République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème:

Sur l'image numérique d'un opérateur linéaire borné

Présenté Par :

Kebbouci Salma *et* ***Kamache Houria***

Devant le jury:

El-hafsi BOUKHALFA	M.A.A	Université de Tébessa	Président
Smail BOUZENADA	M.C.A	Université de Tébessa	Rapporteur
Abdellatif TOUALBIA	M.A.A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance: 29/05/2016

Note:………… Mention :………….

ملخص

ليكن H فضاء هيلبرت عقدي، ولتكن $\mathcal{L}(H)$ جبر المؤثرات الخطية المحدودة على H . الصورة العددية لمؤثر A من $\mathcal{L}(H)$ هي المجموعة المعرفة كما يلي

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

في هذا العمل ندرس الصورة العددية لمؤثر خطي محدود في محورين، في جزء من هذا العمل نقدم الخصائص الهندسية للصورة العددية في الحالة العامة وبصورة خاصة في فضاء ذو بعد 2.

في جزء آخر ندرس العلاقة بين الصورة العددية لمؤثر وطيفه، ثم نتطرق لدراسة بعض صفوف المؤثرات المعرفة انطلاقا من هذه العلاقة.

Abstract

Let H be a complex Hilbert space, and let $\mathcal{L}(H)$ denote the algebra of all the bounded linear oprators on H. The numerical range of an operator $A \in \mathcal{L}(H)$, is defined by

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle;\ x \in H,\ \ \|x\| = 1\}.$$

In this work we study the numerical range of a bounded linear operator in two axes. We present the geometrical properties in the general case and especially in two dimension. In another part we study the relationship between the numerical range of an operator and its spectrum, also we study some classes of operators defined by this relationship (convexoid and spectraloid operator).

Keywords :

Numerical range, numerical radius, convexoid operator, normaloid operator, spectraloid operator.

Resumé

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est définie par :

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle;\ x \in H,\ \ \|x\| = 1\}.$$

Dans ce travail on étudie l'image numérique d'un opérateur linéaire borné en deux axes. Nous présentons les propriétés géométriques de l'image numérique dans le cas général, et en particulier en dimension deux. Dans une autre partie nous étudions la relation entre l'image numérique d'un opérateur et son spectre et nous étudions quelques classes d'opérateurs définis selon cette relation (opérateurs convexoïdes et spectraloïdes).

Les mots clés :

Image numérique, rayon numérique, opérateur convexoïde, opérateur normaloïde, opérateur spectraloïde.

Dedicace

A nos parents,

A nos frères,

A nos soeurs,

A nos familles,

A nos amies.

A nos honest professeurs.

Nous dédions ce modeste travail.

kamache Houria et Kebbouci Salma

Remerciements

Nous remercions en premier lieu ALLAH le tout puissant de nous avoir accordé la puissance, la volonté et la chance pour créer ce modeste travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Smail BOUZENADA, maître de conférences à l'université de Tébessa, pour les orientations, ses précieux conseils et encouragements tout au long de ce

travail.

Nous remercions vivement monsieur El-hafsi BOUKHALFA, maître-assistant à l'université de Tébessa l'honneur qu'il nous fait en président le jury de notre mémoire.

Nous exprimons aussi nos sincères remerciements à monsieur Abdellatif TOUALBIA, maître-assistant à l'université de Tébessa, qui a accepté d'examiner ce mémoire.

Nous remercions également tous les enseignants de département de Mathématiques.

Sans oublier de remercier tout les personnes qui contribué de prés et de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction

Soit H un espace de Hlbert et A un opérateur linéaire borné sur H. L'image numérique de A est l'ensemble défini par :

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle ;\ x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Ainsi, l'image numérique d'un opérateur, comme le spectre, est un sous-ensemble du plan complexe, dont des propriétés géométriques permettent de connaitre quelques caractéristiques de l'opérateur, elle a aussi une relation très importante avec le spectre.

La notion de l'image numérique a été introduite par Otto Toeplitz [13] en 1918 pour les matrices complexes, en 1919 F. Hausdorff [5] a prouvé que l'image numérique d'une matrice complexe est convexe, dans les années 1929 et 1932 A. Winter [14] et M. H. Stone [12] ont étudié la relation entre l'image numérique et l'enveloppe convexe du spectre d'un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert.

Par suite l'étude de l'image numérique donne des applications dans plusieurs branches des sciences pures et appliquées comme dans la théorie des opérateurs et l'analyse fonctionnelle, algèbres de Banach et C*-algèbres, inégalités des normes, théorie de perturbation, polynômes matriciels, analyse numérique, physique quantique ...etc.

Notre travail est consacré à l'étude de l'image numérique en deux axes. Le premier axe traite les propriétés géométriques dans le cas général et en dimnsion 2. Le deuxième axe est concerne la relation entre l'image numérique et le spectre et l'étude de quelques classes d'opérateurs définis selon cette relation.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions de base de la théorie des opérateurs.

Au deuxième chapitre nous présentons les notions de base et les propriétés topologiques et géométriques de l'image numérique qui donnent une vue initiative de cette notion. Nous donnons aussi des exemples et nous présentons la définition et quelques propriétés de l'image numérique dans une algèbre de Banach.

Dans le troisième chapitre nous étudions la forme géométrique de l'image numérique en dimension 2, en détaillant le théorème de l'image elliptique qui donne trois cas possibles en dimension 2.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la relation entre l'image numérique d'un opérateur et son spectre, et l'étude des opérateurs convexoïdes, normaloïdes et spectraloïdes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert

H désigne un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire, noté $\langle .,. \rangle$.

Proposition 1.1 *Le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ définie une norme sur H, tel que*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H.$$

Théorème 1.1 *Pour x et y dans H, l'inégalité de Cauchy-Schwartz est donné par :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Proposition 1.2 *Si $x, y \in H$ tels que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$, alors x et y sont colinéaires.*

Définition 1.1 *Deux vecteurs x et y dans H sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.*

Définition 1.2 *Le complémentaire orthogonal d'un sous-ensemble $N \subset H$ est défini par :*

$$N^{\perp} = \{x \in H, \forall y \in N \; ; \langle x, y \rangle = 0\} \, .$$

Définition 1.3

(1) *L'ensemble* $M = \{x_i \in H; i \in I\}$ *est appelé système orthogonal si pour tous* $i, j \in I$ *tel que* $i \neq j$ *on a* $\langle x_i, y_j \rangle = 0$.

(2) M *est appelé système orthonormal s'il est orthogonal et pour tout* $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

(3) *On dit que le système orthonormal* M *est complet si* $M^{\perp} = \{0\}$.

(4) *Un système orthonormal complet est dit base orthonormale.*

1.2 Espace des opérateurs linéaires bornés

Soient H et K deux espaces de Hilbert

Notation 1.1 $\mathcal{L}(H, K)$ *désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de* H *dans* K, *et si* $H = K$, *on note* $\mathcal{L}(H, K) = \mathcal{L}(H)$.

Définition 1.4 *Pour* $A \in \mathcal{L}(H)$, *l'image de* A *est l'ensemble défini par* $R(A) = \{Ax, x \in H\}$, *et le noyau de* A *est l'ensemble défini par* $\ker(A) = \{x \in H, Ax = 0\}$.

Théorème 1.2 (*Identité de polarisation généralisée*)

Si $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors pour tout* $x, y \in H$ *on a :*

$$\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4}\left[\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle + i\langle A(x+iy), x+iy \rangle - i\langle A(x-iy), x-iy \rangle\right].$$

Définition 1.5 *L'opérateur adjoint d'un opérateur* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est l'unique opérateur* $A^* \in \mathcal{L}(H)$ *tel que*

$$\forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle,$$

Définition 1.6 *Un opérateur* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est appelé hermitien ou auto-adjoint si* $A^* = A$.

Définition 1.7 *Un opérateur* $U \in \mathcal{L}(H)$ *est dit unitaire, si* $U^*U = UU^* = I$.

Définition 1.8 *Tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ peut s'écrire sous la forme $A = B + iC$ où*

$$B = \mathrm{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad C = \mathrm{Im}(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

B et C sont auto-adjoints, et la forme $A = B + iC$ dite décomposition cartésienne de A.

Définition 1.9 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*

1-L'orbite de similitude A est l'ensemble défini par :

$$\varphi(A) = \left\{S^{-1}AS, \text{ tel que } S \text{ est un opérateur inversible de } \mathcal{L}(H)\right\}.$$

2-L'orbite unitaire de A est l'ensemble défini par :

$$\mathcal{U}(A) = \{U^*AU, \text{ tel que } U \text{ est un opérateur unitaire de } \mathcal{L}(H)\}.$$

Définition 1.10 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit:*

(1) **Compact** si $\lim\limits_{n} Ax_n = 0$, pour toute suite orthonormée (x_n) de H.

(2) **Positif**, s'il est auto-adjoint et $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, on note $A \geq 0$.

(3) **Normal**, si $A^*A = AA^*$.

(4) **Hyponormal**, si $A^*A \geq AA^*$.

(5) **Coercif (elliptique)** s'il existe $c \geq 0$ telle que :$\forall x \in H, |\langle Ax, x\rangle| \geq c\,\|x\|^2$.

Proposition 1.3 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est positif, alors A admet une racine carré positif unique c-à-d $(B^2 = A$ et $A \geq 0)$.*

Proposition 1.4 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est coercif, alors A est inversible.*

Proposition 1.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ compact. Si (x_n) est une suite faiblement convergente vers $x \in H$, alors Ax_n est fortement convergente vers Ax.*

Théorème 1.3 *Si A un opérateur diagonal, dont les éléments diagonaux $\{\alpha_n\}$, alors A est compact si et seulement si $\lim \alpha_n = 0$.*

Proposition 1.6 *Si A est hyponormal, alors $r(A) = \|A\|$.*

Définition 1.11 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est unitairement diagonalisable s'il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de H constituée par les vecteurs propres de A, i.e. A s'écrit selon cette base sous forme d' une matrice diagonale.*

Proposition 1.7 *Tout opérateur normal en dimension finie est unitairement diagonalisable, et plus général tout opérateur normal compact est unitairement diagonalisable.*

Définition 1.12 *Pour un sous-espace F de H, on appelle compression de A sur F, et on note $A \mid F$ la restriction de l'opérateur $P_F A$ sur F, (où P_F est la projection orthogonale sur F).*

Définition 1.13 *Si $H = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$ et $A \in \mathcal{L}(H, K)$, alors A prend la forme matricielle*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

où $A_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$.

Si $A_{12} = A_{21} = 0$, alors A est la somme directe de A_{11} et A_{22} on écrit $A = A_{11} \oplus A_{22}$.

Définition 1.14 (*L'algèbre de Banach*)

Une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une multiplication bilinéaire associative) normé telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit en outre un espace de Banach (un espace vectoriel normé complet).

Théorème 1.4 *$\mathcal{L}(H)$ est une algèbre de Banach.*

1.3 Propriétés spectrales

Définition 1.15 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.*

(1) *On appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tel que : $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.*

(2) *$\lambda \in \mathbb{C}$ est dite valeur propre de l'opérateur A, s'il existe un vecteur non nul x de H tel que $Ax = \lambda x$, i.e. si $A - \lambda I$ n'est pas injectif.*

(3) *L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle spectre ponctuel de A et est noté $\sigma_p(A)$.*

Proposition 1.8 *Le spectre d'un opérateur est un compact de $\mathbb{C}$.*

Définition 1.16 *Le rayon spectral de A est le réel positif défini par*

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Proposition 1.9 *Sur $H = H_1 \oplus H_2$, on a $\sigma(A_1 \oplus A_2) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.*

Théorème 1.5 *Si A est auto-adjoint et $m = \inf\{\langle Ax, x\rangle, \|x\| = 1\}$ et $M = \sup\{\langle Ax, x\rangle, \|x\| = 1\}$, alors $\sigma(A) \subset [m, M]$ et $m, M \in \sigma(A)$.*

Définition 1.17 *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre approchée de A s'il existe une suite de vecteurs (x_n) dans H, telles que $\|x_n\| = 1$ et $Ax_n - \lambda x_n$ converge vers 0. L'ensemble de ces λ est appelé le spectre approché de A, et est noté $\sigma_a(A)$.*

On établit facilement que $\sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)$ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\sigma_a(\alpha A + \beta I) = \alpha\sigma_a(A) + \beta$.

Proposition 1.10 *$\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_a(A)$, où $\partial\sigma(A)$ dénoté la frontière de $\sigma(A)$.*

Proposition 1.11 (*Décomposition spectrale des opérateurs normaux compacts*)

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal compact, alors il existe une base orthonormée $(x_n)_{n\geq 1}$ de H et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ des réels telles que :

$$\forall x \in H; Ax = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x.$$

Chapitre 2

Initiation à l'image numérique

2.1 Définitions et propriétés principales

Soit H un espace de Hilbert complexe.

Définition 2.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$

(1) *L'image numérique de* A *est l'ensemble défini par :*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle ; \|x\| = 1, x \in H\}.$$

(2) *Le rayon numérique de* A *est le réel défini par :*

$$w(A) = \sup\{\mid z \mid ; z \in W(A)\}.$$

Proposition 2.1 [1] *Pour tout* $A, B \in \mathcal{L}(H)$, *tout sous-espace* F *de* H *et tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *on a :*

(1) $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.

(2) $W(A \mid F) \subset W(A)$, *où* $A \mid F$ *est la compression de* A *sur* F.

(3) $W(A^*) = \{\overline{z}\,;\, z \in W(A)\}$.

(4) $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$.

(5) $W(\mathrm{Re}(A)) = \mathrm{Re}\, W(A)$ *et* $W(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Im}(W(A))$.

Preuve

(1), (3), (4) et (5) sont évidentes.

(2) Si $x \in F$, alors

$$\langle (A \mid F)\, x, x\rangle = \langle P_F A x, x\rangle = \langle Ax, P_F^* x\rangle = \langle Ax, P_F x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in W\,(A)\,.$$

■

Théorème 2.1 [1]

Pour tout opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}\,(H)$

$$W(U^* A U) = W\,(A)\,.$$

En particulier, l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.

Preuve

Soit $A \in \mathcal{L}\,(H)$, U un opérateur unitaire de $\mathcal{L}\,(H)$ et $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$.

Alors

$$\langle U^* A U x, x\rangle = \langle AUx, Ux\rangle \in W\,(A)\,.$$

On dit que l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.

Réciproquement, comme U est surjectif, alors il existe $y \in H$ tel que $x = Uy$

(i, e) $\|y\| = \|U^* x\| = \|x\| = 1$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle AUy, Uy\rangle \in W\,(U^* A U)\,.$$

■

Théorème 2.2 [1]

(i) *Pour tout* $A \in \mathcal{L}\,(H)$,

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w\,(A) \leq \|A\|.$$

(ii) *Le rayon numérique définit une norme sur* $\mathcal{L}\,(H)\,.$

Preuve

(i) Pour tout $x \in H$ on a :

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2.$$

Pour $\|x\| = 1$ on obtient : $w(A) \leq \|A\|$

D'autre part, d'après l'identité de polarisation généralisée, pour tout $x, y \in H$

$$4\langle Ax, y\rangle = \sum \{\lambda\langle A(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle, \lambda \in \{1, -1, i, -i\}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 4\left|\langle Ax, y\rangle\right| &= \left|\sum \left\{\lambda\langle A(\frac{z}{\|z\|}), \frac{z}{\|z\|}\rangle\|z\|^2; \lambda \in \{1, -1, i, -i\}\, et\ z = x + \lambda y \neq 0\right\}\right| \\ &\leq w(A) \sum \left\{\|z\|^2, \lambda \in \{1, -1, i, -i\}\, et\ z = x + \lambda y\right\} \\ &= 4w(A)\left\{\|x\|^2 + \|y\|^2\right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\|A\| = \sup\left\{\left|\langle Ax, y\rangle\right|; \|x\| = 1, \|y\| = 1\right\}.$$

D'où

$$\|A\| \leq 2w(A).$$

(ii) a- $w(A) = 0$ et $\|A\| \leq 2w(A) = 0$. Donc $\|A\| \leq 0$ (i,e) $\|A\| = 0$ d'où $A = 0$.

b- Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w(\alpha A) &= \sup\left\{|z|, z \in W(\alpha A)\right\} \\ &= \sup\left\{|z|, z \in \alpha W(A)\right\} \\ &= \sup\left\{|\alpha y|, \alpha y \in \alpha W(A)\right\} \\ &= |\alpha| \sup\left\{|y|, y \in W(A)\right\} \\ &= |\alpha|\, w(A). \end{aligned}$$

c- Pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$:

$$\begin{aligned} w(A+B) &= sup\left\{|z|, z \in W(A+B)\right\} \\ &\leq \sup\left\{|z|, z \in W(A)+W(B)\right\} \\ &= sup\left\{|x+y|, x \in W(A) \wedge y \in W(B)\right\} \\ &\leq \sup\left\{|x|+|y|, x \in W(A) \wedge y \in W(B)\right\} \\ &= sup\left\{|x|, x \in W(A)\right\}+\sup\left\{|y|, y \in W(B)\right\}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3

(1) *L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est un ensemble non vide et borné.*

(2) [5] *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, $W(A)$ est un ensemble convexe de $\mathbb{C}$.*

(3) *Si $A = A_1 \oplus A_2$* sur *$H = H_1 \oplus H_2$, alors $W(A) = co(W(A_1) \cup W(A_2))$, où $co(W(A_1) \cup W(A_2))$ est l'enveloppe convexe de $(W(A_1) \cup W(A_2))$.*

Preuve

(1) a- Soit $x \in H$, $(x \neq 0)$ alors $\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \in W(A)$, d'où $W(A) \neq \varnothing$.

b- Soit $\lambda \in W(A)$, alors il existe $x \in H, \|x\| = 1$ tel que $\lambda = \langle Ax, x\rangle$

$$|\lambda| = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc pour tout $\lambda \in W(A)$; $|\ \lambda\ | \leq \|A\|$.

(2) Soient $\langle Ax, x\rangle$ et $\langle Ay, y\rangle$ deux points distincts de $W(A)$, avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Les vecteurs x, y ne sont pas colinéaires. Notons $F = vect\{x, y\}$, par application de la proposition 2.1, on obtient $W(A \mid F) \subset W(A)$. Comme $W(A \mid F)$ est une surface elliptique, (voir chapitre 3) elle contient alors le segment joignant $\langle Ax, x\rangle$ et $\langle Ay, y\rangle$. D'où $W(A)$ est convexe.

(3)

$[\supset]$ Soient $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrons que le segment joignant les deux points $\langle A_1x, x\rangle \in W(A_1), \langle A_2y, y\rangle \in W(A_2)$ est dans $W(A)$.

Soient $t, s \in [0,1]$ tels que $t^2 + s^2 = 1$. On a

$$t^2\langle A_1 x, x\rangle + s^2\langle A_2 y, y\rangle = \langle A(tx \oplus sy), tx \oplus sy\rangle \in W(A)$$

$[\subset]$ Soit $z \in H$, alors $z = x \oplus y$ où $x \in H_1, y \in H_2$ et $\|z\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$. Le point $\langle Az, z\rangle$ appartient à $co\left(W\left(A_1\right) \cup W(A_2)\right)$. En effet,

$$\langle Az, z\rangle = \langle A_1 x, x\rangle + \langle A_2 y, y\rangle = \|x\|^2 \langle A_1 \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle + \|y\|^2 \langle A_2 \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\rangle.$$

■

Théorème 2.4 *Si H est de dimension finie, $W(A)$ est un ensemble compact de $\mathbb{C}$.*

Preuve

Soit Γ la sphère unité de H. L'application $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longrightarrow \langle Ax, x\rangle$ est continue, en effet :

pour tout $x, y \in \Gamma$ on a

$$\langle Ax, x\rangle - \langle Ay, y\rangle = \langle Ax - Ay, x\rangle + \langle Ay, x - y\rangle,$$

donc

$$|g(x) - g(y)| = |\langle Ax, x\rangle - \langle Ay, y\rangle| \leq 2\|A\|\|x - y\|.$$

Ce qui exprime la continuité de g. Comme la sphère unité de H est compacte, alors $W(A)$ (son image par g) est compacte. ■

Théorème 2.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est compact. Si $0 \in W(A)$, alors $W(A)$ est fermé.*

Preuve

Si λ un point adhérent de $W(A)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\langle Ax_n, x_n\rangle \longrightarrow \lambda$.

Puisque $B(0,1)$ est faiblement compact dans H (puisque l'espace de Hilbert est un espace réflexif), il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ qui converge faiblement vers x telle que $\|x_n\| \leq 1$. Comme A est compact, alors la suite $\{Ax_{n_k}\}$ converge fortement vers Ax.

$$\begin{aligned} |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k}\rangle - \langle Ax, x\rangle| &\leq |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k}\rangle - \langle Ax, x_{n_k}\rangle| + |\langle Ax, x_{n_k}\rangle - \langle Ax, x\rangle| \\ &\leq \|x_{n_k}\| \|Ax_{n_k} - Ax\| + |\langle Ax, x_{n_k}\rangle - \langle Ax, x\rangle| \,. \end{aligned}$$

Par conséquent $\{\langle Ax_{n_k}, x_{n_k}\rangle\}$ converge vers $\langle Ax, x\rangle$ (i,e), $\lambda = \langle Ax, x\rangle$.

Si $\lambda = 0$ l'assertion est claire.

Si $\lambda \neq 0$, il est clair que $x \neq 0$, alors $\frac{\lambda}{\|x\|^2} = \langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \in W(A)$.

Car $\|x\| \leq 1$ alors $\lambda \in]0, \frac{\lambda}{\|x\|^2}]$.

Si $0 \in W(A)$ donc par convexité de $W(A)$, $\lambda \in W(A)$, (i,e) $W(A)$ est fermé. ■

Théorème 2.6 [7]

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si et seulement si $W(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve

Si A est auto-adjoint, alors, pour tout $x \in H$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

On a donc $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(A) \subseteq \mathbb{R}$, alors l'identité de polarisation généralisée implique que T est auto-adjoint. ■

2.2 Image numérique dans une algèbre de Banach

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach avec identité e.

Définition 2.2 *Un état sur l'algèbre $\mathcal{A}$ est une fonctionnelle linéaire continue $f \in \mathcal{A}'$ telle que $f(e) = \|f\| = 1$, on note l'ensemble d'états de $\mathcal{A}$ par $P(\mathcal{A})$ ou P.*

Remarque 2.1

$\mathcal{P}$ est un ensemble non vide, convexe et compact.

Définition 2.3 [1]

L'image numérique d'un élément a de $\mathcal{A}$ est définie par:

$$W_0(a) = \{f(a) \quad ; \quad f \in \mathcal{P}\}.$$

Théorème 2.7 [1]

Pour $a \in \mathcal{A}$, $W_0(a)$ est non vide, convexe et compact.

Preuve

Comme $\mathcal{P}$ est non vide, alors $W_0(a)$ est non vide. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$, $r \in]0, 1[$ et

$$f = rf_1 + (1-r) f_2.$$

Comme $\mathcal{P}$ et convexe alors

$$f \in \mathcal{P}, \ f(a) = rf_1(a) + (1-r) f_2 \in W_0(a).$$

D'où la convexité de $W_0(a)$.

Comme l'application

$$\Psi_a : \mathcal{P} \to \mathbb{C}, \ f \longmapsto f(a),$$

est continue et $\mathcal{P}$ compact alors $W_0(a) = \Psi_a(\mathcal{P})$ est compact. ■

Théorème 2.8 [1]

Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \subset W_0(a)$.

Preuve

Si $(a-\lambda)$ n'est pas inversible à gauche, alors $e \notin \mathcal{A}(a-\lambda)$. On a pour tout $x \in \mathcal{A}$, $x(a-\lambda)$ n'est pas inversible à gauche, Si $y \in \mathcal{A}$ tel que $\|e-y\| < 1$, alors y est inversible (série de Neumann). D'où pour tout $x \in \mathcal{A}$,

$$\|e - x(a-\lambda)\| \geq 1.$$

On construit $f \in \mathcal{P}$ tel que $\lambda = f(a)$. D'après le théorème de Hahn-Banach on peut choisir $f \in \mathcal{A}'$tel que

$$\forall x \in \mathcal{A},\ f(x(a-\lambda)) = 0,\ \ f(e) = 1 \text{ et } \ \|f\| = \left\|f\ |_{Vect(\mathcal{A}(a-\lambda)\cup\{e\})}\right\|$$

Pour $y = x(a-\lambda) + \alpha;\ x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C} : f(y) = f(\alpha e) = \alpha$. Si $\alpha \neq 0$, alors

$$|\alpha| \left\|\alpha^{-1} x(a-\lambda) + e\right\| \geq |\alpha|\,,$$

d'où $|f(y)| \leq \|y\|$ pour tout $y \in Vect(\mathcal{A}(a-\lambda) \cup \{e\})$. De plus $\|f\| = 1$ et $f \in \mathcal{P}$.

Posons $x = e$, on obtient

$$f(a-\lambda) = f(a) - \lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = f(a) \in W_0(a)\,.$$

■

Remarque 2.2

$$W_0(\alpha a + \beta) = \alpha W_0(a) + \beta, \forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \forall \beta \in \mathbb{C}.$$

Théorème 2.9 [1]

Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :

(i) $0 \in W_0(a) \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C};\ \ |\lambda| \leq \|a - \lambda\|\,.$

(ii) $W_0(a) = \cap\left\{\overline{D}(\lambda, \|a-\lambda\|), \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, *où* $\overline{D}(\lambda, \|a-\lambda\|)$ *est le disque fermé de centre* λ *et de rayon* $\|a-\lambda\|$.

Preuve

(i) Supposons que $0 \in W_0(a)$ et soit $f_0 \in \mathcal{P},\ f_0(a) = 0$. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C};\quad f_0(a-\lambda) = -\lambda,$$

d'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}; \quad |\lambda| \leq \|f_0\| \, \|a-\lambda\| = \|a-\lambda\| \,.$$

Réciproquement, si $|\lambda| \leq \|a-\lambda\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, alors a n'est pas un opérateur scalaire.

Par application du théorème de Hahn-Banach, on peut choisir $f \in \mathcal{A}'$ tel que

$$f(a) = 0, \quad f(e) = 1 \text{ et } \|f\| = \left\| f \mid_{Vect\{a,e\}} \right\| .$$

Pour deux scalaires non nuls α, β on a :

$$f(\alpha a + \beta) = \beta, \quad \|\alpha a + \beta\| = |\alpha| \left\| a - (-\alpha^{-1}\beta) \right\| \geq |\alpha| \left| -\alpha^{-1}\beta \right| = |\beta| \,.$$

D'où

$$\|f\| = 1 = f(e),$$

i.e. $f \in \mathcal{P}$ et $0 = f(a) \in W_0(a)$.

(ii) Soit $\mu \in \mathbb{C}$, comme $W_0(a-\mu) = W_0(a) - \mu$, par application de (i) on obtient

$$\mu \in W_0(a) \iff \left| \lambda' \right| \leq \left\| a - \mu - \lambda' \right\|, \ \forall \lambda' \in \mathbb{C}.$$

Posons $\mu + \lambda' = \lambda$. Alors

$$\mu \in W_0(a) \iff |\mu - \lambda| \leq \|a - \lambda\| \,, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'où

$$W_0(a) = \cap \left\{ \overline{D}(\lambda, \|a-\lambda\|), \ \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

■

2.3 Exemples

Exemple 2.1 (*Opérateur de décalage à gauche sur* $\mathbb{C}^2$)

Soit $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'opérateur de décalage à gauche sur $\mathbb{C}^2$ présenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

suivant la base standard de $\mathbb{C}^2$, alors $W(T_1)$ est le disque fermé centré à l'origine et de rayon 1/2.

Preuve

Nous paramétrions le vecteur unité de $\mathbb{C}^2$ comme suit :

$$e = e(\theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} t \\ e^{i\theta}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix},$$

θ et φ sont des nombres réels et $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\langle Te, e\rangle &= e^*Te = (\overline{e_1}, \overline{e_2})T\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\
&= (te^{-i\varphi}, e^{-i(\varphi+\theta)}\sqrt{1-t^2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{i\varphi} \\ e^{i(\varphi+\theta)}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \\
&= (te^{-i\varphi}, e^{-i(\varphi+\theta)}\sqrt{1-t^2}) \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\theta)}\sqrt{1-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{i\theta}t\sqrt{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Quand θ traverse $\mathbb{R}$, $\langle Te, e\rangle$ décrit le cercle centré à l'origine et de rayon $t\sqrt{1-t^2}$ donc $W(T_1)$ est l'union de tous ces cercles pour $(0 \leq t \leq 1)$, i.e. $W(T_1)$ est le disque fermé centré à l'origine et de rayon $\max\limits_{0\leq t\leq 1} t\sqrt{1-t^2} = 1/2$. ■

Théorème 2.10 [10] *L'image numérique n'est pas invariante par similitude.*

Preuve

Posons T_λ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ présenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

suivant la base standard de $\mathbb{C}^2$. On a $T_\lambda = \lambda T_1$ (T_1 l'opérateur de décalage à gauche) d'où $W(T_\lambda) = \lambda W(T_1)$ est le disque fermé centré à l'origine et de rayon $|\lambda|/2$. Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$, $W(T_\lambda) \nsubseteq W(T_1)$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$,

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

S_λ est un opérateur inversible et $S_\lambda T_1 S_\lambda^{-1} = T_\lambda$, i.e. $W(S_\lambda T_1 S_\lambda^{-1}) \nsubseteq W(T_1)$ ■

Exemple 2.2 (*Opérateur de décalage à gauche sur ℓ^2*)

Soit ℓ^2 l'espace des suites de carré sommable (i.e)

$$\ell^2 = \left\{ \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}; \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Soit $B \in \mathcal{L}(\ell^2)$ l'opérateur de décalage à gauche sur ℓ^2 défini par :

$$B(x_0, x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...).$$

$W(B)$ est le disque unité ouvert D.

Preuve

Soit $\lambda \in D$, le vecteur $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...)$ est un élément de ℓ^2, et $Bx_\lambda = \lambda x_\lambda$, i.e. chaque $\lambda \in U$ est une valeur propre de B avec vecteur propre x_λ. D'où $D \subset W(B)$. Comme $\|B\| = 1$,$W(B) \subset \overline{D}$, donc il suffit de montrer qu'aucun point du cercle unité appartient à $W(B)$. Supposons qu'il existe λ de module 1 appartient a $W(B)$, alors il existe un vecteur unité x de H avec $\lambda = \langle Bx, x\rangle$. Alors

$$1 = |\lambda| = |\langle Bx, x\rangle| \leq \|Bx\| \, \|x\| \leq \|x\| \, \|x\| = 1,$$

On a obtenu ici une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les deux vecteurs Bx et x sont colinéaires, i.e. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Bx = \alpha x$.

Maintenant un simple calcul montre que le seul vecteur x vérifié $Bx = \alpha x$ est x_λ qui n'appartient pas à ℓ^2 puisque $|\lambda| = 1$. Cette contradiction montre que $\lambda \notin W(B)$. ■

Exemple 2.3

Sur l'espace $H = L^2([0,1])$, on considère l'opérateur de multiplication par x

$$A(f)(x) = xf(x).$$

Il est clair que A est auto-adjoint, et comme $\sigma(A) = [0,1]$, alors

$$\begin{aligned} \inf_{\|f\|=1} |\langle Af, f\rangle| &= 0 \in W(A), \\ \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f\rangle| &= 1 \in W(A), \end{aligned}$$

d'où $W(A) = [0,1]$

Chapitre 3

Image numérique en dimension 2

Soit H espace de Hilbert en dimension 2.

3.1 Formes matricielles élémentaires

Lemme 3.1 *Tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ admet un transformé affine $\alpha A + \beta\,(\alpha \neq 0)$ dont le Polynôme minimal est de l'une des formes suivantes :*

(1) $P(\lambda) = \lambda.$ (2) $P(\lambda) = \lambda^2.$ (3) $P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$

Identiquement

(1) $A = 0.$ (2) $A^2 = 0, (A \neq 0)$ (3) $A^2 - I = 0.$

Preuve

Si le polynôme minimal de A est de degré 1, le cas (1) est valable.

Si le polynôme minimal de A est de degré 2, alors

$$P(A) = A^2 - \gamma A + \mu . (\gamma = tr(A)),$$

i.e.

$$P(A) = \left(A - \frac{1}{2}\gamma\right)^2 - \left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \mu\right) = 0,$$

d'où la forme (2) ou (3) est nul ou non. ■

Proposition 3.1 *(i) Si $A^2 = 0$, $A \neq 0$, il existe une base orthonormée (e_1, e_2) telle que*

$$Ae_1 = e_2, Ae_2 = 0, \text{ donc } \quad (A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(notons $(A) = S_1$).

(ii) Si $A^2 = I$, $A^2 - I$ étant le polynôme minimal de A, il existe une base orthonormée (e_1, e_2) et une constante a supérieur ou égale à 1 telles que

$$Ae_1 = a^{-1}e_2 \quad Ae_2 = ae_1, \text{ donc } \ (A) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

(notons $(A) = T_a$).

Preuve

(i) C'est clair que $R(A)$ est de dimension 1, choisissons e_2 normé dans $R(A)$, e_1 est alors choisi tel que (e_1, e_2) soit orthonormée. On a ainsi $Ae_2 = 0$, Ae_1 est colinéaire à e_2. En modifiant A par un facteur scalaire on peut supposer que $Ae_1 = e_2, \|A\| = 1$.

(ii) Si $A^2 = I$ et A non scalaire, A admet les deux valeurs propres 1 et -1. Soit $Af_1 = f_1$, $Af_2 = -f_2, \|f_1\| = \|f_2\| = 1$, où l'on pose de plus (choix d'un facteur scalaire de module 1 sur f_2 par exemple) $\langle f_1, f_2 \rangle \in \mathbb{R}^+$.

Alors

$$A(f_1 + f_2) = f_1 - f_2, A(f_1 - f_2) = f_1 + f_2.$$

$$\langle f_1 + f_2, f_1 - f_2 \rangle = 0, f_1 + f_2 \text{ et } f_1 - f_2 \text{ sont non nuls.}$$

Notons

$$e_1 = \frac{f_1 + f_2}{\|f_1 + f_2\|}, e_2 = \frac{f_1 - f_2}{\|f_1 - f_2\|}, \text{et } a = \frac{\|f_1 + f_2\|}{\|f_1 - f_2\|}.$$

Comme $\langle f_1, f_2 \rangle \in \mathbb{R}^+$, a est supérieur ou égale à 1. On a $Ae_1 = a^{-1}e_2$ et $Ae_2 = ae_1$. ■

Remarque 3.1 *Le résumé de (i) et (ii) est que tout opérateur de $\mathcal{L}(H)$ admet un transformé affine pour le quel la matrice dans une base orthonormée est de l'une des formes :*

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)\ T_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } a \geq 1.$$

Théorème 3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et (e_1, e_2) une base orthonormée fixée de H , alors*

$$W(A) = \left\{ \langle Ax, x \rangle, x = (\cos\theta)\, e_1 + \sin\theta \exp(i\varphi)\, e_2; \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi[\right) \right\}.$$

Preuve

Si à $x \in H$, $\|x\| = 1$, on associe $x_\alpha = \exp(i\alpha)\, x$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est arbitraire, alors $\langle Ax, x \rangle = \langle Ax_\alpha, x_\alpha \rangle$. Pour trouver $W(A)$ il suffit alors de choisir $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ en imposant à λ_1 d'être positif ou nul. Ceci établit la représentation des x par les couples (θ, φ) pour $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$. ■

3.2 Forme elliptique de l'image numérique

Proposition 3.2 *Pour les trois modèles d'opérateurs définis dans la remarque précédente, l'image numérique est précisée ci-dessous :*

(1) $W(0) = 0$.

(2) $W(S_1)$ *est le disque fermé de centre 0 et de rayon* $\frac{1}{2}$.

(3) $W(T_a)$ *est la surface elliptique fermée limitée par l'ellipse de foyers les valeurs propres* $\{1, -1\}$, *de grand axe* $\frac{1}{2}(a + a^{-1})$ *et de petit axe* $\frac{1}{2}(a - a^{-1})$

Dans chaque cas on utilise la base (e_1, e_2) et les vecteurs x définis dans la proposition précédente.

Preuve

(2) $A = S_1$; pour

$$x_{\theta,\varphi} = \cos\theta e_1 + \sin\theta \exp(i\varphi)\, e_2$$

$$\langle Ax_{\theta,\varphi}, x_{\theta,\varphi} \rangle = \sin\theta \cos\theta \exp(-i\varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \exp(-i\varphi)$$

On a :

$$\left\{\frac{1}{2}\sin(2\theta), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

Donc lorsque φ décrit $[0, 2\pi[$, l'image numérique $W(A)$ obtenue est le disque fermé de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.

On remarque qu'un point z au bord de $W(A)$ est obtenu une fois pour $\left(\theta = \frac{\pi}{4}, \varphi\right)$, l'origine est obtenue pour $\left(\theta = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2}\right)$, les vecteurs $x_{\theta,\varphi}$ correspondants sont orthogonaux. Tout autre points intérieur est obtenu deux fois, pour deux vecteurs non orthogonaux $x_{\theta,\varphi}, x_{\frac{\pi}{2}-\theta,\varphi}$.

(3) $A = T_a$;

$$\begin{aligned} \langle T_a x_{\theta,\varphi}, x_{\theta,\varphi}\rangle &= \frac{1}{2}\sin(2\theta)\left\{\left(a + a^{-1}\right)\cos\varphi + i\left(a - a^{-1}\right)\sin\varphi\right\} \\ &= z_{\theta,\varphi}. \end{aligned}$$

Lorsque θ est constant, $z_{\theta,\varphi}$ décrit l'ellipse centrée en 0, de grand axe $\frac{1}{2}\left(a + a^{-1}\right)\sin(2\pi)$ sur l'axe réel, de petit axe $\frac{1}{2}\left(a - a^{-1}\right)\sin(2\pi)$.

Lorsque θ varie, les ellipses décrivent la surface elliptique fermée limitée par celle centrée on 0, de grand axe $\frac{1}{2}\left(a + a^{-1}\right)$, de petit axe $\frac{1}{2}\left(a - a^{-1}\right)$ admettant donc les foyers définis par

$$c^2 = \frac{1}{4}\left(a + a^{-1}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(a - a^{-1}\right)^2 = 1,$$

ils ont pour affixes +1 et -1. ■

Corollaire 3.1 *Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, H de dimension 2, $W(A)$ est la surface elliptique fermée dont l'ellipse frontière admet pour foyers les valeurs propres de A.*

Si $A \neq \lambda I$, chaque point frontière est obtenu pour un seul vecteur x, chaque point intérieur est obtenu deux fois (pour deux vecteurs) et seul le centre est obtenu pour deux vecteurs orthogonaux.

Preuve

Une transformation $A \to \alpha A + \beta$ amène à l'une des formes $0, S_1, T_a$ pour lesquelles la propriété est vraie;

$$\sigma(\alpha A + \beta) = \alpha\sigma(A) + \beta \text{ et } W(\alpha A + \beta) = \alpha W(A) + \beta.$$

Donc les foyers de $W(A)$ restent les valeurs propres de A.

La transformation $A \to A - \frac{1}{2}trA$ amène à un polynôme minimal sans terme de degré 1 ($A - \frac{1}{2}trA$ de trace nulle), puis la multiplication par un scalaire δ amène à une forme $0, S_1$ ou T_a. ■

Proposition 3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $W(A)$ est un segment si et seulement si A est normal.*

Preuve

Si $W(A)$ est un segment, alors A est associé à un T_a pour $a - a^{-1} = 0$ alors $A = \alpha T_1 + \beta; T_1$est normal, donc $\alpha T_1 + \beta$ aussi

Si A est normal, $\alpha A + \beta$ est toujours normal donc $\alpha A + \beta$ est un T_1 et $W(A)$ est le segment limité par les valeurs propres de A ■

3.3 Exemples

(1) Soit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Par la transformation affine : $S \to \frac{3}{2}S - I$ on obtient $\frac{3}{2}S - I = T_2$, donc $\frac{3}{2}W(S) - 1 = W(T_2)$, et on sait que l'image numérique de T_2 est la surface elliptique fermée limitée par l'ellipse de foyers $(-1, 1)$, de grand axe $\frac{5}{4}$ et de petit axe $\frac{3}{4}$, alors l'image numérique de la matrice S est la surface elliptique fermée limitée par l'ellipse de foyers $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

(2) Soit l'opérateur A est défini par :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

tel que :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

comme on a,

$$W(A_1) = \overline{D}\left(0, \frac{3}{2}\right) \quad \text{et } W(A_2) = \{3\}$$

alors l'image numérique de A est l'enveloppe convexe de l'union de $W(A_1)$ et $W(A_2)$.

Chapitre 4

Image numérique et spectre

4.1 Relation entre l'image numérique et le spectre

Soit H un espace de Hilbert complexe.

Proposition 4.1 [10]

Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ on a :

$$\sigma_p(A) \subset W(A).$$

Preuve Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ et $x \in H, \|x\| = 1, Ax = \lambda x$

Alors :

$$\langle (A - \lambda)x, x \rangle = 0 \Longrightarrow \langle Ax, x \rangle = \lambda,$$

d'où $\lambda \in W(A)$. ■

Théorème 4.1 [10]

L'image numérique d'un opérateur unitairement diagonalisable est l'enveloppe convexe de son spectre ponctuel.

Preuve Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitairement diagonalisable, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de H et une suite $\{\lambda_n\}$ des nombres complexes tels que $Ae_n = \lambda_n e_n$ pour tout entier positif n, d'où

$$\begin{aligned} W(A) &= \{\langle Ax, x\rangle; x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \left\{\langle A\sum_{i=0}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=0}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j\rangle; x \in H, \|x\| = 1\right\} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2; x \in H, \|x\| = 1\right\} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n; a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\right\}. \end{aligned}$$

Donc $W(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des valeurs propres de A, i.e. $W(A) = co\sigma_p(A)$. ■

Exemple 4.1

Soit A est un opérateur diagonal définit par

$$A = diag(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, donc

$$\sigma_p(A) = \left\{\frac{1}{n}; \quad n \geq 1\right\}.$$

Comme A est normal et compact (unitairement diagonalisable) alors

$$W(A) = co\sigma_p\left(A\right) =]0, 1].$$

Théorème 4.2 [10]
Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ *on a* $\sigma\left(A\right) \subseteq \overline{W\left(A\right)}$.

Preuve Soit $\lambda \in \sigma_a\left(A\right)$ et soit (x_n) une suite de vecteurs unitaires telle que

$$\|\left(A - \lambda I\right) x_n\| \rightarrow 0.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$|\langle\left(A - \lambda I\right) x_n, x_n\rangle| \leq \|\left(A - \lambda I\right) x_n\| \rightarrow 0,$$

donc $\langle A\, x_n, x_n\rangle \to \lambda$ et par suite $\lambda \in \overline{W\,(A)}$. On a alors $\sigma_a\,(A) \subseteq \overline{W\,(A)\,.}$

Ainsi, d'après la proposition (1.10), on a $\partial\sigma\,(A) \subseteq \sigma_a\,(A) \subset \overline{W\,(A)}$. De la convexité de $\overline{W\,(A)}$, il s'en suit que $\sigma\,(A) \subseteq \overline{W\,(A)}$. ■

Théorème 4.3 [8]

Pour tout opérateur A de $\mathcal{L}(H)$

$$r(A) = \inf\{\left\|SAS^{-1}\right\|,\ S \textit{ inversible de } \mathcal{L}(H)\}.$$

Preuve

On a $r(A) \leq \|A\|$, alors $r(SAS^{-1}) \leq \|SAS^{-1}\|$, pour tout S inversible de $\mathcal{L}(H)$, et comme le rayon spectral est invariant par similitude on obtient

$$r(A) \leq \inf\left\{\left\|SAS^{-1}\right\|,\ S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H)\right\}.$$

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha > r(A)$. Construisons S_α inversible de $\mathcal{L}(H)$ tel que$\|S_\alpha A S_\alpha^{-1}\| < \alpha$. Posons

$$T_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{-2n}(A^*)^n A^n.$$

Cette série est convergente, car

$$\lim_n \left\|\frac{(A^*)^n A^n}{\alpha^{2n}}\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n \left(\frac{\|(A^*)^n\|\,\|A^n\|}{\alpha^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{r^2(A)}{\alpha^2} < 1.$$

De plus

$$T_\alpha - I = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{-2n}(A^*)^n A^n \geq 0,$$

alors T_α est inversible.

Notons que $A^*T_\alpha A = \alpha^2(T_\alpha - I)$, choisissons S_α par $S_\alpha = (T_\alpha)^{\frac{1}{2}}$. on a

$$\begin{aligned}
\left\|S_\alpha A S_\alpha^{-1} x\right\|^2 &= \langle S_\alpha A S_\alpha^{-1} x, S_\alpha A S_\alpha^{-1} x\rangle \\
&= \langle A^* T_\alpha A(S_\alpha^{-1} x), S_\alpha^{-1} x\rangle \\
&< \alpha^2 \langle T_\alpha(S_\alpha^{-1} x), S_\alpha^{-1} x\rangle \\
&= \alpha^2 \left\|x^2\right\|.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in H$. D'où $\|S_\alpha A S_\alpha^{-1}\| < \alpha$. Cela complète la preuve. ■

Théorème 4.4 [10]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$co\sigma(A) = \cap \left\{ \overline{W(SAS^{-1})}; S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H) \right\}$$

Preuve

[$\subset$] On a $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, d'où $co\sigma(SAS^{-1}) \subset \overline{W(SAS^{-1})}$ pour tout S inversible de $\mathcal{L}(H)$, et comme le spectre est invariant par similitude on obtient

$$co\sigma(A) \subset \cap \left\{ \overline{W(SAS^{-1})};\ S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H) \right\}.$$

[$\supset$] Soit $\lambda \notin co\sigma(A)$, montrons que

$$\lambda \notin \cap \left\{ \overline{W(SAS^{-1})};\ S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H) \right\},$$

i.e. il existe un opérateur inversible T de $\mathcal{L}$(H) tel que $\lambda \notin \overline{W(SAS^{-1})}$. Comme $co\sigma(A)$ est compacte, il existe un disque ouvert D contient $co\sigma(A)$, mais son adhérence ne contient pas λ. On peut supposer sans perdre les généralités, que D est le disque unité ouvert, ainsi en particulier $r(T) < 1$. D'après le théorème de Rota il existe opérateur inversible T de $\mathcal{L}(H)$ tel que

$$\left\| TAT^{-1} \right\| \leq \frac{(1 + r\,(T))}{2} < 1,$$

d'où

$$\overline{W(TAT^{-1})} \subset D,$$

et par conséquent

$$\lambda \notin \overline{W(TAT^{-1})}.$$

■

4.2 Opérateurs convexoïdes, normaloïdes et spectraloïdes

Soit H espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 4.1

(1) *A est appelé normaloïde si $w(A) = \|A\|$ (i.e. $r(A) = \|A\|$).*

(2) *A est appelé convexoïde si $\overline{W(A)} = co\sigma(A)$.*

(3) *A est appelé spectraloïde si $w(A) = r(A)$.*

Remarque 4.1

(1) Tout opérateur normaloïde est un opérateur spectraloïde.

(2) Tout opérateur convexoïde est un opérateur spéctraloïde.

(3) [4] En 1929 Winter essayé de caractériser l'opérateur A de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant $co\sigma(A) = \overline{W(A)}$, il a donné l'assertion suivante : $co\sigma(A) = \overline{W(A)}$ si et seulement si A est normaloïde.

En 1967 P. R. Halmos a montré que l'assertion de Winter est fausse. Il a montré qu'il existe des opérateurs convexoïdes qui ne sont pas normaloïdes et vice versa, il a donné les contres exemples suivants :

(i) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit N un opérateur normal dont le spectre est le disque fermé D de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$. Si

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix};$$

alors $\sigma(A) = \{0\} \cup D$, et $W(A) = co(W(M) \cup W(N)) = D$. Ce qui dit que A est convexoïde. Comme $\|A\| = 1$ (car $\|M\| = 1$), A est n'est pas normaloïde.

(ii) Soit

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque $\|A\| = 1$, $W(A) = co(D \cup \{1\})$, et $w(A) = 1$ donc A est normaloïde. Comme $\sigma(A) = \{0\} \cup \{1\}$, alors $\sigma(A) = [0,1]$, ce qui résulte que A n'est pas convexoïde.

Proposition 4.2 [1] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors A est convexoïde si et seulement si*

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1},$$

pour tout $\lambda \notin co\sigma(A)$.

Preuve

[$\Longrightarrow$] Soit $\lambda \notin co\sigma(A)$. Par la transformation $A \longmapsto \alpha A + \beta$; $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}$ on peut supposer que le couple (λ, A) satisfait :

$$[\lambda < 0, 0 \in co\sigma(A) \text{ et } co\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors pour tout $x \in H$

$$\|(A-\lambda)x\|^2 = \|Ax\|^2 - \lambda[(Ax,x) + (x,Ax)] + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Comme $(A-\lambda)$ est inversible, alors pour tout $x \in H$

$$\|x\|^2 \geq \lambda^2 \left\|(A-\lambda)^{-1}x\right\|^2,$$

d'où

$$[dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1} = |\lambda|^{-1} \geq \left\|(A-\lambda)^{-1}\right\|.$$

[$\Longleftarrow$] Comme on a $co\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ on montre que si $\lambda \notin co\sigma(A)$ alors $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Par application de la transformation $A \longmapsto \alpha A + \beta$ on peut supposer que

$$[\lambda < 0, 0 \in co\sigma(A) \text{ et } co\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors

$$\lambda \notin co\sigma(A) \text{ et } dist(\lambda, co\sigma(A)) = |\lambda|,$$

c.à.d.

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq |\lambda|^{-1}.$$

D'où

$$\lambda^2 \|x\|^2 \leq \|(A-\lambda)x\|^2,$$

Pour tout $x \in H$. Par passage au limite quand λ tend vers $(-\infty)$ on obtient que pour tout $x \in H$.

$$\langle Ax, x\rangle + \langle x, Ax\rangle = 2\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

D'où

$$\overline{W(A)} \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq 0\},$$

donc

$$\lambda \notin \overline{W(A).}$$

■

Corollaire 4.1 [1] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur hyponormal, alors*

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1},$$

Pour tout $\lambda \notin co\sigma(A)$.

Preuve En effet :

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| = \max_{\mu \in \sigma(A-\lambda)^{-1}} |\mu| = \frac{1}{\min\limits_{\mu \in \sigma(A-\lambda)} |\mu|} = \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))} \leq \frac{1}{dist(\lambda, co\sigma(A))}.$$

■

Remarque 4.2

(1) Tout opérateur hyponormal est convexoïde.

(2) On peut conclur les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Normaloïde} & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ \text{Auto-adjoint} \longrightarrow \text{Normal} \longrightarrow \text{Hyponormal} & & & & & & \text{Spectraloïde.} \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \text{Convexoïde} & & \end{array}$$

Théorème 4.5 [7]

Soit m et n deux nombres réels. Si $\overline{W(A)} = [m,n]$ *, alors* $\{m,n\} \subseteq \sigma(A)$.

Preuve

Si $\overline{W(A)} = [m,n]$, alors le théorème (2.7) implique que A est un opérateur normale. (i.e. convexoïde), l'ensemble $\overline{W(A)}$ est donc l'enveloppe convexe de $\sigma(A)$, ou encore

$$[m,n] = \overline{W(A)} = co(\sigma(A)).$$

Il suit donc

$$\{m,n\} \subseteq \sigma(A).$$

■

Exemple 4.2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Car A est un opérateur unitaire, alors A est normal, et donc son image numérique est l'enveloppe convexe de ses valeurs propres,

$$W(A) = co\sigma_p(A).$$

Donc l'image numérique de cette matrice est le triangle dont les sommets sont les valeurs propres de A (les trois racines cubiques de 1).

Définition 4.2 *On appelle spectre approché réduisant de A l'ensemble*

$$\sigma_{ar}(A) = \{\lambda \in \sigma_p(A), \exists x_n \in H, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1 : \|(A-\lambda)x_n\| + \|(A-\lambda)^* x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

Lemme 4.1 [3] $A \in \mathcal{L}(H)$ *est :*

(1) *Spectraloïde si et seulement s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que :* $|\lambda| = w(A)$.

(2) *Normaloïde si et seulement s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que :* $|\lambda| = \|A\|$.

Notons d'après ces deux conditions que $\lambda \in \partial W(A) \cap \partial\sigma(A)$ dans les deux cas.

Corollaire 4.2 [3]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *normaloïde (resp. spectraloïde) et soit* $\mu \in \mathbb{C}$, *alors si* $\arg \mu = \arg \lambda$ *avec* $\lambda \in \sigma(A)$ *vérifie* $|\lambda| = \|A\|$ *(resp.* $|\lambda| = w(A)$*),* $A + \mu I$ *est normaloïde (resp. spectraloïde)*

Preuve

Puisque on a $\arg \mu = \arg \lambda$ alors

$$\begin{aligned} r(A+\mu I) &= \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A+\mu I)\} \\ &= \sup\{|\lambda - \mu|, \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\lambda| + |\mu|, \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} + |\mu| \\ &= r(A) + |\mu|, \end{aligned}$$

et de la même façon on a aussi que $w(A+\mu I) = w(A) + |\mu|$.

Si A est spectraloïde alors $r(A+\mu I) = w(A+\mu I)$

Si A est normaloïde alors

$$\begin{aligned} \|A\| + |\mu| &= w(A) + |\mu| \\ &= w(A+\mu I) \\ &\leq \|A+\mu I\| \\ &\leq \|A\| + |\mu| . \end{aligned}$$

■

Proposition 4.3 [3]

$A \in \mathcal{L}(H)$ *est normaloïde si et seulement s'il existe* $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$ *tel que* $|\lambda| = \|A\|$.

Preuve

[$\Longleftarrow$] Clair (car $\sigma_{ar}(A) \subset \sigma(A)$)

$[\Longrightarrow]$ On a : $\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$ et comme A est normaloïde alors il existe $\lambda \in (\partial W(A) \cap \partial\sigma(A))$ tel que $|\lambda| = \|A\|$

Donc, il existe $\lambda \in \sigma_a(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$ (i.e) il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$des vecteurs unités vérifient $\|(A-\lambda I)x_n\| \longrightarrow 0$.

reste à vérifier que $\|(A-\lambda I)^* x_n\| \longrightarrow 0$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n\rangle$, alors

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = \langle (A-\lambda)x_n, x_n\rangle \leq \|(A-\lambda)x_n\| \to 0.$$

Donc $\lambda_n \to \lambda$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda I)^* x_n\|^2 &= \|A^* x_n\|^2 - 2\lambda\overline{\lambda}_n + |\lambda|^2 \\ &\leq 2\left(\|A\|^2 - \operatorname{Re}\lambda\overline{\lambda}_n\right) \to 0, \end{aligned}$$

(i.e) $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$ ■

Lemme 4.2 [3] *Soit $\lambda \in W(A)$ et $|\lambda| = \|A\|$, alors λ est une valeur propre réduisant de A.*

Preuve

Soit $\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x\rangle|$ si $\|x\| = 1$ alors

$$\|A\| = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$$

On obtient une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz donc $Ax = \lambda x$. De la même façon on obtient $A^* x = \overline{\lambda} x$. ■

Lemme 4.3 [3] *Soit $\lambda \in \sigma_a(A), \overline{\mu} \in \sigma_a(A^*)$, $\lambda \neq \mu$, et*

$$\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0, \|(A-\mu I)^* y_n\| \to 0, \|x_n\| = \|y_n\| = 1.$$

Alors $\lim_n \langle x_n, y_n\rangle = 0$.

Preuve

Puisque

$$(\mu-\lambda)\left\langle x_n, y_n\right\rangle=\left\langle (A-\lambda I) x_n, y_n\right\rangle-\left\langle x_n,(A-\mu I)^* y_n\right\rangle,$$

on obtient alors

$$\left|\left\langle x_n, y_n\right\rangle\right| \leq \frac{1}{|\mu-\lambda|}\left(\left\|(A-\lambda I) x_n\right\|+\left\|(A-\mu I)^* y_n\right\|\right) \rightarrow 0.$$

■

Lemme 4.4 [1] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$\left\{\lambda \in \sigma_a(A) ; \operatorname{Re}(A-\lambda) \geq 0\right\} \subset \sigma_{ar}(A).$$

Preuve

Soit $\lambda \in \sigma_a(A)$, alors il existe une suite orthonormale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans H telle que

$$\lim_n (A-\lambda) x_n=0,$$

alors l'opérateur

$$B=\operatorname{Re}(A-\lambda)=\frac{1}{2}\left[(A-\lambda)+(A-\lambda)^*\right],$$

satisfait

$$\lim_n \langle B x_n, x_n\rangle=0.$$

Comme $B \geq 0$, alors $\lim_n B x_n=0$, i.e,

$$\lim_n\left(\frac{1}{2}\left[(A-\lambda) x_n+(A-\lambda)^* x_n\right]\right)=0.$$

Et comme $\lim_n (A-\lambda) x_n=0$, alors $\lim_n (A-\lambda)^* x_n=0$. D'où $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$. ■

Proposition 4.4 [3] *Soit $\lambda \in \partial W(A)$. Alors $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si λ est une valeur propre approchée réduisant de A.*

Preuve

Montrons que $\partial W(A) \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$.

En effet : par la transformation $A \to \alpha A + \beta$, $(\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C})$ l'hypothèse $\lambda \in \partial W(A) \cap \sigma(A)$ peut être remplacée par $0 \in \partial W(A) \cap \sigma(A)$ avec $\operatorname{Re}(A) \geq 0$. Comme

$$0 \in \partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A),$$

Il en résulte d'après le lemme précédent que

$$0 \in \sigma_{ar}(A).$$

Donc

$$\partial W(A) \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A).$$

■

Théorème 4.6 [2]

A est un opérateur spectraloïde si et seulement si

$$w(A^n) = w(A)^n.$$

pour tout $n \in N^*$.

Preuve

Si A est un opérateur spectraloïde, alors

$$w(A^n) = r(A^n) = r(A)^n \leq w(A)^n,$$

l'inégalité inverse est clair, donc $w(A^n) = w(A)^n$.

Si $w(A^n) = w(A)^n$, alors

$$w(A)^n = w(A^n) \leq \|A^n\|, \qquad w(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}},$$

alors

$$w(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A),$$

ainsi $w(A) = r(A)$ puisque on a $r(A) \leq w(A)$. ■

Corollaire 4.3 [2]

Si A est un opérateur spectraloïde, alors A^n est aussi spectraloïde pour tout entier positif n.

Preuve

Soit A un opérateur spectraloïde, alors d'après le théorème précédent on a A

$$w(A^n) = w(A)^n = r(A)^n = r(A^n).$$

Ainsi A^n est spectraloïde. ■

Symboles et Notations

$\mathcal{L}(H)$	:	espace des opérateurs linéaires bornés sur H.
$W(A)$	:	l'image numérique de A.
$w(A)$	:	le rayon numérique de A.
A^*	:	l'adjoint de A.
$\|A\|$	:	la norme de A.
$dist$	:	signe de distance.
$\sigma(A)$	:	le spectre de A.
$r(A)$	:	le rayon spectral de A.
$D(x,r)$	:	disque ouvert de centre x et de rayon r.
$A \mid F$	:	la compression de A sur F.
$\partial\sigma(A)$	:	la frontière de $\sigma(A)$.
$co\sigma(A)$	:	l'enveloppe convexe du spectre.
$\sigma_a(A)$	:	spectre approché de A.
$\sigma_{ar}(A)$	:	spectre approché réduisant de A.
$\sigma_{pr}(A)$	:	spectre ponctuel réduisant de A
$W_0(a)$	:	image numérique de a dans une algèbre de Banach.
$\mathcal{P}$	:	l'ensemble d'états.
trA	:	trace de A.
$\oplus$	:	signe de somme directe.
$R(A)$	:	l'image de A.
$\ker(A)$	:	le noyau de A.
$Vect\{e_1, e_2, ..., e_n\}$	:	sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.
$\mathcal{A}'$	:	le dual topologique de $\mathcal{A}$

Bibliographie

[1] S. Bouzenada*, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations*, Thèse de Doctorat, Université de Annaba (2008).

[2] T. Furuta and Z. Takeda*, A characterization of Spectraloid operators and its generalization*, Faculty of engineering, Ibaraki university, 599, No 7, Sept 12 1967

[3] L. Z. Gevorgyan, *Characterization of Spectraloid and normaloid Operators*, National academy of sciences of Armenia, volume 113, No 3, 2013.

[4] P. Halmos*, A Hilbert Space Problem Book*, Second Ed., Spring-Verlang, New York,1982.

[5] F. Hausdorff, *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z. 3 (1919) 314-316.

[6] S. Hildebrandt, *Uber den Numerischen Wertebereich eines Operators*, Math. Ann.163(1966), 230-247.

[7] S. Raouafi, *Image numérique et le théorème de Crouzeix*, Mémoire de maîtrise, Faculté des sciences et de génie Université Laval Québec, 2010.

[8] G-S. Rota, *On models for linear operators*, Comm.Pure Appl. Math. 13 (1960), 469-472.

[9] M. Schechter, *Principles of functional analysis,* Belfer Graduate School of Science Yeshiva University, 1973.

[10] J. H. Shapiro, *Notes on the numerical range*, the National Science Foundation Michigan State University, (2004).

[11] J. G. Stampfli and J. P. Williams, *Growath conditions and the numerical range in a Banach algebra,* Tôhoku Math, Journ, 20(1968), 417-424.

[12] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, A.M.S., New York, 1932.

[13] O. Toeplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Staze von Fejér,* Math. Z. 2 (1918) 1877-197.

[14] A. Wintner, *Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen,* Math. Z. 30 (1929) 228-282.