République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi TEBESSI-Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et informatique

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques appliquées

Par : `Nedjoua BOUZIANI`

THEME

Sur des équations des ondes intégro-différentiels

devant le jury composé de :

Tahar BOUALI	MCB	Université Larbi TEBESSI-Tébessa	Président
Abderrahman ZARAI	MCA	Université Larbi TEBESSI-Tébessa	Rapporteur
Mourad BENZAHI	MAA	Université Larbi TEBESSI-Tébessa	Examinateur

Soutenu publiquement le : 29/05/2016

Note : ....   Mention : ....

ملخص

الغرض من عملنا هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تؤول الحلول إلى الصفر عندما يؤول الزمن إلى المالانهاية لمعادلة الأمواج المزودة بمؤثر تكامل تفاضلي وفي وجود قوة خارجية.

حيث درسنا في هذا العمل استقرار بعض مشاكل اللزوجة المطاطية وذلك وفق أربعة فصول تتضمن وجود ووحدانية الحل، السلوك التقاربي لمعادلة ذات مؤثر تكامل تفاضلي في وجود منبع كثير حدودي.

Abstract

The purpose of our work focuses on the determination of sufficient conditions that can lead the solution to tend to zero when the time goes to infinity for integrodifferential wave equation in the presence of a source term of polynomial type.

We study the stabilization of some problems of viscoelasticity, according to four chapters that contains existence and uniqueness of the solution, the asymptotic behavior for an integro-differential equation with a source term.

Resumé

L'objet de notre travail porte essentiellement sur la détermination des conditions suffisantes qui peut mener la solution à tendre vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini pour une équation des ondes intégro-différentiels en présence d'un terme source de type polynomiale.

Nous étudions la stabilisation de quelques problèmes en viscoélasticité, selon quatre chapitres qui contiennent l'existence et l'unicité de la solution, le comportement asymptotique d'une équation intégro-différentielle avec un terme source.

Dedicace

A mes parents,

A mes frères,

A mes soeurs,

A ma famille,

A mes amies.

A mes honnêtes professeurs.

Je dédié cet humble travail.

Nedjoua BOUZIANI

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH le tout-puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté, la chance pour suivre pour terminer ce travail.

Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Abderrahmane ZARAÏ, maître de conférences à l'université de Tébessa, d' avoir veillé et assurer l'encadrement de ce travail.

Je le remercie pour son soutien, son orientation, son suivi permanent, et l'aide constante qu'il m'a prodiguée au cours de l'élaboration de ce travail. Et je n'oublie pas ses conseils judicieux.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Tahar BOUALI, maître de conférences à l'université de Tébessa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire.

Je remercie vivement Monsieur Mourad BENZAHI, maître-assistant à l'université de Tébessa, qui a accepté de juger ce mémoire.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, J'adresse mes vifs remerciements à ma famille et mes relatives pour son soutien moral et son encouragement ainsi à toutes mes amies pour leur présence et leur aide. Et je n'ai pas oublié de remercier tout particulièrement les enseignants et les élèves de l'école coranique Anas ben Malik.

Table des matières

Introduction

Les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiells $\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds$ [12], h représente le noyau dans l'expression de la mémoire qui est supposée décroître. Si on l'ajoute à une équation hyperbolique avec une dissipation de la forme $g(u_t)$, on obtient

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds + g(u_t) = 0 \tag{1}$$

Il existe une littérature riche sur les problèmes hyperboliques viscoélastiques dans tout le domaine. Parmi les nombreux travaux dans ce sens, on peut citer [9, 10, 11], Fatiha Allabou [1] ont traité (1) avec $g(u_t) = 0$. En supposant que le noyau h dans la mémoire décroît de façon (exponentielle, polynomiale), ils ont obtenu la décroissance (exponentielle, polynomiale) de l'énergie. Nous pouvons également ajouter dans ce sens l'article de Medjden [8] où il a démontré que les solutions décroissent d'une manière exponentielle sous de nouvelles hypothèses sur la fonction de relaxation h dans le terme mémoire. Particulièrement, il a examiné une nouvelle famille de noyaux qui n'est pas nécessairement décroissante. Nous pouvons citer aussi l'article de S. Berrimi et S. Messaoudi [2] dans le cas où $g(u_t) = |u_t|^m u_t$ est en interaction avec $|u|^p u$.

Dans ce mémoire, on s'intéressera au comportement asymptotique des solutions du problème (1) dans le cas où le système est soumis à une force extérieure (source de type polynomiale). Il est connu pour l'équation des ondes que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème ; c'est-à-dire que la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand t s'approche d'une valeur finie T est appelée temps d'explosion. Pour cette raison, on appelle le terme source terme d'explosion. Les termes de dissipations sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème. Il est facile de voir qu'en l'absence de termes sources, si la solution existe localement alors on peut toujours la prolonger en une solution globale. Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question centrale dans de nombreux travaux et elle l'est toujours. Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre.

Nous déterminerons le comportement asymptotique de la solution à l'aide de deux méthodes :

Inégalités intégrales : Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur le lemme de V. Komornik [6] ; qui consister à montrer des inégalités de la forme

$$\int_S^\infty E^{1+\lambda}(t)dt \leq CE^\lambda(0)E(S),\ \forall S \geq S_0,$$

pour conclure la décroissance polynomiale.

Fonctionnelle de Lyapunov : Cette méthode est basée principalement sur l'établissement d'une inégalité de la forme

$$V'(t) \leq cV(t) \ \ sur\ [0,T],\ c > 0,$$

Pour montrer l'existence de la solution, nous avons utilisé la méthode de **Faedo-Galerkin**.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans les chapitres ultérieurs.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution dans le cas où le terme source ne dépend que du x et t et $g(u_t) = -\Delta u_t$.

Le troisième chapitre est dévoué au traitement d'un problème hyperbolique non-linéaire avec une dissipation viscoélastique où le noyau h est décroît polynomialement. Un résultat d'existence globale et de décroissance polynomiale est prouvé en utilisant les ensembles stables dans le cas où le terme source est effectif sur tout le domaine et $g(u_t) = 0$.

Dans le dernier chapitre, nous traitons le comportement asymptotique des solutions du problème (1) lorsque le terme source est effectif sur tout le domaine et $g(u_t) = au_t$. On montre que la solution décroît exponentiellement lorsque le noyau qui apparaît dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels et prérequis :

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u\,(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\begin{aligned} \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \text{ et } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2, \\ \triangle u\,(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u\,(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x). \end{aligned}$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$; $(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, pour $k \geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}(\Omega)$; est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.1.1 Espace $\mathbf{L}^p$:

Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$; muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$; on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f\ mesurable\ et \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\};$$

sa norme est

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Remarque 1.1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg dx, \qquad f, g \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions*

$f :]0,T[\to X$, mesurables qui vérifient :

i) Si $1 \leq p < +\infty$, $\left(\int_0^T \|f\|_X^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} := \|f\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty$.

ii) Si $p = +\infty$, $\sup ess_{t \in]0,T[} \|f\|_X := \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} < +\infty$.

Proposition 1.1 *$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p(0,T;X)}$, $1 \leq p \leq +\infty$ est un espace de Banach.*

1.1.2 Espace de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $1 \leq i \leq n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une $i^{\text{ème}}$ dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f_i(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que f_i est la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions ; on écrira

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ ; telque } \partial_i u \in L^p(\Omega),\ 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la $i^{\text{ème}}$ dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ telque } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha,\ |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la Définition 1.1.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha\|_{L^p}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \ \text{ pour } u, v \in H^m(\Omega).$$

On introduit ensuite :

$H_0^1(\Omega) =$ adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$,

$=$ sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions "nulles" sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Définition 1.3 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert X converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v\rangle = \langle u, v\rangle \ \text{ pour tout } v \in X.$$

Remarque 1.3 *1- La limite faible quand elle existe est unique, car si $\langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle$ pour tout $v \in X$, on a pour $v = u_1 - u_2$*

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle = 0$$

donc $u_1 = u_2$. (On peut prendre $v \in X$, car X est un espace de Hilbert, donc $X = X'$ (théorème de Riesz)).

2- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in X$ pour la norme (on dit alors qu'elle converge fortement vers u) alors $u_n \rightharpoonup u$. En effet, on a

$$|\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\|.$$

Ce qui implique que $\langle u_n - u, v\rangle \to 0$ quand, $n \to \infty$.

3- Si X est de dimension finie alors la convergence faible implique la convergence forte. Il suffit de considérer la base $e_1, ..., e_n$ et d'observer que $\langle u, e_i\rangle = u_i$ pour $u \in X$ ce qui montre que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte.

Théorème 1.1 [3]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Hilbert* X*.*

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une sous-suite faiblement convergente.*

Théorème 1.2 [3]

Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert X *est bornée.*

Corollaire 1.1 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge faiblement vers* u *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge fortement vers* v*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle u, v\rangle .$$

Preuve D'après le théorème 1.2, il existe $c \geq 0$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| \leq c$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| \leq |\langle u_n, v_n - v\rangle| + |\langle u_n - u, v\rangle| \leq c\,\|v_n - v\| + |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| ,$$

d'où le résultat. ■

1.1.3 Quelques formules utiles :

Lemme 1.1 *(formule de Green)*

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ *on a*

$$-\int_\Omega \triangle uv dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *est la dérivée normale de* u *à* Γ *dirigée vers l'extérieur.*

Lemme 1.2 *(formule de Leibniz)*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$*, telle que* f *et* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *soient continues sur* $\mathbb{R}^2$*, et soient* a *et* b *deux fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Alors l'intégrale paramétrique (généralisée) F *défini sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy,$$

est dérivable et

$$F'(x) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy.$$

Lemme 1.3 [1, 6] *Soit $E(t)$ une fonction non-croissante et positive sur $[0, \infty[$. Supposons qu'il y a des constantes positives λ, C et S_0 telle que si*

$$\int_S^\infty E^{1+\lambda}(t)dt = CE^\lambda(0)E(S),\ \forall S \geq S_0,$$

alors

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{(S_0 + C)(1+\lambda)}{\lambda t + S_0 + C} \right)^{\frac{1}{\lambda}},\ \forall t \geq 0.$$

Lemme 1.4 *(Gronwall)*

Soit a une fonction non-négative de $L^1(0, \infty)$ et g une fonction de $L^\infty(0, \infty)$ telle que

$$g(t) \leq B + \int_0^t a(s)g(s)ds;$$

alors

$$g(t) \leq B \exp(\int_0^t a(s)ds).$$

1.1.4 Quelques inégalités utiles :

Proposition 1.2 *(inégalité de Young)*

Soient a et b deux réels positifs, et p et q des réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve Cette inégalité provient facilement du fait que la fonction logarithme est concave. En effet, cette dernière propriété, et les propriétés fonctionnelles du logarithme, entrainent que

$$\ln(ab) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

Il suffit ensuite d'appliquer la fonction exponentielle à l'inégalité précédente pour obtenir le résultat voulu. ■

Proposition 1.3 *(inégalité de Young avec ε)*

L'inégalité de Young avec ε (valide pour tout $\varepsilon > 0$), qui donne également

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Preuve On prend

$$(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$4\varepsilon^2 a^2 + b^2 - 4\varepsilon ab \geq 0,$$

ce qui implique

$$4\varepsilon ab \leq 4\varepsilon^2 a^2 + b^2,$$

et par conséquence

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

■

Proposition 1.4 *(inégalité de Hölder)*

Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ et $p, q > 0$ telle que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors on a

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f(x)\|_{L^p} \|g(x)\|_{L^q}.$$

Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Preuve On a d'après l'inégalité de Young

$$\forall a, b \geq 0, \forall p, q > 0, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

prenons $a = \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}}, b = \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}}$, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}} dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}^p} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}^q} dx \ ;$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx &\leq \frac{1}{p}\int_{\Omega}\frac{|f(x)|^{p}}{\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1}}\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}\,dx+\frac{1}{q}\int_{\Omega}\frac{|g(x)|^{q}}{\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}^{q-1}}\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}\,dx,\\
&\leq \frac{\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}}{p\,\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1}}\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}+\frac{\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}}{q\,\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}^{q-1}}\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}^{q},\\
&\leq \|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}\|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}\underbrace{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}_{=1},
\end{aligned}
$$

donc

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f(x)\|_{L^{p}(\Omega)}\|g(x)\|_{L^{q}(\Omega)}.$$

■

Lemme 1.5 *(inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière, alors*

$$\|u\|_2 \leq B\,\|\nabla u\|_2 \;\; ,pour\ u\in H_0^1(\Omega),$$

où

$$B^{-1}=\inf_{\|u\|\neq 0}\frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}.$$

Lemme 1.6 *(inégalité de Sobolev-Poincaré* [15]*).*

Soit p un nombre avec $0\leq p<+\infty$ $(n=1,2)$ ou $0\leq p\leq\frac{4}{n-2}\,(n>2)$, alors il existe une constante $C(p,\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{p+2}\leq C(p,\Omega)\,\|\nabla u\|_2\,,\ pour\ u\in H_0^1(\Omega).$$

1.1.5 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e

$$E(t)\to 0 \text{ lorsque } t\to\infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution

Dans ce chapitre, on donnera le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin et on montrera l'existence et l'unicité de la solution.

2.1 Méthode de Faedo-Galerkin

Définition 2.1 *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*

1) $V_n \subset V$, dim $V_n < \infty$;

2) $V_n \to V$ quand $n \to \infty$.

Au sens suivant : il existe V_n sous-espace dense dans V, tel que pour tout $u \in V_n$, on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : pour tout n, $u_n \in V_n$ et $u_n \to u$ dans V lorsque $n \to \infty$. L'espace V_n s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n.

2.2 Le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin

Soit (P) le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable V. Soit u la solution unique du problème (P).

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_n de V, il convient de définir un problème approché (P_n) dans l'espace de dimension finie (V_n) ayant une unique solution (u_n).

Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Étape 1 : on définit la solution u_n du problème (P_n).

Étape2 : on établit des estimations sur u_n (dites estimation a priori) pour montrer que u_n est uniformément bornée.

Étape3 : par utilisation des résultats que u_n est uniformément bornée, il est possible d'extraire de$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$une sous suite $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}^*}$qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape 2.

Soit alors u la limite obtenue.

Étape4 : on montrer que u est solution du problème (P).

Étape5 : résultats de convergences fortes.

Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u_n(x,t)$ comme combinaison linéaire de fonctions des bases w_i telle que

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} r_{in}(t) w_i, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T].$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Considérons l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u(s)\,ds - \Delta u_t = f(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0,+\infty) \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ vérifier les hypothèse suivantes :

(H1) $h : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ est une fonction bornée de C^1 satisfaisant

$$1 - \int_0^{\infty} h(s)\,ds = \ell > 0,$$

(H2) Il existe deux constantes positives ξ_1, ξ_2 telle que

$$-\xi_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\xi_2 h(t)\,,\ t > 0.$$

Dans ce chapitre, nous allons discuter l'existence locale et l'unicité de la solution d'une équation intégro-différentielle en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Théorème 2.1 *Supposons que la fonction h est continue et que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (2.1) admet une solution unique telle que*

$$\begin{aligned} u &\in C([0,T]\ ;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ u_t &\in C([0,T]\ ;\ L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]\ ;\ H_0^1(\Omega)), \\ u_{tt} &\in L^2([0,T]\ ;\ L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, et V_n l'espace engendré par $w_1, w_2, ..., w_n$, et soit

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} r_{in}(t) w_i,$$

une solution approchée du problème suivant

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_n''(t) w dx + \int_\Omega \nabla u_n(t) \nabla w dx - \int_0^t h(t-s) \int_\Omega \nabla u_n(s) \nabla w dx ds \\ &+ \int_\Omega \nabla u_n'(t) \nabla w dx = \int_\Omega f(x,t) w dx. \text{ pour } w \in V_n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec les conditions initiales

$$u_n(0) = u_{0n} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{in} w_i \to u_0 \ dans \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{2.3}$$

Et

$$u_n'(0) = u_{1n} \equiv \sum_{i=1}^{n} q_{in} w_i \to u_1 \ dans \ L^2(\Omega), \tag{2.4}$$

où

$$p_{in} = \int_\Omega u_0 w_i dx, \quad q_{in} = \int_\Omega u_1 w_i dx, \qquad \text{et } u' = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (2.2) à (2.4)sur l'intervalle $[0, t_n)$, $t_n > 0$ et $t_n < T$.

Ensuite cette solution peut être prolonger à l'intervalle fermé $[0, T]$, en utilisant première estimation ci_dessous :

Étape1 : (estimation a priori)

On pose $w = u'_n(t)$ dans (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|_2^2\right) + \left\|\nabla u'_n(t)\right\|_2^2 \\ &= \int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\nabla u'_n(t)dxds + \int_\Omega f(x,t)u'_n(t)dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\nabla u'_n(t)dxds \\ &\leq \tfrac{1}{2}\left\|\nabla u'_n(t)\right\|_2^2 + \tfrac{\|h\|_{L^1}}{2}\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u_n(s)\right\|_2^2 ds \ ; \end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\int_\Omega f(x,t)u'_n(t)dx \leq \frac{1}{2}\left\|f\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|_2^2. \tag{2.7}$$

Puis, en combinant les relations (2.6), (2.7) avec (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|_2^2\right) + \tfrac{1}{2}\left\|\nabla u'_n(t)\right\|_2^2 \\ &\leq \tfrac{\|h\|_{L^1}}{2}\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u_n(s)\right\|_2^2 ds + \tfrac{1}{2}\left\|f\right\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En intégrant (2.8) sur l'intervalle $]0, t[$, on trouve

$$\begin{aligned} &\left\|u'_n(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla u_n(t)\right\|_2^2 + \int_0^t \left\|\nabla u'_n(t)\right\|_2^2 dt \\ &\leq C_1 + \int_0^t \left[1 + \|h\|_{L^1}^2\right]\left[\left\|u'_n(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla u_n(t)\right\|_2^2\right] dt \ ; \end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$C_1 = \left\|\nabla u_{0n}\right\|_2^2 + \left\|u_{1n}\right\|_2^2 + \int_0^t \left\|f\right\|_2^2 ds.$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Gronwall, on déduit

$$\|u_n'(t)\|_2^2 + \|\nabla u_n(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_n'(t)\|_2^2 \, dt \leq L_1 \; ; \tag{2.10}$$

où L_1 est une constante positive indépendante de $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [0, T]$.

Étape 2 :

On pose $w = u_n''(t)$ dans (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u_n''(t)\|_2^2 + \tfrac{d}{dt}\left(\int_\Omega \nabla u_n(t)\nabla u_n'(t)dx + \tfrac{1}{2}\|\nabla u_n'(t)\|_2^2\right) \\
&= \|\nabla u_n'(t)\|_2^2 + \tfrac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\nabla u_n'(t)dxds\right) \\
&-h(0)\int_\Omega \nabla u_n(t)\nabla u_n'(t)dx - \int_0^t h'(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\nabla u_n'(t)dxds \\
&+\int_\Omega f(x,t)u_n''(t)dx.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young avec ε, et par (H_2) on trouve

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t h'(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\,\nabla u_n'(t)\,dxds \\
&\leq \eta\,\|\nabla u_n'\|_2^2 + \xi_1^2 \tfrac{\|h\|_{L^1}}{4\eta}\int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u_n(s)\|_2^2\,ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de young avec ε à nouveau pour avoir

$$h(0)\int_\Omega \nabla u_n(t)\nabla u_n'(t)dx \leq \eta\,\|\nabla u_n'(t)\|_2^2 + \frac{h(0)^2}{4\eta}\,\|\nabla u_n(t)\|_2^2 \; ; \tag{2.13}$$

où $0 \leq \eta \leq \frac{1}{4}$ suffisamment petite.

Ainsi, en intégrant (2.11) sur $(0,t)$, après compensation de les relations (2.12) et (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\|\nabla u_n'(t)\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^t \|u_n''(t)\|_2^2\,dt \\
&\leq \tfrac{\xi_1^2\|h\|_{L^1}^2 + h(0)^2}{4\eta}\int_0^t \|\nabla u_n(s)\|_2^2\,ds + \int_0^t \|\nabla u_n'(t)\|_2^2\,dt \\
&+2\eta\int_0^t \|\nabla u_n'(t)\|_2^2\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^t \|f\|_2^2 + \int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\nabla u_n'(t)dxds \\
&+\left|\int_\Omega \nabla u_n(t)\nabla u_n'(t)dx\right| + \left|\int_\Omega \nabla u_{0n}\nabla u_{1n}dx\right| \; ;
\end{aligned} \tag{2.14}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young sur le cinquième et le sixième terme en (2.14) et par (2.10), on déduit

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{2}-2\eta\right)\left\|\nabla u_n'(t)\right\|_2^2+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t\left\|u_n''(t)\right\|_2^2dt\\ &\leq C_2+(1+3\eta)\textstyle\int_0^t\left\|\nabla u_n'(s)\right\|_2^2ds\ ;\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}&C_2=\left\|\nabla u_{0n}\right\|_2\left\|\nabla u_{1n}\right\|_2+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t\left\|f\right\|_2^2dt\\ &+\tfrac{\left[\left(\xi_1^2\|h\|_{L^1}^2+h(0)^2+\|h\|_{L^1}^2\|h\|_{L^\infty}\right)T+1\right]L_1}{4\eta\ell}.\end{aligned}$$

Alors, en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\left\|\nabla u_n'(t)\right\|_2^2+\textstyle\int_0^t\left\|u_n''(t)\right\|_2^2dt\leq L_2\ ; \tag{2.15}$$

avec L_2 est une constante positive indépendante de $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $t\in[0,T]$.

Étape 3 :

On pose $w=-\Delta u_n$ dans (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\left\|\Delta u_n(t)\right\|_2^2\right)-\left\|\nabla u_n'(t)\right\|_2^2+\left\|\Delta u_n(t)\right\|_2^2\\ &\leq\tfrac{1}{4\eta}\left\|f\right\|_2^2+\eta\left\|\Delta u_n\right\|_2^2+\textstyle\int_0^t h(t-s)\int_\Omega\Delta u_n(s)\Delta u_n(t)\,dxds\ ;\end{aligned} \tag{2.16}$$

où $o\leq\eta\leq\frac{\ell}{2}$ suffisamment petite.

Comme

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^t h(t-s)\int_\Omega\Delta u_n(s)\Delta u_n(t)\,dxds\\ &\leq\eta\left\|\Delta u_n(t)\right\|_2^2+\tfrac{\|h\|_{L^1}}{4\eta}\textstyle\int_0^t h(t-s)\left\|\Delta u_n(s)\right\|_2^2ds\ ;\end{aligned} \tag{2.17}$$

puis, en intégrant (2.16) et en utilisant (2.15) et (2.17), on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\left\|\Delta u_n(t)\right\|_2^2+(\ell-2\eta)\textstyle\int_0^t\left\|\Delta u_n(s)\right\|_2^2ds\\ &\leq C_3+\tfrac{\|h\|_{L^1}^2}{4\eta}\textstyle\int_0^t\left\|\Delta u_n(s)\right\|_2^2ds\ ;\end{aligned} \tag{2.18}$$

où

$$C_3=\left\|u_{1n}\right\|_2\left\|\Delta u_{0n}\right\|_2+\frac{1}{2}\left\|\Delta u_{0n}\right\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\int_0^t\left\|f\right\|_2^2ds+L_1+L_2T.$$

Ainsi, par le lemme de Gronwall, on trouve

$$\left\|\Delta u_n(t)\right\|_2^2+\textstyle\int_0^t\left\|\Delta u_n(s)\right\|_2^2ds\leq L_3\ ; \tag{2.19}$$

avec L_3 est une constante positive indépendante de $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [0, T]$.

Étape 4 :

Considérons $z_n = u_j - u_n$ tel que $j \geq n$ deux nombres naturels, puis appliquant la même estimation comme dans l'étape 1 et l'étape 3, et en observant que $\{u_{0n}\}$ et $\{u_{1n}\}$ sont deux suites de Cauchy dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ respectivement, on déduit que

$$\|z_n'(t)\|_2^2 + \|\nabla z_n(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla z_n'(t)\|_2^2 \, dt \to 0, \tag{2.20}$$

et

$$\|\Delta z_n\|_2^2 + \int_0^t \|\Delta z_n(s)\|_2^2 \, ds \to 0, \text{ si } n \to \infty \text{ pour tout } t \in [0, T]. \tag{2.21}$$

Par conséquent, de (2.10), (2.15), (2.19), (2.20) et (2.21), on trouve

$$u_i \to u \text{ fortement dans } C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.22}$$

$$u_i' \to u' \text{ fortement dans } C\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{2.23}$$

$$u_i' \to u' \text{ fortement dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.24}$$

$$u_i'' \to u'' \text{ faiblement dans } L^2\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{2.25}$$

Les relations (2.22) à (2.25) sont suffisantes pour passer à la limite en (2.2) pour trouver

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t = f(x,t).$$

Soit maintenant $u^{(1)}, u^{(2)}$ deux solutions du problème (2.1) alors $z = u^{(1)} - u^{(2)}$ vérifie

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \left(z''w + \nabla z \nabla w - \int_0^t h(t-s)\nabla z \nabla w ds + \nabla z' \nabla w\right) dx = 0 & \textit{pour } w \in H_0^1(\Omega), \\ z(x,0) = 0, z'(x,0) = 0, & \textit{pour } x \in \Omega \\ z(x,t) = 0, & \textit{pour } x \in \partial\Omega, \ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Posons $w = z'(t)$ dans (2.26), alors comme dans la dérivation de (2.10) on voit que

$$\begin{aligned} & \|z'\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla z'\|_2^2 \, dt \\ & \leq \int_0^t \left[1 + \|h\|_{L^1}^2\right] \left[\|z'\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2\right] dt. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\|z'\|_2 = \|\nabla z\|_2 = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T] \ ;$$

on aura finalement

$$z = u^{(1)} - u^{(2)} = 0 \ ;$$

d'où l'unicité de la solution. ■

Chapitre 3

Existence globale et décroissance polynomiale

3.1 Introduction

Ce chapitre concerne un cas d'une dissipation viscoélastique. Ici, nous étudions le cas où le noyau h décroit polynomialement. Notamment, nous étudions le problème à valeurs initiales suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u(s)\,ds = |u|^p\,u \text{ dans } \Omega \times [0,+\infty) \ ; \\ u(x,0) = u_0(x)\,,\ \ u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{ dans } \Omega \ ; \\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0,+\infty)\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Ici h représente le noyau de la mémoire. p est une constante positive.

Une question importante du comportement asymptotique des solutions d'une équation de Kirchhoff a été soulevée par Clark dans [4]. Il a été prouvé que la solution décroit de façon exponentielle à l'état d'équilibre à condition qu'on ait une dissipation de la forme u_t qui est une dissipation forte. D'autre part Tatar et Zaraï [14] ont montré la décroissance exponentielle de l'énergie à condition que le noyau h décroisse exponentiellement. Dans ce chapitre, en établissant des conditions suffisantes de stabilité polynomiale de la solution sous une dissipation faible, et en présence d'une source non linéaire par la même technique utilisé par Zaraï dans[15].

3.2 Existence globale

Supposons que le noyau $h(t)$ satisfait les hypothèses générales suivantes :

(**A1**) $h:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ est une fonction bornée de C^{1} satisfaisant

$$1-\int_{0}^{\infty}h\left(s\right)ds=\ell>0.$$

(**A2**) Il existe deux constantes positives k et $\rho\in(2,\infty)$ tels que

$$h'\left(t\right)\leq -kh^{1+\frac{1}{\rho}}\left(t\right),\ t>0.$$

Il résulte de (**A2**)

$$h(t)\leq\frac{K}{(1+t)^{\rho}},\ t\geq 0,$$

pour une certaine constante $K>0$. Par conséquent, nous avons

$$h^{\eta}\in L^{1}\left(0,\infty\right),\ \textit{pour tout}\ \eta>\frac{1}{\rho}.$$

Lemme 3.1 *$E(t)$ est une fonction non-croissante sur $[0,\infty)$ et*

$$E'(t)=\left(h'\square\nabla u\right)(t)-h\left(t\right)\left\|\nabla u\right\|^{2}\leq 0,\ t>0. \tag{3.2}$$

Preuve

En multipliant l'équation (3.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left|u_{t}\right|^{2}dx+\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx-\frac{2}{2+p}\int_{\Omega}\left|u\right|^{p+2}dx\right\}=\int_{\Omega}\nabla u_{t}\int_{0}^{t}h(t-s)\nabla u\left(s\right)dsdx\ ;$$

mais

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\nabla u_{t}\int_{0}^{t}h(t-s)\nabla u\left(s\right)dsdx &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(h\square\nabla u\right)(t)+\frac{1}{2}\left(h'\square\nabla u\right)(t)\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_{0}^{t}h\left(s\right)ds\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx\right\}-\frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx\ ;\end{aligned}$$

donc l'énergie du problème (3.1) est définie par

$$E(t) = \|u'\|^2 + (1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u(t)\|^2 + (h \Box \nabla u)(t) - \frac{2}{p+2} \|u\|_{p+2}^{p+2}, \ t > 0 \ ; \tag{3.3}$$

où

$$(h \Box \nabla u)(t) = \int_0^t h(t-s) \int_\Omega |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 \, dx ds \ ;$$

et

$$E'(t) = (h' \Box \nabla u)(t) - h(t) \|\nabla u\|^2 \leq 0.$$

■

Maintenant, soit

$$F(t) = (1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u\|^2 + (h \Box \nabla u)(t) - \frac{2}{p+2} \|u\|_{p+2}^{p+2} \ ; \tag{3.4}$$

alors

$$E(t) = \|u'\|^2 + F(t). \tag{3.5}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W} = \left\{ u \ / \ I(u(t)) := \ell \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} > 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 3.2 *Soit u la solution de (3.1). Si $u_0 \in \mathcal{W}$ et*

$$\alpha = \frac{C(p, \Omega)^{p+2}}{\ell^{\frac{p+2}{2}}} \left(\frac{p+2}{p} E(0) \right)^{p/2} < 1, \tag{3.6}$$

alors $u(t) \in \mathcal{W}$, pour chaque $t \in [0, T]$. Ici, $C(p, \Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré.

Preuve

Soit $u_0 \in \mathcal{W}$, alors $I(u_0) > 0$. Par continuité, ce qui implique l'existence de $T_m \leq T$ telle que $I(u(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_m]$. Par conséquent, à partir de (3.4), (3.5) et le lemme 3.1, nous avons

$$\ell \|\nabla u\|^2 \leq (1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u\|^2 \leq \frac{p+2}{p} F(t) \leq \frac{p+2}{p} E(t) \leq \frac{p+2}{p} E(0). \tag{3.7}$$

car

$$\begin{aligned} F(t) &\geq (1-\textstyle\int_0^t h(s)ds)\left\|\nabla u\right\|^2+(h\Box\nabla u)(t)-\dfrac{2}{p+2}\ell\left\|\nabla u\right\|^2 \ ; \\ &\geq \dfrac{p}{p+2}\left\{(1-\textstyle\int_0^t h(s)ds)\left\|\nabla u\right\|^2\right\}+(h\Box\nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

La relation (3.7) avec le lemme 1.6, impliquent que, pour $t\in[0,T_m]$,

$$\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\leq C\left(p,\Omega\right)^{p+2}\left\|\nabla u\right\|^{p+2}\leq\frac{C\left(p,\Omega\right)^{p+2}}{\ell}\left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^{p/2}\ell\left\|\nabla u\right\|^2.$$

C'est, par notre hypothèse sur α

$$\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\leq\alpha\ell\left\|\nabla u\right\|^2<\alpha(1-\int_0^t h\left(s\right)ds)\left\|\nabla u\right\|^2<\ell\left\|\nabla u\right\|^2,\ \forall t\in\left[0,T_m\right]. \tag{3.9}$$

Donc

$$I(t)>0,\forall t\in\left[0,T_m\right],$$

ce qui signifie que $u(t)\in\mathcal{W}$, $\forall t\in\left[0,T_m\right]$. En répétant la procédure, T_m s'étend à T. ■

Théorème 3.1 *Supposons que $u_0\in\mathcal{W}$ et* (3.6) *est vérifiée, alors la solution du problème* (3.1) *est globale en temps.*

Preuve

Il suffit de montrer que $\left\|u'\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2$ est uniformément bornée en t. En vertu du lemme 3.1 et le lemme 3.2 et comme $I(t)>0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t)\geq\left\|u'\right\|^2+(1-\textstyle\int_0^t h(s)ds)\left\|\nabla u\right\|^2-\dfrac{2}{p+2}\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\ ; \\ &\geq \left\|u'\right\|^2+\ell\left\|\nabla u\right\|^2-\dfrac{2}{p+2}\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}+\dfrac{2\ell}{p+2}\left\|\nabla u\right\|^2-\dfrac{2\ell}{p+2}\left\|\nabla u\right\|^2\ ; \\ &\geq \left\|u'\right\|^2+\dfrac{2}{p+2}I(t)+\dfrac{p\ell}{p+2}\left\|\nabla u\right\|^2\ ; \\ &\geq \left\|u'\right\|^2+\dfrac{p\ell}{p+2}\left\|\nabla u\right\|^2\ ; \\ &\geq \min\left\{1,\dfrac{p\ell}{p+2}\right\}(\left\|u'\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2)\ ; \\ &\geq c\left(\left\|u'\right\|^2+\left\|\nabla u\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq cE(0) \ \forall t > 0$$

pour une constante positive c. ■

3.3 Décroissance polynomiale

Dans cette section, nous allons démontrer la décroissance polynomiale de solutions du problème (3.1).

Proposition 3.1 *Supposons $u_0 \in \mathcal{W}$ et (3.6) est vérifiée, alors on a pour tout $T \geq S \geq 0$*

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left\{(1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u(t)\|^2 - \frac{2}{p+2} \|u\|_{p+2}^{p+2}\right\} dt$$
$$\leq C_1 E^{\frac{m}{\rho}}(0) E(S),$$

pour une constante positive C_1.

Preuve

Tout d'abord, on multiplie les deux côtés de l'équation (3.1) par $E^{\frac{m}{\rho}}(t)u$ et en intégrant sur $\Omega \times [S,T]$, pour obtenir

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\{(1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\} dt \\ &= -\textstyle\int_S^T \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) u'' u dx dt + \int_S^T \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) \nabla u(t) \int_0^t h(t-s) [\nabla u(s) - \nabla u(t)]\, ds dx dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} -\int_S^T \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) u'' u dx dt &= \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \|u'\|^2 dt - \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) u'(t) u(t) \Big|_S^T dx \\ &\quad + \int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)' \int_\Omega u'(t) u(t)\, dx dt \ ; \end{aligned}$$

et (3.10) devient

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u(t)\|^2 dt = \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \|u'\|^2 dt - \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) u'(t) u(t) \Big|_S^T dx \\ &\quad + \textstyle\int_S^T \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t) \nabla u(t) \int_0^t h(t-s) [\nabla u(s) - \nabla u(t)]\, ds dx dt + \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \|u\|_{p+2}^{p+2} dt \\ &\quad + \textstyle\int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)' \int_\Omega u'(t) u(t)\, dx dt. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous commençons par le terme mémoire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young avec ε, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)\nabla u\,(t) \int_0^t h\,(t-s)\,[\nabla u\,(s) - \nabla u\,(t)]\,dsdxdt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u(t)\| \left[\int_\Omega \left(\int_0^t h\,(t-s)\,|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)|\,ds\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} dt\,; \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left(\int_0^t h\,(t-s)\,\|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)\|\,ds\right)^2 dt \\
&+\frac{\varepsilon_0}{2} \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt\,;
\end{aligned} \tag{3.12}$$

pour certains $\varepsilon_0 > 0$.

Rappelant que $h'\,(t) \leq -kh^{1+\frac{1}{\rho}}\,(t)$, et en utilisant (3.2), nous voyons que

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \int_\Omega \left(\int_0^t h\,(t-s)\,|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)|\,ds\right)^2 dxdt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left(\int_0^t h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\,(t-s)\,h^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}\,(t-s)\,\|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)\|\,ds\right)^2 dt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{\rho}}\,(s)\,ds\right) \left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}\,(t-s)\,\|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)\|^2\,ds\right) dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty h^{1-\frac{1}{\rho}}\,(s)\,ds\right) \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}\,(t-s)\,\|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)\|^2\,ds\right) dt \\
&\leq -\frac{\bar{h}_\rho}{k} \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \left(\int_0^t h'\,(t-s)\,\|\nabla u\,(s) - \nabla u(t)\|^2\,ds\right) dt \\
&\leq -\frac{1}{k}\bar{h}_\rho \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)E'(t)dt \leq \frac{\bar{h}_\rho}{k} E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Où

$$\int_0^\infty h^{1-\frac{1}{\rho}}\,(s)\,ds = \bar{h}_\rho.$$

Par conséquent, (3.12) et (3.13) il résulte

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t) \int_\Omega \int_0^t h\,(t-s)\,\nabla u\,(t)\,[\nabla u\,(s) - \nabla u\,(t)]\,dsdxdt \\
&\leq \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt + \frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k} E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ensuite, de (3.8) on a

$$\|\nabla u\|^2 \leq \frac{p+2}{p(1-\int_0^t h\,(s)\,ds)}E(t)\,; \tag{3.15}$$

et par conséquent, à l'aide de l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|^2 \leq B\,\|\nabla u\|^2 \leq \frac{(p+2)B}{p\ell}E(t)\,; \tag{3.16}$$

où B est la constante de Poincaré.

Par application de l'inégalité (3.16) et puisque $F(t) \geq 0$, il vient

$$\left|\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\,\|u'\|^2 + \frac{(p+2)B}{2p\ell}E(t) \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(t). \tag{3.17}$$

Par ailleurs, à partir de (3.17) et le fait que $E(t)$ est non-croissante, on déduit que

$$-\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\,u(t)\Big|_S^T dx \leq \left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)' \int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dxdt \leq -\int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)' \left|\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dx\right| dt \\ &\leq -\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)\int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)' E(t)dt \leq \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.19}$$

De (3.9) on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt \leq \alpha\int_S^T \ell E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt \\ &< \alpha\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tenant compte des estimations (3.14) et (3.18) à (3.20) dans (2.11), il vient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ &\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'\|^2\,dt + \tfrac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ &+\alpha\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt + \tfrac{3}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ &+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Si on pose $\varepsilon_0 = (1-\alpha)(1-\int_0^\infty h(s)\,ds)$, alors il vient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ &\leq \tfrac{2}{1-\alpha}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'\|^2\,dt \\ &+\tfrac{2}{1-\alpha}\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{3(p+2)B}{2p\ell}+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Maintenant, on définit

$$\begin{aligned}(h \diamond u)(t) &= \int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right] ds,\\ (h \diamond \nabla u)(t) &= \int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right] ds,\end{aligned}$$

On multiplie les deux membres de l'équation (3.1) par $E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right] ds$ et en intégrant sur $\Omega \times [S,T]$, on trouve

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u''(h\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \Delta u(h\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p u(h\diamond u)(t)dxdt.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u''(h\diamond u)(t)dxdt = E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dx\Big|_S^T\\ &\textstyle-\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dxdt-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h'\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2 dt.\end{aligned}$$

Et une substitution de (3.23) donne

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2 dt=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p u(h\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle-E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dx\Big|_S^T+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h'\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle+\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dxdt+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \Delta u(h\diamond u)(t)dxdt\\ &\textstyle-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt.\end{aligned}\tag{3.24}$$

En outre, en vertu de (3.5) et (3.8), nous avons

$$\begin{aligned}\textstyle\left|\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dx\right| &\textstyle\le \frac{\varepsilon_1}{2}\|u'(t)\|^2+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega\left((h\diamond u)(t)\right)^2 dx\\ &\textstyle\le \frac{\varepsilon_1}{2}E(t)+\frac{B}{2\varepsilon_1}\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)(h\Box\nabla u)(t)\\ &\textstyle\le \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\frac{B(1-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E(t)\le\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\frac{B(1-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E(S),\ \forall t\ge S.\end{aligned}$$

pour certains $\varepsilon_1 > 0$ et $t \geq S$. D'où,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right)-u\left(t\right)\right]dsdx\Big|_S^T \\ &\leq \left(\varepsilon_1 + \tfrac{B(1-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.25}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)\left(h' \diamond u\right)(t)dxdt \leq \tfrac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt \\ &+\tfrac{1}{2\varepsilon_2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right|ds\right)^2 dxdt\,; \end{aligned} \tag{3.26}$$

et pour $\varepsilon_2 > 0$

$$\begin{aligned} &\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)\left(h\diamond u\right)(t)dxdt \\ &\leq -\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \tfrac{B(1-\ell)}{\varepsilon_1}\right)\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'E(t)dt \\ &\leq -\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \tfrac{B(1-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Puisque $h'(t) \leq 0$, la relation (3.2) implique que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\left(\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right|ds\right)^2 dx \\ &\leq -\int_0^t h'\left(s\right)ds\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left\|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right\|^2 ds \\ &\leq -Bh(0)\left(h'\Box\nabla u\right)(t) \leq -Bh(0)E'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)\int_0^t h'\left(t-s\right)\left[u\left(s\right)-u\left(t\right)\right]dsdxdt \\ &\leq \tfrac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt + \tfrac{h(0)B}{2\varepsilon_2}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.28}$$

De plus

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \Delta u\left(h\diamond u\right)(t)dxdt = -\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \nabla u\left(h\diamond\nabla u\right)(t)dxdt. \tag{3.29}$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} &-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u(s)ds\right)\left(h\diamond u\right)(t)dxdt \\ &=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\nabla u(s)ds\right)\left(h\diamond\nabla u\right)(t)dxdt \\ &=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h\left(s\right)ds\right)\int_\Omega\nabla u(t)\left(h\diamond\nabla u\right)(t)dxdt \\ &+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\left(h\diamond\nabla u\right)(t)\right)^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

D'où, grâce à (3.13) on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt+\frac{\bar{h}_\rho}{k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Le premier terme du membre droit de (3.31) avec le premier terme du membre droit de (3.29), peut être estimée comme suite

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds-1\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(1-\int_0^t h(s)\,ds\right)\left|\int_\Omega \nabla u(t)\,(h\diamond\nabla u)(t)dx\right|dt \\
&\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left|\int_\Omega \nabla u(t)\,(h\diamond\nabla u)(t)dx\right|dt.
\end{aligned}
$$

Et par (3.14) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds-1\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt \\
&\leq \frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_3 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Maintenant, par (3.29) à (3.32) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \Delta u\,(h\diamond u)(t)dxdt \\
&-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt \\
&\leq \bar{h}_\rho\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2\varepsilon_3 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)+\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

En plus de cela, il est facile de voir que la relation (3.13) implique que

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p\,u\,(h\diamond u)(t)dxdt \\
&\leq \int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^{2p+2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega((h\diamond u)(t))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt \\
&\leq \frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{\rho}}(s)\,ds\right) \\
&\times\left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\,[u(s)-u(t)]^2\,ds\right)dxdt \\
&\leq \frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{B\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_3}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Pour estimer le terme $\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\,dt$, nous utilisons l'inégalité de Sobolev-Poincaré

$$\begin{aligned}&\|u\|_{2p+2}^{2p+2} \le C_*\,(p,\Omega)^{2p+2}\,\|\nabla u\|_2^{2p+2}\\ &\le C_*\,(p,\Omega)^{2p+2}\left(\tfrac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^p\|\nabla u\|^2 =: \beta\,\|\nabla u\|^2\,.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Ici $C_*(p,\Omega)$ est la constante Sobolev-Poincaré, avec $0 \le p < +\infty$ $(n = 1, 2)$ or $0 \le p \le \frac{2}{n-2}$ $(n > 2)$

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p\,u\,(h\diamond u)\,(t)dxdt\\ &\le \tfrac{\beta\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt + \tfrac{B\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_3 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Maintenant, en combinant les relations (3.25), (3.28), (3.33) et (3.36) avec (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h\,(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2\,dt\\ &\le CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'(t)\|^2\,dt\\ &+\varepsilon_3\left(\tfrac{1+\beta}{2}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt,\end{aligned}$$

où

$$C = \bar{h}_\rho\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{2\varepsilon_3 k} + \frac{B}{2\varepsilon_3 k} + \frac{2\varepsilon_1}{\bar{h}_\rho} + \frac{2B(1-\ell)}{\varepsilon_1\bar{h}_\rho} + \frac{h(0)B}{2\varepsilon_2\bar{h}_\rho}\right]\;;$$

or

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h\,(s)\,ds - \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\|u'(t)\|^2\,dt\\ &\le CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + \varepsilon_3\left(\tfrac{1+\beta}{2}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Il est clair que

$$\int_0^S h\,(s)\,ds \ge \int_0^{S_0} h\,(s)\,ds > 0,\;\; S \ge S_0\,;$$

et en choisissant

$$\varepsilon_2 < \int_0^{S_0} h\,(s)\,ds =: h_0,$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int_0^{S_0} h\,(s)\,ds\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'(t)\|^2\,dt\\ \le\;\; &CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + (1+\beta)\,\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt \leq \frac{2C}{\int_0^{S_0} h(s)ds} E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\ &+\varepsilon_3\left(\frac{1+\beta}{h_0}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2 dt.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Mettons l'estimation (3.38) dans (3.22) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt\\ &\leq \frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{3}{2}+\frac{3(p+2)B}{2p\ell}+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)+\frac{4C}{(1-\alpha)h_0}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\ &+\frac{2\varepsilon_3(1+\beta)}{(1-\alpha)h_0}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2 dt.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le choix $\varepsilon_3=\frac{(1-\alpha)h_0\ell}{4(1+\beta)}$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt\\ &\leq \frac{4}{1-\alpha}\left[\frac{2C}{h_0}+\frac{3}{2}+\frac{3(p+2)B}{2p\ell}+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right]E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\ &\leq \frac{4\tilde{C}}{1-\alpha}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\,;\end{aligned} \tag{3.40}$$

où $\tilde{C}=\frac{2C}{h_0}+\frac{3}{2}+\frac{3(p+2)B}{2p\ell}+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}$.

Ensuite, les relations (3.38) et (3.40) impliquent

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt \leq \frac{2C}{h_0}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\ &+\frac{1-\alpha}{4}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u\right\|^2 dt \leq 2\tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned} \tag{3.41}$$

Finalement, en vertu de (3.9) et (3.40), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{2}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2} dt \leq \frac{2\alpha}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u\right\|^2 dt\\ &\leq \frac{8\alpha\tilde{C}}{(p+2)(1-\alpha)}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Donc, en combinant (3.40) à (3.42) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(1-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt\\ &-\frac{2}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2} dt \leq \left(2+\frac{4}{1-\alpha}+\frac{8\alpha}{(p+2)(1-\alpha)}\right)\tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\ &\leq C_1 E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned} \tag{3.43}$$

■

Théorème 3.2 *Supposons* $u_0 \in \mathcal{W}$ *et* (3.6) *est vérifiée, alors nous avons l'estimation suivant*

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{c(1+\rho)}{t+c\rho}\right)^{\rho}, \qquad \forall t \geq 0$$

pour une constante positive c.

Preuve

Tout d'abord, l'application de l'inégalité de Hölder, nous donne

$$\begin{aligned}
&(h\Box\nabla u)(t) = \textstyle\int_0^t h^{\frac{m-1}{\rho+m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^{\frac{2m}{\rho+m}} \\
&\times h^{1-\frac{m-1}{\rho+m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^{\frac{2\rho}{\rho+m}}ds \\
&\leq \left(\textstyle\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times \left(\textstyle\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}} \ ;
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\Box\nabla u)(t)\,dt \\
&\leq \textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times \left(\textstyle\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}} dt.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à nouveau pour avoir

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\Box\nabla u)(t)\,dt \\
&\leq \left(\textstyle\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times \left(\textstyle\int_S^T \int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

En vertu de la condition $h'(t) \leq -kh^{1+\frac{1}{\rho}}(t)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\Box\nabla u)(t)\,dt\\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}}\\
&\times\left(\tfrac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\left(-\int_S^T\int_0^t h'(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\;;\\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}}\\
&\times\left(\tfrac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\left(-\int_S^T E'(t)dt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\;;\\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}}\\
&\times\left(\tfrac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}E^{\frac{\rho}{\rho+m}}(S).
\end{aligned}$$

En outre, par l'inégalité de Young, nous avons pour $\varepsilon_4 > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\Box\nabla u)(t)\,dt\\
&\leq C\left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt\right)^{\frac{m}{\rho+m}}\\
&\times\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho+m}}E^{\frac{\rho}{\rho+m}}(S)\,;\\
&\leq C(\varepsilon_4)\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho}}E(S)\\
&+\varepsilon_4\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt\,;
\end{aligned}\tag{3.45}$$

pour certaine constante $C(\varepsilon_4) > 0$.

Donc, en combinant (3.43) et (3.45) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt \leq C_1E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)+\varepsilon_4\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt\\
&+C(\varepsilon_4)\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho}}E(S)\,;
\end{aligned}\tag{3.46}$$

or

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt\\
&\leq C_2\left(E^{\frac{m}{\rho}}(0)+\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho}}\right)E(S)\,;
\end{aligned}\tag{3.47}$$

pour certaine constante positive C_2.

D'autre part, nous avons quand $m = 2$

$$\int_0^t h^{\frac{1}{2}}(t-s)\left\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right\|^2 ds \leq \frac{2(p+2)}{p\ell}\int_0^t h^{\frac{1}{2}}(t-s)\left(E(s)+E(t)\right)ds$$

$$\leq \frac{4(p+2)}{p\ell}\int_0^t h^{\frac{1}{2}}(s)\,ds E(0), \qquad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\int_S^T E^{1+\frac{2}{\rho}}(t)dt \leq C_3 E^{\frac{2}{\rho}}(0)E(S), \qquad \forall S \geq S_0. \tag{3.48}$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.3 avec $\lambda = \frac{2}{\rho}$, on obtient

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{(S_0 + C_3)(1+\lambda)}{\lambda t + S_0 + C_3}\right)^{\frac{\rho}{2}}, \ \forall t \geq 0.$$

Maintenant, si $m = 1$, à partir de

$$\int_0^t \left\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right\|^2 ds \leq 2\frac{p+2}{p\ell}\left(\int_0^t E(s)ds + \sup_{t\geq 0} tE(t)\right) \leq C_3 E(0),\ \forall t \geq 0$$

et (3.47), nous pouvons écrire

$$\int_S^T E^{1+\frac{1}{\rho}}(t)dt \leq C_4 E^{\frac{1}{\rho}}(0)E(S), \qquad \forall S \geq S_0.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.3 avec $\lambda = \frac{1}{\rho}$, on obtient

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{(S_0 + C_4)(1+\rho)}{t + \rho(S_0 + C_4)}\right)^{\rho}, \ \forall t \geq 0.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Chapitre 4

Décroissance exponentielle

4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'une équation intégro-différentielle. On montrera que l'énergie du système décroit exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, en présence d'une dissipation linéaire, pourvu que le noyau dans le terme mémoire est aussi exponentiellement décroissant. De nouvelles hypothèses seront considérées.

Nous considèrerons le problème de l'équation des ondes suivante avec un terme non-local en temps et une dissipation interne faible l'article de Medjden et Tatar [6].

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t - \Delta u + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds = \left|u\right|^p u \ \text{ dans } \Omega \times [0,+\infty)\ ; \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) \text{ dans } \Omega\,; \\ u\left(x,t\right) = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0,+\infty)\ ; \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ sera fixée plus loin, p est une constante positive.

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [5] pour la discussion de l'origine de ces modèles). Dans [3] , le problème a été considéré sur un domaine étoilé avec une dissipation non linéaire $g(u_t)$. D'autre part, le taux de convergence vers zéro n'a pas été trouvé. Dans tous ces travaux, l'hypothèse suivante sur le terme noyau

$$h'(t) \leq -\eta h(t), \forall t \geq 0$$

a été imposée.

Dans ce travail, on donnera un taux de convergence explicite pour la solution du problème (4.1), c'est l'objectif de ce chapitre. On montrera que la solution est exponentiellement asymptotiquement stable pour vu que le noyau qui apparaît dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro. De plus, nous remplaçons l'hypothèse ci-dessus qui est fréquemment utilisée par les conditions

$$h'(t) \leq 0 \text{ et } e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0,\infty), \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Aucune autre condition sur la dérivée de $h(t)$ n'a été supposée. Notre méthode a deux avantages : Elle est simple (aucune machinerie lourde n'est nécessaire) et ça couvre un certain nombre de noyaux qui n'ont pas été traités précédemment (par exemple, les noyaux constants sur des sous-intervalles). A cette fin, une nouvelle fonctionnelle de type Lyapunov a été établie. En effet, nous modifierons l'énergie associée au système en ajoutant un terme convenablement choisi, ce qui nous permet d'éliminer certains termes indésirables.

4.2 Comportement asymptotique :

Supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$\begin{aligned}
&(A1) \quad h'(t) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+,\\
&(A2) \quad 1 - \textstyle\int_0^\infty h(s)ds = \ell > 0,\\
&(A3) \quad e^{\alpha t}h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour} \quad \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W}=\left\{u\ /\ I(u(t)):=\ell\left\|\nabla u\right\|^{2}-\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}>0\right\}\cup\{0\}.$$

D'après le lemme 3.2, $u(t)\in\mathcal{W}$, pour chaque $t\in[0,T]$.

Nous devons montrer que l'énergie classique associée à (4.1) est sous la forme

$$E(t)=\int_{\Omega}(\left|u_t\right|^2+\left|\nabla u\right|^2-\frac{2}{p+2}\left|u\right|^{p+2})dx.$$

On a

$$u_{tt}+au_t-\Delta u+\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds=\left|u\right|^p u,$$

multipliant les deux membres de l'équation par u_t et intégrant sur Ω,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2dx+a\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2dx-\int_{\Omega}u_t\Delta udx+\int_{\Omega}u_t\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)dsdx=\frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|u\right|^{p+2},$$

par intégration par partie, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2dx-\int_{\Omega}\nabla u_t\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx+a\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2dx=\frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|u\right|^{p+2},$$

alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(\left|u_t\right|^2+\left|\nabla u\right|^2-\frac{2}{p+2}\left|u\right|^{p+2})dx=2\int_{\Omega}\nabla u_t\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx-2a\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2dx,$$

donc

$$E(t)=\int_{\Omega}(\left|u_t\right|^2+\left|\nabla u\right|^2-\frac{2}{p+2}\left|u\right|^{p+2})dx.$$

Dans cette section, nous avons traités le cas $a>0$, supposons que $a=1$.

Théorème 4.1 *Supposons $u_0\in\mathcal{W}$ et (3.6) est vérifiée, et si les hypothèses $(A1)$ à $(A3)$ sont satisfaites, alors l'énergie de (4.1) décroit de façon exponentielle vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives C et $\beta>0$ telles que*

$$E(t)\leq Ce^{-\beta t},\quad t\geq 0.$$

Preuve

La différentiation de $E(t)$ par rapport à la variable t donne

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + 2\int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx. \tag{4.2}$$

Posons

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_{\Omega}\int_0^t h(t-s) \left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dsdx,$$

en dérivant $(h\Box\nabla u)$ par rapport à t, et en utilisant la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) &= \int_{\Omega}\int_0^t h'(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dsdx + \int_{\Omega}\int_0^t 2h(t-s)\nabla u_t(t)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right| dsdx, \\
&= (h'\Box\nabla u)(t) + 2\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\nabla u_t\,(t)\,\nabla u\,(t)\,dsdx - 2\int_{\Omega}\nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u\,(s)\,dsdx \\
&\quad + h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \\
&= (h'\Box\nabla u)(t) - 2\int_{\Omega}\nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u\,(s)\,dsdx + \frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \, ds\right\} \\
&\quad - h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) &= -2\int_{\Omega}\nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u\,(s)\,dsdx + (h'\Box\nabla u)(t) \\
&\quad + \frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \, ds\right\} - h(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Alors, on définit

$$e(t) = \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + (1 - \int_0^t h(s)ds)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + (h\Box\nabla u)(t) - \frac{2}{p+2}\int_{\Omega} |u|^{p+2} \, dx.$$

Et

$$e'(t) = -2\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t). \tag{4.4}$$

Remarquons que de l'hypothèse $(A1)$ on a

$$\acute{e}(t) \leq 0 \quad, t \geq 0.$$

De plus, il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$E(t) \leq Me(t) \quad , t \geq 0. \tag{4.5}$$

Car

$$e(t) = \|u_t\|_2^2 + (1 - \int_0^t h(s)ds) \|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 \, dsdx - \frac{2}{p+2} |u|^{p+2},$$

et comme

$$\int_\Omega \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 \, dsdx \geq 0,$$

on a

$$e(t) \geq \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}(1 - \int_0^t h(s)ds) \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+2} |u|^{p+2}.$$

D'après $(A2)$ on a

$$1 - \int_0^t h(s)ds > \ell.$$

Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$E(t) \leq Me(t), \qquad t \geq 0.$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles

$$\Phi(t) = \int_\Omega u_t u dx,$$

et

$$\Psi(t) = \int_\Omega \int_0^t H_\alpha(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, dsdx,$$

où

$$H_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int_t^\infty h(s) e^{\alpha s} ds \quad , \alpha > 0.$$

En utilisant l'équation (4.1) de notre problème, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_t u) dx, \\
&= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_\Omega u_{tt} u dx, \\
&= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \int_\Omega u_t u dx + \int_\Omega u \Delta u dx - \int_\Omega u \int_0^t h(t-s) \Delta u\,(s)\, dsdx + \int_\Omega |u|^p \, u^2 dx, \\
&= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) dsdx + \int_\Omega |u|^{p+2} \, dx.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)^2 dx,\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t (h(t-s))^{\frac{1}{2}}\,(h(t-s))^{\frac{1}{2}}\,\nabla u\,(s)\,ds\right)^2 dx,\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)ds\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx,\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1-\ell}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi\,(t)}{dt} &\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx - \int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\\
&\quad + \frac{1-\ell}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx + \int_\Omega |u|^{p+2}\,dx,\\
&\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx - \int_\Omega u_t u dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\\
&\quad + \frac{1-\ell}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx + \int_\Omega |u|^{p+2}\,dx. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

En dérivant la fonctionnelle $\Psi\,(t)$ par rapport à t et en utilisant la formule de Leibniz, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi\,(t)}{dt} &= \int_\Omega H_\alpha(0)\,|\nabla u(t)|^2\,dx + \int_\Omega \int_0^t |\nabla u(s)|^2\,\frac{d}{dt}H_\alpha(t-s)dsdx,\\
&= \int_\Omega \int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\,|\nabla u(s)|^2\,dx + \int_\Omega \int_0^t |\nabla u(s)|^2\\
&\quad (-\alpha H_\alpha(t-s) + e^{-\alpha(t-s)}(-h(t-s)e^{\alpha(t-s)}))dsdx,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d\Psi\,(t)}{dt} = \left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \alpha\Psi\,(t) - \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx. \qquad (4.7)$$

On introduit maintenant la fonctionnelle

$$V(t) = e(t) + \varepsilon\Phi(t) + \eta\Psi\,(t)\,,$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$. Des relations ci-dessus (4.4), (4.5) et (4.7) on trouve

$$\begin{aligned} V'(t) &= e'(t) + \varepsilon\Phi'(t) + \eta\Psi'(t), \\ &\leq -2\int_\Omega |u_t|^2 \,dx - h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx + (h'\square\nabla u)(t) + \varepsilon\int_\Omega |u_t|^2 \,dx - \varepsilon\int_\Omega u_t u dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx + \varepsilon\int_\Omega |u|^{p+2} \,dx + \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx \\ &\quad -\alpha\eta\Psi(t) - \eta\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -(2-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2 \,dx - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) \\ &\quad + (h'\square\nabla u)(t) - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx + \varepsilon\int_\Omega |u|^{p+2} \,dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si on choisit α tel que

$$\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds < \frac{1}{1-\ell},$$

alors, on peut choisir η tel que

$$\frac{\varepsilon(1-\ell)}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)^{-1},$$

par conséquent, les coefficients de $\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx$ et $\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx$ dans (4.8) sont négatifs.

On a

$$\begin{aligned} (h\square\nabla u)(t) &= \int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 \,dsdx, \\ &\leq \int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(t)|^2 \,dsdx + \int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx \\ &\quad +2\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(t)|\,|\nabla u(s)| \,dsdx, \\ &\leq 2(1-\ell)\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx + 2\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -(2-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2 \,dx - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) \\ &\quad - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2 \,dsdx + \varepsilon\int_\Omega |u|^{p+2} \,dx \\ &\quad +\mu(h\square\nabla u)(t) - \mu(h\square\nabla u)(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}V'(t) &\leq -(2-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2(1-\ell)\mu\right]\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\ &\quad -\left(\eta - \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2} - 2\mu\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx + \varepsilon\int_\Omega |u|^{p+2}\,dx - \mu\,(h\Box\nabla u)(t).\end{aligned}$$

Finalement, nous choisissons μ suffisamment petite telle que le coefficient entre crochets soit positif.

Donc

$$\begin{aligned}V'(t) &\leq -\varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2(1-\ell)\mu\right] \\ &\quad \frac{1}{(1-\int_0^t h(s)ds)}(1-\int_0^t h(s)ds)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - (2-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\ &\quad -\mu\,(h\Box\nabla u)(t) - \frac{\varepsilon(p+2)}{2}\left(-\frac{2}{p+2}\right)\int_\Omega |u|^{p+2}\,dx, \\ &\leq -\varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) \\ &\quad -\min\left\{\frac{\left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2(1-\ell)\mu\right]}{\ell}, (2-\varepsilon), \mu, \frac{(p+2)\varepsilon}{2}\right\} e(t),\end{aligned}$$

si on pose : $\theta = \min\left\{\frac{\left[\frac{\varepsilon}{2}-\eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)-2(1-\ell)\mu\right]}{\ell}, (2-\varepsilon), \mu, \frac{(p+2)\varepsilon}{2}\right\}$,

donc

$$\begin{aligned}V'(t) &\leq -\varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \theta e(t), \\ &\leq -\min\{\varepsilon, \alpha\eta, \theta\}\,V(t), \\ &\leq -\beta V(t).\end{aligned}$$

Par intégration sur $[0,t]$ on obtient

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}, \qquad t \geq 0.$$

De la définition de $V(t)$ et de $e(t)$, on conclut l'assertion du Théorème 4.1. La preuve est ainsi achevée. ■

Conclusion

Dans notre travail qui a pour objet une équation des ondes intégro-différentiells, nous avons traité quelques aspects importants du point de vue mathématique :

- L'existence locale,
- L'existence globale,
- L'étude du comportement asymptotique des solutions pour des temps infinis (décroissance polynomiale et décroissance exponentielle).

D'autres aspects méritent également d'être explorés :

- Explosion des solutions.
- Donner une approximation numérique. . . .

Bibliographie

[1] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, J. Funct. Anal. (2008).

[2] S. Berrimi and S. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonl. Anal. T. M. A. 64 (2006), 2314-2331.

[3] M. M. Cavalcanti, M. Aassila and J. A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Opt.,38 (5) (2000), 1581–1602.

[4] H. R. Clark, Asymptotic and smoothness properties of a nonlinear equation with damping, Communication and Applied Analysis, 4 (2000),N0 3, pp. .321-337

[5] H. Engler, Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 1–38.

[6] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Res. Appl. Math., Masson/Wiley, Paris/Chichester, 1994.

[7] T. Matsuyama and R. Ikehata, On global solutions and energy decay for the wave equation of Kirchhoff type with nonlinear damping terms, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), no. 3, 729–753.

[8] M. Medjden and N-e, Tatar, On the wave equation with a temporal non-local term. Dynamic Systems and Applications 16 (2007) 665-672

[9] R. Narashinham, Nonlinear vibrations of elastic strings, Journal of Sound and Vibration, 8(1968), pp. 134-136.

[10] K. Nishihara and Y. Yamada, On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equations with dissipative terms, Funkcial. Ekvac., 33 (1990), 151-159.

[11] M. Nakao, Decay of solutions of some nonlinear evolution equation, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977), 542-549.

[12] M. Renardy, W. J. Hrusa and J. A. Nohel, "Mathematical Problems in Viscoelasticity," in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics No. 35, John Wiley and Sons, New York 1987.

[13] S. T. Wu and L. Y. Tsai, On global solutions and blow-up solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with nonlinear damping, National Chengchi University, preprint, 2004.

[14] A. Zaraï and N.-e. Tatar, Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, . Demonstratio Math.44 (2011), no. 1, 67—90.

[15] A. Zaraï and N.-e. Tatar, Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Arch. Math. (Brno) 46 (2010), no. 3, 157–176.