Théorème de point fixe commun avec condition de Meir-Keeler pour les applications réciproquements continues dans un éspace métrique complet

Présentée par : MEZHOUD Rabab et ATHMANIA Hicham

Dirigé par : **Dr.Khaled BERRAH**

Département de Mathématiques

Université Chikh Laarbi tebessi

– Tebessa –

MAI 2017

14 juin 2017

Table des matières

Avant-propos

.

Remerciements

Au terme de ce travail,je tiens à remercier *ALLAH* le tout puissant de m'avoir donné le courage.la patience pour achever ce travail
Je tiens à adresser mes remerciements et présenter ma profonde gratitude à mon encadreur *BERRAH KHALED*
Je remercie trés sincérement.les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de fair partie de la commission de cette recherche .
aussi, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes .organisme et administrations qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu à l'institut de mathématiques qui ont rendu mes séjours au département agréables

Résume.

L'objectif de ce travail est de prouver des théorèmes de point fixe commun. Nous avons étudié deux cas , théorème de type quotient et le théorème principale est de MEIR-KEELER pour plusieurs application dans un espace métrique complet dont des paires des applications sont compatibles et l'une des applications de ces paires est réciproquement continue.

Mot clé : théorèmes de point fixe commun, applications compatibles, applications réciproquement continue, condition de MEIR-KEELER.

.

Abstract.

The aim of this work is to prove a common fixed point theorem.
Two cases were studied, Theorem of type quotient and the main theorem is of MEIR-KEELER for several applications in a complete metric space of which pairs of the applications are compatible and one of the applications of these pairs is reciprocally continuous.
Keyword : a common fixed point theorem, applications compatible, applications reciprocally
.

Notations

$|.|$: une norme dans L^2 ou valeur absolue.

$\|.\|$: une norme.

(E, d) : espaces métrique complet muni de la distance d

$\sup$: borne supérieure.

$\max$: le maximum.

$\lim$: la limite.

$\inf$:l'inferieure

(x_n) : suit de Cauchy

τ : une topologie

$\mathcal{F}$:ensemble des fonctions

$diam$:diamétre

Introduction générale.

Un point fixe est un point qui reste immobile par une application ou une transformation. On peut rencontrer ces points dans plusieurs domaines d recherches, comme les cours de la bourse, les équations de la physique mathématique ou pour vérifiez un compteur électrique etc.

Ce théorème appelé théorème du point fixe fondé par le mathématicien L. brouwer (1881-1966), demeurant depuis plus d'une centaine d'années garantit l'existence de ce point immobile. Son intérêt dépasse de loin le cadre géométrique.

Dans un ensemble dans lequel on sait mesurer la distance entre deux points (un espace métrique), il existe un résultat qui concerne les contractions. Une contraction est d'abord, une transformation qui pour tous les couples de points réduit la distance qui se sépare d'un même facteur.

La règle générale motionne que "toute contraction d'un espace métrique complet sur lui-même a un point fixe unique". Ce point s'obtient comme limite des itérations successives d'un point quelconque de l'espace. L'auteur de ce résultat très constructif est le célèbre mathématicien S. Banach (1922).

Ce théorème était une concrétisation de travaux antérieurs en particulier ceux du mathématicien E. picard qui avait bien auparavant utilisé la méthode des approximations successives pour résoudre de nombreux problèmes s'exprimant en termes d'équations différentielles , intégrales ou aux dérivées partielles.

Généralement, pour établir un point fixe commun métrique, on a besoin d'une relation de commutativité entre les applications étudiées, la continuité et une condition contractive ainsi que la complétude ou la fermeture d'espace (ou sous-espaces).

En 1986 Jungck a amélioré la propriété de commutativité et commutativité faible, à une nouvelle notion plus générale qui est la propriété de compatibilité entre deux applications d'un espace métrique dans lui-même. Plus tard, cette dernière notion était généralisée aux divers types de compatibilité : compatibilité de type (A), compatibilité de type (B), compatibilité de type (C), compatibilité de type (P).

Dans ce cadre nous avons conçu notre travail qui regroupe en plus d'une introduction générale et une conclusion générale trois chapitres.

Le premier chapitre, est dédié aux recherches bibliographes comportant les éléments importants dont on aura besoin pour éclaircir ce sujet.

Dans le deuxième chapitre, concerne le choix du théorème du point fixe commun de type quotient pour plusieurs applications.

Au dernier chapitre nous présenterons le théorème de Meir-Keeler et ses conditions pour essayer d'établir un théorème de point fixe commun pour les applications réciproquement continues satisfaisant une relation implicite.

le deuxieme on choisit la théoreme de poit fixe de type quotient pour plésieure applications puisque est le plus facil par rapport les autres types.

au dérnier chapitre on présente la théoreme de Meir-Keeler et ses conditions.on va établi un théorème de point fixe commun pour les applications réciproquement continues satisfaisant une relation implicite.aussi on ajoute contient un théorème général de point fixe commun de type Meir-Keeler pour des applications réciproquement continues.

.

Chapitre 1

Préléminaire

1- Introduction
2- Espaces métriques
3- Espaces métriques complets
4- Espaces symétrique
5- theoremes de point fixe
6-Applications compatibles
7-Applications réciproquement continues
8-Relation implicite

1.1 Introduction

on va rappeler dans ce chapitre les principaux résultats et les notions dont nous aurons besoins ,ainsi que les définitions concernant le domaine de point fixe.Nous allons rappeler les concepts de commutativité, commutativité faible, compatibilité, compatibilité de type $(\mathbf{A})$, compatibilité de type (B), compatibilité de type $(\mathbf{P})$, compatibilité de type $(\mathbf{C})$, compatibilité faible, les applications faiblement commutatives et les espaces symétriques.

1.2 Espaces métriques

Définition 1.1 *(distance, espace métrique).Soit E un ensemble. On dit qu'une application $d : E * E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E si d vérifie les trois propriétés suivantes :*

$(\mathbf{i})$ Propriété de séparation $\forall x, y \in E$,

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y. \tag{1.1.1}$$

$(\mathbf{ii})$ Propriété de symétrie :$\forall x, y \in E$,

$$d(x, y) = d(y, x) \tag{1.1.2}$$

$(\mathbf{iii})$Inégalité triangulaire :$\forall x, y, z \in E$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \tag{1.1.3}$$

On appelle espace métrique tout couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une distance d sur E.
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques, munis de la distance

$$d(x, y) = |x - y| \tag{1.1.4}$$

Tout ce qui suit s'applique donc également au cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.Dans toute la suite on suppose que(E, d) est un espace métrique.

1.2.1 Ouverts, fermés

On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0; r) = \{x \in E; d(x; x_0) < r\}$$

On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0; r) = \{x \in E; d(x; x_0) \leq r\}$$

1.Une partie $U \in E$ est un ouvert de E si pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$
2.Une partie $F \in E$ est un fermé de E si et seulement si son complémentaire F^c dans E est ouvert.

Proposition 1.1 *Soit E un espace métrique et F une partie de E. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de F qui converge vers un élément $x \in E$, alors $x \in F$*

Soit I un ensemble,Soient $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés
1.$\cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert
2.si I est fini alors $\cap_{i \in I} U_i$ est un ouvert
3. $\cap_{i \in I} F_i$ est un fermé
4.si I est fini alors $\cap_{i \in I} F_i$ est un fermé

1.2.2 Adhérence d'un ensemble

Définition 1.2 *Soit $\bar{P}$ une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à P si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap P \neq \varnothing \tag{1.1.6}$$

On appelle l'adhérence de$P$dans E et on note P̄ l'ensemble des points adhérents à P

Proposition 1.2 *Soit P une partie de E et $x \in E$. Alors x est dans $\bar{P}$si et seulement si x est la limite d'une suite $(x_n)_{n \in N}$ d'éléments de P.*

Une partie P de E est fermée dans E si et seulement si $\bar{P} = P$
Soit P une partie de$E$. Alors $\bar{P}$ est l'intersection de tous les fermés contenant P. C'est donc le plus petit fermé contenant P.

1.2.3 Applications continues

Cas général

Soient (E, d) et (F, d_0) deux espaces métriques.Soit$P$ une partie de E et $f : P \to F$ une fonction
1.La fonction f est continue en $x_0 \in P$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \succ 0, \forall x \in P, d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d_0(f(x) - f(x_0))$$

Il est important de noter que ici δ dépend de x_0.
2.La fonction f est dite continue sur $\bar{P}$ si elle est continue en tout point de P.

1.2.4 Semi-continuité supérieure

On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 si :pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\forall x \in U, f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

;
Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit :

$$\lim_{x \to x_0} \sup f(x) \leq f(x_0)$$

La fonction f est dite semi-continue supérieurement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
-f est semi-continue supérieurement en tout point de X ,
-pour tout réel α, l'ensemble de sur-niveau $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ est fermé,
-l'hypographe $\{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \geq \alpha\}$ est fermé.

1.3 Espaces métriques complets

Définition 1.3 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n)d'éléments de Eest une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{1.2.1}$$

Dans un espace métrique (E, d)
(i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy
(ii) Toute suite de Cauchy est une suite bornée
(iii) Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence ℓ, converge vers cette valeur d'adhérence ℓ
Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$
(i) Si le sous-espace métrique (F, d) est complet, alors F est un fermé de$E$
(ii) Si E est complet et si F est fermé dans$E$, alors F est complet
Soient $d_1$et d_2 deux distances équivalentes sur E Alors (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.
Soient (E_i, d_i), $1 \leq i \leq n$, des espaces métriques. L'espace métrique produit $E_1 * E_2 * ...... * E_n$ est complet si et seulement si, pour tout i,l'espace (E_i, d_i) est complet.

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit (F_n) une suite de fermés non vides de E vérifiant

Proposition 1.3

$$(\mathbf{i})\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n \tag{1.2.2}$$

$$(\mathbf{ii}) \lim_{n \to +\infty} diam(F_n) = 0 \tag{1.2.3}$$

1.4 Espaces symétrique

Définition 1.4 *Une symétrie sur un ensemble X est une fonction positive définie sur X telle que*

$$(\mathbf{i}) d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y, \tag{1.3.1}$$

$$(\mathbf{ii}) d(x, y) = d(y, x). \tag{1.3.2}$$

La paire(X, d) est appelée un espace symétrique.Soit d une symétrie sur X, Pour tout $r > 0$ et pour tout $x \in X$,on pose

$$B(x; r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Une topologie $\tau(d)$ dans $\mathbf{X}$ est définie par $\mathbf{U} \in \tau(d)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{U}, \exists r > 0$ tel que$B(x, r) \subset U$.
Une symétrie d est une semi-métrique si pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$,$B(x, r)$ est un voisinage de x dans la topologie $\tau(d)$.Notons que

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$$

si et seulement si

$$x_n \longrightarrow x$$

pour la topologie $\tau(d)$.
Les deux axiomes suivants ont été posé par Wilson dans[19].Soit (X, d) un espace symétrique Etant données $\{x_n\}$, x et y de X.

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y) = 0 \Rightarrow x = y \tag{1.3.3}$$

$(W.2)$ Etant données$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ et x de X,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} d(y_n, x) = 0 \tag{1.3.4}$$

Il est facile de voir que pour une semi-métrique d, si $\tau(d)$ est **Hausdorff**, alors$(W.1)$ est satisfaite.Soient S et T deux applications d'un espace symétrique (X, d) dans lui même.

1.5 Theoremes de point fixe

Définition 1.5 *soit* (X,d)*un espace métrique et* $T : X \to X$ *une application* T *lipchitzienne s'il existe un nombre réel* $k \geq 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *,on a*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1.4.1}$$

T est une application contractante s'il existe $k \in [0, 1[$,tel que pour tout $x, y \in X$, on obtient

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1.4.2}$$

elle est non expansive si $k = 1$ enfin T est dite contractive si pour tout $x, y \in X$ et $x \neq y$ on obtient

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \tag{1.4.3}$$

Remarque 1.1 *notons que contraction⇒ contractive⇒ non expansive ⇒lipchitzienne et que tout les fonctions sont uniformément continues*

Théorème 1.1 *(Banach 1922) , soit* (X,d) *un espace métrique complet (ou de Banach si* X *possède une norme) et* $T : X \to X$ *une contraction alors* T *admet un point fixe unique dans* X*,c-à-d* $\exists$ $u \in X$ *tel que*

$$Tu = u. \tag{1.4.4}$$

Et aussi ,ce point peut être obtenu comme limite de la suite engendrée par l'itération $x_{n+1} = Tx_n, n \in \mathbb{N}$ avec x_0 un élément arbitraire dans$X$
et

$$d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \tag{1.4.5}$$

Théorème 1.2 *Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. Si* T^n*est une contraction pour tout entier* n*, alors* T *admet un point fixe unique dans* X*.*

Théorème 1.3 *Soit* (X,d) *un espace métrique compact. Si* $T : X \to X$ *est une application contractive, alors* T *admet un point fixe unique* u *dans* X*. En outre, pour tout* $x_0 \in X$*. on a*

$$\lim_{n \to \infty} T^n x_0 = u \tag{1.4.6}$$

Théorème 1.4 *Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application satisfaisant*

$$\int_0^{d(Tx;Ty)} \Phi(t)dt \leq c \int_0^{d(x;y)} \Phi(t)dt \tag{1.4.7}$$

$\forall x, y \in X$,ou $c \in [0, 1[$ et $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue d'intégrale finie et vérifiant

$$\int_0^{\epsilon} \Phi(t)dt > 0, \forall \epsilon > 0 \tag{1.4.8}$$

Alors T admet un point fixe unique u dans X. D'autre part, pour tout $x_0 \in X$. on a

$$lim_{n\to\infty} T^n x_0 = u \tag{1.4.9}$$

Théorème 1.5 *soit (X, d) un espace métrique compact , si $T : X \to X$est une application contractive, alors T admet un point fixe unique u dans X ; en autre,pour tout $x_0 \in X$, on a*

$$lim_{n\to\infty} T^n x_0 = u \tag{1.4.10}$$

Théorème 1.6 *soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tel que $\varphi(t) \prec t$,$\forall t \succ 0$ et $T : X \to X$une application on dit que T est contractive (on dit que T est contraction non linéaire) si*

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)), \forall x, y \in X \tag{1.4.11}$$

1.6 Applications compatibles

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler certaines définitions de compatibilité de fonctions et de les comparer à l'aide d'exemples concrets.Sessa $(c.f.[17])$ a généralisé le concept des applications commutatives en introduisant le concept des applications faiblement commutatives. Jungck$[14]$ a généralisé le concept de commutativité faible en introduisant le concept des applications compatibles. Jungck et al $[15]$ ont généralisé le concept de compatibilité en introduisant le concept des applications compatibles de type$(\mathbf{A})$. Pathak et al $[31, 32, 33]$ ont généralisé le concept de compatibilité de type$(\mathbf{A})$ en introduisant le concept des applications compatibles de type $(\mathbf{B})$, les applications compatibles de type $(\mathbf{P})$ et les applications compatibles de type $(\mathbf{C})$. Il a été démontré dans $[13, 14]$ que ces notions sont équivalentes si les applications sont continues. Jungck a introduit le concept des applications faiblement compatibles. Il a été démontré dans $[14, 15, 31, 32, 34]$que chacun de ces concepts de compatibilité impliquent la compatibilité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Autrement dit la compatibilité faible est la notion la plus faible parmi toutes les compatibilités citées.Dans tout le reste de ce chapitre S et T désignent deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même.

S et Tsont dites commutatives si $STx = TSx$ pour tout $x \in X$.

S et T sont dites faiblement commutatives si pour tout $x \in X$, on obtient

$$d(STx, TSx) \leq d(Sx, Tx). \tag{1.5.1}$$

De toute évidence la commutativité implique la commutativité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général comme le montre l'exemple ci-dessous

Exemple 1.1 $(X, d) = ([0, 1], |.|)$, $Sx = \frac{x}{2}$ *, et* $Tx = \frac{x}{x+2}$*,pour tout* $x \in X$*, on a*

$$|STx - TSx| = \left|\frac{x}{4+2x} - \frac{x}{4+x}\right|$$

$$= \frac{x}{(4+2x)(4+x)}$$

$$\leq \frac{x^2}{4+2x} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2+x}$$

$$= |Sx - Tx|$$

Alors, S et T sont faiblement commutatives Mais

$$TSx = \frac{x}{4+x} > \frac{x}{4+2x} = STx \tag{1.5.2}$$

pour tout $x \neq 0$ dans$X$. Donc, S et T ne sont pas commutatives.

Définition 1.6 *S et T sont dites compatibles si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx) = 0 \tag{1.5.3}$$

pour toute suit $\{x_n\}$ dans X dans X satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = lim_{n\to\infty}Tx_n = t \tag{1.5.4}$$

pour un certain $t \in X$

Il est facile de montrer que commutativité faible implique compatibilité, mais la réciproque n'est pas vraie en général

Définition 1.7 *S et T sont dites compatibles de type (A) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x) = 0 \tag{1.5.5}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x) = 0 \tag{1.5.6}$$

clairement commutativité faible implique compatibilité de type(A), mais la réciproque n'est pas vraie en général. Néanmoins, ces deux concepts de compatibilité sont indépendants si S et T ne sont pas continues

S et T sont dites compatibles de type (B) si

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, St) + lim_{n\to\infty} d(St; S^2x_n)\right] \tag{1.5.6}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt; T^2x_n)\right] \tag{1.5.7}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $(1.5.7)$

S et T sont dites compatibles de type (P) si

$$\lim_{n\to\infty} d(S^2x_n, T^2x_n) = 0 \tag{1.5.8}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $(1.5.8)$

Définition 1.8 *Set T sont dites compatibles de type (C) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt; T^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(Tt; S^2x_n)\right] \tag{1.5.9}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $(1.5.9)$

Proposition 1.4 *Si S et T sont deux applications compatibles ou compatibles de type (A), (B), (P) ou (C),soit $f; g$ des applications sont définis sur Xalors*

(1) $ft = gt$ pour un certain $t \in X$, implique

$$fgt = g^2t = gft = f^2t. \tag{1.5.10}$$

(2) Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t \tag{1.5.11}$$

pour un certain $t \in X$ alors :

(a)f est continue en t, implique

$$\lim_{n\to\infty} g^2 x_n = ft \tag{1.5.11.1}$$

(b)g est continue en$t$, implique

$$\lim_{n\to\infty} f^2 x_n = gt \tag{1.5.11.2}$$

(c) f et$g$ sont continues en t, implique

$$ft = gt \text{ et } fgt = gft. \tag{1.5.11.3}$$

Définition 1.9 *Set T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence , i.e., si $St = Tt$ pour $t \in X$, alors*

$$STt = TSt. \tag{1.5.12}$$

Lemme 1.1 *Si Set T sont compatibles,ou compatibles de type $(A), (P), (B)$,ou (C), alors ils sont faiblement compatibles.*

Preuve. Voir [14,15,31,33,34]. ■

L'exemple suivant montre que les implications inverses du Lemme précédant ne sont pas vraies en général.

$$Sx = \begin{cases} 3 \text{ si } x \in [0,2] \\ 0 \text{ si } x \in \{0\} \cup [2,10] \end{cases}$$

$$Tx = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{0\} \\ x+8 \text{ si } x \in [0,2] \\ x-2 \quad \text{si} \quad x \in [2,10] \end{cases}$$

Clairement, $Sx = Tx$ si et seulement si $x = 0.T(0) = S(0) = 0; TS(0) = ST(0) = 0$

Alors, (S,T) est faiblement compatible.Soit$\{x_n\}$ la suite de X définie par :

$$x_n \quad = \quad 2 + \frac{1}{n}, n \geq 1$$

$$Sx_n = S(2+\frac{1}{n}) = 0; Tx_n = T(2+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

On a

$$Sx_n; Tx_n \to t = 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

De plus

$$STx_n = S(\frac{1}{n}) = 3$$

$$TSx_n = T(0) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1 :$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} |STx_n - TSx_n| = 3 \neq 0$$

et donc(S,T)n'est pas compatible.
on a aussi

$$S^2x_n = S(0) = 0; T^2x_n = T(\frac{1}{n}) = 8 + \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|TSx_n - S^2x_n\right| = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \left|STx_n - T^2x_n\right| = 5 \neq 0$$

cela implique que (S,T) n'est pas compatible de type (A).
d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \left|STx_n - T^2x_n\right| = 5 > \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} |STx_n - St| + \lim_{n\to\infty} \left|St - S^2x_n\right|\right] = \frac{3}{2}$$

on veut dire (S,T) n'est pas compatible de type (B)

$$\lim_{n\to\infty} \left|STx_n - T^2x_n\right| = 5 > \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} |STx_n - St| + \lim_{n\to\infty} \left|St - T^2x_n\right| + \lim_{n\to\infty} \left|St - S^2x_n\right|\right] = \frac{11}{3}$$

alors n'est pas compatible de type (C)
en fin puisque

$$\lim_{n\to\infty} \left|S^2x_n - T^2x_n\right| = 8 \neq 0$$

alors (S,T) n'est pas compatible de type(P)

1.7 Applications réciproquement continues

Un autre élément qui s'est avéré utile dans l'étude de point fixe commun est le concept des applications réciproquement continues introduit par Pant dans [27]. Ci dessous on va définir ce concept et donner un exemple

Définition 1.10 *S et Tsont dites réciproquement continues si*

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St \text{ et } \lim_{n\to\infty} TSx_n = Tt \tag{1.7.1}$$

pour toute $\{x_n\}$ de X .Il est évident que si S et T sont continues, alors elles sont réciproquement continues, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Cependant, Il a été prouvé dans [27] que dans les théorèmes du point fixe commun pour des applications compatibles satisfaisant des conditions contractives, la continuité de l'une des applications S ou T implique leur continuité réciproque.

Exemple 1.2 *Soit $(X, d) = ([0, \infty], |.|)$. Définissons S et T par*

$$Sx = \begin{cases} 1 + x & si\ x \in [0, 1[\\ 1 & si\ \ x \in [1, \infty[\end{cases}$$

$$Tx = \begin{cases} 1 & si\ \ x \in [0, 1[\\ 1 + x & si\ \ x \in [1, \infty[\end{cases}$$

S et T ne sont pas continues en $t = 1$.
Supposons que pour tout n ; $x_n < 1$ et $x_n \to 0$.Alors,$Sx_n = 1 + x_n \to 1$ et $Tx_n = 1$,et $STx_n = 1$ et $TSx_n = 2 + x_n \to 2$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = 1 = S(1) = 1$$

et

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = 2 = T(1) = 2$$

Par conséquent, S et T sont réciproquement continues.

1.8 Relation implicite

Considérons$\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{F}(t_1, ..., t_6) : \mathbb{R}_6^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant :

(1) : $\mathcal{F}$ est croissante en t_1 et décroissante en t_2, t_3, t_4, t_5

(2) : Pour tout$u > 0$ on a

$$\mathcal{F}(u,0,0,u,0,u) > 0; \mathcal{F}(u,0,u,0,u,0) > 0; \mathcal{F}(u,u,0,0,u,u) > 0 \tag{1.8.1}$$

l'ensemble satisfaisant les condition suivants :

$(\mathbf{1})$: $\mathcal{F}(u,0,u,0,0,u) \leq 0$ implique $u = 0$

$(\mathbf{2})$: $\mathcal{F}(u,0,0,u,u,0) \leq 0$ implique $u = 0$

$(\mathbf{3})$: $\mathcal{F}(u,u,0,0,u,u) \geq 0$ pour tout $u > 0$

Exemple 1.3 $\mathcal{F}(t_1, ..., t_6) = t_1 - \max\{t_2, (t_3 + t_4) = 2; k(t_5 + t_6) = 2\}$*tel que* $0 < k \leq 1$

Exemple 1.4 $\mathcal{F}(t_1, ..., t_6) = t_1 - at_2 - b(t_3 + t_4) - c(t_5 + t_6); a, b, c \geq 0; b + c < 1;$*et* $a + 2c \leq 1$

Exemple 1.5 $\mathcal{F}(t_1, ..., t_6) = t_1 - \max\{k_1 t_2, k_2(t_3 + t_4) = 2, (t_5 + t_6) = 2\}$; *telque* ;$0 < k \leq 1; 0 \leq k_2 < 2$

Exemple 1.6 $\mathcal{F}(t_1, .., t_6) = t_1 - h \max\{t_2; t_3; t_4; t_5; t_6\}$; *telle que* $0 \leq h < 1$

Chapitre 2

Théorème de point fixe commun de type quotient pour plusieurs applications

1- Introduction

2- Théorème de point fixe commun(type quotient) pour deux applications

3-Théorème de point fixe commun de type quotient pour plusieurs applications

2.1 Introduction

on va présenter dans ce chapitre la théorème de point fixe commun de type quotient pour plusieurs applications dans des espaces métriques dont deux paires de applications sont faiblement compatible. on va étudier deux cas ,la 1^{er}cas on va présenter la théorème avec deux applications et la $2^{éme}$cas avec quatre applications.

2.2 Théorème(de type quotient) pour deux applications

Lemme 2.1 *soit (X, d) un espace métrique et soit $\{x_n\}$une suit sur X,alors $\{x_n\}$ converge a x ssi $|d(x_n, x)| \to 0$ si $n \to \infty$*

Théorème 2.1 *soit (X, d) un espace métrique complet et $\{x_n\}$ une suit sur X,alors $\{x_n\}$est une suite de Cauchy*

ssi$|d(x_n, x_{n+m})| \to 0$ si $n \to \infty$

Théorème 2.2 *soit X un espace métrique complet,soit S et Tsont des applications dans X , satisfais les conditions suivantes*

$$d(Sx, Tx) \leq \lambda d(x, y) + \frac{\mu d(x, Sx)d(y, Ty) + \gamma d(y, Sx)d(x, Ty)}{1 + d(x; y)}$$

$\forall x, y \in X$ tel que γ, λ, μ sont des nombres réelles non-négatives tel que $\gamma + \lambda + \mu < 1$ alors$S$ et T ont un unique point fixe commun.

Preuve. soit x_0 un point arbitraire dans X et on définit

$$x_{2k+1} = Sx_{2k} \text{ et } x_{2k+2} = Tx_{2k+1}$$

tel que k=1,2,3,.. alors

$$\begin{aligned} d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) &= d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1}) \leq \lambda d(x_{2k}, x_{2k+1}) \\ &+ \frac{\mu d(x_{2k}, Sx_{2k})d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1}) + \gamma d(x_{2k+1}, Sx_{2k})d(x_{2k}, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})} \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$x_{2k+1} = Sx_{2k} \; alors \; d(x_{2k+1}, Sx_{2k}) = 0$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) &= d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1}) \leq \lambda d(x_{2k}, x_{2k+1}) \\
&+ \frac{\mu d(x_{2k}, Sx_{2k}) d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})}
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
|d(x_{2k+1}, x_{2k+2})| &= |d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1})| \leq \lambda |d(x_{2k}, x_{2k+1})| \\
&+ \frac{\mu |d(x_{2k}, x_{2k+1})| |d(x_{2k+1}, x_{2k+2})|}{|1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})|}
\end{aligned}
$$

d'autre coté on a :

$$
|d(x_{2k}, x_{2k+1})| \leq |1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})|
$$

$$
|d(x_{2k}, x_{2k+1})| \leq \lambda |d(x_{2k}, x_{2k+1})| + \mu |d(x_{2k+1}, x_{2k+2})|
$$

$$
|d(x_{2k+1}, x_{2k+2})| \leq \frac{\lambda}{1 - \mu} |d(x_{2k}, x_{2k+1})|
$$

aussi

$$
d(x_{2k+2}, x_{2k+3}) = d(Tx_{2k+1}, Sx_{2k+2})
$$

on a

$$
\begin{aligned}
d(x_{2k+2}, x_{2k+3}) &= d(Tx_{2k+1}, Sx_{2k+2}) = d(Sx_{2k+2}, Tx_{2k+1}) \leq \lambda d(x_{2k+2}, x_{2k+1}) \\
&+ \frac{\mu d(x_{2k+2}, Sx_{2k+2}) d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1}) + \gamma d(x_{2k+1}, Sx_{2k+2}) d(x_{2k+2}, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k+2}, x_{2k+1})}
\end{aligned}
$$

Depuis $x_{2k+2} = Tx_{2k+1}$ implique

$$
d(x_{2k+2}, Tx_{2k+1}) = 0
$$

alors

$$
\begin{aligned}
d(x_{2k+2}, x_{2k+3}) &= d(Tx_{2k+1}, Sx_{2k+2}) = d(Sx_{2k+2}, Tx_{2k+1}) \leq \lambda d(x_{2k+2}, x_{2k+1}) \\
&+ \frac{\mu d(x_{2k+2}, Sx_{2k+2}) d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k+2}, x_{2k+1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|d(x_{2k+2},x_{2k+3})| &\leq \lambda\,|d(x_{2k+2},x_{2k+1})| \\
&\quad + \frac{\mu\,|d(x_{2k+2},Sx_{2k+2})|\,|d(x_{2k+1},Tx_{2k+1})|}{|1+d(x_{2k+2},x_{2k+1})|}
\end{aligned}
$$

et comme

$$|d(x_{2k+2},x_{2k+1})| \leq |1+d(x_{2k+2},x_{2k+1})|$$

on a

$$|d(x_{2k+2},x_{2k+3})| \leq \frac{\lambda}{1-\mu}\,|d(x_{2k+2},x_{2k+1})|$$

on pose

$$h=\frac{\lambda}{1-\mu}$$

$$|d(x_{2k+2},x_{2k+3})| \leq h\,|d(x_{2k+1},x_{2k+2})|$$

$$|d(x_n,x_{n+1})| \leq h\,|d(x_{n-1},x_n)| \leq h^2\,|d(x_{n-2},x_{n-1})| \leq ... \leq h^n\,|d(x_0,x_1)|$$

$\forall\ n<m$,on a :

$$
\begin{aligned}
|d(x_n,x_m)| &\leq |d(x_n,x_{n+1})|+|d(x_{n+1},x_{n+2})|+...+|d(x_{m-1},x_m)| \\
&\leq h^n+h^{n+1}+...+h^{m-1}\,|d(x_0,x_1)| \\
&\leq \left[\frac{h^n}{1-h}\right]|d(x_0,x_1)|
\end{aligned}
$$

alors

$$|d(x_n,x_m)| \leq \left[\frac{h^n}{1-h}\right]|d(x_0,x_1)| \to 0\ si\ n\to\infty$$

d'après lemme précédant ,la suit $\{x_n\}$ est une suit de Cauchy ,d epuis que X est complet ,il existe certain $u\in X$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u$$

on pose le contraire $u\neq Su$ alors

$$d(u,Su)=z>0$$

et désormais on peut prendre :

$$z = d(u, Su) \leq d(u, Tx_{2k+1}) + d(Tx_{2k+1}, Su)$$

$$\begin{aligned}
\leq \quad & d(u; x_{2k+2}) + \lambda d(u, x_{2k+1}) \\
& + \frac{\mu d(u; Su) d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1}) + \gamma d(x_{2k+1}, Su) d(u, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \quad & d(u; x_{2k+2}) + \lambda d(u, x_{2k+1}) \\
& + \frac{\mu z d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1}) + \gamma d(x_{2k+1}, Su) d(u, Tx_{2k+1})}{1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})}
\end{aligned}$$

aussi,pour tout k ,on peut écrire

$$\begin{aligned}
|d(u, Su)| \quad \leq \quad & |d(u; x_{2k+2})| + \lambda |d(u, x_{2k+1})| \\
& + \frac{\mu |z| |d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1})| + \gamma |d(x_{2k+1}, Su)| |d(u, Tx_{2k+1})|}{|1 + d(x_{2k}, x_{2k+1})|}
\end{aligned}$$

lorsque$k \to \infty$, on obtient

$$|d(u; Su)| = 0$$

alors on obtient un contradiction donc

$$u = Su$$

de même on prend

$$Tu = u$$

pour démontrer l'unicité de point fixe commun de$S$ et T i.e

$$u^* = Su^* = Tu^*$$

alors

$$d(u^*, u) \leq d(Su, Tu^*)$$

$$\begin{aligned}
\leq \quad & \lambda d(u, u^*) \\
& + \frac{\mu d(u, Su) d(u^*, Tu^*) + \gamma d(u^*, Su) d(u, Tu^*)}{1 + d(u, u^*)}
\end{aligned}$$

$$= \lambda d(u, u^*) + \frac{\gamma d(u^*, u) d(u, u^*)}{1 + d(u, u^*)}$$

on a

$$|d(u^*, u)| = \lambda |d(u, u^*)| + \frac{\gamma |d(u^*, u)| |d(u, u^*)|}{|1 + d(u, u^*)|}$$

d'autre part on a

$$|d(u^*, u)| \leq (\lambda + \gamma) |d(u^*, u)|$$

donc on obtient un contradiction alors $u = u^*$ (comme $\gamma + \lambda < 1$) ■

2.3 Théorème de point fixe commun de type quotient pour plusieurs applications

Théorème 2.3 *soient*A, B, S, T *des applications d'un espace métrique*(X, d) *dans lui même satisfaisant :*

$$A(X) \subset B(x) \text{ et } B(X) \subset S(X)$$

et vérifiant :

$$\begin{aligned} d(Ax, Bx) \quad \leq \quad & a \frac{d(Sx, Ty) d(Ax, Sx)}{d(Ax, Ty) + d(By, Ty)} \\ & + b \frac{d(Ax, Ty) d(By, Ty)}{1 + d(Sx, By) + d(Sx, Ty)} \end{aligned}$$

pour

$$a, b > 0; a + 2b < 1 \text{ si } d(Ax; Ty) + d(By; Ty) \neq 0$$

et

$$d(Ax, Bx) = 0 \text{ si } d(Ax, Ty) + d(By, Ty) = 0$$

D'après (2.2.1) on peut définir une suite $\{yn\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X vérifiant :

$$y_{2n} \quad = \quad Ax_{2n} = Tx_{2n+1} \text{ et } y_{2n+1} = Bx_{2n+1} = Sx_{2n+2}; n \in \mathbb{N}$$

soient $A; B; S$ et$T$ des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui méme satisfaisant $(2.2.1)$et $(2.2.2)$.Alors la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(2.2.3)$ est une suit de Cauchy dans X

Preuve. D'après $(2.2.2)$ si

$$d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \neq 0$$

on a

$$d_{2n} = d(y_{2n}, y_{2n+1}) = d(Ax_{2n}; Bx_{2n+1})$$

$$\begin{aligned} \leq \quad & a\frac{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})d(Ax_{2n}, Sx_{2n})}{d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})} \\ & +b\frac{d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1})d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(Sx_{2n}\ , Bx_{2n+1}) + d(Sx_{2n}\ , Tx_{2n+1})} \end{aligned}$$

$$\leq a\frac{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})d(Ax_{2n}, Sx_{2n})}{d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})}$$

ce qui implique que

$$d(y_{2n+1}, y_{2n}) \leq \sqrt{a}d(y_{2n-1}, y_{2n})$$

D'après $(2.2.2)$ si

$$d(Ax_{2n+3}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \neq 0$$

on a :

$$d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) = d(Ax_{2n+2}, Bx_{2n+1})$$

$$\begin{aligned} \leq \quad & a\frac{d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1})d(Ax_{2n+2}, Sx_{2n+2})}{d(Ax_{2n+2}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})} \\ & +b\frac{d(Ax_{2n+2}, Tx_{2n+1})d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(Sx_{2n+2}, Bx_{2n+1}) + d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq a\frac{d(y_{2n+1},y_{2n})d(y_{2n+2},y_{2n+1})}{d(y_{2n+2},y_{2n})d(y_{2n+1},y_{2n})} \\
&\quad +b\frac{d(y_{2n+2},y_{2n})d(y_{2n+1},y_{2n})}{1+d(y_{2n+1},y_{2n})} \\
&\leq a\frac{d(y_{2n+1},y_{2n})d(y_{2n+2},y_{2n+1})}{d(y_{2n+2},y_{2n+1})} \\
&\quad +b\frac{d(y_{2n+2},y_{2n})d(y_{2n+1},y_{2n})}{1+d(y_{2n+1},y_{2n})} \\
&\leq a.d(y_{2n+1},y_{2n}) \\
&\quad +b\frac{d(y_{2n+1,2n})d(y_{2n+1},y_{2n})}{1+d(y_{2n+1},y_{2n})} \\
&\quad +b\frac{d(y_{2n+2},y_{2n})d(y_{2n+1},y_{2n})}{1+d(y_{2n+1},y_{2n})} \\
&\leq a.d(y_{2n+1},y_{2n}) \\
&\quad +b.d(y_{2n+1},y_{2n})+b.d(y_{2n+2},y_{2n+1})
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(y_{2n+2},y_{2n+1})\leq\frac{a+b}{1-b}d(y_{2n+1},y_{2n})$$

Donc d'après$(2.2.4),(2.2.5)$ on obtient

$$d(y_{n+1},y_n)\leq hd(y_{n-1},y_n)$$

pour tout n$\in\mathbb{N}$;

$$h=\max\left\{\sqrt{a},\frac{a+b}{1-b}\right\}<1$$

D'ou $\{yn\}_{n\in\mathbb{N}}$est une suit de Cauchy ■

Théorème 2.4 *soient A,B,Set T des applications d'un espace métrique (X,d)dans lui même satisfaisant $(2.2.1)$et $(2.2.2)$.supposons que $S(X)$ ou $T(X)$est complet ,et les paires (A,S) et (B,T).sont faiblement compatible .Alors A,B,S et T admettent un point fixe commun et unique dans X*

Preuve. D'après le lemme précidante

$$\{y_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{Sx_{2n+2}\}\subset S(X)$$

est une suite de Cauchy dans $S(X)$qui est complet donc $\{Sx_{2n+2}\}$ converge vers un point

$$z = Su$$

pour$u \in X$.par conséquent les sous suites $\{Ax_{2n}\}$,$\{Bx_{2n+1}\}$,$\{Tx_{2n+1}\}$; $n \in \mathbb{N}$ converge aussi vers z si $z \neq Au$ en utilisons$(2.2.2)$ on a

$$\begin{aligned} d(Au, Bx_{2n+1}) &\leq a\frac{d(Su, Tx_{2n+1})d(Au, Su)}{d(Au, Tx_{2n+1}) + d(Bx2n+1, Tx_{2n+1})} \\ &\quad +b\frac{d(Au, Tx_{2n+1})d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1})}{1 + d(Su, Bx_{2n+1}) + d(Su, Tx_{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a\frac{d(z, Tx_{2n+1})d(Au, Su)}{d(Au, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})} \\ &\quad +b\frac{d(Au, Tx_{2n+1})d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1})}{1 + d(z, Bx_{2n+1}) + d(z, Tx_{2n+1})} \end{aligned}$$

en faisant$n \to \infty$ on obtient$d(Au, z) \leq 0$ et donc

$$z = Au = Su$$

si

$$d(Au, Tx_{2n+1})d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) = 0$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on trouve

$$d(Au, Bx_{2n+1}) = 0$$

lorsque $n \to \infty$ on obtient

$$z = Au = Su$$

.comme $A(X) \subset T(X)$ il existe $v \in X$ tel que $z = Tv$ si $Bv \neq z$ en appliquant $(2.2.2)$ on obtient

$$\begin{aligned} d(Au, Bv) &\leq a\frac{d(Su, Tv)d(Au, Su)}{d(Au, Tv) + d(Bv, Tv)} \\ &\quad +b\frac{d(Au, Tv)d(Tv, Bv)}{1 + d(Su, Bv) + d(Su, Tv)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a\frac{d(z, z)d(z, z)}{d(z;, z)d(Bv, z)} \\ &\quad +b\frac{d(z, z)d(z, Bv)}{1 + d(z, Bv) + d(z, z)} \end{aligned}$$

alors

$$Tv = Bv = z$$

si

$$d(Au, Tv)d(Bv, Tv) = 0$$

alors

$$d(Au, Bv) = 0$$

et d'ou

$$Tv = Bv = z$$

puisque(A, S)est faiblement compatible on a

$$(SAu = ASu) \Rightarrow (Sz = Az)$$

si $Az \neq z$ en utilisant $(2.2.2)$ on trouve

$$\begin{aligned} d(Az, Bv) \quad &\leq \quad a\frac{d(Sz, Tv)d(Az, Sz)}{d(Az, Tv) + d(Bv, Tv)} \\ &\quad\quad +b\frac{d(Az, Tv)d(Tv, Bv)}{1 + d(Sz, Bv) + d(Sz, Tv)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \quad a\frac{d(Az, z)d(Az, Sz)}{d(Az, z)d(Bv, z)} \\ &\quad\quad +b\frac{d(Az, z)d(z, Bv)}{1 + d(Az, Bv) + d(Az, z)} \end{aligned}$$

i.e

$$d(Az, z) \leq 0$$

et donc $Az = Sz = z$
si

$$d(Az, Tv)d(Bv, Tv) = 0$$

alors

$$d(Az, Bv) = 0$$

d'ou

$$Sz = Az = z$$

par analogie en trouve

$$Tz = Bz = z$$

Donc z est un point fixe commun des application de A, B, S et$T$.
L'unicité de z ,Supposons que w est un autre point fixe tel que $z \neq w$
en appliquant $(2.2.2)$

$$\begin{aligned} d(Az, Bw) &\leq a\frac{d(Sz, Tw)d(Az, Sz)}{d(Az, Tw) + d(Bw, Tw)} \\ &+b\frac{d(Az, Tw)d(Tw, Bw)}{1 + d(Sz, Bw) + d(Sz, Tw)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a\frac{d(z, w)d(z, z)}{d(z, w) + d(w, w)} \\ &+b\frac{d(z, Tw)d(w, w)}{1 + d(z, w) + d(z, w)} \end{aligned}$$

i.é

$$d(z, w) = 0$$

alors

$$z = w$$

d'ou z est unique .
si

$$d(Az, Tw) + d(Bw, Tw) = 0$$

alors

$$d(Az, Bw) = 0$$

i.é $d(z, w) = 0$ et donc $z = w$ d'ou z est unique. ■

Remarque 2.1 *on rappelons aussi deux types des théorèmes de point fixe commun des plusieurs applications dans des espaces métriques.Théorème de(type* ***Gregus****) et de (type* ***Caristi****)*

Chapitre 3

Théorème de point fixe commun avec condition de Meir-Keeler pour les applications réciproquement continues dans un espace métrique complet

---

1- introduction

2- Théorème de Meir-Keeler et application

3- Condition de Meir-Keeler pour quatre applications

4- Applications réciproquement continues et point fixe commun

5-Applications réciproquement continues et conditions de Meir-Keeler

---

3.1 Introduction

ce chapitre contiendra

1. le théorème de Meir-keeler et ses conditions

2. Un Théorème de point fixe commun pour les applications réciproquement continues satisfaisant une relation implicite.

3. Un Théorème général de point fixe commun de type Meir-Keeler pour les applications réciproquement continues

3.2 Théorème de Meir-Keeler et application

En 1969, **Meir et Keeler** $(c.f.[23])$ ont prouvé le théorème suivant qui porte le nom de ses inventeurs et qui constitue une généralisation du principe de contraction deBanach.

Théorème 3.1 *Soit T une application d'un espace métrique complet $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ dans lui même satisfaisant la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{X}$*

$$\varepsilon \leq d(x,y) \leq \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,Ty) < \varepsilon \tag{3.1.1}$$

Alors T admet un point fixe unique u. En outre, pour tout $x_0 \in X$ on a

$$\lim T^n x_0 = u$$

Preuve. Voir [39]. ■

Le théorème de **Meir-Keeler** est très pratique et a subi plusieurs généralisations. Le lecteur curieux peut trouver plus d'informations sur ce théorème dans les références $[10], [11], [12], [13], [14], [16], [17], [21],$ [et $[36]$.

Rappelons qu'une application $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est uniformément continue si

$$\text{pour tout}\epsilon > 0, \text{il existe } \delta > 0 \text{tel que } d(x,y) < \delta \text{ implique } d(Tx,Ty) < \epsilon. \tag{3.1.2}$$

Teck Cheong Lim$[39]$ a caractérisé la condition (1.11) de **Meir-Keeler** en termes de **Φ**-fonction, c'est à dire de la forme

$$d(Tx,Ty) < (d(x,y)) \tag{3.1.3}$$

similaire donc à celle de**Boyd – Wong**. Pour réaliser son travail il a introduit la notion de L-fonctions.

Définition 3.1 $(c.f.[74])$ *Une fonction* $\lambda : [0;\infty) \to [0;\infty)$*est appelée une L-fonction si* $\lambda(0) = 0$, $\lambda(s) > 0$*pour tout* $s > 0$ *et*

pour tout $s > 0$, il existe $u > s$ tel que

$$\lambda(t) \leq s \text{ pour t} \in [s, u]$$

Notons que toute $L-$fonction satisfait

$$\lambda(s) \leq s \text{ pour tout } s \geq 0$$

Définition 3.2 $(c.f.[38])$*Soit* $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ *un espace métrique et* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$. *Le module de continuité uniforme* $\delta(\epsilon)$ *de* T *est défini par*

$$\delta(\epsilon) = \sup \{\lambda : d(x; y) < \lambda \Rightarrow d(Tx; Ty) < \epsilon\} ; pour \epsilon > 0 \text{ et } \delta(0) = 0 \tag{3.1.4}$$

Théorème 3.2 *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *une application et* $\delta(\epsilon)$*son module de continuité uniforme. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.T satisfait la condition de $\boldsymbol{Meir - Keeler}(3.1.1)$.
2.$\delta(\epsilon) > \epsilon$ pour tout$\epsilon > 0$.
3. Il existe une fonction semi-continue inférieurement $\xi : [0;\infty) \to [0;\infty)$ telle que $\xi(0) = 0$,

$$\xi(\epsilon) > \epsilon \text{ pour tout } \epsilon > 0 \ et \ \xi(d(Tx;Ty)) \leq d(x;y) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

4. Il existe une L-fonction $\Phi : [0;\infty) \to [0;\infty)$telle que

$$d(Tx, Ty)) < \Phi(d(x; , y)) \text{ pour tout } x; y \in \mathbf{X}, x \neq y.$$

Preuve. Voir $[39]$ ■

3.3 Condition de Meir-Keeler pour quatre applications

Dans $[17]$**Jungck** a étendu la condition de **Meir-Keeler** pour quatre applications et lui a attribué le nom de (ε, δ) contraction

Définition 3.3 *Soient* A, B, S *et* T *des applications d'un espace métrique* $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ *dans lui même. La paire* (A, B) *est dite*$(\varepsilon, \delta) - (S, T)$ *contraction si*

$$A(X) \subset T(X) \text{ et } B(X) \subset S(X) \tag{3.2.1}$$

et s'il existe une fonction $\delta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x, y \in X \quad \delta(\varepsilon) > \varepsilon$ et :

$$\varepsilon \leq M(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(Ax, By) < \varepsilon \tag{3.2.2}$$

avec

$$M(x; y) = \max\{d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(By, Ty), [d(Sx, By) + d(Ax, Ty)]/2\} \tag{3.2.3}$$

Lemme 3.1 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d)dans lui même satisfaisant (3.2.1). Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x; y \in X$:*

$$\varepsilon < M(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Ax, By) \leq \varepsilon \tag{3.2.4}$$

avec(3.2.4)

$$M(x; y) > 0 \Rightarrow d(Ax, By) < M(x, y) \tag{3.2.5}$$

Alors la suite $\{y_n\}$ définie par :

$$y_{2n} = Ax_{2n} = Tx_{2n+1} \tag{3.2.6}$$

et

$$y_{2n+1} = Sx_{2+2} = Bx_{2n+1} : \tag{3.2.7}$$

pour $n = 0, 1, 2, ...$est une suite de Cauchy.
Notons que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$

$$M(x, y) < \varepsilon + \delta \tag{3.2.8}$$

implique

$$d(Ax, By) < \delta \tag{3.2.9}$$

alors les conditions (3.2.4) et(3.2.6) seront satisfaites. Mais l'inverse est généralement faux comme le montre l'exemple suivant.
Soit $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+$ et pour $x, y \in \mathbf{X}$

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} \text{ si } x \neq y \\ 0 \ si \ x = y \end{cases}$$

On peut vérifier que $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ est un espace métrique complet. Définissons les applications A, B, S et T par :$S = T = I$, avec $I :=$ l'application identité sur $\mathbf{X}$.

$$Ax = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} \text{ si } \frac{1}{1+n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad B = A$$

Alors on peut voir aisément que

$$M(x, y) = d(x, y)$$

et que $(3.2.6)$ est vérifiée. Montrons que $(3.2.5)$ est aussi vérifiée. Pour cela, fixons un $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geq 1$ alors peut prendre n'importe quel valeur puisque $d(Ax, By) \leq 1$ pour tout $x, y \in \mathbf{X}$. Supposons que

$0 < \varepsilon < 1$. Alors pour $n \in N^*$

$$\frac{1}{1+n} \leq \varepsilon < \frac{1}{n}$$

soit

$$\delta = \frac{1}{n} - \varepsilon$$

si

$$\varepsilon < M(x, y) < \varepsilon + \delta$$

alors on a

$$\frac{1}{1+n} < \max\{x, y\}$$

D'ou l'on a $d(Ax, By)$ ce qui prouve **(3.2.5)**.Maintenant prenons $\varepsilon = 1$. Alors pour tout $\delta > 0$, les valeurs $x = 0$ et

$$y = 1 + \frac{\delta}{2}$$

satisfont

$$\varepsilon \leq M(x, y) < \epsilon + \delta$$

. Mais

$$d(Ax, By) = 1 = \varepsilon$$

par conséquent,la relation n'est pas satisfaite.Pour plus de détails sur les conditions de **Meir-Keeler**, on conseille de voir $[11], [12], [13], [14], [16], [17]$ et $[24]$.

3.4 Applications réciproquement continues et point fixe commun

Maintenant, on va exposer un Théorème de point fixe commun pour les applications réciproquement continues satisfaisant une relation implicite dans un espace métrique complet. Ce travail a été publié dans [7]. Il généralise le Théorème 2.1 de $Popa$[35] et le Théorème 2.2 de Pant

Relations implicites

Considérons $\mathcal{F}_6$ l'ensemble des fonctions continues

$$\mathcal{F}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}$$

satisfaisant les conditions suivantes.
$(F1)$: F est décroissante par rapport aux variables t_5 et t_6.
$(F2)$: Il existe $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout $u, v \geq 0$ avec

$$(Fa) : F(u, v, u, v, u + v, 0) \leq 0$$

ou

$$(Fb) : F(u, v, v, u, 0, u + v) \leq 0$$

on a $u \leq \alpha v$.
$(F3)$:$F(u; u; 0; 0; u; u) > 0$ pour tout $u > 0$.

Exemple 3.1 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - h \max\left\{t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}(t_5 + t_6)\right\}, 0 \leq h < 1$.

(F1) : Evidente.
(F2) : Soient $u, v \geq 0$ et

$$F(u, v, u, v, u + v, 0) = u - h \max\left\{u, v, \frac{1}{2}(u + v)\right\} \leq 0$$

Si $v \leq u$, alors $u < u$, qui est une contradiction. Donc, $u \leq hv, \alpha = h < 1$.
D'une manière similaire, si $F(u, v, v, u, 0, u + v) \leq 0$, alors $u \leq hv$.
(F3) : $F(u, u, 0, 0, u, u) = u(1 - h) > 0$ pour tout $u > 0$.

Exemple 3.2 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t^2 - c_1 \max\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - c_2 \max\{t_3, t_6, t_4, t_5\} - c_3 t_5 t_6$, $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ *et* $c_1 + 2c_2 + c_3 < 1$.

(F1) : Evidente.

(F2) : Soient $u, v \geq 0$ et
$F(u, v, u, v, u + v, 0) = u^2 - c_1 \max\{v^2, u^2\} - c_2 v(u + v) \leq 0$.
Si $v \leq u$, alors $u^2 < (c_1 + 2c_2)u^2 < u^2$ qui est une contradiction. Donc
$u \leq \sqrt{c_1 + 2c_2 v}, \alpha = \sqrt{c_1 + 2c_2} < 1$. *Par analogie, si*
$F(u, v, v, u, 0, u + v) \leq 0$*, alors* $u \leq \alpha v, \alpha = \sqrt{c_1 + 2c_2} < 1$.
(F3) : $F(u, u, 0, 0, u, u) = u^2(1 - (c1 + c3)) > 0$ *pour tout* $u > 0$.

Exemple 3.3 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^2 - t_1(at_2 + bt_3 + ct_4) - dt_5 t_6, a > 0, b, c, d \geq 0$.
$a + b + c < 1$ *et* $a + d < 1$.
(F_1) : *claire*
(F_2) *:Soient* $u, v \geq 0$ *et*

$$F(u, v, v, u, u + v, 0) = u^2 - u(av + bv + cu) \leq 0$$

donc

$$u \leq (\frac{a + b}{1 - c})v$$

.

de la même manière , si

$$F(u, v, u, v, 0, u + v) \leq 0$$

, alors

$$u \leq (\frac{a + c}{1 - b})v$$

.

Exemple 3.4 (F_3) *:* $F(u, u, 0, 0, u, u) = u^2(1 - a - d) = 0$ *pour tout* $u > 0$.

Exemple 3.5 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1^3 - c\frac{t_3^2 t_4^2 + t_5^2 t_6^2}{t_2 + t_3 + t_4 + 1}, 0 < c < 1$.
(F_1) *: facile a vérifier*
(F_2) *:Soient* $u, v \geq 0$ *et* $F(u, v, u, v, u + v, 0) = u^3 - c\frac{u^2 v^2}{2v + u + 1} \leq 0$.
donc $u < c\frac{v^2}{2v + u + 1} < cv, \alpha = c$ *de même. si*
$F(u, v, v, u, 0, u + v) \leq 0$*,alors* $u < \alpha v, \alpha = c$.
(F_3) *:*$F(u, u, 0, 0, u, u) = u^3 \frac{(1 - c)u + 1}{u + 1} > 0$ *pour tout* $u > 0$.

Théorème 3.3 *Soient S, T, I et J des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même qui répondent aux conditions suivantes.*
(a) $S(X) \subset J(X)$ *et* $T(X) \subset I(X)$.

(b) *L'une de S, T, I et J est continue,*

(c) *Les paires (S, I) et (T, J) sont compatibles,*

$$F(d(Sx,Ty), d(Ix,Jy), d(Ix,Sx), d(Jy,Ty), d(Ix,Ty), d(Sx,Jy)) \leq 0 \tag{4.1}$$

pour tout x, y dans X et $F \in \mathrm{F}_6$. Alors, S, T, I et J ont un point fixe commun unique dans X.

Théorème 3.4 *Soient $\{A_i\}, i = 1, 2, ..., S$ et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant*

$$A(X) \subset T(X) et A_i(X) \subset S(X), si \;\; i > 1, \tag{4.2}$$

$$d(A_1x, A_2y) \leq \Phi(M_{12}(x,y)), si \; M_{12}(x;y) > 0, \tag{4.3}$$

$$d(A_1x, A_iy) < M_{1i}(x,y) \tag{4.4}$$

où

$$M_{1i}(x,y) = \max\left\{d(Sx,Ty), d(A_1x,Sx), d(A_iy,Ty), \frac{d(A_1x,Ty)+d(Sx,Ay)}{2}\right\} \tag{4.5}$$

et : $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $\Phi(t) < t$ pour tout $t > 0$. Supposons que S est compatible avec A_1et T est compatible avec A_k pour $k > 1$. Si les applications dans l'une des paires (A_1, S) et (A_k, T) sont réciproquement continues, alors $\{A_i\}$, S et T ont un point fixe commun et unique appartenant à X. Maintenant, on va énoncer notre Théorème.

Théorème 3.5 *Soient $\{Ai\}$, $i = 1, 2, ...S$ et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant (4.2) et la condition*

$$F(d(A_1x,A_iy), d(Sx,Ty), d(A_1x,Sx), d(A_iy,Ty), d(A_1x,Ty), d(Sx,A_iy)) \leq 0, \tag{4.6}$$

pour tout x, y dans X et $F \in F_6$ vérifiant $(F1)$, $(F2)$ et $(F3)$. Supposons que S est compatible avec A_1et T compatible avec A_k pour $k > 1$. Si les applications dans l'une des paires (A_1, S) ou (A_k, T) sont réciproquement continues, alors $\{Ai\}$, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire dans X. D'après (4.2), il existe un point $x_1 \in X$tel que

$$A_1x_0 = Tx_1$$

Pour ce point x_1, on peut choisir un point x_2 tel que

$$A_i x_1 = S x_{2,} i > 1$$

. Par récurrence, on peut définir une suite $\{y_i\}$ dans X telle que

$$y_{2n} = A_1 x_{2n} = T x_{2n+1}, y_{2n+1} = S x_{2n+2} = A_i x_{2n+1}, i > 1 \tag{4.7}$$

$$F(d(A_1x_{2n}, A_ix_{2n+1}), d(Sx_{2n}, A_ix_{2n+1}), d(A_1x_{2n}, Sx_{2n}), d(A_ix_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(A_1x_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, A_ix_{2n-}$$

.

La condition ($\mathrm{F_1}$) implique

$$F(d(y_{2n+1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), 0, d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})) \leq 0.$$

En appliquant ($\mathrm{F_a}$), il existe

$$0 < \alpha < 1$$

tel que ■

Exemple 3.6 Théorème 3.6 *Preuve.*

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \alpha d(y_{2n-1}, y_{2n}) \tag{4.8}$$

Par analogie, on trouve

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq \alpha d(y_{2n}, y_{2n+1}) \tag{4.9}$$

En utilisant (4.8) *et* (4.9) *on obtient par récurrence*

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha^n d(y_0, y_1) \tag{4.10}$$

Donc,$\{y_n\}$ *est une suite de Cauchy dans*X. *Puisque* (X, d) *est complet,* $\{y_n\}$*converge vers un point* $z \in X$*,Par conséquent, les sous-suites* $\{A_1x_{2n}\}$ *;* $\{A_ix_{2n+1}\}$*,*$\{Sx_{2n+2}\}$ *et* $\{Tx_{2n+2}\}$*,* $i > 1$ *convergent aussi vers* z*. Maintenant, supposons que la paire* (A_1, S)
est compatible et que les applications A_1 *et* S *sont réciproquement continues. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} d(SA_1x_{2n}, A_1Sx_{2n}) = 0 \tag{4.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} SA_1x_{2n} = Sz et \lim_{n\to\infty} A_1Sx_{2n} = A_1z \tag{4.12}$$

D'après (4.11) *et* (4.12) *; on trouve* $A_1 z = Sz$*. Si* $A_1 z \neq z$*, en utilisant* (4.6) *on obtient*

$$F(d(A_1z, A_ix_{2n+1}), d(Sz, Tx_{2n+1}), d(A_1z, Sz), d(A_ix_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(A_1z, Tx_{2n+1}), d(Sz, A_ix_{2n+1})) \leq 0$$

Lorsque $n \to \infty$ *on trouve*

$$F(d(z, A_kv), 0, 0, d(z, A_kv), 0, d(z, A_kv)) \leq 0$$

En appliquant (F_b) *on a* $z = A_k, v = Tv$*. Or* (A_k, T) *est compatible, donc* $TA_kv = A_kTv$ *, i.e.* $A_kz = Tz$*. Si* $A_kz \neq z$*, en utilisant* (4.6) *on obtient*

$$F(d(A_1z, A_kz), d(Sz, Tz), d(A_1z, Sz), d(A_kz, Tz), d(A_1z, Tz), d(Sz, A_kz))$$
$$= F(d(z, A_kv), d(z, A_kv), 0, 0, d(z, A_kv), d(z, A_kv)) \leq 0$$

qui est une contradiction avec ($\mathcal{F}_3$*). Alors,* $A_kz = Tz = z$*. Si* $A_iz \neq z$*, en utilisant* (4.6) *on trouve*

$$F(d(A_1z, A_iz), d(Sz, Tz), d(A_1z, Sz), d(A_iz, Tz), d(A_1z, Tz), d(Sz, A_iz)) \leq 0$$

D'où

$$F(d(z, A_iz), 0, 0, d(z, A_iz), 0, d(z, A_iz)) \leq 0$$

qui est une contradiction avec(F_b)*. Donc* $A_iz = Tz = z, i > 1$*. Ainsi,*

$$A_1z = Sz = A_iz = Tz = z, i > 1$$

. On en déduit que $\{A_i\}$ *;* S *et* T *ont un point fixe commun* z *dans* X*. Maintenant, supposons que* (A_k, T) *est compatible et que* A_k *et* T *sont réciproquement continues. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} d(TA_kx_{2n}, A_kTx_{2n}) = 0 \tag{4.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} TA_kx_{2n+1} = Tz \text{ et} \lim_{n\to\infty} A_kTx_{2n+1} = A_kz \tag{4.14}$$

D'après (4.13) *et* (4.14) *on a*

$$A_kz = Tz$$

Si

$$A_kz \neq z$$

en utilisant (4.6)*on obtient*

$$F(d(A_1u, A_kx_{2n+1}), d(Su, Tx_{2n+1}), d(A_1u, Su), d(A_1u, Tx_{2n+1}), d(A_1u, Tx_{2n+1}), d(Su, A_kx_{2n+1})) \leq 0.$$

lorsque $n \to \infty$ *on obtient*

$$F(d(A_1u, z), 0, d(A_1u, z), 0, d(A_1u, z), 0) \leq 0$$

En appliquant (F_a)*on trouve*

$$z = A_1u = Su$$

. *Puisque* (A, S) *est compatible on a*

$$SA_1u = A_1Su$$

i.e.,

$$A_1z = Sz$$

. *Si*

$$A_1z \neq z$$

en utilisant (4.6) *on obtient*

$$F(d(A_1z, z), d(A_1z, z), 0, 0, d(A_1z, z), d(A_1z, z)) \leq 0$$

qui est une contradiction avec (F_3). *Alors,*

$$A_1z = Sz = z$$

Donc,

$$A_1z = Sz = A_kz = Tz = z$$

. *De même,*

$$A_iz = Tz = z, i > 1$$

. *Ainsi,*

$$A_1z = Sz = A_iz = Tz = z, i > 1$$

. *Par conséquent,* $\{Ai\}$ *,* S *et* T *ont un point fixe commun* z *dans* X. ■

L'unicité de z s'obtient sans difficulté des conditions (4.6) et (F3)On déduit du Théorème précédent le Corollaire suivant.

Corollaire 3.1 *Soient A,B, S et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant*

$$A(X) \subset T(X) \text{ et } B(X) \subset S(X) \tag{4.15}$$

$$F(d(Ax, By), d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(Sx, By)) \leq 0 \tag{4.16}$$

pour tout x, y dans X et $F \in F_6$ satisfaisant $(F_1), (F_2)$et (F_3). Supposons que S est compatible avec A et T est compatible avec B. Si les applications dans l'une des paires (A, S) ou (B, T) sont réciproquement continues, alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Le Corollaire précédent généralise le Théorème 3.1 de Tas et al [38] et le Théorème 2.1 de Popa [35].

Remarque 3.1 *Le Corollaire précédent généralise le Théorème 3.1 de Tas et al* [38] *et le Théorème 2.1 de Popa* [35].

3.5 Applications réciproquement continues et condition de Meir-Keeler

On va présenter ici un Théorème de point fixe commun de type Meir-Keeler pour les applications réciproquement continues dans un espace métrique complet satisfaisant une relation implicite, ce travail a été publié dans [2] et généralise les Théorèmes, 2.10 de Jha et al [13], 2.11de Pant-Jha [28] et 2.12 de[29].

Théorème 3.7 $(c.f.[13])$ *Soient (A, S) et (B, T) deux paires d'applications compatibles d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant* (4.15)*Supposons pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$*

$$\varepsilon \leq \max\left\{d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(By, Ty), \frac{1}{2}\left[d(Sx, By) + d(Ax, Ty)\right]\right\} \leq \varepsilon + \delta \textit{ implique } d(Ax, By) < \varepsilon \tag{4.17}$$

et que

$$d(Ax, By) < k\left[d(Sx, Ty) + d(Ax, Sx) + d(By, Ty) + d(Sx, By) + d(Ax, Ty)\right] \tag{4.18}$$

pour $0 < k \leq \frac{1}{3}$. Si l'une des applications A, B, S et T est continue, alors A, B, S et T ont un point fixe commun et unique dans X.

Théorème 3.8 *Soient* (A, S) *et* (B, T) *deux paires d'applications compatibles d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui même satisfaisant* $(4.15), (4.17)$ *et*

$$d(Ax, By) \leq \max\left\{k_1 d(Sx, Ty), \frac{k_2}{2}\left[d(Ax, Sx), d(By, Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(Sx, By) + d(Ax, Ty)\right]\right\} \quad (4.19)$$

pour$k_1 \geq 0$ et $1 < k_2 < 2$. Si l'une des applications $A; B; S$ ou Test continue, alors A, B, S et T admettent un point fixe commun et unique dans X.

Théorème 3.9 *Soient* (A, S) *et* (B, T) *deux paires d'applications compatibles d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui même satisfaisant* $(4.15), (4.17)$ *et*

$$d(Ax, By) \leq \max\left\{k_1 d(Sx, Ty), \frac{k_2}{2}\left[d(Ax, Sx), d(By, Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(Sx, By) + d(Ax, Ty)\right]\right\} \quad (4.20)$$

pour$k_1 \geq 0$ et $1 < k_2 < 2$. Si l'une des applications A, B, S ou Test continue, alors A, B, S et T admettent un point fixe commun et unique dans X.

Relations implicites

Considérons $\mathcal{F}_6$ l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{F}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes

(C_1) : $F(u, 0, 0, u, 0, u) \leq 0$ implique $u = 0$,

(C_2) : $F(u, 0, u, 0, u, 0) \leq 0$ implique $u = 0$,

(C_3) : $F(u, u, 0, 0, u, u) \geq 0$ pour tout $u > 0$,

Exemple 3.7 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - at_2 - b(t_3 + t_4) - c(t_5 + t_6), a, b, c \geq 0$ *et* $a + b + 2c \leq 1$

(C_1) : $F(u, 0, 0, u, 0, u) = u(1 - b - c) \leq 0$ *implique* $u = 0$,

(C_2) :de même $F(u, 0, u, 0, u, 0) \leq 0$ implique $u = 0$,

(C_3) : $F(u, u, 0, 0, u, u) = u(1 - a - 2c) \geq 0$ pour tout $u > 0$,

Exemple 3.8 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \max\left\{t_2, \frac{1}{2}(t_3 + t_4), \frac{k}{2}(t_5 + t_6)\right\}$ $0 \leq k < 1$

(C_1) : $F(u, 0, 0, u, 0, u) = u - \max\left\{\frac{u}{2}, k\frac{u}{2}\right\} = \frac{u}{2} \leq 0$ *implique* $u = 0$,

(C_2) :de même manière $F(u, 0, u, 0, u, 0) \leq 0$ implique $u = 0$,

(C_3) : $F(u, u, 0, 0, u, u) = u - \max\{u, ku\} = 0$ pour tout $u > 0$,

Exemple 3.9 $F(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) = t_1 - \max\left\{k_1t_2, \frac{k_2}{2}(t_3+t_4), \frac{1}{2}(t_5+t_6)\right\}$ *et* $0 \le k_1 < 1$ *et* $1 < k_2 < 2$

(C₁) : $F(u,0,0,u,0,u) = u - \max\left\{k_2\frac{u}{2}, \frac{u}{2}\right\} = (1-k_2\frac{u}{2}) \le 0$ *implique* $u = 0$,

(C₂) : aussi $F(u,0,u,0,u,0) \le 0$ implique $u = 0$,

(C₃) : $F(u,u,0,0,u,u) = u - \max\{k_1u, u\} \ge 0$ pour tout $u > 0$,

Maintenant, on va exposer notre Théorème.

Théorème 3.10 $(c.f.[2])$*Soient* A, B, S *et* T *des applications d'un espace métrique complet* (X,d) *dans lui même satisfaisant* $(4.15), (4.17)$ *avec* $F \in \mathbb{F}_6$ *satisfaisant (C₁) , (C₂) et (C₃) et que l'inégalité* (4.16) *soit valide pour tout* x, y *dans* X*. Supposons que* A *et* S *ou* B *et* T *sont réciproquement continues et les paires* (A,S) *et* (B,T) *sont compatibles. Alors* A, B, S *et* T *admettent un point fixe commun et unique dans* X

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire dans X. D'après (4.15), on peut définir une suite $\{y_n\}$ dans X telle que :

$$y_{2n} = Ax_{2n} = Tx_{2n+1} \text{ et } y_{2n+1} = Sx_{2n+2} = Bx_{2n+1} \tag{4.21}$$

pour $n = 0, 1, 2, ..,$ D'après le lemme 1.26, $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy dans X. Puisque (X,d) est complet, $\{y_n\}$ converge. Soit $z \in X$ sa limite. Les sous-suites $\{Ax_{2n}\}$,$\{Bx_{2n+1}\}$, $\{S_{2n+2}\}$ et $\{Tx_{2n+1}\}$ convergent aussi vers z. Maintenant, supposons que $(A;S)$ est compatible et que A et S sont réciproquement continues. Alors

$$\lim_{n\to\infty} d(SAx_{2n}, ASx_{2n}) = 0 \tag{4.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} SAx_{2n} = Sz et \lim_{n\to\infty} ASx_{2n} = Az \tag{4.23}$$

D'après (4.22) et (4.23), on a

$$Az = Sz$$

Comme

$$A(X) \subset T(X)$$

il existe $v \in X$ telle que

$$Az = Sz = Tv$$

. Si

$$Az \neq Bv$$

, en utilisant (4.16) on trouve

$$F(d(Az,Bv),d(Sz,Tv),d(Az,Sz),d(Bv,Tv),d(Az,Tv),(Sz,Bv))<0:$$

en faisant $n\to\infty$ on obtient

$$F(d(Az,Bv),0,0,d(Az,Bv),0,(Az,Bv))\leq 0$$

En appliquant (C_1) on trouve

$$Sz=Az=Bv=Tv$$

Posons

$$w=Sz=Az=Bv=Tv$$

. Comme les paires (A,S) et (B,T) sont compatibles, on a

$$ASz=SAz$$

et

$$TBv=BTv$$

i.e.,

$$Aw=Sw$$

et

$$Bw=Tw$$

Si

$$w\neq Aw$$

en utilisant (4.16) on obtient

$$F(d(Aw,Bv),d(Sw,Tv),d(Aw,Sw),d(Bw,Tw),d(Aw,Tv),(Sw,Bv))$$

$$=F(d(Aw,w),d(Aw,w),0,0,d(Aw,w),d(Aw,w))<0$$

qui est une contradiction avec (C_3). Donc

$$Aw=Sw=w$$

Si $w\neq Bw$, en utilisant (4.16) on voit que,

$$F(d(Aw,Bw),d(Sw,Tw),d(Aw,Sw),d(Bw,Tw),d(Aw,Tw),(Sw,Bw))$$

$$= F(d(Aw, Bw), d(w, Bw), 0, 0, d(w, Bw), d(w, Bw)) < 0$$

qui est une contradiction avec (C_3). D'où

$$Aw = Sw = w$$

Ainsi w est un point fixe commun de A, B, S et T. Maintenant, supposons que la paire (B, T) est compatible et B et T sont réciproquement continues. Alors

$$\lim_{n\to\infty} d(TBx_{2n+1}, BTx_{2n+1}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} TBx_{2n+1} = Tz$$

et

$$\lim_{n\to\infty} BTx_{2n} = Bz$$

D'après (2.24) et (2.25), on a $Bz = Tz$. Or

$$B(X) \subset S(X)$$

il existe $u \in X$ tel que

$$Bz = Tz = Su$$

. Si

$$Au \neq Bz$$

, en utilisant (4.16) on obtient

$$F(d(Au, Bz), d(Su, Tz), d(Au, Su), d(Bz, Tz), d(Au, Tz), (Su, Bz))$$

$$= F(d(Au, Bz), 0, d(Au, Bz), 0, d(Au, Bz), 0) < 0$$

En appliquant (C_2) on obtient

$$Az = Bz = Au = Su$$

Le reste de la preuve s'obtient par symétrie comme dans le cas précédent. L'unicité du point fixe se déduit des conditions (4.16) et (C3). ■

Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant (4.15), (4.17) et (4.18). Supposons que A et S ou B et T sont réciproquement continues et les paires (A, S) et (B, T) sont compatibles. Alors, A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X

Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant (4.15), (4.17) et (4.19). Supposons que A et S ou B et T sont réciproquement continues et les paires (A, S) et (B, T) sont compatibles. Alors, A,B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même satisfaisant (4.15), (4.17) et (4.20) pour $0 \leq k \leq 1$. Supposons que A et S ou B et T sont réciproquement continues et les paires (A, S) et (B, T) sont compatibles. Alors, A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

conclusion

La science mathématique évolue comme les autres sciences, et le théorème du point fixe commun a de nombreuses applications et utilisations dans plusieurs domaines.

Dans notre travail nous avons étudié plusieurs théorèmes du point fixe commun, un de type quotient pour illustrer la notion de point fixe avec plusieurs applications et un autre avec la condition de MEIR-KEELER pour quatre applications,

Suite à l'étude de l'existence du point fixe avec plusieurs types d'applications que nous avons réalisé, on a distingué que la différence entre ces concepts se trouve dans les conditions des applications utilisées et leurs propriétés.

Bibliographie

[1] M. Aamri and D. El Moutawakil, Common fixed points under contractive conditions in symmetric spaces, Applied Mathematics E-notes., 3 (2003), 156-162.

[2] A. Aliouche, A general common fixed point theorem of Meir and Keeler type for reciprocally continuous mappings, Inter. J. Appl. Math. Stat., 3 (2005),

[3] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math., 3 (1922), 133–181.

[4] D. W. Boyd and J. S. W.Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer.Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[5] A. Branciari, A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, Int. J. Math. Math. Sci., 29 (2002), 531–536.

[6] F. Browder, On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Indag.Math. 30 (1968), 27-25.

[7] A. Djoudi and A. Aliouche, A general common fixed point theorem for reciprocally continuous mappings satisfying an implicit relation, The Austral.J. Math. Anal. Appl., 3 (2006), 1-7.

[8] J. Dugundji and A. Granas, Weakly contractive maps and elementary domain invariance theorems, Bull. Greek. Math. Soc., 19 (1978), 441-451.

[9] T. L. Hicks and B. E. Rhoades, Fixed point theory in symmetric spaces with applications to probabilistic spaces, Nonlinear Analysis., 36 (1999), 331-344.

[10] J. Jachymski, A generalization of theorem by Rhoades and Watson for contractive type mappings, Math. Japonica., 38 (1993), 1095-1102.

[11] J. Jachymski, Common fixed point theorems for some families of maps, Indian. J. Pure. Appl. Math., 25 (9) (1994), 925–937. Your User Name : insa_9099. Your Password : ipwd_9099

[12] J. Jachymski, Equivalent conditions and Meir-Keeler type theorems, J. Math. Anal. Appl., 194 (1995), 293 - 303.

[13] K. Jha, R. P. Pant and S. L. Singh, Common . . . xed point for compatible mappings in metric spaces, Radovi. Mat., 12 (2003),107–114.

[14] G. Jungck, Compatible mappings and common . . . xed points, Internat J.Math. Math. Sci., 9 (1986), 127-179.

[15] G. Jungck, P. P. Murthy and Y. J. Cho, Compatible mappings of type (A) and common fixed points, Math. Japonica., 38 (2) (1993), 381-390.

[16] G. Jungck, K. B. Moon, S. Park and B. E. Rhoades, On Generalizations of the Meir-Keeler Type Contraction Maps : Corrections, J. Math. Anal. Appl.,180 (1993), 221–222.96

[17] G. Jungck and H. K. Pathak, Fixed points via "biased maps", Proc. Amer.Math. Soc., 123 (1995), 2049-2060.

[18] M. A. Krasnoselskij and V. J. Stetsenko, About the theory of equations with concave operators, Sib. Mat. Zh. 10 (1969), 565-572

[19] M. A. Krasnoselskij and G. M. Vainikko et All, Approximate solution of operator equations, Wolters Noordhof, Groningen 1972.

[20] W. Liu, J. Wu and Z. Li, Common fixed points of single-valued and multivalued maps, I nternat. J. Math. Math. Sci., 19 (2005), 3045-3055.

[21] M. Maiti and T. K. Pal, Generalizations of two fixed point theorems, Bull.Calcutta. Math. Soc., 70 (1978), 57–61.

[22] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Diss. Math., 127(1975).

[23] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326–329.

[24] R. P. Pant, Common . . . xed points of two pairs of commuting mappings, Indian. J. Pure. Appl. Math., 17 (2) (1986), 187–192.

[25] R. P. Pant, Common fixed points of noncommuting mappings, J. Math.Anal. Appl., 188 (1994), 436-440.

[26] R. P. Pant, Common fixed points for four mappings, Bull. Calcutta. Math.Soc., 9 (1998), 281-286.

[27] R. P. Pant, A common fixed point theorem under a new condition, I ndian.J. Pure. Appl. Math., 30 (2) (1999) 147–152.

[28] R. P. Pant and K. Jha, A generalization of Meir-Keeler type common fixedpoint theorem for four mappings, J. Natural and Physical Sciences., 16 (1–2),(2002), 77–84.

[29] R. P. Pant and K. Jha, A generalization of Meir-Keeler type fixed point theorem for four mappings, Ultra-Science., 15 (1), (2003), 97–102.

[30] S. Park and B. E. Rhoades, Meir-Keeler type contractive conditions, Math. Japonica., 26 (1) (1981), 13-20.

[31] H. K Pathak and M. S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type, Czechoslovak Math. J., 45 (120)(1995), 685-698.

[32] H. K. Pathak,Y. J. Cho, S. M. Kang, B. S. Lee, Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and applications to dynamic programming,Le Matematiche., Fasc. I, 50 (1995).

[33] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. Chang, S. M. Kang, Compatible mappings of type (P) and fixed point theorem in metric spaces and probabilistic metric spaces, Novi Sad J. Math., 26 (2) (1996), 87-109.

[34] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Khan and B. Madharia, Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type, Demonstratio Math., 31 (3) (1998), 499-518.

[35] V. Popa, Some . . . xed point theorems for compatible mappings satisfying an implicit relation, Demonstratio Math., 32 (1999),157–163.

[36] B. E. Rhoades, S. Park and K. B. Moon, On generalizations of the Meir-Keeler type contraction maps, J. Math. Anal. Appl., 146 (2) (1990), 482–494.

[37] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. Beograd., 32 (46) (1982), 149-153.

[38] K. Tas,M. Telci and B. Fisher, Common fixed point theorems for compatible mappings, Int. J. Math. Math. Sci., 19 (1996), 451–456.

[39] Teck-Cheong Lim, On Characterizations of Meir-Keeler Contractive Maps,Nonlinear Analysis., 46 (1) (2001), 113-120

[40] W. A. Wilson, On semi-metric spaces, Amer. J. Math., 53 (1931), 361-373.