.41) il résulte que $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Ceci est une **propriété de régularité cachée** des solutions faibles de l'équation des ondes.*

2.4.2 Le problème non homogène

Ici on va étudier l'existence et la régularité des solutions du problème non homogène (2.7).
Soit le problème suivant

$$\left| \begin{array}{ll} z'' - \Delta z = 0 & \text{dans } Q, \\ z = v & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = z^0, \; z'(0) = z^1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.42}$$

La solution z du problème (2.42) est définie par la méthode de transposition (cf. J. L. Lions et E. Magenes [18]). Plus précisément, on a la définition suivante

Définition 2.1 [16] *Pour tout $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, on appelle solution ultra faible du problème (2.42), une fonction $z \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ satisfaite la condition*

$$\int_Q fzdxdt = \left\langle z^1, \theta(0) \right\rangle - \left(z^0, \theta'(0)\right) - \int_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} v d\Gamma dt. \tag{2.43}$$

Pour tout $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution du problème

$$\left| \begin{array}{ll} \theta'' - \Delta \theta = f & \textit{dans } Q, \\ \theta = 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \textit{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.44}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 2.6 [16] *Le problème (2.42) admet une seule solution ultra faible z vérifie*

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right) \tag{2.45}$$

Preuve. voir [21] ■

Théorème 2.3 [16] *Pour tout $z^0 \in L^2(\Omega)$ et $z^1 \in H^{-1}(\Omega)$ et pour tout $v \in L^2(\Sigma)$ il existe une solution unique z du problème (2.42)*

avec

$$z \in C\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.46}$$

et

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right) \tag{2.47}$$

Preuve. voir [16] ■

Maintenant, nous revenons à l'identification des espaces F et F'.

Tout d'abord, on remarque qu'avec le choix particulier $[f = 0]$ dans le théorème (2.2) on obtient le

Corollaire 2.1 ***(L'inégalité directe)*** [14]
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\,(T+1)\,E\,(0) = C\,(T+1)\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}, \forall \phi \text{ solution faible de (2.6).} \tag{2.48}$$

Comme F est le complété par rapport à la norme définie par la côté droite de l'inégalité (2.48), alors on déduit que $H_0^1\,(\Omega) \times L^2\,(\Omega) \subset F$. Pour prouver que $F \subset H_0^1\,(\Omega) \times L^2\,(\Omega)$ on a besoin de prouver qu'il existe une constante C_1 tel que

$$C_1 \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{2.49}$$

Si nous prouvons (2.49) qui combinée avec "l'inégalité directe" du Corollaire 2.1, nous permettra d'identifier l'espace F par $F = H_0^1\,(\Omega) \times L^2\,(\Omega)$ et son dual $F' = H^{-1}\,(\Omega) \times L^2\,(\Omega)\,.$
L'inégalité (2.49) est appelée **l'inégalité inverse** qui nous allons prouver dans le paragraphe suivant

2.4.3 L'inégalité inverse

L'objet de ce paragraphe est d'établir une deuxième estimation "**l'inégalité inverse**" qui permettra en même temps d'aboutir à un résultat d'unicité du type du Théorème 2.1 et a fortiori d'obtenir des informations supplémentaires sur l'espace des données initiales dans lequel la contrôlabilité exacte a lieu.
On introduit d'abord quelques notations.
Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$, on définit le vecteur

$$m\,(x) = x - x^0$$

avec des composants

$$m_k\,(x) = x_k - x_k^0\,, \quad 1 \leq k \leq n$$

et une partition de la frontière Σ de la manière suivante

$$\Gamma\left(x^0\right) = \left\{x \in \Gamma; m\,(x) \cdot \nu\,(x) > 0\right\}$$

$$\Gamma_*\left(x^0\right) = \Gamma \backslash \Gamma\left(x^0\right) = \left\{x \in \Gamma; m\,(x) \cdot \nu\,(x) \leq 0\right\}$$

et

$$\Sigma\left(x^0\right) = \Gamma\left(x^0\right) \times \left]0, T\right[\,.$$

$$\Sigma_*\left(x^0\right)=\Sigma\backslash\Sigma\left(x^0\right)=\Gamma_*\left(x^0\right)\times\left]0,T\right[.$$

On introduit on outre

$$R\left(x^0\right)=\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left\|x-x^0\right\|=\left\|m\left(x\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et on considère

$$T\left(x^0\right)=2R\left(x^0\right)$$

Théorème 2.4 ***(L'inégalité inverse)*** [14]
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2. Alors, pour tout $T>T\left(x^0\right)$ et toute solution faible ϕ de (2.6) l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left(T-T\left(x^0\right)\right)E_0\leq\frac{R\left(x^0\right)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt \tag{2.50}$$

Preuve. On écrit l'identité énoncée dans le lemme (2.4), dans le cas des solutions homogènes $(f=0)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma}q_k\nu_k\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2d\Sigma=\left(\phi'\left(t\right),q_k\frac{\partial\phi\left(t\right)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T+\frac{1}{2}\int\limits_{Q}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left[\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right]dxdt+\int\limits_{Q}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt. \tag{2.51}$$

avec le choix de multiplicateurs

$$q_k\left(x\right)=m_k\left(x\right)=x_k-x_k^0,\ 1\leq k\leq n$$

alors

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_i}=\delta_{ik},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}=n\ \text{ et }\ \frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}=\left|\nabla\phi\right|^2.$$

On pose

$$X=\left(\phi'\left(t\right),q_k\frac{\partial\phi\left(t\right)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T$$

donc, l'identité (2.51) devient

$$X+\frac{n}{2}\int_Q\left[\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right]dxdt+\int_Q\left|\nabla\phi\right|^2dxdt=\frac{1}{2}\int_\Sigma m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt. \tag{2.52}$$

Sur $\Sigma\left(x^0\right)$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$0<m\left(x\right)\cdot\nu\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\nu_k\leq\left(\sum_{k=1}^{n}m_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|m\left(x\right)\right\|\leq R\left(x^0\right) \tag{2.53}$$

et d'autre part, comme $m\left(x\right)\cdot\nu\left(x\right)\leq0$ sur $\Sigma_*\left(x^0\right)$, on peut déduire que

$$\int_\Sigma m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\leq\int_{\Sigma(x^0)}m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\overset{(2.53)}{\leq}R\left(x^0\right)\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt \tag{2.54}$$

On utilise (2.54) dans (2.52), il vient

$$X + \frac{n}{2}\int_Q \left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt + \int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt \leq \frac{R\left(x^0\right)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \tag{2.55}$$

En outre

$$\begin{aligned} X + \frac{n}{2}\int_Q \left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt + \int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt &= X + \frac{n}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt - \frac{n}{2}\int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt \\ &+ \int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt - \frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= X + \frac{n-1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt + \frac{2-n}{2}\int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt \\ &= X + \frac{n-1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt - \frac{n-2}{2}\int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt \\ &= X + \frac{n-1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt - \frac{n-1}{2}\int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q |\phi'|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla\phi|^2 \, dxdt \\ &= X + \frac{n-1}{2}\int_Q \left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt. \end{aligned}$$

On pose

$$Y = \int_Q \left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right] dxdt.$$

En plus, la conservation de l'énergie (2.24) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_Q \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt &= \int_0^T \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right] dxdt \\ &= \int_0^T E(0)\, dt \\ &= TE(0) \end{aligned}$$

donc l'inégalité (2.55) devient

$$X + \frac{n-1}{2} Y + TE(0) \leq \frac{R\left(x^0\right)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{2.56}$$

Maintenant, on estime Y par le

Lemme 2.7 [21] *Pour toute solution faible ϕ de l'équation (2.6) on a*

$$\boxed{Y = \left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T.}$$

■

Preuve. On multiplie l'équation (2.6) par ϕ et intégrant sur Q, on obtient

$$\int_Q \phi''\phi dxdt - \int_Q \Delta\phi\phi dxdt = 0. \tag{2.57}$$

On a

$$\left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi'(t), \phi(t)\right) dt = \int_Q \phi''\phi dxdt + \int_Q \left|\phi'\right|^2 dxdt$$

donc

$$\int_Q \phi''\phi dxdt = \left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T - \int_Q \left|\phi'\right|^2 dxdt \tag{2.58}$$

d'autre part, d'après l'identité de Green (1.3) et du fait que ($\phi = 0$ sur Σ) on a

$$\int_Q \phi\Delta\phi dxdt = \int_\Sigma \phi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\nu_k d\Gamma dt - \int_Q \left|\nabla\phi\right|^2 dxdt = -\int_Q \left|\nabla\phi\right|^2 dxdt. \tag{2.59}$$

De (2.57), (2.58) et (2.59) on déduit

$$\left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T - \int_Q \left(\left|\phi'\right|^2 - \left|\nabla\phi\right|^2\right) dxdt = 0$$

et par conséquent

$$Y = \left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T$$

Revenons à la preuve du théorème (2.4)

d'après le lemme (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} X + \frac{n-1}{2}Y &= \left(\phi'(t), m_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T + \frac{n-1}{2}\left(\phi'(t), \phi(t)\right)\big|_0^T \\ &= \left(\phi'(t), m_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right)\Bigg|_0^T \end{aligned}$$

alors

$$X + \frac{n-1}{2}Y = \int_\Omega \phi'(t)\left(m_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right) dx\Bigg|_0^T. \tag{2.60}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy avec ε on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_\Omega \phi'(t)\left(m_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \left|\phi'(t)\right|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \left(m_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right)^2 dx \tag{2.61}$$

d'autre part

$$\int_\Omega \left(m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 dx = \int_\Omega \left(m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^2 dx + \frac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega \phi^2 dx + (n-1)\underbrace{\int_\Omega \left(m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)\phi dx}_{(*)} \tag{2.62}$$

et

$$(*) \Leftrightarrow \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \phi dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} \phi^2 dx$$

En outre, d'après la formule de divergence de Gauss (1.1) et comme ($\phi = 0$ sur Σ) on a

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \left(m_k \phi^2\right) dx = \int_\Gamma m_k \nu_k \phi^2 d\Gamma = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} \phi^2 dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \phi^2 dx = -\frac{n}{2} \int_\Omega \phi^2 dx \tag{2.63}$$

En utilisant (2.63) dans (2.62), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi \right)^2 dx &= \int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 dx + \frac{(n-1)^2}{4} \int_\Omega \phi^2 dx - \frac{n(n-1)}{2} \int_\Omega \phi^2 dx \\ &= \int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 dx + \left[\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right] \int_\Omega \phi^2 dx. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 \overset{C.Schwarz}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 \right)$$

cela implique que

$$\left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 \leq \|m(x)\|^2 |\nabla \phi|^2$$

donc

$$\int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq \int_\Omega \|m(x)\|^2 |\nabla \phi|^2 \leq R^2\left(x^0\right) \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx.$$

D'autre part, comme

$$\left[\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right] = -\frac{\left(n^2-1\right)}{4} \leq 0$$

avec tout cela, on déduit que

$$\int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi \right)^2 dx \leq \int_\Omega \left(m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq R^2\left(x^0\right) \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx \tag{2.64}$$

On substitue (2.64) dans (2.61) avec le choix de $\varepsilon = R\left(x^0\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi'(t) \left(m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi(t) \right) dx &\leq \frac{R\left(x^0\right)}{2} \int_\Omega |\phi'(t)|^2 dx + \frac{R\left(x^0\right)}{2} \int_\Omega |\nabla \phi(t)|^2 dx \\ &\leq \frac{R\left(x^0\right)}{2} \int_\Omega \left[|\phi'(t)|^2 + |\nabla \phi(t)|^2 \right] dx \end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \phi'(t)\left(m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right) dx \leq R\left(x^0\right) E(0). \tag{2.65}$$

De (2.60) et (2.65), on déduit

$$\begin{aligned}
\left|X + \frac{n-1}{2}Y\right| &= \left|\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right)\Big|_0^T\right| \\
&\leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right)\right| \\
&\leq 2\left\|\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}\phi(t)\right)\right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq 2R\left(x^0\right) E(0).
\end{aligned}$$

On prend $T(x^0) = 2R(x^0)$, on obtient

$$\left|X + \frac{n-1}{2}Y\right| \leq T\left(x^0\right) E(0)$$

donc

$$TE(0) - T\left(x^0\right)E(0) \leq TE(0) - \left|X + \frac{n-1}{2}Y\right| \leq X + \frac{n-1}{2}Y + TE(0) \overset{(2.56)}{\leq} \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

d'où

$$\left(T - T\left(x^0\right)\right)E(0) \leq \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

et par conséquent

$$\int_\Omega \left(|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2\right) dx \leq \frac{R(x^0)}{(T - T(x^0))}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

■

Chapitre 3

Méthode HUM pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec un contrôle interne

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de la contrôlabilité exacte avec un contrôle interne, la méthode qu'on utilise est HUM qui a été déjà présentée dans le chapitre 2 dans le cas du contrôle frontière.

3.1 Formulation du problème. Description de HUM

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1,$ de frontière Γ suffisamment régulière et ω un ouvert non vide de Ω.
On considère le problème de contrôle suivant

$$\left| \begin{array}{ll} y'' - \Delta y = h\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y\,(0) = y^0,\ y'\,(0) = y^1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Où χ_ω désigne la fonction caractéristique de l'ensemble ω et la fonction h de l'équation (3.1) est **le contrôle** du système.
Le problème de la contrôlabilité exacte du système (3.1) se formule d'une manière analogue au cas du contrôle frontière.
Etant donné un temps $T > 0$, pour des données initiales $\{y^0, y^1\}$ dans un espace de Hilbert convenable ; trouver **un contrôle** $h \in L^2\,(\omega \times]0, T[)$ tel que la solution $y = y\,(x, t)$ du système

(3.1) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.2}$$

Ce type du problème est appelé problème de **contrôlabilité exacte interne** puisque l'action du **contrôle** h est exercée dans une partie $\omega \times]0, T[$ de cylindre $Q = \Omega \times]0, T[$, (cf. Fig 3).

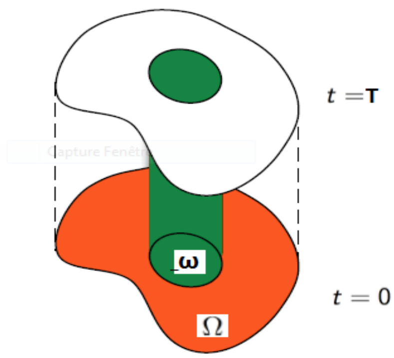


Figure 3 : Le sous cylindre $\omega \times]0, T[$

Il est bien connu que l'équation des ondes modélise de nombreux phénomènes physiques comme les petites vibrations des corps élastiques et la propagation du son. Par exemple (3.1) fournit une bonne approximation pour les petites vibrations d'une corde élastique ou une membrane occupe la région Ω au repos. **Le contrôle** h représente alors une force localisée agissant sur la structure vibrante. (voir [9])

Dans ce qui suit, on va prouver que la méthode HUM est bien appliquée pour résoudre le problème de la contrôlabilité exacte interne.

Maintenant, nous allons décrire HUM par des étapes comme nous avons fait dans le deuxième chapitre.

Etape 1 :

Soit $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, on considère le système homogène

$$\left| \begin{array}{ll} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{dans } Q, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Ce problème admet une solution unique $\phi = \phi(x, t)$.

Etape 2 :
Ensuite, par la solution $\phi = \phi(x,t)$ de (3.3) on résout le problème rétrograde suivant

$$\left|\begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi = -\phi\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi(T) = 0, \ \psi'(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

L'opérateur Λ
avec la solution $\psi = \psi(x,t)$ de (3.4) on définit l'opérateur Λ par

$$\boxed{\Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}.} \tag{3.5}$$

Etape 3 : On multiplie l'équation $(3.3)_1$ par $\psi = \psi(x,t)$ et l'on intègre sur Q. On obtient

$$\int_0^T\int_\Omega \phi''\psi dxdt - \int_0^T\int_\Omega \psi\Delta\phi dxdt = 0. \tag{3.6}$$

On a

$$(\phi', \psi)' = (\phi'', \psi) + (\phi', \psi').$$

Par suite, l'intégration sur $]0,T[$ nous donne

$$(\phi'(T), \psi(T)) - (\phi'(0), \psi(0)) = \int_0^T (\phi'', \psi)\, dt + \int_0^T (\phi', \psi')\, dt.$$

Comme $\psi(T) = 0$, il résulte que

$$\int_0^T (\phi'', \psi)\, dt = -\left(\phi^1, \psi(0)\right) - \int_0^T (\phi', \psi')\, dt$$

d'autre part, on a

$$(\phi, \psi')' = (\phi', \psi') + (\phi, \psi'').$$

Par un argument similaire, on trouve

$$\int_0^T (\phi', \psi')\, dt = -\left(\phi^0, \psi'(0)\right) - \int_0^T (\phi, \psi'')\, dt.$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^T\int_\Omega \phi''\psi dxdt = -\left(\phi^1, \psi(0)\right) + \left(\phi^0, \psi'(0)\right) + \int_0^T\int_\Omega \phi\psi'' dxdt} \tag{3.7}$$

A partir de $(3.3)_2$, $(3.4)_2$ et l'identité de Green (1.5), on obtient

$$\boxed{\int_0^T\int_\Omega \psi\Delta\phi dxdt = \int_0^T\int_\Omega \phi\Delta\psi dxdt.} \tag{3.8}$$

De (3.6), (3.7) et (3.8), on a

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt = \left(\psi'(0), \phi^0\right) - \left(\psi(0), \phi^1\right). \tag{3.9}$$

D'après la définition (3.5) de Λ, on trouve

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\rangle = \left(\left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right)_F = \left(\psi'(0), \phi^0\right) - \left(\psi(0), \phi^1\right)$$

et par (3.9), on a

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\rangle = \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{3.10}$$

On définit dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ la semi-norme

$$\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_F^2 = \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{3.11}$$

Pour prouver que (3.11) est une norme, supposons que l'on ait le résultat d'unicité suivant

si $\phi = \phi(x,t)$ est une solution de (3.3) telle que
$\phi = 0$ dans $\omega \times]0,T[$
alors $\phi = 0$ dans Q.

Cela est vrai par le théorème de Holmgren suivant

Théorème 3.1 [14] *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière Γ lipchitzienne. Il existe un temps $T_0 = T_0(\omega) > 0$ tel que si $T > T_0$, ω est un sous ensemble ouvert non vide de Ω et $\phi = \phi(x,t)$ est une solution de (3.3) vérifiant*

$$\phi = 0 \text{ dans } \omega \times]0,T[$$

alors $\phi = 0$.

Dans ce cas, pour $T > T_0$ la semi-norme (3.11) définit une norme sur l'espace des données initiales $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Soit F le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à cette norme. Notons que si $\zeta = \zeta(x,t)$ est la solution de (3.3) correspondant aux données initiales $\{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, la norme (3.11) est obtenu à partir d'un produit scalaire dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ défini par

$$\left(\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\zeta^0, \zeta^1\right\}\right)_F = \int_0^T \int_\omega \phi\zeta dxdt.$$

On considère la forme bilinéaire

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\zeta^0, \zeta^1\right\}\right\rangle = \int_0^T \int_\omega \phi\zeta dxdt.$$

définie par Λ dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, qui est continue et coercive dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Puis son prolongement par continuité à le complété F est aussi continue et coercive sur l'espace de Hilbert F. Alors d'après le lemme de Lax-Milgram, pour tout $\{y^1, -y^0\} \in F'$(dual de F), il existe un unique $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in F$ tel que

$$\left\langle \Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\zeta^0, \zeta^1\right\}\right\rangle = \left\langle \left\{y^1, -y^0\right\}, \left\{\zeta^0, \zeta^1\right\}\right\rangle_{F' \times F}$$

pour tout $\left\{\zeta^0, \zeta^1\right\} \in F$, donc pour chaque couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ tel que $\{y^1, -y^0\} \in F'$, il existe une solution unique $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in F$ de l'équation

$$\boxed{\Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \{y^1, -y^0\} \quad \text{dans } F'.} \tag{3.12}$$

De (3.12) et (3.5), on déduit que

$$\psi(0) = y^0 \quad \text{et} \quad \psi'(0) = y^1$$

où ψ désigne la solution du problème (3.4).
Dans (3.1), nous considérons h égale à la restriction de $(-\phi)$ (ϕ est la solution du problème (3.3)) à $\omega \times]0, T[$,
c'est-à-dire

$$\boxed{h = -\phi \quad \text{dans } \omega \times]0, T[.}$$

D'après l'unicité de la solution de l'équation des ondes, on a

$$\psi(x, t) = y(x, t) \quad \text{dans } Q.$$

D'où $y(T) = 0$ et $y'(T) = 0$ dans Ω, ce qui est la condition (3.2).
Le résultat que l'on vient de démontrer est la contrôlabilité exacte des données $\{y^1, -y^0\} \in F'$ avec **un contrôle** h donné par

$$\boxed{h = -\phi \chi_{\omega \times]0,T[}}$$

où ϕ désigne la solution de (3.3) associée aux données $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in F$ vérifiant (3.12).
Maintenant, on va caractériser les espaces F et F'.
Notons que, si on considère $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ et $\phi^1 \in H^{-1}(\Omega)$ et on applique l'inégalité (2.45) (cf. Lemme 2.6, chapitre 2) à (3.3), on obtient

$$\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt \leq C_1 \left(\left|\phi^0\right|^2 + \left\|\phi^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) = C_1 \left\| \left\{\phi^0, \phi^1\right\} \right\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \tag{3.13}$$

cela implique que

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \subset F$$

Pour prouver que $F \subset L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on a besoin de prouver l'inégalité inverse suivante

$$C_2 \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt \tag{3.14}$$

Supposons que nous avons prouvé (3.14). Puis, avec (3.13) on obtient que

$$\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_F \leq C_2 \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$$

On a donc

$$F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

et par conséquent

$$F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

alors, pour tout couple de données initiales $\{y^1, -y^0\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ il existe un unique $\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et par suite, on résoudre le problème (3.3), ce qui donne $\phi = \phi(x,t)$ avec **un contrôle** $h = h(x,t)$ donné par $h = -\phi\chi_{\omega\times]0,T[}$. D'après la régularité de la solution ultra faible (cf. Le théorème 2.3, chapitre 2), on déduit que $h \in L^2(\omega \times]0,T[)$.
L'inégalité inverse (3.14) n'est pas en général vraie pour un ouvert ω quelconque, à cause du caractère hyperbolique de l'équation des ondes, il faudra d'une part un temps T suffisamment grand pour atteindre ω et d'autre part, des conditions géométriques sur ω.

3.2 L'inégalité inverse

On reprend les notations du chapitre 2 et pour $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque on définit

$$\begin{aligned}
&m(x) = x - x^0,\ \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\},\\
&\Gamma_*(x^0) = \Gamma \backslash \Gamma(x^0);\ \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0,T[,\\
&\Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times]0,T[,\ R(x^0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} |m(x)|.
\end{aligned}$$

On prend ω comme un voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ (la fermeture de $\Gamma(x^0)$) dans Ω, s'il existe des voisinages $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ de $\overline{\Gamma(x^0)}$ tel que

$$\omega = \Omega \cap \mathcal{O}. \tag{3.15}$$

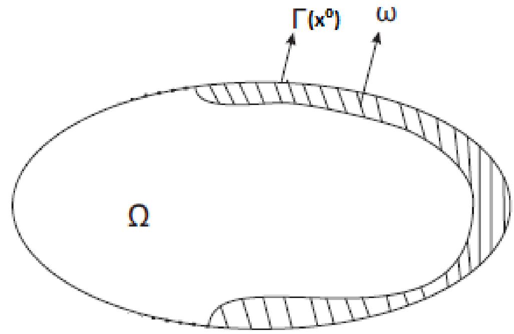


Figure 4 : Figure présente le domaine ω et l'ensemble $\Gamma\left(x^{0}\right)$

Le résultat qui sera démontré dans ce paragraphe est le suivant

Théorème 3.2 [21] *Si $T > 2R\left(x^{0}\right)$, alors il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\left|\phi^{0}\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left\|\phi^{1}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^{2} \leq C \int_{0}^{T} \int_{\omega} \phi^{2} dx dt. \tag{3.16}$$

Pour toute solution ultra faible ϕ de (3.3) correspondant à des données initiales $\phi^{0} \in L^{2}(\Omega)$ et $\phi^{1} \in H^{-1}(\Omega)$.

Preuve. On commence à prouver (3.16) par une autre inégalité équivalente.
Etape 1 : S'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\left\|\phi^{0}\right\|_{H_{0}^{1}(\Omega)}^{2}+\left|\phi^{1}\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2} \leq C \int_{0}^{T} \int_{\omega} \phi^{\prime 2} dx dt \tag{3.17}$$

pour toute solution faible $\phi=\phi(x, t)$ de (3.3) avec $\phi^{0} \in H_{0}^{1}(\Omega)$ et $\phi^{1} \in L^{2}(\Omega)$, alors on a l'inégalité (3.16), pour toute solution ultra faible $\phi=\phi(x, t)$ lorsque on prend $\phi^{0} \in H_{0}^{1}(\Omega) \subset L^{2}(\Omega)$ et $\phi^{1} \in L^{2}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.
En effet, soient $\left\{\phi^{0}, \phi^{1}\right\} \in L^{2}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. On définit $\chi \in H_{0}^{1}(\Omega)$ l'unique solution de

$$-\Delta \chi=\phi^{1} \quad \text{dans } \Omega$$

On considère la fonction

$$\psi(x, t)=-\chi(x)+\int_{0}^{t} \phi(x, s) ds$$

où $\phi=\phi(x, t)$ est la solution ultra faible de (3.3) qui correspond aux données $\left\{\phi^{0}, \phi^{1}\right\}$.
L'intégration de l'équation $(3.3)_1$ sur $]0, t[$ nous donne

$$\phi^{\prime}(t)-\phi^{\prime}(0)-\Delta \int_{0}^{t} \phi(x, s) ds=0.$$

Mais $\psi'(x,t) = \phi(x,t)$ et $\psi''(x,t) = \phi'(x,t)$. Alors

$$\psi''(x,t) - \phi^1 - \Delta\left(\psi\left(x,t\right) + \chi\left(x\right)\right) = 0.$$

D'après la définition de χ, l'égalité ci-dessus implique

$$\left|\begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi = 0 & \text{dans } Q, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi\left(0\right) = -\chi,\ \psi'\left(0\right) = \phi^0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Notons que $\chi \in H_0^1\left(\Omega\right)$ et $\phi^0 \in L^2\left(\Omega\right)$ ce qui implique l'existence d'une solution faible du système (3.18).
Si (3.17) est vrai, alors d'après (3.18) on a

$$\|\chi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left|\phi^0\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt \tag{3.19}$$

à partir de $\psi'(x,t) = \phi(x,t)$.

Remarque 3.1 *On va définir un produit scalaire dans $H^{-1}\left(\Omega\right)$. On sait que Δ est un isomorphisme de $H_0^1\left(\Omega\right)$ sur $H^{-1}\left(\Omega\right)$. Soit $G = \Delta^{-1}$. Alors, pour tout couple $u, v \in H^{-1}\left(\Omega\right)$ on définit*

$$\left(u,v\right)_{H^{-1}(\Omega)} = \langle u, Gv\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \left(\left(Gu, Gv\right)\right)_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

qui est un produit scalaire dans $H^{-1}\left(\Omega\right)$. La norme induite est

$$\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\left(Gv, Gv\right)\right).$$

Donc

$$\left\|\phi^1\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\left(G\phi^1, G\phi^1\right)\right) = \left(\left(\chi,\chi\right)\right) = \|\chi\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'après la remarque 3.1, l'inégalité (3.19) devient

$$\left\|\phi^1\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \left|\phi^0\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T\int_\omega \phi^2 dxdt.$$

Alors, pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de prouver l'inégalité (3.17) pour toute solution faible $\phi = \phi\left(x,t\right)$ de (3.3) comme nous allons faire dans les étapes suivants.
Etape 2 : Pour $T > 2R\left(x^0\right)$, On sait par l'inégalité (2.50) du chapitre 2, que pour toute solution faible $\phi = \phi\left(x,t\right)$ de (3.3) on a l'inégalité suivante

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla\phi^0\left(x\right)\right|^2 + \left|\phi^1\left(x\right)\right|^2\right)dx \leq \frac{R\left(x^0\right)}{T - 2R\left(x^0\right)}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$, $T - 2\varepsilon > 2R(x^0)$ on a

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla \phi^0(x)\right|^2 + \left|\phi^1(x)\right|^2 \right) dx \leq C \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \tag{3.20}$$

après le changement de variable $\tau = (T - 2\varepsilon)t + T\varepsilon$, $0 \leq t \leq T$ qui implique $\varepsilon \leq \tau \leq T - \varepsilon$. Soit $h \in \left[C^1(\overline{\Omega})\right]^n$ tel que $h \cdot \nu \geq 0$ pour toute $x \in \Gamma$, $h = \nu$ sur $\Gamma(x^0)$ et $h = 0$ sur $\Omega \backslash \omega$. Soit $\eta \in C^1([0,T])$ tel que $\eta(0) = \eta(T) = 0$, $\eta(t) = 1$ dans $]\varepsilon, T-\varepsilon[$. On définit $q(x,t) = \eta(t) h(x)$ qui appartient à $W^{1,\infty}(Q)$ et satisfait

$$\left| \begin{array}{lll} (i) & q(x,t) = \nu(x) & \forall (x,t) \in \Gamma(x^0) \times]\varepsilon, T-\varepsilon[\,; \\ (ii) & q(x,t)\cdot \nu(x) \geq 0 & \forall (x,t) \in \Gamma \times]0,T[\,; \\ (iii) & q(x,0) = q(x,T) = 0 & \forall x \in \Omega; \\ (i\nu) & q(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in (\Omega\backslash\omega) \times]0,T[\,. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

On a besoin de quelques résultats intermédiaires

Lemme 3.1 [14] *Soit $q \in \left[C^1\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)\right]^n$. Pour toute solution faible ϕ de (3.3) on a l'identité*

$$\begin{array}{c} \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \nu_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left(|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2\right) dxdt \\ \displaystyle + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dxdt - \int_Q \phi' q_k' \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt \end{array} \tag{3.22}$$

■

Preuve. C'est l'analogue exact de la démonstration du lemme 2.4. Il suffit de tenir compte de l'apparition d'un terme supplémentaire

$$\begin{aligned} \int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt &= \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \int_Q \phi' \left(q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)' dxdt \\ &= \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \int_Q \phi' \left(q_k \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} + q_k' \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) dxdt \\ &= \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \int_0^T \left(\phi', q_k' \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega q_k \frac{\partial |\phi'|^2}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned}$$

Mais, d'après la formule d'intégration par partie (1.2), on a

$$-\frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial |\phi'|^2}{\partial x_k} dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\phi'|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k |\phi'|^2 \nu_k d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\phi'|^2 dxdt$$

puisque $\phi' = 0$ sur Σ.

Donc

$$\int_Q \phi'' q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dxdt = \left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \int_0^T \left(\phi', q_k' \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) dt + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\phi'|^2 dxdt$$

Lemme 3.2 *Soit $T>0$, pour tout $\varepsilon>0$ et toute solution faible de (3.3), on a*

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \le C\int_0^T\int_{\omega}\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt \tag{3.23}$$

■

Preuve. On applique le lemme 3.1, avec le choix de $q(x,t)=\eta(t)h(x)$ qui satisfait (3.21), on obtient

$$\left.\left(\phi'(t), q_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T=0$$

puisque $q(x,0)=q(x,T)=0$.
Nous avons aussi

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_*(x^0)}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

grâce à la condition (ii) de (3.21), on a

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\ge\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

et comme $q(x,t)=\nu(x)$ sur $\Gamma(x^0)\times]\varepsilon,T-\varepsilon[$, donc on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma}q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\ge\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dxdt\right| &\overset{\text{l'inégalité de Cauchy}}{\le} C\left[\int_{\omega\times]0,T[}\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\omega\times]0,T[}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\int_{\omega\times]0,T[}|\nabla\phi|^2dxdt\le C\int_{\omega\times]0,T[}\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right]dxdt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left[|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2\right]dxdt &\le C\int_{\omega\times]0,T[}\left[|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2\right]dxdt\\ &\le C\int_{\omega\times]0,T[}\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right]dxdt.\end{aligned}$$

Il reste de majorer le terme

$$\begin{aligned}-\int_Q\phi' q'\cdot\nabla\phi dxdt &\le C\int_{\omega\times]0,T[}\phi'\nabla\phi dxdt\\ &\le \frac{C}{2}\int_{\omega\times]0,T[}|\phi'|^2dxdt+\frac{C}{2}\int_{\omega\times]0,T[}|\nabla\phi|^2dxdt\\ &\le C\int_{\omega\times]0,T[}\left[|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right]dxdt\end{aligned}$$

et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\int_0^T\int_{\omega}\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt$$

avec $C>0$ est une constante dépendant de $\|q\|_{W^{1,\infty}(Q)}$.
De (3.20) et (3.23), on obtient

$$E(0)\leq C\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\omega}\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt \tag{3.24}$$

On voudrait à présent se débarrasser du terme $\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\omega}|\nabla\phi|^2\,dxdt$ qui figure dans le membre de droite de l'inégalité précédente, pour cela nous introduisons l'étape suivant

Etape 3 : On va prouver que

$$\|\phi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\phi^1|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_{\omega}|\phi'|^2\,dxdt+C\int_0^T\int_{\omega}|\phi|^2\,dxdt \tag{3.25}$$

En effet, soit $\omega_0\subset\Omega$ un voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ tel que

$$\Omega\cap\omega_0\subset\omega.$$

On note que (3.24) est vraie pour chaque voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$, alors il est correct pour ω_0.
Donc, on a

$$E(0)\leq C\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\omega_0}\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt. \tag{3.26}$$

On considère $\rho\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\rho\geq 0$ tel que

$$\rho(x)=1 \ \text{ dans } \omega_0 \ \text{ et } \ \rho(x)=0 \ \text{ dans } \Omega\backslash\omega.$$

On définit $p(x,t)$ dans Q par

$$p(x,t)=\eta(t)\,\rho^2(x).$$

Où $\eta(t)$ est la fonction définie ci-dessus.
On a

$$\left|\begin{array}{ll} (i) & p(x,t)=1 \quad \text{dans } \ \omega_0\times]\varepsilon,T-\varepsilon[\,; \\ (ii) & p(x,t)=0 \quad \text{dans } \ (\Omega\backslash\omega)\times]0,T[\,; \\ (iii) & p(x,0)=p(x,T)=0 \qquad \text{dans } \Omega; \\ (iv) & \dfrac{|\nabla p|^2}{p}\in L^{\infty}(Q). \end{array}\right. \tag{3.27}$$

On multiplie l'équation $(3.3)_1$ par $p\phi$ et par intégration par partie sur Q, on obtient

$$\int_Q p\phi\phi'' dxdt-\int_Q p\phi\Delta\phi dxdt=0. \tag{3.28}$$

$$\int_0^T (\phi'', p\phi)\,dt = (\phi', p\phi)|_0^T - \int_0^T (\phi', p\phi')\,dt - \int_0^T (p'\phi, \phi')\,dt$$

et comme $p(x,0) = p(x,T) = 0$, alors on a

$$\boxed{\int_0^T (\phi'', p\phi)\,dt = -\int_0^T (\phi', p\phi')\,dt - \int_0^T (p'\phi, \phi')\,dt.} \tag{3.29}$$

D'autre part, on remarque que

$$-\int_\Omega p\phi\Delta\phi dxdt = \int_\Omega \nabla(p\phi)\cdot\nabla\phi dx$$

comme conséquence de la formule de Green (1.3) et du fait que $\phi = 0$ sur Σ.
Donc

$$\boxed{-\int_0^T\int_\Omega p\phi\Delta\phi dxdt = \int_0^T\int_\Omega p\nabla\phi\cdot\nabla\phi dxdt + \int_0^T\int_\Omega \phi\nabla p\cdot\nabla\phi dxdt.} \tag{3.30}$$

De (3.28), (3.29) et (3.30), on obtient

$$\int_0^T\int_\omega p\,|\nabla\phi|^2\,dxdt = \int_0^T\int_\omega p\,|\phi'|^2\,dxdt + \int_0^T\int_\omega p'\phi\phi' dxdt - \int_0^T\int_\omega \phi\nabla p\cdot\nabla\phi dxdt \tag{3.31}$$

puisque $p(x,t) = 0$ dans $(\Omega\backslash\omega)\times\,]0,T[$.
On a

$$\int_0^T\int_\omega p\,|\phi'|^2\,dxdt \le C\int_0^T\int_\omega |\phi'|^2\,dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2 + |\phi|^2\right)dxdt \tag{3.32}$$

car $p \in W^{1,\infty}(Q)$.
Par ailleurs

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\omega p'\phi\phi' dxdt &\le \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega (p'\phi')^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\phi|^2\,dxdt\\ &\le \frac{C}{2}\int_0^T\int_\omega |\phi'|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\phi|^2\,dxdt\end{aligned}$$

cela implique que

$$\int_0^T\int_\omega p'\phi\phi' dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2 + |\phi|^2\right)dxdt \tag{3.33}$$

de (3.31), (3.32) et (3.33), on obtient

$$\int_0^T\int_\omega p\,|\nabla\phi|^2\,dxdt \le C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2 + |\phi|^2\right)dxdt + \left|\int_0^T\int_\omega \phi\nabla p\cdot\nabla\phi dxdt\right|. \tag{3.34}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité $|ab| \le \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\omega \nabla p\cdot\nabla\phi\phi dxdt\right| &= \left|\int_0^T\int_\omega \frac{\nabla p}{\sqrt{p}}\sqrt{p}\nabla\phi\phi dxdt\right|\\ &\le \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \frac{|\nabla p|^2}{p}\,|\phi|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega p\,|\nabla\phi|^2\,dxdt\end{aligned}$$

alors

$$\left|\int_0^T\int_\omega \phi\nabla p\cdot\nabla\phi dxdt\right| \leq C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega p\,|\nabla\phi|^2\,dxdt \tag{3.35}$$

donc, d'après (3.34) et (3.35), on a

$$\int_0^T\int_\omega p\,|\nabla\phi|^2\,dxdt \leq C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt$$

et par la propriété (i) de (3.27), on obtient

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\omega_0} |\nabla\phi|^2\,dxdt \leq C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt. \tag{3.36}$$

De (3.36) et (3.26), on déduit que

$$\left\|\phi^0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left|\phi^1\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt$$

d'où l'inégalité (3.25).

De (3.25) et l'inégalité directe (2.48), chapitre 2, on obtient

$$\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\int_0^T\int_\omega \left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt \tag{3.37}$$

Etape 4 : Supposons que (3.17) est fausse. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe des données initiales $\widetilde{\phi}^0_n$, $\widetilde{\phi}^1_n$ telle que la solution $\widetilde{\phi}_n$ de (3.3) correspondant à ces conditions initiales satisfait

$$\left\|\widetilde{\phi}^0_n\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left|\widetilde{\phi}^1_n\right|^2_{L^2(\Omega)} \geq n\left\|\widetilde{\phi}'_n\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}.$$

On définit

$$K=\left(\left\|\widetilde{\phi}^0_n\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left|\widetilde{\phi}^1_n\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\phi^0_n=\frac{\widetilde{\phi}^0_n}{K};\ \phi^1_n=\frac{\widetilde{\phi}^1_n}{K};\ \phi_n=\frac{\widetilde{\phi}_n}{K}.$$

On obtient

$$\left|\begin{array}{l}\left\|\phi'_n\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\leq\dfrac{1}{n}\\ \left\|\phi^0_n\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left|\phi^1_n\right|^2_{L^2(\Omega)}=1\end{array}\right. \tag{3.38}$$

de (3.38), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_\omega\left|\phi'_n\right|^2dxdt=0. \tag{3.39}$$

De (3.38), on a aussi des sous suites telles que

$$\phi^0_n\rightharpoonup\phi^0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } \phi^1_n\rightharpoonup\phi^1 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

La solution ϕ_n de (3.3) correspondant aux données initiales ϕ_n^0 et ϕ_n^1 a les estimations suivants

$$\left| \begin{array}{l} \phi_n \text{ est borné dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \\ \phi_n' \text{ est borné dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right). \end{array} \right. \tag{3.40}$$

L'estimation (3,40) est vrai dans ω au lieu de Ω. Puis, il existe une sous suite ϕ_n telle que

$$\left| \begin{array}{l} \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \\ \phi_n' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right). \end{array} \right. \tag{3.41}$$

Depuis que $H_0^1\left(\Omega\right) \subset L^2\left(\Omega\right)$ est compact, les estimations (3,40) et le théorème de compacité d'Aubin-Lions, on obtient une sous suite ϕ_n telle que

$$\phi_n \longrightarrow \phi \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2\left(\omega\right)\right). \tag{3.42}$$

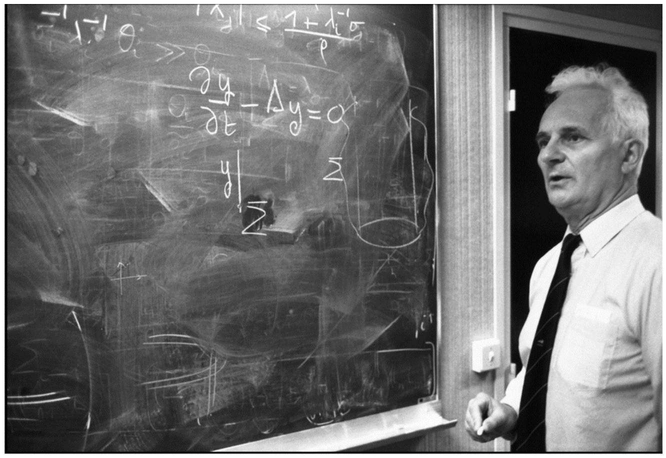
D'après (3.39), $(3.41)_2$ et le théorème de Banach-Steinhaus, il en résulte que $\phi'\left(x,t\right) = 0$ sur $\omega \times]0,T[$, alors, $\phi\left(x,t\right)$ est constant par rapport à t dans $\omega \times]0,T[$. Mais, $\phi = 0$ sur Σ_0 puisque ϕ est un solution de (3.3). Donc $\phi\left(x,t\right) = 0$ sur $\omega \times]0,T[$ et par le théorème de Holmgren $\phi = 0$ dans Q. Puis, par (3.42), on obtient

$$\phi_n \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2\left(\omega\right)\right).$$

Ensuite, par (3.37) pour ϕ_n on trouve

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2\left(\Sigma_0\right).$$

Par l'inégalité (2.41), il en résulte que $\phi_n^0 \rightarrow 0$ dans $H_0^1\left(\Omega\right)$ et $\phi_n^1 \rightarrow 0$ dans $L^2\left(\Omega\right)$ ce qui est une contradiction avec $(3.38)_2$. ■



Jacques-Louis Lions

Jacques-Louis Lions, né le 3 mai 1928 à Grasse et décédé le 17 mai 2001 à Paris.
Il était un très grand mathématicien qui a eu, en France et dans le monde,
un impact profond sur le développement des mathématiques appliquées

« *Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir. Et, de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure. Du coup, ce qui m'intéresse, c'est de savoir jusqu'où on peut aller dans ce domaine de la modélisation des systèmes, c'est d'atteindre les limites.* »

Jacques-Louis Lions.

Il était un membre de l'Académie des sciences. Il fut maître de conférences puis professeur à la Faculté des sciences de Nancy (1954-1963), professeur à la Faculté des sciences de Paris (1963-1972), professeur d'analyse numérique à l'École polytechnique (1966-1986) et enfin professeur au collège de France (1973-1998). Ses travaux portèrent essentiellement sur la théorie des équations aux dérivées partielles et leurs applications, et notamment sur des problèmes variationnels, **la théorie du contrôle** et des systèmes d'inéquations aux dérivées partielles.

Jacques-Louis Lions a laissé un grand nombre de travaux mathématiques comme

♦ J. L. LIONS, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilité. Tome 1 : contrôlabilité exacte, Masson, 1988.

♦ J. L. LIONS, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1968.

♦ J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

Bibliographie

[1] **A. ABABSA**, Contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques avec un seul contrôle, mémoire de Magister, 2012.

[2] **A. MENGUELTI**, Analyse asymptotique de quelques problèmes de couches minces : conditions aux limites approchées, mémoire de Magister.

[3] **A. HAFDALLAH**, L'étude des problèmes inverses en utilisant le concept de la sentinelle, mémoire de Magister, 2012.

[4] **A. EL JAI**, Eléments de contrôlabilité, Presses universitaires de perpignan, 2006.

[5] **A. MUNNIER**, Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Nancy Université, France, 2007-2008. http ://www.iecn.u-nancy.fr/ munnier/

[6] **C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH**, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control optim, 1992.

[7] **D. L. Russell**, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Review, 1978.

[8] **E. FERNÁNDEZ-CARA, E. ZUAZUA**, Control Theory : History, Mathematical achievements and perspectives, Matapli, 2004.

[9] **E. ZUAZUA**, Controllability of partial differential equations, Universidad Autónoma, Cantoblanco, Madrid, Spain.

[10] **F. A. KHODJA, A. BENABDALLAH**, Introduction à la théorie du contrôle, 2005.

[11] **G. CHRISTOL, A. Cot, C. M. MARLE**, Topologie, ellipses, Paris, 1997.

[12] **G. RAHEM,** Problème aux limites pour une équation d'ordre quatre avec le Bilaplacien, Mémoire de Master, 2015.

[13] **H. BREZIS**, Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations, Springer, 2011.

[14] **J. L. LIONS**, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1 : Contrôlabilité exacte, Masson, Paris, 1988.

[15] **J. L. LIONS**, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, SIAM Review, 1988.

[16] **J. L. LIONS**, Exact controllability for temporally wave equation, Ricardo Fuentes Apolaya.

[17] **J. L. LIONS**, Quelque méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauth, Paris, 1969.

[18] **J. L. LIONS & E.MAGENES**, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol, 1 et 2, Dunod, Paris, 1968.

[19] **J. ROCHAT**, Les espaces de Sobolev, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

[20] **K. BELKACEM**, Contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension infinie, mémoire de Magister.

[21] **L. A. MEDEIROS, M. M. MIRANDA, A. T. LOUREDO**, Introduction to exact control theory method Hum, eduepb, 2013.

[22] **L. D. LEMIE**, La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus, mémoire de recherche, 2001.

[23] **L. Hörmander**, Linear partial differential operators, Springer Verlag, 1976.

[24] **N. LAANAIA**, Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte de contrôle optimal et de stabilisation pour des domaines minces à frontières ondulées, Thèse de Doctorat.

[25] **S. SALSA**, Partial differential equations in action, From modelling to theory, Springer, 2008.

[26] **T. BENHAMOUD**, Observation d'un système bidimensionnel gouverné par des équations aux dérivées partielles, mémoire de Magister, 2010.