Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées

Thème:

Contrôlabilité régionale des systèmes distribués

Présenté par:

Mouna ABDELLI

Devant le jury:

Khaled BERRAH	M.A.A	Université de Tébessa	Président
Abdelhak HAFDALLAH	M.A.A	Université de Tébessa	Rapporteur
Hacene MECHERI	M.C.B	Université de Tébessa	Examinateur
Imad REZZOUG	M.C.B	Université d'Oum el Bouaghi	Examinateur

Date de soutenance:
25/05/2017

Note: ………. **Mention:** ………………………………………….

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

• Mes parents :

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit. La miséricorde de dieu sur son immaculé âme.

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mes frères, mes sœurs, ma famille, mes professeurs et mes amis.

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو تقديم مفهوم التحكم الجهوي، ودراسة التحكم الجهوي لبعض النماذج من الأنظمة التوزيعية المكافئة و الزائدية مع مختلف أنواع التحكم (داخلي, حدي, نقطي).

الكلمات المفتاحية: *التحكم الجهوي، المفعلات، الأنظمة التوزيعية.*

Abstract

The aim of this memory is to present the notion of regional controllability and to study the regional controllability of some models of distributed systems parabolic and hyperbolic with different types of control (internal, boundry, punctual).

Keywords: *regional controllability, actuators, distributed systems.*

Résumé

Le but de ce mémoire est la présentation de la contrôlabilité régionale, et d'étudier la contrôlabilité régionale de quelques modèles des systèmes distribués parabolique et hyperbolique avec des différents types de contrôle (interne, frontière, ponctuel).
Mots clés : *contrôlabilité régionale, actionneurs, systèmes distribués.*

Remerciement

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur : Abdelhak HAFDALLAH pour son aide, sa compréhension et son soutient constant. Ses qualités scientifiques et surtout humaines ont grandement facilité la réalisation de ce travail.

Je tiens vivement à remercier Professeur Khaled BERRAH de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Des remerciements vont de même aux membres de jury examinateurs qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire, il s'agit, en l'occurrence de :

Imad REZZOUG.

Hacene MECHERI.

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'apportent leur aide, leur soutien, et leurs encouragements.

Enfin, je souhaite remercier ma famille pour leur soutien et leur encouragement.

Liste des figures

Liste des tableaux

Table des matières

Notations

$|.|$: Une norme dans $L^2(\Omega)$ ou valeur absolue.

$\|.\|$: Une norme.

$\langle .,. \rangle$: Crochet de dualité.

E, U, H : Espaces de Hilbert.

H^* : Le dual topologique d'un espace H.

$L(U; H)$: l'espace vectoriel des applications linéaires continues de U dans H.

$D(A)$: Le domaine de définition de l'opérateur A.

$G(A)$: Le graphe de A.

$y|_\omega$: La restriction de la fonction y à ω.

$\Omega \backslash \omega$: Ω sauf ω.

$\oplus$: Somme directe de deux espaces vectoriels.

$\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Opérateur de Laplace .

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ ou ∂_ν : La dérivée normale extérieure.

$\partial\Omega$: Frontière de Ω.

δ : La distribution de Dirac à l'origine.

ω : Un sous-domaine non vide de Ω.

χ_ω : La fonction indicatrice d'un ensemble ω ; $\chi_\omega(x) = 1$ si $x \in \omega$, 0 si $x \notin \omega$.

$\lim$: La limite.

$rg\ G_n$: Le rang de la matrice G_n.

$\arg z$: L'argument du nombre complexe z.

$\mathcal{P}_A x$: Projection de x sur A.

H^{-1} : Dual de H_0^1.

Introduction

Mathématiquement, le système sera représenté par une maquette virtuelle à base d'équations et de signes, c'est-à-dire un modèle. Ce système est dit distribué (ou à paramètres distribués ou encore à paramètres répartis) s'il fait intervenir des variables d'espace et de temps ainsi que des variables d'entrée (commandes) et de sortie (mesures).

La problématique générale de la contrôlabilité consiste à étudier s'il est possible, pour un système donné, d'amener n'importe quel état initial vers une cible donnée en un temps initialement fixé. Les moyens utilisés pour agir sur un système de façon à le diriger vers une cible sont appelés contrôles.

Le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle permet d'amener l'état d'un système de l'état initiale à un état désiré juste sur une région à instante finie.

Le concept de la contrôlabilité régionale des systèmes distribués a été introduit dans les années 90 par les professeurs El Jai et Zerrik [9],[17] où les notions de contrôlabilité a été étudiées uniquement sur une région ω du domaine Ω sur lequel est défini le système.

Nous nous sommes intéressés dans ce travail essentiellement à l'étude de contrôlabilité régionale de déférent type d'équation.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons les définitions et les divers caractérisations liées à la notion de la contrôlabilité et la contrôlabilité régionale des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (contrôlabilité exacte et approché, contrôlabilité régionale, notion d'actionneur).

Dans le deuxième chapitre, nous exploitons les résultats établis au premier chapitre pour la contrôlabilté régionale de système de type parabolique, nous montrons en particulier comment on peut adapter ces résultats des situations particulièrement intéressantes.

Dans le troisième chapitre, Nous donnons quelques définitions et propriétés liées à la contrôlabilité régionale pour les systèmes de type hyperbolique et après nous appliquons une méthode de résolution pour un contrôle régionale interne.

Enfin, nous établissons le lien entre la structure des actionneurs et la contrôlabilité régionale frontière.

"Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets"

"Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes"

"Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ?"

"Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier"

"Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle"

Henri Poincaré.

" Ce que j'aime dans les mathématiques appliqués, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir, et de toute la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible est la plus souple et la meilleure du coup ce qui m'intéresse, c'est de savoir jusqu'au on peut aller, c'est d'atteindre les limites"

Jacques- Louis Lions.

" Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes, un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies"

Stefan Banach.

" Celui qui ne marche que par beau temps risque bien de ne jamais arriver au terme de son voyage"

" Ce qui important ce sont les notions pas les notations"

Gauss.

" Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous habituez juste à elles"

John Von Neumann.

Chapitre 1

Concepts de base de la contrôlabilité régionale des systèmes distribués

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils mathématiques et conceptuels que nous allons utiliser dans notre travail. Ensuite, nous abordons les notions liées à la contrôlabilité régionale.

1.1 Préliminaires sur les opérateurs

Soient H un espace de Hilbert sur le corps des nombres réel $\mathbb{R}$, ou complexes $\mathbb{C}$ muni de la norme $x \to \|x\|_H$ et $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même muni de la norme $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_H \leq 1} \|Ax\|_H$. Nous désignerons par I l'unité de $L(H)$.
Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ nous noterons par

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \ : x \in D(A)\}.$$

L'image de A.
Et par

$$\ker A = \{x \in D(A) \ : \ Ax = 0\}.$$

Le noyau de A.
L'opérateur $A : D(A) \subset H \to \operatorname{Im} A$ est **surjectif.** Si $\ker A = \{0\}$, alors A est **injectif.**
Pour un opérateur bijectif on peut définir l'opérateur **inverse** : $A^{-1} : D(A^{-1}) \subset H \to H$.

Définition 1.1 *[4] Soit $A : D(A) \subset X \to Y$, oú X, Y sont deux espaces de Banach avec $D(A)$ dense dans X. L'opérateur adjoint A^* de A est défini par*

$$\langle y, Ax\rangle_Y = \langle A^*y, x\rangle_X , \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*)$$

sur

$$D(A^*) = \{y \in Y, \exists c \geq 0 : \langle y, Ax \rangle_Y \leq c \|x\|, \forall x \in D(A)\}.$$

Définition 1.2 *[4] Soit* $A : D(A) \subset H \to H$
A *est dit* ***auto adjoint****, si* $D(A) = D(A^*)$ *et* $A = A^*$.
A *est* ***symétrique****, si* $\langle y, Ax \rangle = \langle Ay, x \rangle \, \forall x, y \in D(A)$.

Définition 1.3 *[13] L'ensemble* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)$ *est inversible dans* $L(H)\}$.
S'appelle l'ensemble ***résolvant*** *de* $A \in L(H)$.

1.2 Les semi-groupes

1.2.1 Définitions, propriétés élémentaires

Définition 1.4 *[13] Une famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* H *est dite* ***semi-groupe fortement continue****, ou bien* C_0*-semi-groupe, si elle vérifie*
i) $S(0) = I$ *(identité dans* $L(H)$*).*
ii) $S(t+s) = S(t)S(s) \, \forall s, t \geq 0$.
iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x \, \forall x \in H$.

Définition 1.5 *[16] Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe,* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est appelé* ***semi-groupe uniformément continue*** *si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\|_{L(H)} = 0$$

Définition 1.6 *[13] Soit* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2, \varphi_1 \leq 0 \leq \varphi_2\}$ *un secteur dans* $\mathbb{C}$.
Une famille $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* H *est dite* ***Semi-groupe analytique (holomorphe)*** *dans* Δ *si elle vérifie les conditions suivantes*
i) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2) \, \forall z_1, z_2 \in \Delta$.
ii) $S(0) = I$ *(identité dans* $L(H)$*).*
iii) $\lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta} S(z)x = x \, \forall x \in H$.
iv) L'application $z \in \Delta^* = \Delta \backslash \{0\} \mapsto S(z)x \in H$ *est analytique,* $\forall x \in H$.

Définition 1.7 *[16]* ***Le générateur infinitésimal*** *d'un* C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est l'opérateur :*

$$A : D(A) \subset H \to H$$
$$x \mapsto Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

défini pour tout x dans son domaine

$$D(A) = \left\{ x \in H \ : \ \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}.$$

Proposition 1.1 *[3] Le semi-groupe adjoint d'un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach réflexif est un C_0-semi-groupe.*

Remarque 1.1 *[3] L'adjoint de l'opérateur A noté A^*, génère le semi-groupe $\{S^*(t)\}_{t \geq 0}$ adjoint de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ qui est fortement continu sur le dual H^*de H.*

Théorème 1.1 *[3] Si l'opérateur A admet un système orthonormé complet de fonction propre $\left(\varphi_{n_j}\right)$ associées aux valeurs propres (λ_n) , λ_n étant de multiplicité r_n, alors le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ engendré par A s'exprime par*

$$S(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{r_n} \left\langle y, \varphi_{n_j} \right\rangle \varphi_{n_j} \ \forall y \in H.$$

Définition 1.8 *[13] Un semi groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est dit de contraction si*

$$\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Théorème de Hille-Yosida

Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$.

ii) Il existe $w > 0$ et $M > 1$ tel que $A_w = \{\lambda \in \rho(A) : \operatorname{Re} \lambda > w\}$ et pour $\lambda \in A_w$, on a

$$\|(\lambda I - A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n} \, , \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1.2.3 Application aux problèmes d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H, on veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t) & \text{si } t \in]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Définition 1.9 *[4] Soit $f \in L^1([0,T];H)$ et $y_0 \in H$, on appelle solution faible de* (1.1) *la fonction $y \in C([0,T];H)$ est donnée par*

$$y(t) = S(t)\,y_0 + \int_0^t S(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau,\ \ t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

On appelle solution classique de (1.1) *tout fonction $y \in C([0,T];H) \cap C^1([0,T];H)$ tel que $y \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$, et vérifiant* (1.2) *dans* $[0,T]$.

Remarque 1.2 *[4] Par définition, le problème* (1.1) *admet toujours une unique solution faible.*

Théorème 1.2 *[4] Soit $f \in L^1([0,T];H)$ et $y_0 \in H$, le problème* (1.1) *admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule* (1.2).
Preuve. *Il suffit de démontrer que toute solution classique est donnée par la formule* (1.2).
Soit y une solution classique, pour tout $t \in [0,T]$ on considère la fonction $z : [0,T] \to H$ défini par

$$z(\tau) = S(t-\tau)\,y(\tau),\, \tau \in [0,t].$$

Puisque $y \in D(A)$, la fonction $s \mapsto S(s)\,y(\tau)$ est dérivable pour tout $s > 0$. Par conséquent z est dérivable sur $[0,t]$ et on a

$$\begin{aligned} z'(\tau) &= -S(t-\tau)\,Ay(\tau) + S(t-\tau)\,y'(\tau) \\ &= -S(t-\tau)\,Ay(\tau) + S(t-\tau)\,Ay(\tau) + S(t-\tau)\,f(\tau) \\ &= S(t-\tau)\,f(\tau) \end{aligned}$$

comme $f \in L^1([0,T];H)$, on en déduit que $z' \in L^1([0,t];H)$ et en l'intégrant entre 0 et t, on obtient

$$z(t) = z(0) + \int_0^t S(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

c'est-à-dire

$$y(t) = S(t)\,y_0 + \int_0^t S(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

■

1.3 La contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini d'un état initial y_0 vers un état désiré y_d choisi a priori. La notion de la contrôlabilité est bien maîtrisée dans le cas système localisé (EDO).

1.3.1 Position du problème

Considérons un système d'écrit par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in]0, T[\\ y(0) = y_0 \in D(A) \end{cases} \tag{1.3}$$

Où

$*$ A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Hilbert H (espace des états).

$*$ $B \in L(U, H)$ c'est l'opérateur de contrôle .

$*$ y l'état du système.

$*$ y_0 l'état initiale.

$*$ $u \in L^2([0, T], U)$ la fonction de contrôle.

Sous les hypothèses citées ci-dessus, le système (1.3) admet une unique solution faible qui s'exprime par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \quad , t \in [0, T] \tag{1.4}$$

1.3.2 L'opérateur de contrôlabilité $\mathcal{L}_T$

Pour le système (1.3), considérons $\mathcal{L}_T : L^2([0, T], U) \to H$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{L}_T\, u = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \tag{1.5}$$

et son adjoint

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T^* : H &\longrightarrow L^2([0, T], U) \\ x &\longmapsto \mathcal{L}_T^* x = u. \end{aligned}$$

Où u est défini par

$\langle \mathcal{L}_T^* x, u\rangle_{L^2([0,T],U)} = \langle x, \mathcal{L}_T u\rangle_H$, $\forall u \in L^2([0, T], U)$,$\forall x \in H$.

L'adjoint $\mathcal{L}_T^*$ de $\mathcal{L}_T$ défini par

$$\mathcal{L}_T^* = B^* S^* (T - .) \tag{1.6}$$

En effet

$$\begin{aligned} \langle x, \mathcal{L}_T u\rangle_H &= \left\langle x, \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \right\rangle_H \\ &= \int_0^T \langle x, S(T-\tau)Bu(\tau)\rangle_H \; d\tau \\ &= \int_0^T \langle B^*S^*(T-\tau)x, u(\tau)\rangle_U \; d\tau \\ &= \langle B^*S^*(T - .)x, u\rangle_{L^2([0,T],U)} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}_T^* = B^* S^* \left(T - .\right).$$

Où B^* (resp $S^*(T - .)$) est l'opérateur adjoint de B (resp $S(T - .)$).
$\mathcal{L}_T$ sera utilisé par la suite pour obtenir des diverses définitions et propriétés de la contrôlabilité.
Pour l'étude de la contrôlabilité, sans perte de généralité on peut supposer que $y_0 = 0$.

1.3.3 Contrôlabilité Exacte, Faible

Définition 1.10 *[7] Le système* (1.3) *est dite exactement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *ssi*

$$\forall y_d \in H, \exists u \in L^2([0,T], U) \textit{ tel que } y\left(T\right) = y_d.$$

Définition 1.11 *[7] Le système* (1.3) *est dite faiblement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *ssi*

$$\forall y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T], U) \textit{ tel que } \left\|y\left(T\right) - y_d\right\|_H < \varepsilon.$$

Proposition 1.2 *[10]*
i) Le système (1.3) *est exactement contrôlable ssi* $\mathcal{L}_T$ *est surjective c'est-à-dire*

$$\operatorname{Im} \mathcal{L}_T = H.$$

ii) Le système (1.3) *est faiblement contrôlable ssi*

$$\overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T} = H.$$

Preuve.
i) Le système (1.3) est exactement contrôlable ssi

$$\forall y_0, y_d \in H, \exists u \in L^2([0,T], U) : y_d = y\left(T\right) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu\left(\tau\right)d\tau$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}_T$ est surjective ou $\operatorname{Im} \mathcal{L}_T = H$.
ii) Le système (1.3) est faiblement contrôlable

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \forall y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T], U) : \left\|y\left(T\right) - y_d\right\| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T], U) : \left\|S(T)y_0 + \mathcal{L}_T u\left(.\right) - y_d\right\| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall y_d \in H, \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T], U) : \left\|\mathcal{L}_T u\left(.\right) - \left(y_d - S(T)y_0\right)\right\| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T} = H.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.3 *[7] Le système* (1.3) *est faiblement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *ssi* $\mathcal{L}_T^*$ *est injective.*

Preuve. Le système (1.3) est faiblement contrôlable $\Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T} = H \Leftrightarrow \mathcal{L}_T^*$ est injective. ■

1.4 La contrôlabilité régionale

Soit $y_d \in L^2(\omega)$ un état désiré donné, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle $u \in U$ permet d'amener l'état du système (1.3) de y_0 à y_d juste sur la région ω et pas sur le domaine Ω tout entier.
On notera y_u la solution du système (1.3) excité par le contrôle u (pour tout t, $y_u(t)$ est la fonction de la variable d'espace $x \in \Omega$) et on prendra dans la suite $H = L^2(\Omega)$ et $U = \mathbb{R}^p$.

1.4.1 Définitions et caractérisation

Soit un sous-domaine (une région) ω de Ω supposons non vide. On considère la fonction restriction

$$\begin{aligned} \chi_\omega : L^2(\Omega) &\to L^2(\omega) \\ y &\mapsto \chi_\omega(y) = y|_\omega \end{aligned}$$

Dont l'adjointe $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \to L^2(\Omega)$ est

$$(\chi_\omega^* y)(x) = \begin{cases} y(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \backslash \omega \end{cases}$$

Définition 1.12 *[7] Le système (1.3) est dit exactement régionalement contrôlable sur ω (ou encore exactement ω-contrôlable) ssi*

$$\forall y_d \in L^2(\omega), \exists u \in L^2([0,T],U) \text{ tel que } y_u(T)|_\omega = y_d.$$

Définition 1.13 *[7] Le système (1.3) est dit faiblement régionalement contrôlable sur ω (ou encore faiblement ω-contrôlable) ssi*

$$\forall y_d \in L^2(\omega), \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T],U) \text{ tel que } \|y_u(T)|_\omega - y_d\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.3 *Le contrôle u dépend de la variable de temps mais implicitement, il dépend de la région ω.*

Proposition 1.4 *[7]*
i) Le système (1.3) est exactement régionalement contrôlable ssi $\operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T = L^2(\omega)$.
ii) Le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable ssi $\overline{\operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T} = L^2(\omega)$.

Preuve. La démonstration est similaire de proposition (1.2). ■

Proposition 1.5 *[7] Le système (1.3) est exactement régionalement contrôlable sur ω ssi*

$$\forall y^* \in L^2(\omega), \exists \gamma > 0 : \|B^* S^*(.)\, \chi_\omega^* y^*\|_{L^2([0,T],U)} \geq \gamma \|y^*\|_{L^2(\omega)}.$$

Preuve. Il est facile de voir que

$$(\chi_\omega \mathcal{L}_T)^* y^* = B^* S^* (T - .) \chi_\omega^* y^*$$

le résultat découle immédiatement du proposition (2.4) dans l'annexe $F = Id_{L^2(\omega)}, G = \chi_\omega \mathcal{L}_T$. ■

Proposition 1.6 *[7]*

i) Le système (1.3) *est exactement régionalement contrôlable ssi*

$$\ker \chi_\omega \oplus \operatorname{Im} \mathcal{L}_T = L^2(\Omega).$$

ii) Le système (1.3) *est faiblement régionalement contrôlable ssi*

$$\ker \chi_\omega \oplus \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T} = L^2(\Omega).$$

Preuve.

i)$\Rightarrow$) Soit $y \in L^2(\Omega)$,on a $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 = 0$ sur ω et $y_2 = 0$ sur $\Omega \backslash \omega$. Le système est exactement régionalement contrôlable, donc $y_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{L}_T$ autrement dit

$$\begin{aligned} \exists u &\in U : y_2 = \mathcal{L}_T u, \text{ et } y_1 = 0 \text{ sur } \omega. \\ &\Rightarrow y_1 \in \ker \chi_\omega \\ &\Rightarrow y \in \ker \chi_\omega \oplus \operatorname{Im} \mathcal{L}_T \\ &\Rightarrow \ker \chi_\omega \oplus \operatorname{Im} \mathcal{L}_T = L^2(\Omega). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Soit $y \in L^2(\omega)$ alors

$$\begin{aligned} \chi_\omega^* y &\in L^2(\Omega) \Rightarrow y_1 \in \ker \chi_\omega, y_2 \in L^2(\omega) : \chi_\omega^* y = y_1 + y_2 \\ &\Rightarrow y_1 \in \ker \chi_\omega, y_2 \in L^2(\omega) : \chi_\omega \chi_\omega^* y = \chi_\omega y_1 + \chi_\omega y_2 \\ &\Rightarrow y = \chi_\omega y_2 \\ &\Rightarrow y \in \operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T = L^2(\omega) \end{aligned}$$

alors le système (1.3) est exactement régionalement contrôlable.

ii) Si le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T}$ ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in U : \|y_2 - \chi_\omega \mathcal{L}_T u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon.$$

il vient

$$\|y_2 - \mathcal{L}_T u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T}$$

alors

$$y \in \ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T}$$

donc

$$\ker \chi_\omega \oplus \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}_T} = L^2(\Omega) .$$

■

Dans le cas où A génère un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ analytique, alors on a le résultat

Proposition 1.7 *[7] Soit ω une région non vide donnée de Ω. Le système (1.3) est faiblement ω-contrôlable si et seulement si*

$$\overline{\underset{n\geq 0}{\cup} \chi_\omega A^n BU} = L^2(\omega) \quad \forall t \in [0, T] .$$

Remarque 1.4 *[7] Il résulte immédiatement de ce qui précède les points suivants*
i) Un système qui est exactement (respectivement faiblement) contrôlable est exactement (respectivement faiblement) régionalement contrôlable sur toute région ω de Ω.
ii) Si ω_1 et ω_2 sont deux régions de Ω telles que $\omega_2 \subset \omega_1$, alors un système qui est exactement (respectivement faiblement) ω_1-contrôlable est exactement (respectivement faiblement) ω_2-contrôlable.

Corollaire 1.1 *[15] Le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable dans $L^2(\omega)$ sur $[0, T]$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes sont satisfaites*
i) $(\chi_\omega \mathcal{L}_T)^* (\chi_\omega \mathcal{L}_T)$ *est inversible.*
ii) $\ker (\chi_\omega \mathcal{L}_T)^* = \ker ((\chi_\omega \mathcal{L}_T)^* (\chi_\omega \mathcal{L}_T)) = \{0\} .$
iii) $(B^* S^*(t) \chi_\omega^*) y = 0 , \forall t \in [0, T] \Longrightarrow y = 0.$
iv) $\ker \mathcal{L}_T^* \cap \operatorname{Im} \chi_\omega^* = \{0\} .$

1.4.2 Notion d'actionneur

Les actionneurs peuvent être de nature, de forme, de conceptions diverses. Ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'intérieur du domaine Ω, sur sa frontière $\partial\Omega$ ou juste sur un point.

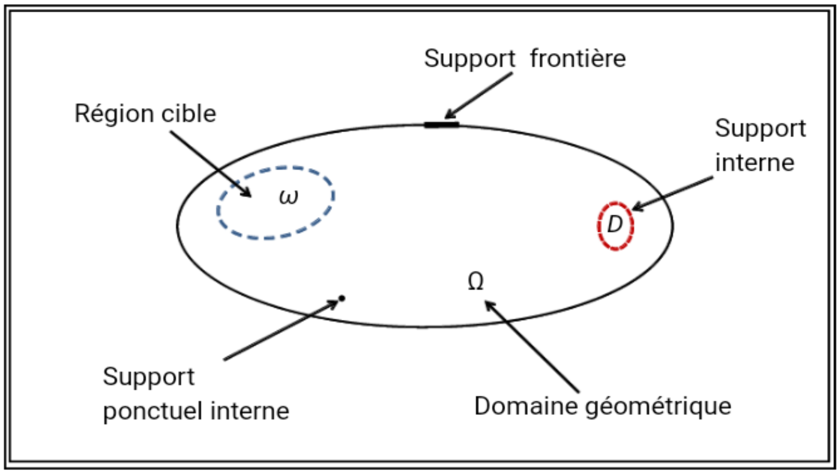

Figure 1 :[7] Objectif sur une cible régionale ω avec divers type d'actions.

Définition 1.14 *[17] Un actionneur est défini par un couple (D, g) où D une partie non vide fermée de $\bar{\Omega}$, est le support spatial de l'actionneur et $g \in L^2(D)$ définit la distribution des actionneurs sur D. Nous supposons que le système (1.3) est excité par p actionneurs $(D_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ tel que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$.*
Dans le cas d'un actionneur ponctuel interne ou frontière, les définitions restent les mêmes. Nous parlerons d'actionneur frontière (Γ_0, g) où $\Gamma_0 \in \partial\Omega$ et $g \in L^2(\Gamma_0)$, et d' actionneur ponctuel (b, δ_b), et nous considérons

$$\begin{cases} D_i \subset \Omega & \text{dans le cas interne} \\ D_i = \{b_i\} & \text{dans le cas ponctuel interne ou frontière} \\ D_i = \Gamma_i \subset \partial\Omega & \text{dans le cas zone frontière} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_i \in L^2(D_i) & \text{dans le cas zone} \\ g_i = \delta_{b_i} & \text{dans le cas ponctuel} \end{cases}$$

Définition 1.15 *[17] Une suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ est dite ω-stratégique si le système ainsi excité est faiblement ω-contrôlable.*
Le terme de contrôle dans le système (1.3) est donné par

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R}^p &\to L^2(\Omega) \\ u(t) &\mapsto Bu(t) = \sum_{i=1}^{p} \chi_{D_i} g_i u_i(t) \end{aligned}$$

où $u = (u_1, ..., u_p)^{tr} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ *et* $g = (g_1, ..., g_p)$ *avec* $g_i \in L^2(D_i)$ *,et on a*

$$B^* y = \begin{bmatrix} \langle g_1, y \rangle \\ \vdots \\ \langle g_p, y \rangle \end{bmatrix}$$

Remarque 1.5 *[2]On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlable mais qui ne sont pas contrôlable sur tout le domaine.*

Exemple 1.1 *[2] Considérons le système décrit par l'équation parabolique*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + \chi_{[a,b]} u(t) &]0,1[\times]0,T[\\ y(x,0) = 0 &]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 &]0,T[\end{cases} \tag{1.7}$$

Ce système est excité par un actionneur de type zone (D, g) *où* $D = [a, b] \subset]0, 1[$ *désigne le support de l'actionneur et* $g = 1$ *désigne la distribution spatiale de l'action sur* $[a, b]$ *tel que* $(b - a) \in \mathbb{Q}$*. Alors on a le résultat suivant*
Le système (1.7) *n'est pas contrôlable (au sens faible) sur* $]0, 1[$ *mais il est faiblement régionalement contrôlable sur* $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ *pour* α *et* β *convenablement choisis (pour plus de détails voir[7]).*

Dans la suite on suppose que A admet un système complet de fonctions propres $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ les valeurs propres associées supposées de multiplicité r_i. Sous ces hypothèses, nous avons le résultat de caractérisation suivant

Proposition 1.8 *[7]* ***Condition de rang***
Soit ω *une région non vide donnée de* Ω*. On suppose que* $\sup r_i = r < \infty$*, alors les actionneurs* $(D_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ *sont* ω*-stratégique (ou le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable) si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ p \geq r \\ ii)\ rang\ G_n = r_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

et G_n *est une matrice d'ordre* $(p \times r_n)$ *et d'élément notés* $(G_n)_{i,j}$ *avec*

$$G_n = \begin{bmatrix} \left\langle \varphi_{n_1}, g_1 \right\rangle_{L^2(D_1)} & \left\langle \varphi_{n_2}, g_1 \right\rangle_{L^2(D_1)} & \cdots & \left\langle \varphi_{n_{r_n}}, g_1 \right\rangle_{L^2(D_1)} \\ \left\langle \varphi_{n_1}, g_2 \right\rangle_{L^2(D_2)} & \left\langle \varphi_{n_2}, g_2 \right\rangle_{L^2(D_2)} & \cdots & \left\langle \varphi_{n_{r_n}}, g_2 \right\rangle_{L^2(D_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \varphi_{n_1}, g_p \right\rangle_{L^2(D_p)} & \left\langle \varphi_{n_2}, g_p \right\rangle_{L^2(D_p)} & \cdots & \left\langle \varphi_{n_{r_n}}, g_p \right\rangle_{L^2(D_p)} \end{bmatrix}$$

et on a aussi

i) Si le contrôle est appliqué à l'état du système (qu'il soit interne ou frontière), alors

$$(G_n)_{i,j} = \begin{cases} \left\langle \varphi_{n_j}, g_i \right\rangle_{L^2(D_i)} & \textit{cas zone} \\ \varphi_{n_j}(b_i) & \textit{cas ponctuel} \end{cases} \tag{1.8}$$

ii) Le contrôle est appliqué sur la dérivée de l'état du systéme, alors

$$(G_n)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_{n_j}(b_i)}{\partial v} & \textit{cas ponctuel frontière} \\ \left\langle \dfrac{\partial \varphi_{n_j}}{\partial v}, g_i \right\rangle_{L^2(\Gamma_i)} & \textit{cas zone frontière} \end{cases} \tag{1.9}$$

Preuve. La démonstration est développée dans le cas où l'action est du type zone dans le domaine Ω. Rappelons que la cotrôlabilité régionale sur ω est équivalente à $\ker \mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* = 0$ (corollaire(1.1)). Pour $z^* \in L^2(\omega)$, les $\left(\varphi_{i_j}\right)$ étant complet dans $L^2(\omega)$, nous avons

$$\mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* z^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (T-t)} \sum_{j=1}^{r_n} \left\langle \varphi_{n_j}, g_k \right\rangle_{L^2(D_k)} \left\langle \varphi_{n_j}, z^* \right\rangle \quad \forall k = \overline{1,p}.$$

*Si le système (1.3) n'est pas régionalement contrôlable sur ω, il existe $z^* \neq 0$ tel que $\mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* z^* = 0$ c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{r_n} \left\langle \varphi_{n_j}, g_k \right\rangle_{L^2(D_k)} \left\langle \varphi_{n_j}, z^* \right\rangle = 0 \quad \forall n \geq 1, k = \overline{1,p}.$$

Soit z_n défini par $z_n = \begin{bmatrix} \left\langle \varphi_{n_1}, z^* \right\rangle_{L^2(\omega)} \\ \vdots \\ \left\langle \varphi_{n_{r_n}}, z^* \right\rangle_{L^2(\omega)} \end{bmatrix}$, alors $G_n z_n = 0, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow rang G_n < r_n$.

*Inversement soit n tel que $rang G_n < r_n$ alors il existe $z_n = \begin{bmatrix} z_{n_1} \\ \vdots \\ z_{n_{r_n}} \end{bmatrix} \neq 0$ tel que $G_n z_n = 0$. Soit alors $z^* \in L^2(\omega)$ tel que

$$\left\langle z^*, \varphi_{j_k} \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \text{ si } j \neq n \text{ et } \left\langle z^*, \varphi_{n_k} \right\rangle_{L^2(\omega)} = z_{n_k}, 1 \leq k \leq r_n.$$

Donc on a

$$\sum_{i=1}^{r_j} \left\langle g_k, \varphi_{j_i} \right\rangle_{L^2(D_k)} \left\langle z^*, \varphi_{j_i} \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \;\; \forall j \neq n, 1 \leq k \leq p.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{r_n} \left\langle g_k, \varphi_{n_i} \right\rangle_{L^2(D_k)} \left\langle z^*, \varphi_{n_i} \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \;\; \forall 1 \leq k \leq p$$

autrement dit, il existe $z^* \neq 0 \in L^2(\omega)$ tel que $\mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* z^* = 0$, c'est-à-dire que le système n'est pas régionalement contrôlable sur ω. ■

1.5 Difficultés

1.5.1 Sur le choix de l'espace d'état

Nous avons choisi comme espace d'état $H = L^2(\Omega)$. Ce choix est correct compte tenu des profils raisonnables qu'on peut considérer, d'énergie finie. Si maintenant, l'actionneur (D, g) amène le système vers un état y_d qui est moins régulier, c'est-à-dire $y_d \in Y$ avec $H \subset Y$, alors on a deux possibilités
i) Y convient comme nouveau choix d'espace d'état.
ii) agir sur la régularité du contrôle pour ramener l'état y_d à H.

1.5.2 Sur le nombre d'actionneurs

La caractérisation des actionneurs ω-stratégiques fait apparaître une condition sur le nombre minimum d'actionneurs permettant d'amener le système vers des états désirés dans H. En fait, cette condition peut être relaxée moyennant une faible perturbation de la frontière du domaine Ω. En effet, on montre qu'on peut ramener l'ordre de multiplicité des valeurs propres à $r_n = 1 \; \forall n$. Avec cette propriété, la condition 1 de la proposition (1.8) devient $p \geq 1$. Et ainsi, si la deuxième condition (condition de rang) est satisfaite, alors l'actionneur est ω-stratégique.
(Pour plus de détails voir [9]).

1.6 Contrôle assurant la contrôlabilité régionale

Le but de cette section est de chercher un contrôle assurant le transfert régionale qui soit à énergie minimale. Evidemment on peut utiliser les résultats connus sur la contrôlabilité des systèmes distribués, mais la difficulté apparait si l'état désiré est donné uniquement sur la région ω. De plus nous avons montré que le coût de transfert régional est moindre.
Soit $y_d \in L^2(\omega)$ un état désiré donné. On se pose le problème de transférer, à moindre coût, le système (1.3) de y_0 à y_d à l'instante T. On prendra dans la suite $H = L^2(\Omega)$, notée encore y_u la solution de système (1.3).
Pour cela, considérons l'ensemble

$$G = \{g \in H \quad \text{tel que} \;\; g = 0 \;\; \text{sur}\; \omega\} \tag{1.10}$$

Ainsi la question de transfert régionale devient

Problème

Existe-t-il un contrôle a énergie minimale $u \in U$ tel que

$$y_u(T) - y_d \in G \ \ ?$$

Pour la résolution de ce problème, posons

$$U_{ad} = \{u \in U : y_u(T) - y_d \in G\}.$$

Le problème de la contrôlabilité régionale à énergie minimale peut être formulé sous la forme

$$\begin{cases} \inf \|u\|_U^2 \\ u \in U_{ad} \end{cases} \tag{1.11}$$

Pour résoudre ce problème nous proposons une approche appelé " approche générale".

1.6.1 Approche générale

On considère le système (1.3) et posons

$$\hat{G} = \{g \in H^* \text{ tel que } \ g = 0 \ \text{ sur } \Omega \backslash \omega\} \tag{1.12}$$

Pour $\varphi_0 \in \hat{G}$, considérons le système suivant dans H^*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = -A^* \varphi(t) \qquad t \in]0.T[\\ \varphi(T) = \varphi_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

et l'application

$$\|\varphi_0\|_{\hat{G}}^2 = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 \, dt \tag{1.14}$$

Soit encore le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t) = A\psi(t) + BB^* \varphi(t) \qquad t \in]0.T[\\ \psi(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.15}$$

On définit l'opérateur $\mathcal{M}$ par

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi(T)) \tag{1.16}$$

où $\mathcal{P} = \chi_\omega^* \chi_\omega$. L'opérateur $\mathcal{M}$ est un opérateur affin que l'on peut décomposer sous la forme

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi_0(T) + \psi_1(T))$$

où ψ_0 et $\psi_1$sont les solutions des systèmes (117) et (118) respectivement avec

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial t}(t) = A\psi_0(t) & t \in]0.T[\\ \psi_0(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t) = A\psi_1(t) + BB^*\varphi(t) & t \in]0.T[\\ \psi_1(0) = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Avec ces divers systèmes nous allons considérer l'opérateur qui nous amène de φ_0 à $\psi_1(T)$ par les étapes suivantes

$$\varphi_0 \longrightarrow \boxed{\text{par résolution de(1.13)}}\ \varphi \longrightarrow \boxed{\text{par résolution de(1.18)}}\ \psi_1 \longrightarrow \psi_1(T)$$

On pose alors

$$\Lambda\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi_1(T)) \tag{1.19}$$

L'opérateur Λ est borné et symétrique. En effet pour tout $\varphi_0, \hat{\varphi}_0 \in \hat{G}$, nous avons

$$\langle \Lambda\varphi_0, \hat{\varphi}_0 \rangle = \langle \psi_1(T), \hat{\varphi}_0 \rangle = \int_0^T B^*\varphi(t)\, B^*\hat{\varphi} dt.$$

Si φ_0 est choisi tel que φ conduit à $y(x,t) = \psi(x,t)$ sur ω, alors le problème de la contrôlabilité régionale sur ω revient à la résolution de l'équation suivante

$$\Lambda\varphi_0 = \chi_\omega^* y_d - \mathcal{P}(\psi_0(T)) \tag{1.20}$$

Alors, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.9 *Soit ω une région non vide donné de Ω. Si le système (1.3) est faiblement ω- contrôlable alors l'équation (1.20) admet une solution unique $\varphi_0 \in \hat{G}$. Le contrôle*

$$u^* = B^*\varphi(t) \tag{1.21}$$

permet le transfert du le système (1.3) dans G à l'instant T, ou encore qu'il réalise

$$y_{u^*}(T)|_\omega - y_d \in G$$

de plus ce contrôle est la solution du problème (1.11), c'est -à-dire encore qu'il minimise le coût de transfert régionale

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \tag{1.22}$$

Preuve.

i) Dans un premier temps nous montrons que si le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable alors (1.14) définit une norme. Dire que $\|\varphi_0\| = 0$ revient à

$$\int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow B^*\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow B^*S^*(T-t)\varphi_0 = 0.$$

Le système (1.3) est faiblement régionalement contrôlable $\Leftrightarrow$

$$\overline{\operatorname{Im}\chi_\omega \mathcal{L}_T} = L^2(\omega) \Leftrightarrow \ker \mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* = \{0\}.$$

Par conséquent la faible régionale contrôlabilité entraîne que si $B^*S^*(T-t)\varphi_0 = 0$ et $\varphi_0 \in \hat{G}$ alors $\varphi_0 = 0$.

On note $\hat{G}$ le complété de l'ensemble $\hat{G}$ par rapport à la norme (1.14). On a

$$\hat{G}^* = \{y \in H : y|_\omega \in F^*\}.$$

Où F désigne le complété de $L^2(\omega)$ par rapport à $\|.\|_F$ (pour plus de détails voir [7]).

Considérons l'opérateur Λ, nous avons

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0\rangle_{\hat{G}^*,\hat{G}} = \langle \mathcal{P}(\psi_1(T)), \varphi_0\rangle = \langle \psi_1(T), \varphi_0\rangle.$$

Mais

$$\psi_1(T) = \int_0^T S(T-s)BB^*\varphi(s)\,ds$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0\rangle_{\hat{G}^*\hat{G}} &= \left\langle \int_0^T S(T-s)BB^*\varphi(s)\,ds, \varphi_0 \right\rangle \\
&= \int_0^T \langle B^*\varphi(s)\,ds, B^*S^*(T-s)\varphi_0\rangle \\
&= \int_0^T \|B^*\varphi(s)\|^2 ds = \|\varphi_0\|_{\hat{G}}^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\Lambda : \hat{G} \to \hat{G}^*$ est une bijection. Utilisons le fait que $U_{ad} \neq \phi$ nous avons $y_d - \psi_0(T)|_\omega \in F^*$ et donc l'équation(1.20) admet une solution unique φ_0. On pose $u^*(t) = B^*\varphi(t)$ dans G. Nous avons $y_u(T)|_\omega = y_d$.

ii) Pour l'optimalité de u, considérons u et v dans U_{ad}, alors $y(T,u) - y_d$, $y(T,v) - y_d \in G$, par suite $(y(T,v) - y(T,u))|_\omega = 0$.

Donc

$$\langle \varphi_0, (y(T,v) - y(T,u))\rangle = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\left\langle \int_0^T S(T-s)\,B\,(v(s)-u(s))\,ds, \varphi_0 \right\rangle = 0.$$

Soit encore

$$\int_0^T \langle v(s)-u(s), B^*S^*(T-s)\,\varphi_0 \rangle \,ds = 0$$

ce qui donne finalement

$$\int_0^T \langle B^*\varphi(s), v(s)-u(s) \rangle \,ds = 0$$

on a

$$\mathcal{J}'(u^*)(u-v) = 2\int_0^T \langle u^*(t), (u(t)-v(t)) \rangle \,dt$$

en effet

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\ (u^*+t(u-v)) &= \int_0^T \|u^*(t)+t(u(t)-v(t))\|^2\,dt \\
&= \int_0^T \|u^*(t)\|^2 + t^2\,\|(u(t)-v(t))\|^2\,dt + 2\langle u^*(t), u(t)-v(t)\rangle\,dt \\
&\Rightarrow \frac{\mathcal{J}\ (u^*+t(u-v)) - \mathcal{J}\ (u^*)}{t} = \int_0^T t\,\|(u(t)-v(t))\|^2 + 2\langle u^*(t), u(t)-v(t)\rangle\,dt \\
&\Rightarrow \mathcal{J}\,'(u^*)(u-v) = 2\int_0^T \langle u^*(t), (u(t)-v(t))\rangle\,dt
\end{aligned}$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\,'(u^*)(v-u) &= 2\int_0^T \langle u^*(t), v(t)-u(t)\rangle\,dt \\
&= 2\int_0^T \langle B^*\varphi(t), v(t)-u(t)\rangle\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui établit l'optimalité du contrôle u^*. ∎

Chapitre 2

Contrôlabilité régionale des systèmes paraboliques

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats établis au chapitre précédent pour la contrôlabilité régionale de système de type parabolique. Nous donnons une méthode de résolution pour différents types de contrôles. Les différents développements sont illustrés par des exemples qui montrent l'efficacité de l'approche utilisée. On terminer le chapitre par une simulation.

2.1 Système considéré

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$ et ω une partie non vide de Ω, pour $T > 0$ on note $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$. Nous considérons un système décrit par l'équation parabolique suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \text{dans} \quad Q \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Où :

$*$ A est un opérateur linéaire elliptique du second ordre qui engendre un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu sur l'espace des états H.

$*$ B est un opérateur qui peut être borné ou non, dépendant du type de l'actionneur considéré.

$*$ y_0 l'état initiale.

$*$ $u \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ la fonction de contrôle.

$*$ y_u dénote la solution de l'équation (2.1) tel que $y_u \in H$.

Considérons les ensembles suivants

$$G = \{g \in H : g = 0 \quad \text{sur} \ \ \omega\} \tag{2.2}$$

et

$$\hat{G} = \{\hat{g} \in H^* : \hat{g} = 0 \quad \text{sur} \ \Omega \setminus \omega\}. \tag{2.3}$$

Donc il est facile de voir que

$$\langle g, \hat{g} \rangle = \int_{\Omega} g\hat{g} \ dx = \int_{\omega} g\hat{g} \ dx + \int_{\Omega \setminus \omega} g\hat{g} \ dx = 0.$$

Considérons le problème qui consiste à ramener le système (2.1) à un état désiré y_d sur la partie ω. Autrement dit, il s'agit de chercher un contrôle $u \in U$ tel que

$$y_u(T) - y_d \in G.$$

Dans la suite, le système considéré sera excité par un seul actionneur pouvant être ponctuel, zone interne ou sur la frontière. L'approche se généralise sans difficulté dans le cas multiplicateur.

2.2 Contrôle interne

Considérons le système (2.1) excité par un actionneur interne (zone ou ponctuel).

2.2.1 Contrôle ponctuel interne

Si on considère le système (2.1) dans le cas où il est excité par un actionneur ponctuelle (b, δ_b) où $b \in \Omega$ est le support de l'actionneur qui représente l'emplacement, et δ_b définit la distribution spatiale du contrôle sur b et $u \in L^2(0, T)$, le système (2.1) est excité par un contrôle du type

$$Bu(t) = \delta_b(x)\, u(t) \tag{2.4}$$

Dans ce cas, $y_u(T) \in H = H^{-1}(\Omega)$.
Pour $\varphi_0 \in \hat{G}$, on considère le système homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = -A^*\varphi(t) & \text{dans} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce problème admet une solution unique $\varphi \in L^2([0, T]; C^0(\Omega))$ (voir [12]).

Soit l'application

$$\|\varphi_0\|_{\hat{G}}^2 = \int_0^T \varphi^2(b,t)\,dt \tag{2.6}$$

qui définit une semi-norme sur $\hat{G}$.
Soit encore le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t) = A\psi(t) + \varphi(b,t)\;\;\delta_b(x) & \text{dans} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

On définit l'opérateur $\mathcal{M}$ par

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi(T)) \tag{2.8}$$

où $\mathcal{P} = \chi_\omega^* \chi_\omega$, alors $\mathcal{M}$ est un opérateur affine que l'on peut décomposer sous la forme

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi_0(T) + \psi_1(T)) \tag{2.9}$$

où ψ_0 et $\psi_1$sont les solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial t}(t) = A\psi_0(t) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_0(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t) = A\psi_1(t) + \varphi(b,t)\;\;\delta_b(x) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_1 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_1(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

Avec ces divers systèmes nous allons considère l'opérateur qui nous amène de φ_0 à $\psi_1(t)$.
On pose alors

$$\Lambda\varphi_0 = \mathcal{P}(\psi_1(T)) \tag{2.12}$$

Il est alors évident que le problème de la contrôlabilité régionale revient à la résolution de l'équation

$$\Lambda\varphi_0 = \mathcal{P}(y_d - \psi_0(T)) \tag{2.13}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.1

Soit ω une région non vide donnée de Ω. Si l'actionneur (b, δ_b) est ω-stratégique alors l'équation (2.13) admet une solution unique $\varphi_0 \in \hat{G}$ et le contrôle donné par $u^* = \varphi(b,t)$ permet le transfert régionale du système (2.1) de y_0 à y_d sur ω. Ce contrôle minimise la fonction coût $\mathcal{J}(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T u(t)^2\,dt$.

Preuve.

i) Montrons que si l'actionneur (b, δ_b) est ω-stratégique, alors (2.6) définit une norme sur $\hat{G}$

$$\|\varphi_0\|_{\hat{G}} = 0 \Leftrightarrow \varphi(b,t) = 0 \text{ p.p sur } [0,T]$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i(T-t)} \langle \varphi_0, \varphi_i \rangle \varphi_i(b) = 0 \text{ p.p sur } [0,T]$$

cela entraine

$$\langle \varphi_0, \varphi_i \rangle \varphi_i(b) = 0 \ \ \forall i = 1, \infty.$$

Comme (b, δ_b) est ω-stratégique alors

$$\varphi_i(b) \neq 0 \quad \forall i = 1, \infty.$$

En effet, si on pose qu'il existe $i_0 \geq 1$ tel que $\varphi_{i_0}(b) = 0$ alors d'après la proposition (1.8) $rangG_n < r$. On a une contradiction.

On déduit que

$$\langle \varphi_0, \varphi_i \rangle = 0 \ \forall i = 1, \infty$$

ou encore $\varphi_0 = 0$. Donc (2.6) est une norme.

ii) Nous allons montrer que Λ est un isomorphisme de $\hat{G}$ dans $G^{\perp}$.

Nous avons

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0 \rangle = \langle \mathcal{P}(\psi_1(T)), \varphi_0 \rangle = \langle \psi_1(T), \varphi_0 \rangle_{\omega}.$$

On multiplie l'équation (2.11) par φ et on intégré par partie on a

$$\int_Q \psi_1'(t)\varphi(t)\,dtdx = \int_Q A\psi_1(t)\varphi(t)\,dtdx + \int_Q \varphi(b,t)^2\,dtdx$$

ce qui donne

$$\int_\Omega |\psi_1(t)\varphi(t)|_0^T\,dx - \int_Q \psi_1(t)\varphi'(t)\,dtdx = \int_Q A\psi_1(t)\varphi(t)\,dtdx + \int_0^T \varphi(b,t)^2\,dt$$

on utilise la formule de Green, on obtien

$$\langle \psi_1(T), \varphi_0 \rangle = \langle \psi_1(0), \varphi(0) \rangle - \int_Q \psi_1(-\varphi' - A^*\varphi)dxdt - \int_\Sigma \varphi \frac{\partial\psi_1}{\partial v_A}dxdt + \int_\Sigma \psi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial v_{A^*}}dxdt = \int_0^T \varphi(b,t)^2\,dt$$

et en utilisant les conditions initiales et aux limites on a

$$\langle \psi_1(T), \varphi_0 \rangle = \int_0^T \varphi(b,t)^2\,dt.$$

Donc

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0 \rangle = \|\varphi_0\|_{\hat{G}}^2 .$$

D'ou la continuité de la forme linéaire Λ qui admet un prolongement par continuité à la fermeture de $\hat{G}$. Nous présentons ce prolongement avec la même notation, donc Λ est une forme linéaire continue coercive sur l'espace $\hat{G}$.

Alors, d'après le lemme de Lax-Milgram (4.1) cité dans l'annexe pour tout $\xi \in \hat{G}$ et pour chaque $\eta \in G^{\perp}$ l'équation $\Lambda\varphi = \eta$ admet une solution unique, on résulte que Λ est un isomorphisme de $\hat{G}$ en $G^{\perp}$. D'ou l'équation (2.13) admet une solution unique. De plus il est claire que le contrôle $u = \varphi(b,t)$ amène le système (2.1) à y_d sur ω.

Ce contrôle est optimal. En effet pour $u, v \in L^2(0,T)$, on a

$$\mathcal{J}'(u)(v-u) = \int_0^T (u(t))(v(t)-u(t))\,dt = \int_0^T \varphi(b,t)(v(t)-u(t))\,dt.$$

Appliquer la formule de Green à $\{\varphi, y_v - y_u\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi(T), y_v(T) - y_u(T)\rangle - \langle \varphi(0), y_v(0) - y_u(0)\rangle \\
= & \int_Q \left[\varphi'(t)(y_v(t) - y_u(t)) + \varphi(t)(y_v'(t) - y_u'(t))\right] dtdx \\
= & \int_Q \left[\varphi(t) A(y_v(t) - y_u(t)) - A^*\varphi(t)(y_v(t) - y_u(t))\right] + (v(t) - u(t))\varphi(b,t)\,dtdx \\
= & \int_\Sigma (y_v - y_u)\frac{\partial\varphi}{\partial v_{A^*}} dxdt + \int_\Sigma \varphi\left(\frac{\partial y_v}{\partial v_A} - \frac{\partial y_v}{\partial v_A}\right) dtd\xi + \int_0^T (v(t) - u(t))\varphi(b,t)\,dt
\end{aligned}$$

à partir des condition initiale et aux limites, on a

$$\langle \varphi_0, y_v(T) - y_u(T)\rangle = \int_0^T (v(t) - u(t))\varphi(b,t)\,dt$$

comme $y_v(T) - y_d, y_u(T) - y_d \in G$ et $\varphi_0 \in \hat{G}$, on déduit que

$$\int_0^T (v(t) - u(t))\varphi(b,t)\,dt = 0$$

ou encore

$$\mathcal{J}'(u)(v-u) = 0$$

de la convexité de $\mathcal{J}$, on déduit le résultat (établit l'optimalité). ■

2.2.2 Contrôle zone interne

Si on considère le système (2.1) dans le cas où il est excité par un actionneur zone (D, g) avec $D \subset \Omega$ est le support de l'actionneur et $g \in L^2(D)$ définit la distribution spatiale du contrôle sur D. Dans ce cas on a

$$Bu = \chi_D g\left(x\right) u\left(t\right). \tag{2.14}$$

Le système (2.1) admet une solution unique telle que $y_u\left(T\right) \in H = H_0^1\left(\Omega\right).$
G et $\hat{G}$ sont alors définis par (2.2) et (2.3).
Considérons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\left(t\right) = -A^{*}\varphi\left(t\right) & \text{dans} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \varphi\left(0\right) = \varphi_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

Ce problème admet une solution unique $\varphi \in L^2(Q)$ voir [12].
Soit l'application

$$\left\|\varphi_0\right\|_{\hat{G}}^2 = \int_0^T \left\langle g, \varphi\left(t\right)\right\rangle_{L^2(D)}^2 dt \tag{2.16}$$

définit une semi-norme sur $\hat{G}$.
Soit encore le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\left(t\right) = A\psi\left(t\right) + \left\langle g, \varphi\left(t\right)\right\rangle_{L^2(D)} g\left(x\right)\chi_D & \text{dans} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi\left(0\right) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

On définit l'opérateur $\mathcal{M}$ de $\hat{G}$ dans $G^{\perp}$ par

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}\left(\psi\left(T\right)\right) \tag{2.18}$$

$\mathcal{M}$ s'écrit

$$\mathcal{M}\varphi_0 = \mathcal{P}\left(\psi_0\left(T\right) + \psi_1\left(T\right)\right) \tag{2.19}$$

où ψ_0 est la solution de l'équation (2.10) et $\psi_1$satisfait l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}\left(t\right) = A\psi_1\left(t\right) + \left\langle g, \varphi\left(t\right)\right\rangle_{L^2(D)} g\left(x\right)\chi_D & \text{dans} \quad Q \\ \psi_1 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_1\left(0\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

En pose alors

$$\Lambda\varphi_0 = \mathcal{P}\left(\psi_1\left(T\right)\right) \tag{2.21}$$

le problème de la contrôlabilité régionale revient à la résolution de l'équation

$$\Lambda\varphi_0 = \mathcal{P}\left(y_d - \psi_0\left(T\right)\right) \tag{2.22}$$

Nous avons alors le résultat suivant

Proposition 2.2 *Si l'actionneur (D, g) est ω-stratégique alors l'équation (2.22) admet une solution unique $\varphi_0 \in \hat{G}$. Le contrôle optimale permet le transfert régionale du système (2.1) de y_0 à y_d sur ω est donné par $u\left(t\right) = \left\langle g, \varphi\left(t\right)\right\rangle_{L^2(D)}$.*

La démonstration est similaire au cas précédent.

2.3 Contrôle frontière

Considérons le système excité par un actionneur frontière (zone ou ponctuel).

2.3.1 Contrôle ponctuel frontière

On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}\left(t\right) = Ay\left(t\right) & \text{dans} \quad Q \\ y\left(x,t\right) = \delta_b\left(x\right)u\left(t\right) & \text{sur} \quad \Sigma \\ y\left(0\right) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

où $b \in \partial\Omega$.
La procédure est similaire à celle du cas ponctuel interne.
Soit encore le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\left(t\right) = A\psi\left(t\right) & \text{dans} \quad Q \\ \psi = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_A}\left(b,t\right)\delta_b\left(\xi\right) & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi\left(0\right) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.24}$$

telle que $\psi = \psi_0 + \psi_1$
où ψ_0 et $\psi_1$sont les solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial t}\left(t\right) = A\psi_0\left(t\right) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_0\left(0\right) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t) = A\psi_1(t) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_1 = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_A}(b,t)\,\delta_b(\xi) & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_1(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.26}$$

Il est alors évident que le problème de transfert régionale de y_0 à y_d sur ω revient à la résolution de l'équation (2.22).

Nous avons alors le résultat suivant

Corollaire 2.1

Si l'actionneur (b, δ_b) est ω-stratégique. Le contrôle

$$u^*(t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial v_A}(b,t)\,\delta_b(\xi)$$

assure le transfert régionale à coût minimum.

2.3.2 Contrôle zone frontière

On suppose que le système est excité par un actionneur zone frontière ω-stratégique $(\Gamma, \gamma)\,, \Gamma \subset \partial\Omega$, et $\gamma \in L^2(\Gamma)$, et on considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t) = Ay(t) & \text{dans} \quad Q \\ y = \chi_\Gamma \gamma(\xi)\, u(t) & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.27}$$

On munit $\hat{G}$ d'une semi-norme

$$\|\varphi_0\|^2_{\hat{G}} = \int_0^T \langle \gamma, \varphi(t) \rangle^2_{L^2(\Gamma)}\, dt. \tag{2.28}$$

La démarche est similaire au cas zone .

Soit encore le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t) = A\psi(t) & \text{dans} \quad Q \\ \psi = \chi_\Gamma \gamma(\xi)\;\, u(t) & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.29}$$

telle que $\psi = \psi_0 + \psi_1$

où ψ_0 et $\psi_1$sont les solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial t}(t) = A\psi_0(t) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_0(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.30}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(t) = A\psi_1(t) & \text{dans} \quad Q \\ \psi_1 = \chi_\Gamma \gamma(\xi)\ u(t) & \text{sur} \quad \Sigma \\ \psi_1(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.31}$$

Donc

$$u^*(t) = -\left\langle \gamma, \frac{\partial \varphi}{\partial v_A}(t) \right\rangle_\Gamma \tag{2.33}$$

est le contrôle optimale qui permet le transfert du système (2.27) de y_0 à y_d sur ω.

$*$L'expression de contrôle optimale pour chaque type d'actionneur est résumée dans le tableau suivante

Actionneur	**contrôle**
Ponctuel (b, δ_b)	$\varphi(b,t)$
Zone (D, g)	$\langle g, \varphi(t) \rangle_{L^2(D)}$
Ponctuel frontière (b, δ_b)	$-\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(b,t)\,\delta_b(\xi)$
Zone frontière (Γ, γ)	$-\left\langle \gamma, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(t) \right\rangle_\Gamma$

2.4 Simulation

Dans ce paragraphe, nous proposons une approche au problème de la contrôlabilité régional en vue d'une simulation numérique. Nous donnons un algorithme permettant de calculer le contrôle optimal permettant le transfert régionale du système.

Dans le cas où l'action est ponctuelle nous avons

Algorithme

(1) Initialiser $\varphi_0 \in \hat{G}$.

(2) Résoudre l'équation (2.5) $(\rightarrow \varphi(b,t))$.

(3) Résoudre l'équation (2.10) $(\rightarrow \psi_0(.,T))$.

(4) Résoudre l'équation (2.11) $(\rightarrow \psi_1(.,T))$.

(5) Tester si $\|y_d - \psi_0(.,T) - \psi_1(.,T)\|^2_{L^2(\omega)} > \varepsilon$ retour à l'étape (1). si non le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = \varphi(b,t)$.

ε étant la marge d'erreur permise.

Exemple 2.1 *On considère le système parabolique monodimensionnel décrit par*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0.01\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \delta_b(x)\,u(t) & (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & t \in]0,T[\\ y(x,0) = 0 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{2.34}$$

Soit $\omega = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ *la région ou l'on désire amener le système à* y_d

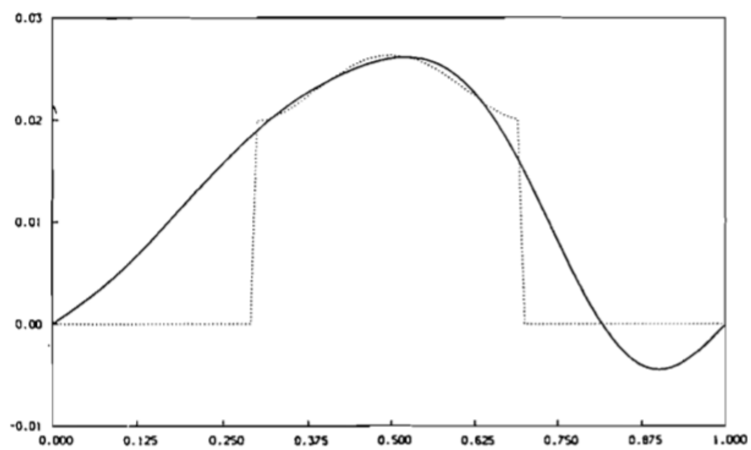

Figure 2 : [8] Etat désiré exacte y_d *et état atteint* $\tilde{y}_d$ *sur la région* ω

la figure 2 montre l'état désiré du système (en pointillé) et l'état atteint sur la région $\omega = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$*(en continu).*

Dans cet exemple, nous avons attient l'état désire sur ω *avec une erreur* $\|y_d - \tilde{y}_d\|^2_{L^2(\omega)} = 1.5.\ 10^{-5}$.

Le contrôle est calculer à l'aide de la formule $u^*(t) = \varphi(b, t)$ *est donné par la figure 3*

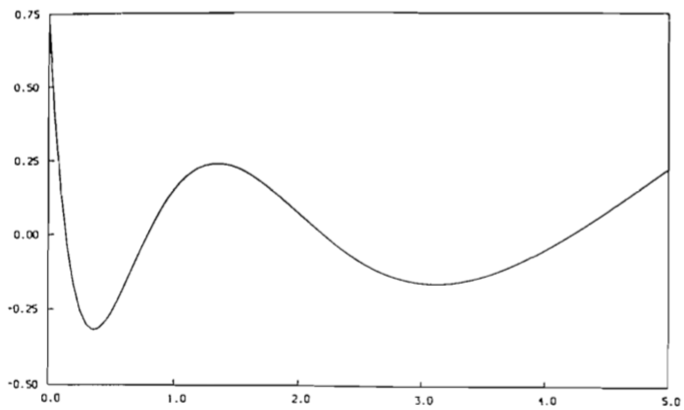

Figure 3 : [8] Fonction contrôle pour le système (2,34)

Chapitre 3

Contrôlabilité régionale d'un système hyperbolique linéaire

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats établis au premier chapitre pour la contrôlabilité régionale de système de type hyperbolique. Nous donnons quelques définitions et propriétés liées à la contrôlabilité après nous appliquons une méthode de résolution pour un contrôle régionale interne.

3.1 Définitions et propriétés

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) de frontière assez régulière $\partial\Omega$, pour $T > 0$ on note $Q = \Omega\times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0, T[$. Nous considérons un système décrit par l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = Bu & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = y_0(x), \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où

*A est un opérateur linéaire elliptique du second ordre à résolvante compacte qui engendre un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$fortement continu sur l'espace des états H.

*$U = L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$ est l'espace des contrôles.

*$(y_0, y_1) \in H$ les états initiales.

*$\left(y_u, \dfrac{\partial y_u}{\partial t}\right)$ dénote la paire solution de l'équation (3.1) tel que$\left(y_u(T), \dfrac{\partial y_u}{\partial t}(T)\right) \in H$.

Soit ω un ouvert non vide de Ω et soit la fonction restriction

$$\begin{aligned} \chi_\omega : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\to L^2(\omega) \times L^2(\omega) \\ (z_1, z_2) &\to (z_1, z_2)|_\omega. \end{aligned}$$

Dont l'adjointe $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \times L^2(\omega) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est définie par

$$\chi_\omega^*(z_1, z_2)(x) = \begin{cases} (z_1, z_2)(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } \quad x \in \Omega \backslash \omega \end{cases}$$

Donnons des définitions de contrôl régionale compatibles à notre cas comme suite

Définition 3.1 *Le système* (2.1) *est dit exactement régionalement contrôlable sur* ω *(ou encore exactement* ω*-contrôlable) ssi*

$$\forall y_d^1, y_d^2 \in L^2(\omega), \exists u \in L^2([0,T], U) \text{ tel que } \left(y_u(T), \frac{\partial y_u}{\partial t}(T)\right)|_\omega = \left(y_d^1, y_d^2\right).$$

Définition 3.2 *Le système* (2.1) *est dit faiblement régionalement contrôlable sur* ω *(ou encore faiblement* ω*-contrôlable) ssi*

$$\forall y_d^1, y_d^2 \in L^2(\omega), \varepsilon > 0, \exists u \in L^2([0,T], U) \text{ tel que } \left\|y_u(T) - y_d^1\right\|_{L^2(\omega)} + \left\|\frac{\partial y_u}{\partial t}(T) - y_d^2\right\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.1 *Si* $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \|u\|^2 dt$ *désigne le coût de transfert, alors pour tout* $\omega \subset \Omega$*, le coût de transfert régional sur* ω *est inférieur à celui du transfert sur tout* Ω*. En effet notons*

$$\mathcal{W}_\Omega = \left\{u \in L^2[0,T] / \left(y_u(T), \frac{\partial y_u}{\partial t}(T)\right) = \left(y_d^1, y_d^2\right) \quad \text{sur } \Omega\right\}.$$

$$\mathcal{W}_\omega = \left\{u \in L^2[0,T] / \left(y_u(T), \frac{\partial y_u}{\partial t}(T)\right) = \left(y_d^1, y_d^2\right) \quad \text{sur } \omega\right\}.$$

Comme de façon évident, $\mathcal{W}_\Omega \subset \mathcal{W}_\omega$*, alors il s'en suit*

$$\min_{u \in \mathcal{W}_\omega} \mathcal{J}(u) \leq \min_{u \in \mathcal{W}_\Omega} \mathcal{J}(u).$$

3.2 Problème de contrôle régional interne

Considérons le système hyperbolique évoluant sur Ω à un état désiré (y_d^1, y_d^2) sur un sous région $\omega \subset \Omega$ et excité par un actionneur zone interne (g, D).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \triangle y = \chi_D g u & \text{dans } Q \\ y(x,0) = y_0(x), \ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) & \text{dans } \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.2}$$

où $(y_0, y_1) \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$.

et le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0,T) \text{ t.q} \\ \min\limits_{u \in L^2(0,T)} \mathcal{J}(u) = \dfrac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(0,T)} \\ y_u(T) = y_d^1 \text{ et } \dfrac{\partial y_u}{\partial t}(T) = y_d^2 \text{ sur } \omega \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $\left(y_u, \dfrac{\partial y_u}{\partial t}\right)$ la solution de (3.2), $(y_d^1, y_d^2) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ est l'état désiré au temps T.
Considérons l'ensemble suivant

$$G = \{g \in H : g = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\}.$$

Ce problème sera résolu par une approche qui est une extension de méthode HUM (voir 1). Les étapes sont les suivant
Soit $(\varphi_0, -\varphi_1) \in G$, on considère le système homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 0 & \text{dans } Q \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x), \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,T) = \varphi_1(x) & \text{dans } \Omega \\ \varphi(\xi, t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.4}$$

Ce problème admet une solution unique $\varphi \in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$, (voir [12]).
Soit l'application

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|^2_G = \int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} \, dt \tag{3.5}$$

qui définit une semi-norme sur G
et nous considérons aussi le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = -\langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} \chi_D g & \text{dans } Q \\ \psi(x,0) = y_0(x), \ \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = y_1(x) & \text{dans } \Omega \\ \psi(\xi, t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.6}$$

(3.6) admet une solution unique tel que $\left(\psi(T), \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(T)\right) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
Soit $\mathcal{M}$ un opérateur affine définit par

$$\mathcal{M}(\varphi_1, -\varphi_0) = \mathcal{P}\left(\psi(T), \frac{\partial \psi}{\partial t}(T)\right)$$

où $\mathcal{P} = \chi_\omega^* \chi_\omega$.

$\left(\psi\left(T\right),\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\left(T\right)\right)=\left(\psi_0\left(T\right),\dfrac{\partial\psi_0}{\partial t}\left(T\right)\right)+\left(\psi_1\left(T\right),\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}\left(T\right)\right)$ où ψ_0 et ψ_1 sont les solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2}-\Delta\psi_0=0 & \text{dans } Q \\ \psi_0\left(x,0\right)=y_0\left(x\right),\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial t}\left(x,0\right)=y_1\left(x\right) & \text{dans } \Omega \\ \psi_0\left(\xi,t\right)=0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-\Delta\psi_1=-\left\langle\varphi,g\right\rangle_{L^2(D)}\chi_D g & \text{dans } Q \\ \psi_1\left(x,0\right)=0,\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}\left(x,0\right)=0 & \text{dans } \Omega \\ \psi_1\left(\xi,t\right)=0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.8}$$

respectivement, nous considérerons l'opérateur

$$\Lambda\left(\varphi_1,-\varphi_0\right)=\mathcal{P}\left(\psi_1\left(T\right),\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\left(T\right)\right). \tag{3.9}$$

Λ est un opérateur symétrique et bornée.
Alors le problème de contrôlabilité régional interne se ramené a résoudre l'équation

$$\Lambda\left(\varphi_1,-\varphi_0\right)=-\mathcal{P}\left(\psi_0\left(T\right),\frac{\partial\psi_0}{\partial t}\left(T\right)\right)+\chi_\omega^*\left(y_d^1,y_d^2\right). \tag{3.10}$$

et nous avons le résultat principal suivant

Théorème 3.1 *Si (3.2) est faiblement ω-contrôlable, alors l'équation (3.10) a une solution unique φ_0,φ_1 et le contrôle $u^*=-\left\langle\varphi,g\right\rangle_{L^2(D)}$ permettant de passer le système (3.1) à l'état (y_d^1,y_d^2) sur ω à l'instant T, où φ est la solution de système (3.4), de plus ce contrôle est la solution de problème (3.3).*

Preuve. On peut écrire le système (3.2) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_D g\end{pmatrix}u.$$

Si on pose

$$Z=\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix},\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0\end{pmatrix}\text{ et } B=\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_D f\end{pmatrix}.$$

On aura

$$Z'=\mathcal{A}Z+Bu.$$

Avec l'adjoint de $\mathcal{A}$ est

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\triangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Aussi le système (3.4) est équivalent à

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} + \mathcal{A}^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \varphi(T) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.11}$$

Considérons l'opérateur $\mathcal{L}_T$ défini par

$$\mathcal{L}_T : L^2([0,T], \mathbb{R}^p) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$
$$u \mapsto \left(y_u(T), \frac{\partial y_u}{\partial t}(T) \right).$$

D'après la proposition (1.4) le système (3.2) est faiblement ω-contrôlable ssi $\overline{\operatorname{Im} \chi_\omega \mathcal{L}_T} = L^2(\omega)$ ce qui est équivalent à $\ker \mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* = \{0\}$. Avec $\mathcal{L}_T^* \chi_\omega^* = B^* S^* (T - .) \chi_\omega^*$ d'après la proposition (1.5).
La semi-norme (3.5) est une norme, en effet

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_G = 0 \Rightarrow \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} = 0 \text{ sur } [0, T].$$

Donc on a

$$\left\langle \begin{pmatrix} \chi_D g \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow B^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} = 0.$$

Ou

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = S^*(T-t) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

est la solution du système (3.11).
Où $\{S^*(-t)\}_{t\geq 0}$ est le semi-groupe généré par $-\mathcal{A}^*$.(voir la remarque (1.1)).
Ainsi

$$\langle \varphi, \chi_D g \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow B^* S^* (T-t) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \in \ker \mathcal{L}_T^* \chi_\omega^*$. Comme le système (3.2) est est faiblement ω-contrôlable, alors $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ et (3.5) est une norme.
Soient $\hat{G}$ est le complétion de G par la norme (3.5) et $\hat{G}^*$ est son dual. Nous montrons que Λ est un isomorphisme de $\hat{G}$ en $\hat{G}^*$. En effet

$$\langle \Lambda(\varphi_1, -\varphi_0), (\varphi_1, -\varphi_0) \rangle = \langle \psi_1(T), \varphi_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(T), \varphi_0 \right\rangle \tag{3.12}$$

On multiplie l'équation (3.4) par $\psi_1 = \psi_1(x,t)$ et on intégre par partie, d'aprés la formule de Green on a

$$\int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} \chi_D g \varphi dt = \langle \psi_1(T), \varphi_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(T), \varphi_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(0), \varphi(0) \right\rangle - \left\langle \psi_1(0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) \right\rangle \tag{3.13}$$

et par utilisation des conditions initiales et aux limites on a

$$\int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)}^2 dt = \langle \psi_1(T), \varphi_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(T), \varphi_0 \right\rangle \tag{3.14}$$

De (3.12) et (3.14), on a

$$\langle \Lambda(\varphi_1, -\varphi_0), (\varphi_1, -\varphi_0) \rangle = \|(\varphi_1, -\varphi_0)\|_{\hat{G}}^2 .$$

Soient $(\varphi_1, \varphi_0), (\xi_1, \xi_0) \in G$ et $\xi(x,t)$ est un solution de (3.4) tel que $\left(\xi(T), \frac{\partial \xi}{\partial t}(T)\right) = (\xi_0, \xi_1)$.
On multiplie l'équation (3.8) par ξ et l'on intègre sur Q. On obtient

$$\langle \Lambda(\varphi_1, -\varphi_0), (\xi_1, -\xi_0) \rangle = \langle \xi_1(T), \varphi_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial \xi_1}{\partial t}(T), \varphi_0 \right\rangle = \int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} \langle \xi, g \rangle_{L^2(D)} dt \tag{3.17}$$

Donc

$$\langle \Lambda(\varphi_1, -\varphi_0), (\xi_1, -\xi_0) \rangle = \langle (\varphi_1, -\varphi_0), (\xi_1, -\xi_0) \rangle_{\hat{G}} \tag{3.18}$$

De (3.17), (3.18) et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle \Lambda(\varphi_1, -\varphi_0), (\xi_1, -\xi_0) \rangle| \leq \|(\varphi_1, -\varphi_0)\|_{\hat{G}} \|(\xi_1, -\xi_0)\|_{\hat{G}} \ \forall (\varphi_1, -\varphi_0), (\xi_1, -\xi_0) \in G$$

d'ou la continuité de la forme bilinéaire Λ qui admet un prolongement par continuité à la fermeture de $\hat{G}$, nous présentons ce prolongement avec la même notation, donc Λ est une forme bilinéaire continue coercive sur l'espace de Hilbert $\hat{G}$.
Alors d'après le lemme de Lax-Milgram (4.1) dans l'annexe pour tout $(\xi_0, \xi_1) \in \hat{G}$ et pour chaque $(\eta_0, \eta_1) \in \hat{G}^*$ l'équation $\Lambda(\varphi_0, \varphi_1) = (\eta_0, \eta_1)$ admet une solution unique, on résulte que Λ est un isomorphisme de $\hat{G}$ en $\hat{G}^*$.
Donc (3.10) admet une solution unique et $u^*(t) = -\langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)}$ permet d'amener l'état du système (3.2) à (y_d^1, y_d^2) sur la région ω à l'instant T.
supposons que u, v deux solution de (3.3), alors

$$\mathcal{J}'(u^*)(u - v) = -\int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} (u(t) - v(t)) dt.$$

Appliquer la formule de Green à $\{\varphi, y_u - y_v\}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} (u(t) - v(t)) dt \ &= \ \left\langle \frac{\partial y_u}{\partial t}(T) - \frac{\partial y_v}{\partial t}(T), \varphi(T) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial y_u}{\partial t}(0) - \frac{\partial y_v}{\partial t}(0), \varphi(0) \right\rangle \\ &+ \left\langle y_u(0) - y_v(0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) \right\rangle - \left\langle y_u(T) - y_v(T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) \right\rangle . \end{aligned}$$

D'après les conditions initiales et les conditions aux bords on a

$$\left\langle \left(y_u(T), \frac{\partial y_u}{\partial t}(T) \right) - \left(y_v(T), \frac{\partial y_v}{\partial t}(T) \right), (\varphi_1, -\varphi_0) \right\rangle = \int_0^T \langle \varphi, g \rangle_{L^2(D)} (u(t) - v(t))\, dt.$$

Comme u et v transfère le système (3.2) à (y_d^1, y_d^2), on a $\mathcal{J}'(u^*)(u - v) = 0$. Donc u^* est unique d'après la convexité de $\mathcal{J}$ (établit l'optimalité). ■

Remarque 3.2 *Dans le cas le système (3.2) excité par un actionneur ponctuel interne on peut résoudre par les mêmes techniques.*

3.3 Simulation

Dans cette section, nous donnons les résultats obtenus qui sont liés au choix de la sous-région, l'état désiré et l'emplacement de l'actionneur. Considérons le système unidimensionnel excité dans le cas où l'action est ponctuel.
On considère le système hyperbolique décrit par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = u(t)\,\delta_b(x) & (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\\ y(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & t \in]0,T[\end{cases}$$

Nous prenons $T = 2$, $\omega =]0.4, 0.64[$, $b = 0.84$, et les états désirés (y_d^1, y_d^2). En appliquant l'algorithme de l'approche numérique (voir [19]) nous obtenons

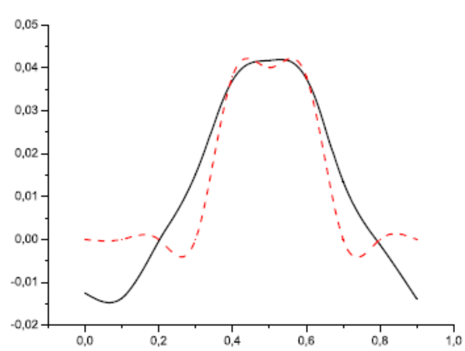

Figure 4 : [19] Position désirée et finale sur ω.

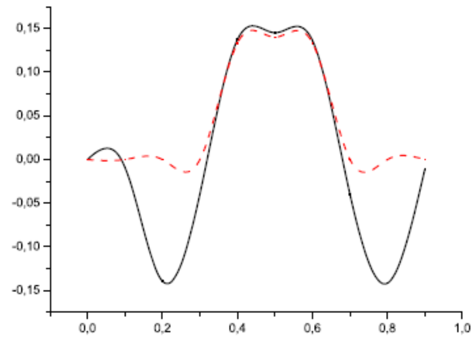

Figure 5 : [19] Vitesse désirée et finale sur ω.

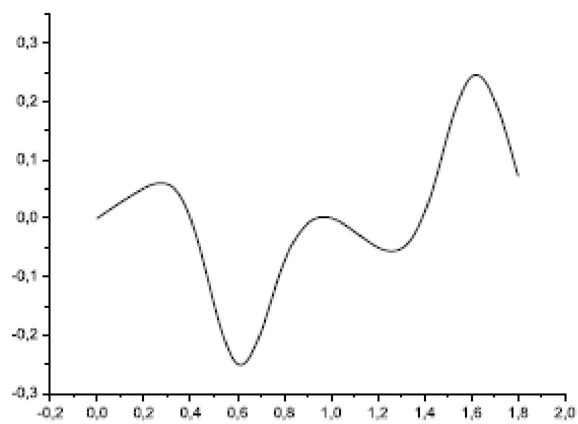

Figure 6 : [19] Evolution de la fonction de contrôle.

Chapitre 4

Actionneurs et contrôlabilité régionale frontière

Dans ce chapitre, on considère le problème de la contrôlabilité régionale dans lequel la région cible est située sur la frontière du domaine Ω. Il s'agit là du cas où l'on ne désire suivre l'évolution de l'état du système que sur un partie Γ de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω. C'est le cas par exemple où la région Γ correspond à la sortie d'un réacteur là ou l'on veut réguler la concentration d'un substrat, ou l'exemple de contrôler la température de la face supérieure du parallélépipède par action interne (voir la figure 7)

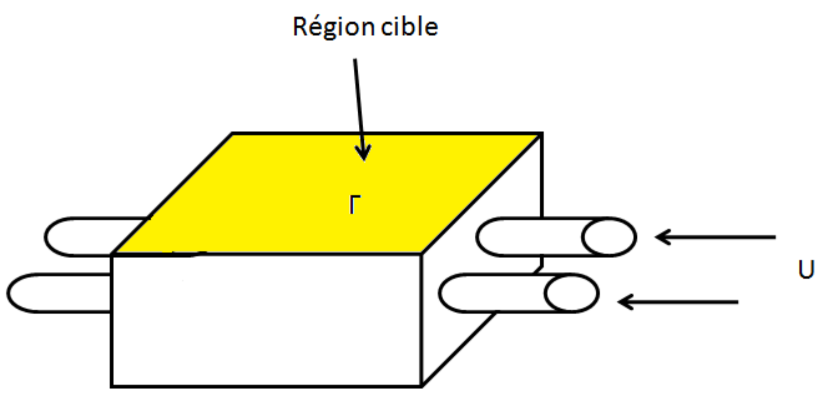

Figure7 : [18] Exemple de contrôler la température de la face supérieure du parallélépipède par action interne.

L'objet de ce chapitre est d'établir le lien entre la structure des actionneurs et la contrôlabilité régionale frontière. Les résultats obtenus sont illustrés sur un exemple dans le cas d'un système décrit par une équation parabolique bidimensionnelle.

4.1 Définitions et propriétés

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$ et Γ une partie de $\partial\Omega$, pour $T > 0$ on note $Q = \Omega\times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0, T[$. Nous considérons un système linéaire décrit par l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + Bu(t) & \text{dans} \quad Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial v_A}(\xi,t) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(x,0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Où

*A est un opérateur linéaire différentiel d'ordre 2 à résolvante compacte qui engendre un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur l'espace des états $L^2(\Omega)$.

*$B \in L(\mathbb{R}^m, L^2(\Omega)), u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Soit y_u la solution de (4.1) quand il est excité par le contrôle u et on suppose que (4.1) admet une solution unique tel que $y_u(T) \in H^1(\Omega)$.

*$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ désigne l'opérateur trace d'ordre zéro, linéaire continu, γ_0^* est l'opérateur adjoint de γ_0.

Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ et soit la fonction restriction

$$\chi_\Gamma : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\Gamma)$$
$$z \mapsto \chi_\Gamma z = z|_\Gamma.$$

Dont l'adjointe $\chi_\Gamma^* : L^2(\Gamma) \to L^2(\partial\Omega)$ est donnée par

$$\chi_{\Gamma_0}^*(z)(x) = \begin{cases} z(x) \text{ si } x \in \Gamma \\ 0 \text{ si } \quad x \in \partial\Omega\backslash\Gamma \end{cases}$$

Soit l'opérateur $\mathcal{L}_T : U \to H^1(\Omega)$ défini par

$$u \mapsto \int_0^T S(T-\tau) Bu(\tau)d\tau.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer dans la suite $y_0 = 0$.

Définition 4.1 *On dit que le système (4.1) est exactement (resp faiblement) régionalement frontière contrôlable sur Γ si pour tout $y_d \in L^2(\Gamma)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u \in U$ tel que*

$$\chi_\Gamma(\gamma_0 y_u(T)) = y_d \text{ (resp } \|\chi_\Gamma(\gamma_0 y_u(T)) - y_d\|_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon).$$

Proposition 4.1 *Supposons que* $\sup r_m = r < \infty$, *où* r_m *est la multiplicité de la valeur propre* λ_m
La suite des actionneur $(D_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ *est* Γ*-stratégique si et seulement si*
i) $p \geq r$
ii) $rang\ M_m = r_m$
où

$$\begin{aligned}(M_m)_{i,j} &= \begin{cases} \left\langle \varphi_{m_j}, g_i \right\rangle_{L^2(D_i)} & \textit{Cas zone} \\ \varphi_{m_j}(b_i) & \textit{Cas ponctuel} \end{cases} \\ \textit{pour } 1 &\leq i \leq p, 1 \leq j \leq r_m \end{aligned}$$

Remarque 4.1 *Nous pouvons généraliser les caractéristiques, les théorèmes et les définitions du premier chapitre (contrôlabilité régionale interne) au cas frontière sans difficulté.*

4.2 Application

Considérons le système bidimensionnel décrit par l'équation parabolique sur $\Omega =]0, a[\times]0, d[$ par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x_1, x_2, t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t) + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) + Bu(t) & \text{dans} \quad Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi_1, \xi_2, t) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(x_1, x_2, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

Nous allons appliquer les résultats du théorème précédent aux cas suivants

4.2.1 Cas ponctuel

On considère le système (4.2) dans le cas où il est excité par un actionneur ponctuelle (b, δ_b) avec b est la support de l'actionneur et δ_b définit la distribution spatiale du contrôle sur b, le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x_1, x_2, t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t) + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) + \delta_b(x)\, u(t) & \text{dans} \quad Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi_1, \xi_2, t) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(x_1, x_2, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

Actionneur frontière

Dans se cas l'actionneur est localisé au point $b \in \partial\Omega$.

*Si $b = (\alpha, 0)$(figure 8) avec $0 < \alpha < a$

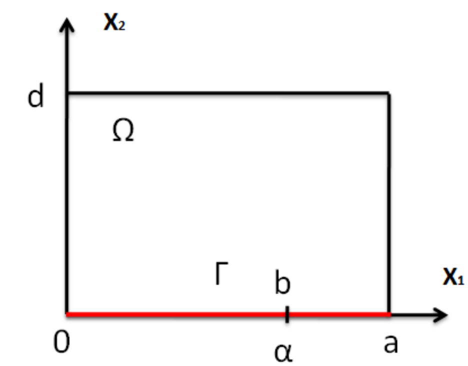

Figure 8 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas ponctuel frontière $(b = (\alpha, 0))$.

on a

Corollaire 4.1
L'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\alpha}{a}$ est impaire.

*Si $b = (0, \beta)$(figure 9) avec $0 < \beta < d$.

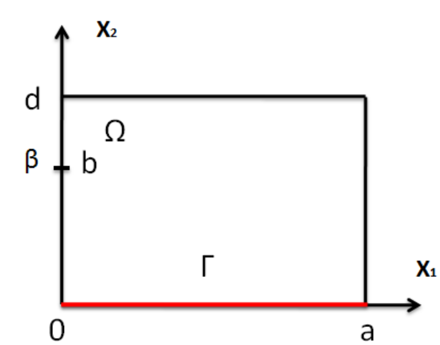

Figure 9 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas ponctuel frontière $(b = (0, \beta))$.

on a

Corollaire 4.2
L'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$tel que $2l\dfrac{\beta}{d}$ est impaire.

Actionneur interne

Dans ce cas l'actionneur est localisé au point $b = (\alpha, \beta) \in \Omega$, avec $0 < \alpha < a$ et $0 < \beta < d$ (figure 10).

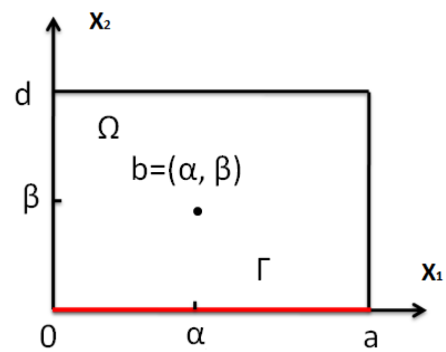

Figure10 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas ponctuel interne ($b = (\alpha, \beta)$).

alors on a

Corollaire 4.3
L'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe k, l tel que $2k\dfrac{\alpha}{a}$ ou $2l\dfrac{\beta}{d}$ est impaire.

4.2.2 Cas zone

Si on considère le système (4.2) dans le cas où il est excité par un actionneur zone (D, g) avec D est la support de l'actionneur et $g \in L^2(D)$ définit la distribution spatiale du contrôle sur D . Dans ce cas le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x_1, x_2, t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t) + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) + \chi_D g(x)\, u(t) & \text{dans} \quad Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi_1, \xi_2, t) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ y(x_1, x_2, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < a$ et $0 < \beta_1 < \beta_2 < d$, on note

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \eta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \mu_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \mu_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

On suppose que $\dfrac{a^2}{d^2} \notin \mathbb{Q}$, un seul actionneur suffit pour assurer la contrôlabilité régionale frontière sur Γ.

Actionneur frontière

*Dans ce cas le support de l'actionneur $D \subset \partial\Omega$ avec $D =]\alpha_1, \alpha_2[\times \{d\}$ (figure (11))

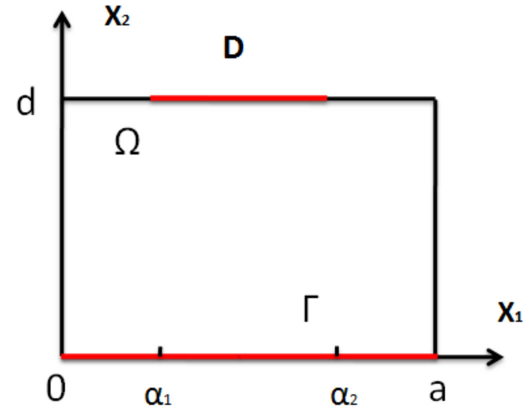

Figure11 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas zone frontière $(D =]\alpha_1, \alpha_2[\times \{d\})$.

on a le résultat suivant

Corollaire 4.4
i) Si g est uniformément distribuée sur $]\alpha_1, \alpha_2[\times \{d\}$ (ou sur $]\alpha_1, \alpha_2[\times \{0\}$) alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si $\frac{\mu_1}{a} \in \mathbb{Q}$ ou il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\frac{\eta_1}{a}$ est impaire.
ii) Si g est symétrique par rapport au point $(\eta_1, 0)$ ou par rapport au point (η_1, d) , alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si $\frac{\eta_1}{a} \in \mathbb{Q}$.
iii) Si g est symétrique par rapport à l'axe $x = \eta_1$, alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\frac{\eta_1}{a}$ est impaire.

*Dans le cas (figure (12)) le support de l'actionneur $D \subset \partial\Omega$ avec $D = \{0\} \times]\beta_1, \beta_2[$

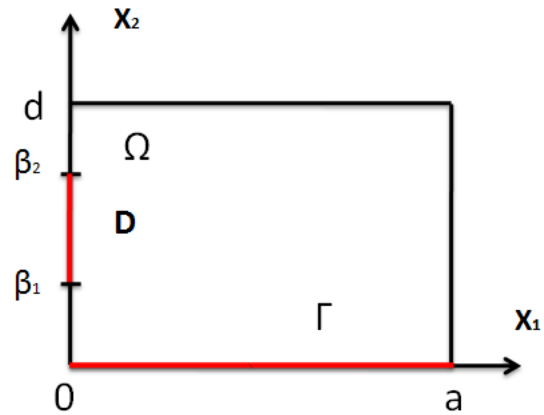

Figure12 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas zone frontière $(D = \{0\} \times]\beta_1, \beta_2[)$.

et on a le résultat suivant

Corollaire 4.5

i) Si g est uniformément distribuée sur$\{0\} \times]\beta_1, \beta_2[$ (ou sur $\{a\} \times]\beta_1, \beta_2[$) alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si $\frac{\mu_2}{d} \in \mathbb{Q}$ ou il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $2l\frac{\eta_2}{a}$ est impaire.
ii) Si g est symétrique par rapport au point $(0, \eta_2)$ ou par rapport au point (a, η_2) , alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si $\frac{\eta_2}{d} \in \mathbb{Q}$.
iii) Si g est symétrique par rapport à l'axe $y = \eta_2$, alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $2l\frac{\eta_2}{d}$ est impaire.

Actionneur interne

Dans ce cas l'actionneur est localisé à l'intérieur du domaine Ω avec le support rectangulaire $D =]\alpha_1, \alpha_2[\times]\beta_1, \beta_2[$ (figure 13).

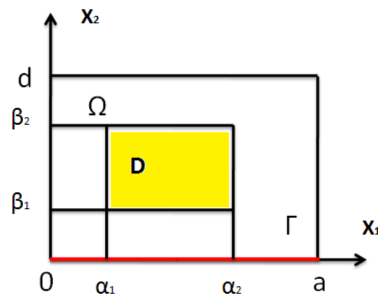

Figure13 : [8] L'emplacement de l'actionneur dans le cas zone interne $(D =]\alpha_1, \alpha_2[\times]\beta_1, \beta_2[)$.

Corollaire 4.6

i) Si g est uniformément distribuée sur $]\alpha_1, \alpha_2[\times]\beta_1, \beta_2[$ alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si l'une des conditions suivantes est satisfaite $\frac{\mu_1}{a} \in \mathbb{Q}$ ou $\frac{\mu_2}{d} \in \mathbb{Q}$, il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\frac{\eta_1}{a}$ ou $2l\frac{\eta_2}{d}$ est impaire.

ii) Si g est symétrique par rapport au point (η_1, η_2) , alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique si $\frac{\eta_1}{a} \in \mathbb{Q}$ ou $\frac{\eta_2}{d} \in \mathbb{Q}$.

iii) Si g est symétrique par rapport à l'axe $x = \eta_1$ (resp. par rapport à l'axe $y = \eta_2$), alors l'actionneur n'est pas Γ-stratégique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\frac{\eta_1}{a}$ est impaire (resp. s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $2l\frac{\eta_2}{d}$ est impaire.

4.2.3 Table récapitulative

On résume les résultats précédents dans les tableaux ci-dessous

Actionneur zone

Localisation de l'actionneur	**Cas non Γ-stratégiques**
$D=[\alpha_1,\alpha_2]\times\{0\}$ où $[\alpha_1,\alpha_2]\times\{d\}$	*g uniformément distribuée sur D. $\dfrac{\mu_1}{a}\in\mathbb{Q}$ où $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\eta_1}{a}$ est impaire. * Si g est symétrique par rapport à $(\eta_1,0)$ où (η_1,d) $\dfrac{\eta_1}{a}\in\mathbb{Q}$. *$g$ est symétrique par rapport à l'axe $x=\eta_1$ $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\eta_1}{a}$ est impaire.
$D=\{0\}\times[\beta_1,\beta_2]$ où $\{a\}\times[\beta_1,\beta_2]$	*g uniformément distribuée sur D $\dfrac{\mu_2}{d}\in\mathbb{Q}$ où $\exists l\in\mathbb{N}^*$ tel que $2l\dfrac{\eta_2}{a}$est impaire. $*g$ est symétrique par rapport au point $(0,\eta_2)$ où (a,η_2) $\dfrac{\eta_2}{d}\in\mathbb{Q}$. $*g$ est symétrique par rapport à l'axe $y=\eta_2$ $\exists l\in\mathbb{N}^*$ tel que $2l\dfrac{\eta_2}{d}$ est impaire.
$D=]\alpha_1,\alpha_2[\times]\beta_1,\beta_2[$	g uniformément distribuée sur D $\dfrac{\mu_1}{a}\in\mathbb{Q}$ ou $\dfrac{\mu_2}{d}\in\mathbb{Q}$ ou $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\eta_1}{a}$ est impaire ou $\exists l\in\mathbb{N}^*$ tel que $2l\dfrac{\eta_2}{d}$ est impaire $*g$ est symétrique par rapport à (η_1,η_2) $\dfrac{\eta_1}{a}\in\mathbb{Q}$ où $\dfrac{\eta_2}{d}\in\mathbb{Q}$. $*g$ est symétrique par rapport à l'axe $x=\eta_1$(resp.$y=\eta_2$) $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\eta_1}{a}$ est impaire (resp.$\exists l\in\mathbb{N}^*$ tel que $2l\dfrac{\eta_2}{d}$ est impaire).

Actionneur ponctuel

Localisation de l'actionneur	**Cas non Γ-stratégiques**
$\alpha \in]0, a[$ et $\beta = 0$ ou $\beta = d$	$\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\alpha}{a}$ est impaire
$\beta \in]0, d[$ et $\alpha = 0$ ou $\alpha = a$	$\exists l \in \mathbb{N}^*$ tel que $2l\dfrac{\beta}{d}$ est impaire
$\alpha \in]0, a[$ et $\beta \in]0, d[$	$\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k\dfrac{\alpha}{a}$ est impaire ou $\exists l \in \mathbb{N}^*$tel que $2l\dfrac{\beta}{d}$ est impaire

Annexe

Définition 4.2 ***(La Norme)*** *Soit E un espace vectorielle sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute fonction noté$\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que*
$i)$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \forall x \in E$.
$ii)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{k} \forall x \in E$.
$iii)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Définition 4.3 ***(Espaces normés)*** *Soit E un espace vectorielle corps ou, on dit que E espace vectorielle normé s'il est muni d'une norme.*

Définition 4.4 ***(Espaces complets)*** *Un espace vectorielle normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'élément de E est une suite convergente dans E.*

Définition 4.5 ***(Produit scalaire)*** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, on appelle* ***Produit scalaire*** *toute application $\langle ., . \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$ vérifie les propriétés suivantes*
$i)$ $\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}$.
$ii)$ $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in E$.
$iii)$ $\langle x, x \rangle \geq 0 \;\; \forall x \in E$ *et* $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

Définition 4.6 ***(Espace dual)*** *On appelle espace dual de E c.à.d. l'espace des formes linéaires continues de E dans le corps $\mathbb{k}$, noté E^* c à d : $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{k})$. E est appelé espace primal.*
Lorsque φ est un élément de l'espace dual et x un élément de l'espace primal, on utilise parfois la notation du crochet de dualité : $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$ (i.e) L'ensemble des formes linéaires sur E, avec l'addition définie par : $(l + m)(x) = l(x) + m(x)$ et la multiplication par les scalaires définie par : $(\lambda l)(x) = \lambda l(x)$.

Définition 4.7 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^{**}. On dit que E est réflexif si $J(E) = E^{**}$.*

Définition 4.8 ***(Espace de Banach)*** *On appelle espace de Banach tout espace vectorielle normé et complet pour la distance déduite de la norme.*

Définition 4.9 ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.*

Proposition 4.2 *[7] Soient X, Y, Z des espaces de Banach et $F \in L(X, Z)$, $G \in L(Y, Z)$ alors*

$$\operatorname{Im} F \subset \operatorname{Im} G \Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 : \|G^* z\|_{X^*} \geq \gamma \|F^* z\|_{Y^*}, \forall z \in Z.$$

Définition 4.10 *On dit qu'un opétrateur est fermé si $G(A)$ est fermé.*

Définition 4.11 *Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur l'espace de Hilbert H.*
a est dit **continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \ \ \forall u, v \in H.$$

a est dit **coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2 \ \ \forall v \in H .$$

Lemme 4.1 ***(Lax-Milgram)***
Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert H. Alors pour tout $\varphi \in H^*$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad , \ \forall v \in H \quad .$$

Définition 4.12 *On dit que A est un opérateur elliptique d'ordre 2 si*

$$\begin{cases} A = a_0 + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad \textit{avec } a_0, a_{i,j} \in \mathcal{D}\left(\bar{\Omega} \times [0, T]\right) \\ \textit{et il existe } \alpha > 0 \textit{ tel que} \\ a_0 \geq \alpha \textit{ et } \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \forall \xi = (\xi_{1,\ldots,}\xi_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Formule de Green et d'intégration par parties

Pour $\xi \in \Gamma$, on note $v(\xi) = (v_1(\xi), ..., v_n(\xi))$ le vecteur normale à Γ en ξ, sortant de Ω.
Pour $\varphi \in H^2(\Omega)$, on appelle conormale de φ, la quantité

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial v_A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\xi, t) v_i(\xi) \partial_j \varphi(\xi) \quad \xi \in \Gamma$$

et on a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_A} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
La formule de Green s'écrit

$$\int_\Omega (A\psi) \varphi dx - \int_\Omega \psi (A^* \varphi) dx = \int_\Gamma \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v_{A^*}} d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial v_A} \varphi d\Gamma$$

pour $\varphi, \psi \in W(0,T) = \{f/f, f' \in L^2(0,T;H)\}$
ou H est un espace de Hilbert munit du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int_0^T \langle \varphi'(t), \psi(t) \rangle \, dt + \int_0^T \langle \varphi(t), \psi'(t) \rangle \, dt = \langle \varphi(T), \psi(T) \rangle - \langle \varphi(0), \psi(0) \rangle .$$

Définition 4.13 ***(Fonctions convexes)*** *Soit S est un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, on appelle fonction convexe tout fonction $f : S \to \mathbb{R}$ vérifie*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in S, \ \forall \lambda \in [0,1] .$$

Bibliographie

[1] **A. BEKKAI,L. MENASRIA,** Méthode HUM pour la contrôlabilité exacte des EDP hyperboliques de type ondes, mémoire de master, Université de Tébessa, 2016.

[2] **A. BOUTOULOUT,** Contrôlabilité régionale : Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les système distribués, thèse de doctorat en mathématiques appliquées,Université Moulay Ismail , Meknès, 2000.

[3] **A. V. BALAKRISHNAN**, Applied functional analysis. Springer. 1976

[4] **T. BENHAMOUD**, Observation d'un système bidimensionnel gouverné par des équations aux dérivées partielles, mémoire de Magister, Université de Constantine 2010.

[5] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, 1992.

[6] **A. EL JAI,** Analyse régionale des systèmes distribués, 10.1051/cocv :2002054, 2002.

[7] **A. EL JAI**, Eléments de contrôlabilité, Presses universitaires de perpignan, 2006.

[8] **A. EL JAI, M. C. SSIMON, E. ZERRIK, A. J. PRITCHARD,** Regionale controllability of distrubed parametre system, International Journal of Control, 10.1080/00207179508921603, 2015.

[9] **A. EL JAI, S. ELYACOUBI,** On the number of Actuators in parabolic system. App. Math. and comp. Sci.1993.

[10] **A. HAFDALLAH**, L'étude des problèmes inverses en utilisant le concept de la sentinelle, mémoire de Magister, Université de Tébessa, 2012.

[11] **F. A. KHODJA**, **A. BENABDALLAH**, Introduction à la théorie du contrôle, 2005.

[12] **N. LAANAIA**, Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte de contrôle optimal et de stabilisation pour des domaines minces à frontières ondulées, Thèse de Doctorat, Université de Metz.

[13] **L. D. LEMIE**, La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus, mémoire de recherche, 2001.

[14] **J. L. LIONS**, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1 : Contrôlabilité exacte, Masson, Paris, 1988.

[15] **I.REZZOUG,** Théorie du contrôle, cours, 2016.

[16] **A. PAZY,** Semi groupe of linear operateur and application to partial differential equation, Springer Vorlage.

[17] **E. ZERRIK,** Contrôlabilité et observabilité régionale d'une classe de système distribués, thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Moulay Ismail , Meknès, 1994.

[18] **E. ZERRIK,A. BOUTOULOUT,A. EL JAI,** Actuators and regional boundry controllability of parabolic systems, International Journal of Systems Science, 10.1080/002077200291479, 2010.

[19] **E. ZERRIK, M. OULD SIDI,** regional controllability of linear and semi linear hyperbolic systems, Int. Journal of Math. Analysis, 44, 2167 - 2198, 2010.