Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatiques

Filière : Mathématiques

Option: Equation aux Dérivées Partielles et Applications

Thème:

Les nombres de Fibonacci
Généralisations et Applications

Présenté par:
GUEMMADI Doursaf
LAKEHAL Salha

Devant le jury:

Smail BOUZNADA	M.C.A	Université de Tébessa	Président
Abdessadek SAIB	M.C.B	Université de Tébessa	Rapporteur
Salim ROUAR	M.C.B	Université de Tébessa	Examinateur
Mourad BENZAHI	M.A.A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance:
25/05/2017

Note: ………. **Mention:** …………….

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions les nombres de Fibonacci et de Lucas. Nous démontrons les plus remarquables et les plus surprenantes propriétés de ces deux failles. En effet, vous aller être convaincu que les techniques et les idées des démonstrations sont eux même en fait des caractéristiques. Nous présentons des polynômes analogues aux nombres de Fibonacci et Lucas. On termine le mémoire par des motivations en citant quelques domaines d'applications et d'apparence de ces derniers notamment aux EDP.

Abstract

In this dissertation we study Fibonacci and Lucas numbers. We've proved the most interesting and surprising properties of these two families. Indeed, you'll be convinced that techniques and and ideas of proof are themselves a characteristic properties of these families. We end the dissertation by motivations by giving some area of applications and occurrence mainly in PDE.

Introduction

La définition des mathématiques chez les non-mathématiciens c'est comment calculer ! Effectivement si vous regarder autour de ce que vous être entrain de faire, vous allez être convaincu que vous y compté ou calculé. Mais comment compter ? Comment calculer ? Le rôle des mathématiques est de régulariser le calcul, catégoriser les techniques, et formuler les résultats pour les utilisés au futur dans des cas similaires.
En mathématiques le calcul mène, dans la plupart des cas vers une récurrence linéaire. Les plus célèbres nombres existait depuis très longtemps et qui sont récurrent d'ordre deux (à trois termes) à savoir les nombres de Fibonacci, Lucas, Stirling (première espèce, deuxième espèce, ces généralisations), ... Les nombres de Fibonacci ont été introduit par Leonard de Pisa l'italien (surnommé Fibonacci) en 1202 dans son livre Liber Abaci qui porte sur les méthodes algébriques et les problèmes, l'un des meilleurs mathématiciens du moyen age il a reçu les enseignements de base à Bejaia, son idée avait pour but la description de l'évolution du lapin suppose que tous les lapins accouplés pour produire une autre paire une fois pendant un mois alors le nombre de lapin augmente á chaque mois pour tout une année, elle a comme condition :
1)- un couple de jeune lapins adulte.
2)- un couple de lapins âgé donne naissance à une progéniture qui ne meurt pas.
Selon la suite suivante :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

Elle produit des nombres consécutifs ou chaque nombre dans lequel la somme des deux est égale au nombre précédents.
Dans ce mémoire on s'intéresse à la suite de nombres de Fibonacci d'un point de vue purement mathématique. Ainsi, toutes les définitions et les propriétés sont structurés d'une manière qui capture le regard ! Les démonstrations sont variés qui ne nécéssite que quelque techniques de base connus par tout les étudiants du niveau L1, et qui aide le lecteur à avoir une idée sur la proposition du sujet, premièrement et de voir cette famille de nombres de près. Cependant, le chapitre 2 contient des généralisations des nombres de Fibonacci en gérant des polynômes analogues. Nous avous d'abord utilisé la théorie des polynômes orthogonaux pour avoir des idées sur la forme explicite et les zéros des polynômes de Fibonacci. Les identités sont ordonnées de telle sorte que la précédente est utilisée pour démontrer la suivante. Nous motivons notre travail dans le dernier chapitre en mentionnant quelques domaines d'applications des nombres de Fibonacci, leur apparence, ses utilisations pour chercher le nombre de solutions d'une équation algébrique où diophantine (dans la théorie des nombres), l'approximation polynomiale, ...etc.

Chapitre 1

Préliminaires

Les nombres de Fibonacci disposent d'une infinité de propriétés et caractéristiques. Fibonacci apparaît et utilisé dans les mathématiques, notamment dans le dénombrement, et appliqué aux sciences, à la music, il se représente aussi dans la nature d'une manière habituelle,... etc. Par conséquent, la liste de son appartenance ne peut pas listé dans un simple mémoire de Master. Bien sur nous allons se limité aux plus remarquables et plus surprenantes propriétés des nombres de Fibonacci et Lucas. Nous allons essayer également de combiner les techniques et les idées de démonstration autant que possible. Le livre de Koshy publié en 2001, décrir entre autre pas mal de domaine d'apparence des nombres de Fibonacci. Il démontre sa richesse au-delà des mathématiques.

1.1 Nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci sont les élément de la suite des entiers positifs suivants

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... \tag{1.1}$$

où chaque nombre dans la suite étant donné par la somme des deux termes précédents. Mathématiquement, on a

Définition 1.1 *La suite de Fibonacci, notée (F_n), est définie par*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 0, \tag{1.2}$$

avec les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

La formule précédente nous permet d'étendu la suite de Fibonacci sur $\mathbb{Z}$. En effet, la réécriture de (1.2) sous la forme

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

nous permet d'étendre les termes de la suite de Fibonacci vers la gauche, c'est-à-dire de calculer les termes d'indice négatif. Ainsi, on peut poser la définition suivante

Définition 1.2 *La suite de Fibonacci (étendue) est définie par la donnée de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Par conséquent, les termes d'indice positif sont calculés à partir de la récurrence*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

cependant, les termes d'indice négatif sont calculés à partir de

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

La définition précédente permet de prolonger la suite (1.1) vers la gauche en incluant les termes F_{-n}, pour $n > 0$ qui se traduit

$$... - 8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, 54, ... \tag{1.3}$$

Remarquer que les termes d'indice négatifs sont de signe alternés ! Plus précisément, on a le résultat suivant qui se démontre facilement par récurrence

Proposition 1.1 *Les termes d'indice négatif dans la suite de Fibonacci étendue sont donnés par*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Nombre d'or

En géométrie la proportion d'or est lié aux deux longueurs a et b où le rapport de a sur b est égal au rapport de $a+b$ sur a, i.e.,

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{b}=1+\frac{b}{a} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}+1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-1=0 \tag{1.4}$$

Ce qui montre que la proportion d'or (a/b) est une solution d'équation du second degré. Sachant que la longueur est positive, on peut dfinir le nombre d'or comme étant la solution positif de l'équation du second degré (1.4).
Si on note par $\phi = a/b$, on en déduit que la solution positive de l'équation (1.4) est le nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui a une valeur approximative de $1,61803$.
Le nombre ϕ peut s'écrire aussi en utilisant l'équation algébrique (1.4) comme racines continues de la façon suivante

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}.$$

Alors que si on divise l'équation (1.4) par ϕ on obtient

$$\phi = 1+\frac{1}{\phi}.$$

Remplaçons maintenant l'occurrence de ϕ au dénominateur par $1+\dfrac{1}{\phi}$. On obtient

$$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}.$$

On voit bien qu'on peut continuer à l'infini. Ceci suggère l'écriture de ϕ comme fraction continue

$$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{1}{\phi}=\phi-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

L'équation caractéristique de la récurrence vérifiée par les nombres de Fibonacci est identiquement l'équation (1.4). Notons par $\overline{\phi}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ la deuxième solution de cette dernière. Alors, pour calculer la forme explicite du polynômes, nous pouvons utiliser par exemple l'équation caractéristique. Ici nous allons utiliser la fonction génératrice. Pour se faire, notons la fonction génératrice correspondante par $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} F(x)-F_0-F_1x = F(x)-x &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(F_{n-1}+F_{n-2}\right) x^n \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \end{aligned}$$

donc

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\phi x}-\frac{1}{1-\overline{\phi}x}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\phi^n-\overline{\phi}^n\right]x^n \tag{1.5}$$

ce qui montre que

Proposition 1.2 *La forme explicite de F_n est donnée par*

$$F_n=\frac{\phi^n-\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{1.6}$$

La fonction génératrice peut être utilisé pour déduire d'autres sommes partielles. Par exemple, lorsque $x=\frac{1}{2}$, la formule (1.5) nous donne

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k}{2^k}=2 \tag{1.7}$$

D'autre part, sachant que $|\phi|>1$ et $\left|\overline{\phi}\right|<1$, on en déduit la limite suivante

Corollaire 1.1 *On a la limite suivante*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et plus généralement, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-m}}=\phi^m.$$

Preuve. Il suffit d'écrire

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-m}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\cdots\frac{F_{n-m+1}}{F_{n-m}}=\phi^m.$$

■

Avant de continuer, nous allons attirer l'attention vers quelque propriétés remarquables. Plusieurs auteurs utilisent les deux racines de l'équation caractéristique dans les preuves de Fibonacci. En effet, on remarque par exemple qu'on a

$$\phi+\overline{\phi}=1,\quad \phi-\overline{\phi}=\sqrt{5},\quad \phi\overline{\phi}=-1,\quad \phi^2=1+\phi,\quad \overline{\phi}^2=1+\overline{\phi}. \tag{1.8}$$

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence qu'on a la propriété remarquable suivante

$$\phi^n=\phi F_n+F_{n-1},\quad \forall n\geq 2. \tag{1.9}$$

1.3 Fibonacci et Lucas : somme et factorisation

En litérature, les nombres de Fibonacci sont lié étroitement avec une autre famille de nombre appelés les nombres de *Lucas*. Les nombres de Lucas sont induite par une combinaison linéaire de deux nombre de Fibonacci comme suit

Définition 1.3 *Les nombres de Lucas notés L_n sont définis par*

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

En utilisant la suite de Fibonacci étendue, on constate d'une part que

$$L_0 = F_1 + F_{-1} = 2F_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad L_1 = F_2 + F_0 = 1. \tag{1.11}$$

D'autre part, la récurrence de Fibonacci substituée dans (1.10) montre que la suite de nombres de Lucas vérifie la même récurrence satisfaite par Fibonacci avec les conditions initiales (1.11).
Pour faire le point, on peut suivre les mêmes techniques utilisés dans le cas de Fibonacci pour extraire à partir de l'équation caractéristique par exemple, la fonction génératrice de Lucas notée $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$ ainsi que sa forme explicite qui prennent recpectivement les formes suivantes

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-\phi x} + \frac{1}{1-\overline{\phi} x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi^n + \overline{\phi}^n\right] x^n. \tag{1.12}$$

Dans la suite, nous allons montionner quelques propriétés (sommes et factorisations) ainsi que certaines autre propriétés surprenantes !
Nous commençons par remarquer que si on multiplie l'avant dernière et la dernière égalité dans (1.8) par ϕ et $\overline{\phi}$ respectivement, on trouve $\phi^3 = 2\phi + 1$ et $\overline{\phi}^3 = 2\overline{\phi} + 1$. Ainsi, la formule du binôme nous donne

$$\phi^{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\phi)^k \qquad \text{et} \qquad \overline{\phi}^{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2\overline{\phi}\right)^k. \tag{1.13}$$

Maintenant, l'addition des deux sommes précédentes (respectivement la soustraction puis la division par $\sqrt{5}$) nous donnent

$$L_{3n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} L_k \qquad \text{respectivement} \qquad F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} F_k \tag{1.14}$$

La manipulation des techniques précédentes peut utilisée pour aller plus loin et obtenir d'autres sommes analogues. Par exemple, si on démarre du fait que $1 + \phi^2 = \sqrt{5}\phi$ et $1 + \overline{\phi}^2 = -\sqrt{5\overline{\phi}}$, en utilisant après la formule du binôme on peut démontrer les formules suivantes

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{2k} = F_{2n}, \quad \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L_{2k} = L_{2n}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{2k} = 5^n L_{2n+1} \cdots \tag{1.15}$$

Passant maintenant à des sommes intéréssantes. Evidemment, la première somme est la suivante

Proposition 1.3 *La somme des n premiers (resp. impairs) termes de nombres de Fibonacci sont données respectivement par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} \tag{1.16}$$

Preuve. À partir de la définition de la suite de Fibonacci, on peut écrire

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_i &= F_{i+2} - F_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_i &= F_{i+1} - F_{i-1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 2n-1 \end{aligned}$$

En faisant la somme sur i, la première (resp. deuxième) formule nous donne la première (resp. deuxième) partie de (1.16). ■

Maintenant soustrayant la somme des termes pairs (la dernière somme dans (1.16)) de la somme des $2n$ premiers termes de Fibonacci on en déduit le résultat suivant

Corollaire 1.2 *La somme des n consecutifs premiers termes pairs de la suite de Fibonacci et donnée par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

La question suivante est que peut-on dire sur la somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci ?

Proposition 1.4 *La somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci se simplifie*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}. \tag{1.17}$$

Preuve. Par récurrence. L'identité est vraie lorsque $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour certain k arbitraire : $\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k F_{k+1}$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\left(F_k + F_{k+1}\right) = F_{k+1}F_{k+2}.$$

qui est le résultat voulu. ■

Passons maintenant à la factorisation suivante

Théorème 1.1 *Les nombres de Fibonacci admettent la factorisation suivante*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}. \tag{1.18}$$

Preuve. Nous allons démontrer (1.18) par récurrence sur m. Pour $m = 1$,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_{n-1} + F_n, \\ &= F_{n-1}F_1 + F_nF_2. \end{aligned}$$

Supposons que (1.18) soit vraie pour $m \leq k+1$. Par l'hypothèse, il est vrais que

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1},$$
$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}.$$

Si on ajoute ces deux équations terme par terme, on obtient

$$\begin{aligned} F_{n+k} + F_{n+k+1} &= F_{n-1}(F_k + F_{k+1}) + F_n(F_{k+1} + F_{k+2}), \\ F_{n+k+2} &= F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 1.3 *Lorsque $m = n$, (1.18) se traduit*

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Proposition 1.5 *Le déterminant de Casorati de Fibonacci*

$$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n. \tag{1.19}$$

Preuve. En utilisant la récurrence (1.2) satisfaite par les nombres de Fibonacci et les propriétés des déterminants, on trouve

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{vmatrix}$$

et le résultat s'obtient par récurrence. ■

Corollaire 1.4 *La série suivante vaut aussi ϕ comme somme*

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}} = \phi \tag{1.20}$$

Preuve. Il est évident que la série suivante

$$\frac{F_2}{F_1} + \left(\frac{F_3}{F_2} - \frac{F_2}{F_1}\right) + \left(\frac{F_4}{F_3} - \frac{F_3}{F_2}\right) + \ldots + \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right) + \ldots$$

converge vers ϕ. Ensuite, le déterminant de Casorati (1.19) nous permet de conclure que

$$\phi = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{F_{k+1}}{F_k} - \frac{F_k}{F_{k-1}}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2}{F_kF_{k-1}}\right)$$

maintenant le résultat découle de la valeur du déterminant de Casorati. ■

Les nombres de Fibonacci sont parfois utilisé dans la théorie des nombres notamment leur connexion avec les équations diophantines (et leurs courbes correspondantes). Nous allons introduire une ou deux propriétés dans ce contexte.

Proposition 1.6 *Pour les nombres de Fibonacci on a : F_n divise F_m si et seulement si n divise m.*

Preuve. Supposons qu'on a n divise m, i.e., $m = nk$. Par récurrence sur k nous allons démontrer que F_n divise F_{nk} qui est vraie pour $k = 1$. Supposons que F_n divise F_{ni} pour tout i où $1 \leq i \leq k$. Pour démontrer que F_n divise $F_{n(k+1)}$ nous utilisons (1.18). En effet, on a

$$F_{n(k+1)} = F_{nk+n} = F_{nk-1}F_n + F_{nk}F_{n+1}$$

d'après l'hypothèse, on sait que F_n divise F_{nk}, ainsi F_n divise $F_{n(k+1)}$.

Réciproquement, supposons que F_n divise F_m et nous allons montrer que n divise m. Ecrivons $m = qn + r$, avec $0 \leq r < m$. Maintenant utilisons la factorisation (1.18) une deuxième fois pour écrire

$$F_m = F_{m-n+n} = F_{m-n+1}F_n + F_{m-n}F_{n-1}.$$

Sachant que F_n divise F_m, alors F_n divise $F_{m-n}F_{n-1}$, et puisque F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux, on en déduit que F_n divise F_{m-n}. De la même façons on trouve que F_n divise F_{m-2n}. En continuant de la même façons on arrive à F_n divise $F_{m-qn} = F_r$ qui est impossible sauf si $r = 0$. Ce qui montre que n divise m nécéssairement. ■

1.3.1 Arctangente et Exponentielle de Fibonacci

On trouve dans les litératures plusieur identités trigonométriques en terme des nombres de Fibonacci et Lucas. Nous allons se limiter à l'exemple suivant

Théorème 1.2 *Pour tout entier strictement positif on a la formule suivante*

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right). \tag{1.21}$$

Preuve. Sachant que $0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \leq 1$, $\forall n \geq 1$, alors $0 \leq \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}$. Ensuite,

$$0 \leq \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Les deux nombres $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$ et $\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)+\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$ sont compris dans le même intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. D'autre part,

$$\tan\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)+\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right)=\frac{\frac{1}{F_{2n+1}}+\frac{1}{F_{2n}}}{1-\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n}}}=\frac{F_{2n+1}+F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+1}-1}.$$

Utilisons maintenant la factorisation (1.19), on peut écrire

$$F_{2n}F_{2n+1}-1=F_{2n}F_{2n+1}+F_{2n+1}F_{2n-1}-F_{2n}^2=F_{2n+1}\left(F_{2n}+F_{2n-1}\right)-F_{2n}^2=F_{2n+1}^2-F_{2n}^2.$$

En utilisant la dernière égalité on peut conclure que

$$\frac{F_{2n+1}+F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+1}-1}=\frac{F_{2n+1}+F_{2n}}{F_{2n+1}^2-F_{2n}^2}=\frac{1}{F_{2n+1}-F_{2n}}=\frac{1}{F_{2n-1}}$$

d'où le résultat cherché. ∎

En écrivant (1.21) d'abord sous la forme

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)=\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)-\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

après en faisant la somme sur n de 1 à l'infini on remarque qu'il ne reste que le premier terme dans le membre droit, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)=\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_2}\right)$$

et comme $F_2=1$ et $\mathrm{Arctg}\,(1)=\pi/4$, on en déduit une expression du π en terme de l'arctangente Fibonacci

<u>Corollaire</u> 1.5 *Le nombre π peut s'exprimer en terme de l'arctangente Fibonacci comme suit*

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right). \tag{1.22}$$

Maintenant, en utilisant la fonction génératrice usuelle de Fibonacci avec la fonction génératrice exponentielle de Lucas

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}x^n=\frac{1}{1-x-x^2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x)\;&=\sum_{n=0}^{\infty}L_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\phi^n+\overline{\phi}^n\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\phi)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x\overline{\phi}\right)^n}{n!}\\&=-\ln\left(1-x\phi\right)\left(1-x\overline{\phi}\right)=-\ln\left(1-x(\phi+\overline{\phi})+x^2\phi\overline{\phi}\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{1-x-x^2}\right)=\ln\left(F(x)\right)\qquad\text{(on a utilisé (1.8))}\end{aligned}$$

ce qui montre que $e^{\tilde{L}(x)}=F(x)$, i.e.,

$$e^{L_1x+(L_2/2)x^2+(L_3/3)x^3+\ldots}=F_1+F_2x+F_3x^2+\ldots$$

1.4 Nombres de Fibonacci généralisés

Dans cette section nous intéréssons à une récurrence linéaires d'ordre deux à coefficients constants égals à 1 et avec conditions initiales quelconques. Plus précisément, considérons une suite notée $\{G_n\}$ vérifie cette récurrence, i.e., $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, $n > 2$ et avec les conditions initiales $G_1 = a$ et $G_2 = b$.
On remarque que lorsque $a = 1$ et $b = 1$, la suite ci-dessus est la suite de nombres de Fibonacci elle-même, alors que si on prend $a = 1$ et $b = 3$ notre suite génère les nombres de Lucas. Ainsi, les conditions initiales sont ceux qui déterminent la suite $\{G_n\}$. Nous allons montrer qu'on peut exprimer la suite ci-dessus à l'aide de la suite de nombres de Fibonacci.

Théorème 1.3 *Sous les mêmes notations ci-dessus la suite $\{G_n\}$ vérifie la récurrence suivante*

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}, \quad n \geq 3 \tag{1.23}$$

Preuve. Comme $G_3 = a + b = aF_1 + bF_2$ la formule est vraie pour $n = 3$. Supposons que (1.23) soit vrai pour tout entier i où $3 \leq i \leq k$. Alors,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2}) \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + bF_{k-2}) \\ &= aF_{k-1} + bF_k. \end{aligned}$$

Ceci montre que (1.23) est vrai pour tout $n \geq 3$. ■
La formule de Binet de la suite ci-dessus peut s'énnoncer de la façon suivante

Théorème 1.4 *Sient $c = a + (a-b)\beta$ et $d = a + (a-b)\alpha$. Alors*

$$G_n = \frac{c\,\phi^n - d\,\overline{\phi}^n}{\phi - \overline{\phi}} \tag{1.24}$$

Preuve. D'après le théorème 1.3, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{5}G_n &= a\left(\phi^{n-2} - \overline{\phi}^{n-2}\right) + b\left(\phi^{n-1} - \overline{\phi}^{n-1}\right) = \phi^n\left(\frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha}\right) - \overline{\phi}^n\left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta}\right) \\ &= \phi^n(a\beta^2 - b\beta) - \overline{\phi}^n(a\alpha^2 - b\alpha) = \phi^n\left[a + (a-b)\beta\right] - \overline{\phi}^n\left[a + (a-b)\alpha\right] \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.8) dans les deux dernières égalités. ■
Cette familles vérifie des propriétés analogues à celles vérifie par la suite usuelle de Fibonacci qui peuvent démonter d'une manière similaire.

Chapitre 2

Polynômes de Fibonacci

Dans ce chapire nous proposons quelques généralisations des résultats discultés dans le chapite 1. Bien sûr toutes les généralisations considérées se réduisent au cas des nombres autour de $x = 1$. Sachant que la généralisatin n'est pas unique, nous s'intéréssons boucoups plus aux généralisations qui partage autant de propriétés avec sa correspondante au cas des nombres.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Les polynômes de Fibonacci sont les polynômes notés $\{F_n(x)\}$ et qui sont définis par la récurrence à trois terme suivante*

$$xF_n(x) = F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x),\ \forall n \geq 1, \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales $F_0(x) = 0$ et $F_1(x) = 1$.

On note que la récurrence (2.1) est identiquement celle vérifiée par les nombres de Fibonacci usuels lorsque $x = 1$.
En outre, le passage d'une suite de nombre à une suite de polynômees conserve, entre autre, plusieurs propriétés magiques des Fibonacci. On mentionne par example qu'on peut démontrer par la même technique qu'on a toujours la jolie proriété suivante

$$F_n(x)\backslash F_m(x) \Leftrightarrow n\backslash m$$

Dautre part, on peut définir les polynômes de Lucas en utilisant la même récurrence à trois termes, afin d'obtenir la suite des nombre dans un cas particulier. Pour se faire, il suffit par example de prendre comme condition initiales $L_0(x) = 2$ et $L_1(x) = x$. Ceci montre bien que les nombres de Lucas sont obtenus à partir de cette dernière généralisation en posant $x = 1$.
Un théorème fondamentale dans la théorie des polynômes orthogonaux connu sous le nom "théorème de Favard", caractérise les suites de polynômes orthogonaux à l'aide d'une relation de récurrence à trois terme de type (2.1). En effet, une suite de polynômes est dite suite de polynômes orthogonaux si et seulement si elle vérifie une récurrence de type (2.1). Ainsi, les plynômes de Fibonacci donnés par (2.1) forment une suite de polynômes orthogonaux qui peuvent s'exprimer en terme d'une ou d'autre famille de polynômes orthogonaux classiques notamment les Chebyshev. Le lien avec les plynômes orthogonaux n'est pas fortuit il a autant de but à savoir les zéros, la forme explicite en terme de fonctions hypergéométriques, représentation intégral, l'expression à l'aide des déterminants de Hankel, la déterminantion de la fonction génératrice, ...etc. Plus précisément, nou sallons citer entre autres, des résultats indisponsables.
D'abord, pour calculer la forme explicite du polynômes, nous pouvons utiliser l'équation caractéristique par exemple. Ici nous allons utiliser la fonction génératrice. Dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(x\right) t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(x\right) t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

Ainsi la formule de Binet prend la forme suivante

$$F_n(x) = \frac{\phi(x)^n - \overline{\phi}(x)^n}{\phi(x) - \overline{\phi}(x)}, \quad L_n(x) = \phi(x)^n + \overline{\phi}(x)^n.$$

Pour simplifier nous calculs, considérons maintenant la matrice tridiagonale suivante :

$$M(n) = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & & & \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & & \\ & m_{3,2} & m_{3,3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ & & & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

On peut démontrer par récurrence, en développant le déterminant au long de sa dernière colonne que

<u>Lemme</u> 2.1 *Le déterminant de $M(n)$ est donné récursivement par*

$$\begin{aligned} |M(1)| &= m_{1,1}, \\ |M(2)| &= m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}, \\ |M(n)| &= m_{n,n}\,|M(n-1)| - m_{n-1,n}m_{n,n-1}\,|M(n-2)| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ainsi, si on considère une suite de matrices $\{A(n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ où $A(n)$ est tridiagonale carrée de taille n avec $a_{k,k} = 1$, $1 \leq k \leq n$ et $a_{k-1,k} = a_{k,k-1} = i$, $2 \leq k \leq n$. D'après le lemme 2.1, on en déduit que les déterminants succesifs de $M(n)$ vérifient la récurrence suivante

$$\begin{aligned} |A(1)| &= 1, \\ |A(2)| &= 1^2 - i^2 = 2, \\ |A(n)| &= |A(n-1)| + |A(n-2)|. \end{aligned} \qquad A(n) = \begin{bmatrix} 1 & i & & \\ i & 1 & i & \\ & \ddots & \ddots & i \\ & & i & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Les déterminants si-dessus vérifient la même récurrence que Fibonacci avec les mêmes conditions initiales, en commençant par F_2, ce qui montre que

$$F_n = |A(n-1)|, \quad n \geq 2. \tag{2.5}$$

Introduisons une nouvelle suite de matrices $\{B(n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ où $B(n)$ est tridiagonale de taille n avec $b_{k,k} = 0$, $1 \leq k \leq n$ et $b_{k-1,k} = b_{k,k-1} = 1$, $2 \leq k \leq n$. Remarquons d'abord qu'on a $A(n) = I + iB(n)$. Notons par λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ les valeurs propres de $B(n)$ associées aux vecteurs propres x_k. Ainsi, pour tout j

$$A(n)x_j = [I + iB(n)]\,x_j = Ix_j + iB(n)x_j = x_j + i\lambda_j x_j = (1 + i\lambda_j)\,x_j.$$

Par suite, $\mu_k = 1 + i\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sont les valeurs propres de $A(n)$. Ainsi

$$F_{n+1} = |A(n)| = \prod_{k=1}^{n} (1 + i\lambda_k), \quad n \geq 1. \tag{2.6}$$

Calculons maintenant les λ_k qui sont les zéros du polynôme caractéristique $p_n(\lambda) = |B(n) - \lambda I|$. La matrice $B(n) - \lambda I$ est encore une matrice tridiagonale de la forme si-dessous

$$B(n) - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & \\ 1 & -\lambda & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad P(n,x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & & \\ 1 & 2x & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2x \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Regardons (2.7), il est evident que $B(n)+2xI = P(n,x)$. D'après le lemme 2.1, le polynômes $p_n(\lambda)$ ainsi que le déterminant de la matrice droite qu'on note $U_n(x) = |P(n,x)|$ vérifient respectivement les deux récurrences suivantes

$$\begin{array}{ll|ll} p_1(\lambda) & = -\lambda, & U_1(x) & = 2x, \\ p_2(\lambda) & = \lambda^2 - 1, & U_2(x) & = 4x^2 - 1, \\ p_n(\lambda) & = -\lambda p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda) & U_n(x) & = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x). \end{array} \tag{2.8}$$

La suite $\{U_n(x),\ n = 1, 2, ...\}$ est constitué par les polynômes de Chebyshev du second espèce. Il est bien connu lorsqu'on définit $x = \cos(\theta)$ qu'on peut écrire les polynômes de Chebyshev du second espèce sous la forme suivante

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\,\theta]}{\sin(\theta)}. \tag{2.9}$$

L'expression (2.9) si-dessus montre que les zéros de $U_n(x)$ sont donnés par $\theta_k = \frac{\pi k}{n+1}$, $k = 1, 2, .., n$, i.e., $x_k = \cos(\theta_k) = \cos(\frac{\pi k}{n+1})$. Rappelons que lorsque $\lambda = -2x$, les valeurs propres de la matrice $A(n)$ sont alors

$$\lambda = -2\cos(\frac{\pi k}{n+1}), \quad k = 1, 2, .., n. \tag{2.10}$$

En combinant (2.5), (2.6) et (2.10), on trouve

Théorème 2.1 *Les polynôles de Fibonacci définis par (2.1) se factorisent de la façon suivante*

$$F_{n+1} = |A(n)| = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2i\cos(\frac{\pi k}{n+1})\right), \quad n \geq 1. \tag{2.11}$$

Par conséquent, sachant que $A(n) = iP(n, -\frac{i}{2})$, alors

Corollaire 2.1 *On a* $|A(n)| = i^n \left|P(n, -\frac{i}{2})\right|$, *i.e.*

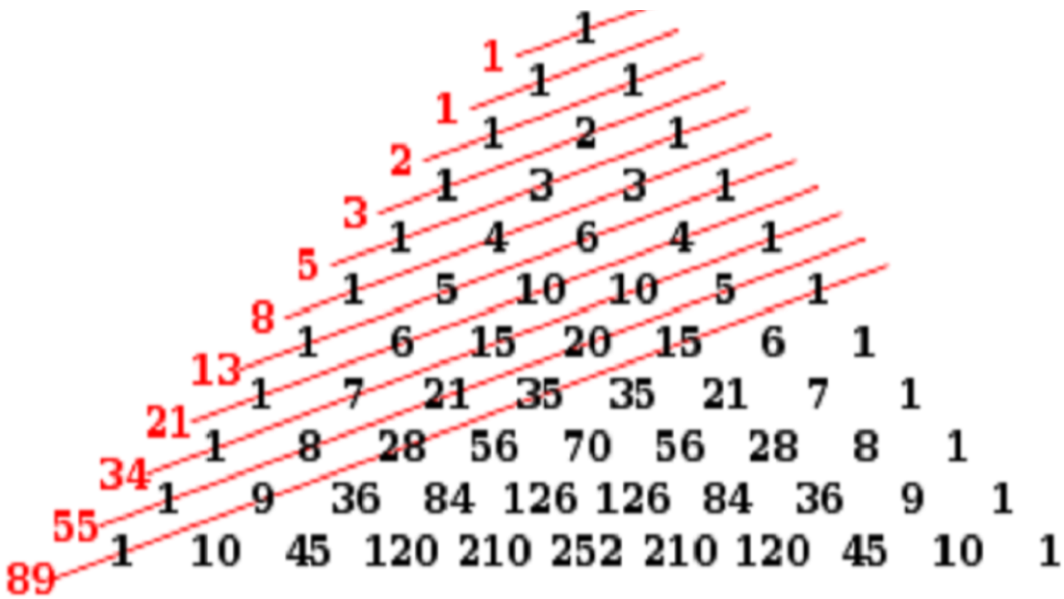
$$F_{n+1} = i^n U_n(-\frac{i}{2}) = i^n \frac{\sin[(n+1)\arccos\left(-\frac{i}{2}\right)]}{\sin(\arccos\left(-\frac{i}{2}\right))}, \ n \geq 0. \tag{2.12}$$

Le lien entre Fibonacci et Chebyshev, i.e., la formule (2.12), n'est pas une grande chose, elle peuve se démontrer de plusieur façon en regardant, par exemple, la récurrence vérifiée par les deux familles des polynômes, la fonction génératrice, la forme explicite tirée de l'équation caractéristique, ...etc.
De la même façon, on peut extraire des formules analogues pour les polynômes de Lucas. Par exemple, on a l'espression suivante

Corollaire 2.2 *Les polynômes de Lucas s'expriment en terme des polynômes de Chebyshev du première espèce et se factorisent de la manière suivante*

$$L_n = 2i^n \cos\left[n \arccos\left(-\frac{i}{2}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2i\cos\left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n}\right)\right),\ n \geq 1. \tag{2.13}$$

2.2 Interprétation combinatoire



Les coefficients des polynômes de Fibonacci se lisent sur les « diagonales » du triangle de Pascal (montrées en rouge). Les sommes des coefficients forment la suite de Fibonacci.

Si $F(n,k)$ est le coefficient de x^k dans $F_n(x)$, c'est-à-dire,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k)x^k$$

alors $F(n,k)$ est le nombre de façons dont on peut paver une bande de $n-1$ carrés avec des dominos (des rectangles 2×1) et exactement k carrés unité. De façon équivalente, $F(n,k)$ est le nombre de façons d'écrire $n-1$ comme une somme ordonnée de 1 et de 2, avec exactement k apparitions de 1. Par exemple, $F(6,3)=4$ et 5 peut s'écrire de 4 façons, $1+1+1+2$, $1+1+2+1$, $1+2+1+1$, $2+1+1+1$, comme somme de 1 et de 2 avec exactement trois 1 .Déterminant la position des 1 dans une telle somme, il devient alors évident que $F(n,k)$ est égal au coefficient binomial

$$F(n,k)=\begin{pmatrix} \frac{n+k-1}{2} \\ k \end{pmatrix}.$$

où n et k sont de parité opposée, ce qui permet de lire ces coefficients dans le triangle de Pascal, comme montré ci-dessus .

2.3 Polynômes h(x)-Fibonacci et leurs propriétés

Définition 2.2 *Soit $h(x)$ un polynôme avec des coefficients réels. Les polynômes $h(x)$-Fibonacci $\{F_{n,h}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sont définis par relation récurrente*

$$F_{h,n+1}(x)=h(x)F_{h,n}(x)+F_{h,n-1}(x), \quad n\geq 1. \tag{2.14}$$

Pour $h(x)=x$, nous obtenons les polynômes Fibonacci étudiés dans la section précédente, et pour $h(x)=2x$, nous obtenons les polynômes Fibonacci de Byrd. Si $H(x)=k$, on obtient les nombres ditent k-Fibonacci. Pour $k=1$ et $k=2$, on obtient les nombres habituels de Fibonacci et de Pell respectivement. La fonction génératice $g_F(t)$ de la suite $\{F_{h,n}(x)\}$ est définie par

$$g_F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x)t^n.$$

Par conséquent, on a la forme explicite de la fonction génératrice ci-dessus

Théorème 2.2 *La fonction génératrice des polynômes $h(x)$-Fibonacci est donnée par*

$$g_F(t)=\frac{t}{1-h(x)t-t^2}$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} & g_F(t)-h(x)tg_F(t)-t^2g_F(t) \\ &= F_{h,0}(x)+tF_{h,1}(x)+\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} t^n\left[F_{h,n}(x)-h(x)F_{h,n-1}(x)-F_{h,n-2}(x)\right] \\ &= t \end{aligned}$$

maintenant la récurrence (2.14) conduit à la conclusion. ■

Proposition 2.1 *Supposons que $h(x)$ soit un polynôme impair. Alors*

$$F_{h,n}(x)=(-1)^{n+1}F_{h,n}(x), \quad \forall n\geq 0.$$

2.3.1 Matrice $Q_h(x)$ et ses propriétés

Dans cette section, nous présentons la matrice $Q_h(x)$ qui joue le rôle de la matrice Q dans le cas de nombres de Fibonacci. La matrice Q est associée aux nombres de Fibonacci et définie par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi la matrice Q ? Tout simplement c'est un outil très importatant pour démontrer et construire des identités pas seulement pour les nombres ou les polynômes de Fibonacci, mais pour n'importe qu'elle famille de polynômes qui vérifie une récurrence linéaire finie ou non. La matrice Q est parfois appelée "*la matrice companion*". Dans le cas de $h(x)$-Fibonacci, la matrice companion prend la forme suivante

$$Q_h(x) = \begin{pmatrix} h(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Théorème</u> 2.3 *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$Q_h^n(x) = \begin{pmatrix} F_{h,n+1}(x) & F_{h,n}(x) \\ F_{h,n}(x) & F_{h,n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

<u>Preuve</u>. *Nous procédons par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $n = m \, (\geq 1)$. Alors*

$$\begin{aligned} Q_h^{m+1}(x) = Q_h^m(x) Q_h(x) &= \begin{bmatrix} F_{h,m+1}(x) & F_{h,m}(x) \\ F_{h,m}(x) & F_{h,m-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(x)F_{h,m+1}(x) + F_{h,m}(x) & F_{h,m+1}(x) \\ h(x)F_{h,m}(x) + F_{h,m-1}(x) & F_{h,m}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{h,m+2}(x) & F_{h,m+1}(x) \\ F_{h,m+1}(x) & F_{h,m}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ainsi la formule (2.15) est vraie pour tout entier strictement positif. ■

D'autre part, sachant que la déterminant de Q_h égal à 1, on en déduit le résultat suivant

<u>Corollaire</u> 2.3 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$F_{h,n+1}(x) F_{h,n-1}(x) - F_{h,n}^2(x) = (-1)^n$$

On peut utiliser la matrice companion pour démontrer (par la multiplication de deux matrices) des identités plus compliquées. Citons à titre d'exemple la formule suivante. Sachant que $Q^{2n+1} = Q^{n+1}Q^n$, alors les composantes $(1,2)$ et $(2,2)$ dans les deux matrices ci-dessus nous donnent respectivement

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad \text{et} \quad F_{2n} = F_n \left(F_{n+1} + F_{n-1} \right) = F_n L_n.$$

2.4 Un q-analogue de polynôme de Fibonacci

Rappelons quelques notions et définitions du coefficient q-bionmial, où q est un nombre différent de 1. Notons par

$$\begin{aligned}
[n]_q &= 1+q+...+q^{n-1}, \qquad\qquad [n]_q! = [1]_q[2]_q...[n]_q \\
(a;q)_n &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right) \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}\,(q;q)_k}
\end{aligned}$$

En effet, les nombres de Gauss $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ généralisent les coefficients binomiaux, ils convergent les binomiaux lorsque $q \to 1$. En plus, on peut démontrer par une simple manipulation des propriétés citées ci-dessus qu'on a aussi

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.16}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.17}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q![n+1-k]_q!} = \frac{[n]_q!([n+1-k]_q + q^{n+1-k}[k]_q)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!([n+1-k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} + q^{n+1-k}\frac{[n]_q!([k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q![n+1-k]_q!} = \frac{[n]_q!([n+1-k]_q + q^{n+1-k}[k]_q)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= q^k\frac{[n]_q![n+1-k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} + \frac{[n]_q![k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q.
\end{aligned}$$

Maintenant nous allons proposer une famille q-analogue au Fibonacci notée $\{F_n(q)\}$, définie à l'aide de la récurrence suivante

$$F_{n+1}(q) = F_n(q) + q^{n-1}F_{n-1}(q) \tag{2.18}$$

avec les conditions intiales $F_1(q) = F_2(q) = 1$. Par conséquent, on peut obtenir des résultats q-analogues citons à tidre d'exemple un analogue à (1.16) comme suit

Proposition 2.2 *Pour tout $n \geq 1$, les q-Fibonacci définis ci-dessus vérifient la factoristion suivante*

$$\begin{aligned} F_{n+3}(q) + q^{2n-1}F_{n-1}(q) &= \left(1 + q^n + q^{n+1}\right) F_{n+1}(q) \\ F_{2n+1}(q) - q^{n^2} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} q^{n^2-i^2} F_{2i}(q) \end{aligned} \tag{2.19}$$

La version précédente a été généralisée par Carlitz en définant des polynômes q-analogue à l'aide de la récurrence suivante

$$F_{n+1}(x,q) = xF_n(x,q) + q^{n-1}F_{n-1}(x,q) \tag{2.20}$$

avec les conditions intiales $F_1(x,q) = 1$ et $F_2(x,q) = x$. Pour simplifier l'écriture, nous utilisons dans la suite l'abriviation suivante en notant $F_n(x,q)$ simplement par $F_n(x)$.
A l'aide des multiplications des séries entières, Carlitz [4] avait obtenus plusieurs résultat et expressions de ces polynômes. En fait il a réussi d'exprimer la fonction génératrice correspondante sous la forme simple suivante

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)}t^{2n}}{(xt;q)_{2n}}$$

ce qui permet d'extraire la forme explicite du polynôme, i.e.,

$$F_n(x) = \sum_{2r \leq n} \begin{bmatrix} n-r \\ r \end{bmatrix}_q q^{r(r-1)} x^{n-2r}.$$

Carlitz avait donné également la formule inverse dans ce cas, c-à-d, l'expression de x^k en terme des polynomes $F_n(x,q)$. Pour plus de détail voir [4].

2.5 Polynômes (p,q)-Fibonacci & Lucas

Nous proposons encore une nouvelle généralisation apparaît en combinatoire mais nous allons emprunter leurs constructions d'un point de vue analytique et non combinatoire. Les définitions suivantes sont proposés par Wang [13]

Définition 2.3 *Soient $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes à coefficients réels. On définit les polynômes (p,q)-Fibonacci et (p,q)-Lucas notés respectivement par $F_{p,q,n}(x)$ et $L_{p,q,n}(x)$ comme étant les deux solutions de la récurrence linéaire suivante*

$$V_{n+1}(x) = p(x)V_n(x) + q(x)V_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

correspondants aux pairs des conditions initiales $\{V_0(x) = 0,\ V_1(x) = 1\}$ et $\{V_0(x) = 2,\ V_1(x) = p(x)\}$ respectivement.

La définition précédente nous donne les polynômes $h(x)$-Fibonacci si on pose $q(x) = 1$. D'autre part, la fonctions géneratrice des polynômes (p, q)-Fibonacci et (p, q)-Lucas sont données respectivement par

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{p,q,n}(x)t^n = \frac{t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \qquad \text{et} \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,q,n}(x)t^n = \qquad \frac{2 - p(x)t}{1 - p(x)t - q(x)t^2}$$

Notons par $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ les deux racines de l'équation caractéristique, i.e.,

$$\alpha(x) = \frac{p(x) + \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2}, \qquad \beta(x) = \frac{p(x) - \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}}{2}.$$

avec

$$\alpha(x) + \beta(x) = p(x), \quad \alpha(x)\beta(x) = -q(x), \quad \alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{p^2(x) + 4q(x)}.$$

Ainsi, la formule de Binet dans ce cas peut s'écrire sous la forme suivante

Proposition 2.3 *Pour tout entier positif n, on a les formules de Binet suivantes*

$$F_{p,q,n}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, \qquad L_{p,q,n}(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x).$$

ON a aussi l'inversion suivante qui est de type (1.9) et qui peut se démontrer par récurrence

$$t^n = F_{p,q,n}(x)t + q(x)F_{p,q,n-1}(x), \quad \forall n \geq 0.$$

En utilisant la matrice companion, i.e., $Q_{p,q}$, on peut démontrer facilement l'expression suivante

$$F_{p,q,m+n+1}(x) = F_{p,q,m+1}(x)F_{p,q,n+1}(x) + q(x)F_{p,q,m}(x)F_{p,q,n}(x), \forall m, n \geq 0.$$

La plupart des propriétés satisfaites par les nombres de Fibonacci sont conservées par cette généralisation. Par exemple, pour tout $k \geq 1$, on $F_{p,q,n}(x)$ divise $F_{p,q,kn}(x)$.

Chapitre 3

Applications sur les nombres et les polynômes de Fibonacci

Comme nous avons mentionné dans l'introduction, les nombres de Fibonacci apparaît dans toutes les sciences et technologies, à la musique, dans la nature, dans l'ADN, ... et presque partout ! Dans ce chapitre nous allons présenter quelques utilisations des nombres ainsi que les polynômes de Fibonacci pour résoudre des équations à dérivées partielles et pour résoudre les équations algébriques. Nous présentons aussi des méthodes d'approximation de la solution d'une équation de différence de Riccati, et déterminons les points de coordonées intégrales (entières) de certaine courbe elliptique.

3.1 Solutions d'équation au différence de Riccati

Nous étudions les solutions de deux types particuliers de l'équation au différence de Riccati $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ et $y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n}$ de sorte que leurs solutions sont associées aux nombres de Fibonacci. Considérons l'équation de différence de Riccati

$$x_{n+1} = \tfrac{a+bx_n}{c+dx_n}, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{3.1}$$

De toute évidence, en prenant $a = c = d = 1, b = 0$ et $a = d = 1, c = -1, b = 0$, l'équation (3.1), (resp), se transforme en équations suivantes :

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{1+x_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.2}$$

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{-1+y_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.3}$$

Où les conditions initiales sont $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ et $y_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ (resp), et F_m est le nombre d'ordre m de Fibonacci. L'objectif de cette étude est d'étudier certaines relations entre les nombres de Fibonacci et les solutions d'équations (3.2) et (3.3) et entre le rapport d'or et l'équilibre points d'équations (3.2) et (3.3).

Tout d'abord, on a les points d'équilibre des équations (3.2) et (3.3) son $\overline{x}_1 = -\beta$, $\overline{x}_2 = -\alpha$ et $\overline{y}_1 = \alpha$, $\overline{y}_2 = \beta$,(resp)

Théorème 3.1 *Pour $n = 0, 1, 2, \cdots$ les solutions des équations (3.2) et (3.3) sont les suivantes :*
(i)-Pour $x_0 \in \mathbb{R} - \left(\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\} \cup \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$, $x_n = \frac{F_n+F_{n-1}x_0}{F_{n+1}+F_n x_0}$.
(ii)-Pour $y_0 \in \mathbb{R} - \left(\{\alpha, \beta\} \cup \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$, $y_n = \frac{F_{-n}+F_{-(n-1)}y_0}{F_{n+1}+F_{-n}y_0}$.

Preuve. Tout d'abord, ici, nous allons simplement prouver (ii) que (i) peut être pens é de la même manière. (ii) Nous allons prouver ce théorème par induction. Supposons maintenant que

$$y_k = \frac{F_{-k} + F_{-(k-1)}y_0}{F_{-(k+1)} + F_{-k}y_0}, \tag{3.4}$$

pour $k = 0$,

$$\frac{F_0 + F_1 y_0}{F_{-1} + F_0 y_0} = \frac{0 + 1y_0}{1 + 0y_0} = y_0,$$

est vrai pour tous les entiers positifs k. Par suite, nous devons montrer que c'est vrai pour $k + 1$. Prise Dans le compte $F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1}$ et (3.4), nous écrivons

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{1}{-1 + y_k}, \\ &= \frac{F_{-k}y_0 + F_{-(k+1)}}{F_{-k} - F_{-(k+1)} + (F_{-(k-1)} - F_{-k})y_0}, \\ &= \frac{F_{-(k+1)} + F_{-k}y_0}{F_{-(k+2)} + F_{-(k+1)}y_0}. \end{aligned}$$

Qui met fin à l'induction et à la preuve. ■

Théorème 3.2 *Laissez les solutions des équations* **(3.2)** *et* **(3.3)** *être* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *et* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *(resp) et* $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$. *Par la suite,* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{-y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *est satisfait si et seulement si les conditions initiale sont* $x_0 = -y_0$.

Preuve. On supposons que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. et on à $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$, en peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0} &= -\frac{F_{-n} + F_{-(n-1)}y_0}{F_{-(n+1)} + F_{-n}y_0}, \\ &= \frac{F_n - F_{n-1}y_0}{F_{n+1} - F_n y_0}. \end{aligned}$$

en utilisant des opérations mathématiques simples et la formule connue (**??**) pour les nombres de Fibonacci, nous avons

$$\begin{aligned} &(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)x_0 = (F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1})y_0, \\ &(-1)^n x_0 = (-1)^{n+1} y_0, \\ &x_0 = -y_0. \end{aligned}$$

Deuxièmement, supposons que $x_0 = -y_0$. En considérant les solutions de l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0}, \\ &= \frac{(-1)^{n+1}F_n - (-1)^{n+1}F_{n-1}y_0}{(-1)^{n+1}F_{n+1} - (-1)^{n+1}F_n y_0}, \\ &= \frac{F_{-n} + F_{-(n-1)}y_0}{-F_{-(n+1)} - F_{-n}y_0}, \\ &= \frac{F_{-n} + F_{-(n-1)}y_0}{-(F_{-(n+1)} + F_{-n}y_0)}, \\ &= -y_n. \end{aligned}$$

Ce qui est souhaité. ■

Théorème 3.3 *Les déclarations suivantes contiennent :*
(i)Pour la condition initiale $x_0 = \frac{1}{\alpha}$ *ou* $(x_0 = \frac{1}{\beta})$, *l'équation* **(3.2)** *a la solution fixe* $x_n = \frac{1}{\alpha}$ *ou* $(x_n = \frac{1}{\beta})$.
(ii)Pour la condition initiale $y_0 = \alpha$ *ou* $(y_0 = \beta)$, *l'é quation* **(3.3)** *a la solution fixe* $y_n = \alpha$ *ou* $(y_n = \beta)$.

Preuve. Ici, nous allons simplement prouver (i) et la preuve de (ii) peut être effectuée d'une manière similaire.
(i), laissez $x_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ être la condition initiale de l'équation (3.2). Ensuite, en utilisant (1.9), nous avons

$$x_n = \frac{F_n + \frac{F_{n-1}}{\alpha}}{F_{n+1} + \frac{F_n}{\alpha}} = \frac{\alpha F_n + F_{n-1}}{\alpha F_{n+1} + F_n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Deuxièmement, soit $x_0 = \frac{1}{\beta} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ la condition initiale de l'équation (3.2). Ensuite, en considérant (1.9), nous obtient

$$x_n = \frac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0} = \frac{F_n + \frac{F_{n-1}}{\beta}}{F_{n+1} + \frac{F_n}{\beta}} = \frac{\beta F_n + F_{n-1}}{\beta F_{n+1} + F_n} = \frac{\beta^n}{\beta^{n+1}} = \frac{1}{\beta}.$$

Ce qui est souhaité. ■

Théorème 3.4 *Les relevés suivants contiennent :*
(i) Pour $x_0 \in \mathbb{R} - \left(\left\{\frac{1}{\beta}\right\} \cup \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$, *toutes les solutions de l'équation (3.2) convergent vers* $-\beta$, *où* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *C'est-à -dire :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\beta. \tag{3.5}$$

(ii) Pour $y_0 \in \mathbb{R} - \left(\{\alpha\} \cup \left\{\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$, *toutes les solutions de l'équation (3.3) convergent vers* β, *où* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *C'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \beta. \tag{3.6}$$

Preuve. Pour prouver, nous utilisons les solutions de (3.2) et (3.3).(i) En utilisant le théorème (3.1) (i), on peut écrire

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}x_0}{\frac{F_{n+1}}{F_n} + x_0}, \tag{3.7}$$

ainsi, à partir de $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \frac{1}{\alpha}x_0}{\alpha + x_0} = \frac{1}{\alpha} = -\beta. \tag{3.8}$$

(ii) La preuve peut être vue de manière similaire à cette Théorème (i). ■

Théorème 3.5 *Soit* $\{x_n\}_0^{\infty}$ *la solution de (3.2). Ensuite nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} x_i = F_0. \tag{3.9}$$

Preuve. Pour $x_0 = F_0$, le résultat est trivial. Si $x_0 \neq F_0$, par Théorè me (3.1), alors on peut écrire

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{F_0 + F_{-1}x_0}{F_1 + F_0 x_0}, \\ x_1 &= \frac{F_1 + F_0 x_0}{F_2 + F_1 x_0}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{F_n + F_{n-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0}, \end{aligned}$$

en multipliant les deux côtés des égalités ci-dessus, nous obtenons

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = \frac{F_0 + F_{-1}x_0}{F_{n+1} + F_n x_0} = \frac{x_0}{F_{n+1} + F_n x_0}, \tag{3.10}$$

lessons $n \longrightarrow \infty$, la dernière égalité donne le résultat suivant

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n} x_i = F_0.$$

Par suite, la preuve est terminée. ■

Le théorème suivant établit que les nombres de Fibonacci peuvent être obtenus en utilisant les solutions de (3.2).

Théorème 3.6 *Laissez la condition initiale de l'équation (3.2) être $x_0 = \frac{F_k}{F_{k+1}}$, où F_k est le nombre d'ordre k de Fibonacci. Pour $n > k+1$ et $k \in \mathbb{Z}^+$, on a :*

$$F_n = \frac{F_{k+1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-(k+1)}}.$$

Preuve. Tout d'abord, prenant $n-(k+1)$ au lieu de n dans (3.10), on obtient

$$\prod_{i=0}^{n-(k+1)} x_i = \frac{x_0}{F_{n-k} + F_{n-(k+1)}x_0}, \tag{3.11}$$

deuxièmement, en divisant les deux côtés en (1.9) par x_0, on obtient

$$\prod_{i=1}^{n-(k+1)} x_i = \frac{1}{F_{n-k} + F_{n-(k+1)}x_0}, \tag{3.12}$$

enfin, pour $n \geq k+1$, $n \in \mathbb{N}^+$ et $k \in \mathbb{N}$, $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_k F_{n-(k+1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_{n-(k+1)} &= \frac{1}{F_{n-k} + F_{n-(k+1)}x_0}, \\ &= \frac{1}{F_{n-k} + F_{n-(k+1)}\frac{F_k}{F_{k+1}}}, \\ &= \frac{F_{k+1}}{F_n}. \end{aligned}$$

À partir duquel le résultat suit. ∎

Dans cette étude, nous avons principalement obtenu la relation entre les solutions des équations de différence de Riccati (données dans (3.2), (3.3)) et les nombres de Fibonacci. Nous avons également présenté que les solutions non triviales des équations dans (3.2) et (3.3) convergent réellement vers $-\beta$ et β, respectivement, De sorte que β soit conjugué au rapport d'or.

3.2 Méthode de collocation pour les équations de diffusion farctionnaire

La méthode de collocation de Fibonacci basée sur les polynômes de Fibonacci est présentée pour résoudre les équations de diffusion fractionnaires avec des coefficients variables. Les dérivés fractionnaires sont décrits au sens de Caputo. Cette méthode est dérivée par en développant la solution approximative avec les polynômes de Fibonacci. En utilisant cette méthode de de la dérivée fractionnaire, cette équation peut être réduite à un ensemble d'équations algébrique linéaires. En outre, un algorithme d'estimation d'erreur basé sur les fonctions résiduelles est présenté pour cette méthode. Les solutions approximatives sont améliorées en utilisant cet algorithme d'estimation d'erreur. Si la solution exacte du problème n'est pas connue, la fonction d'erreur absolue des problèmes peut être calculée approximativement en utilisant la solution polynomiale de Fibonacci. En utilisant cette fonction d'estimation d'erreur, nous pouvons trouver des solutions améliorées qui sont plus efficaces que les solutions numériques directes.

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire spatiale unidimensionnelle avec des coefficients variables :

$$\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x)\tfrac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + q(x,t), \quad 0 < x < l, \tag{3.13}$$

avec des conditions

$$u(x,0) = k(x), \quad 0 < x < l,$$

et les conditions aux limites

$$u(0,t) = g_0(t), \quad 0 < t \leq \tau,$$
$$u(l,t) = g_1(t), \quad 0 < x \leq \tau,$$

où $c(x) \neq 0$ est le coefficient de diffusion, $q(x,t), k(x), g_0(t)$ et $g_1(t)$ sont des fonctions connues, et la fonction $u(x,t)$ est inconnue .

3.2.1 Polynômes de Fibonacci

En développant la méthode de collocation Fibonacci, nous obtiendrons la solution approximative de l'équation (3.13) dans le forme tronquée de la série Fibonacci

$$u_N(x,t) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}F_m(x)F_n(t), \tag{3.14}$$

où a_{mn}, $m,n = 1,...,N$ sont les coefficients inconnus de Fibonacci et $F_n(x), F_m(x)$; $m,n = 1,...,N$ sont les fonctions de Fibonacci définis par,

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \begin{pmatrix} n-j-1 \\ j \end{pmatrix} x^{n-2j-1}, \quad \left[\tfrac{n-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ impair} \end{cases}. \tag{3.15}$$

3.2.2 Dérivée fractionnée au sens de Caputo

<u>Définition</u> 3.1 *La définition de Cauto de la dérivée d'ordre fractionnaire est définie comme*

$$D^\alpha f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \tfrac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Où $\alpha > 0$ est l'ordre de dérivée, $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma et $n = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ désignant la partie intégrale de α. Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{N}$, l'opérateur différentiel de Caputo coïncide avec le différentiel habituel opérateur d'ordre entier. Pour le dérivé de Caputo :

$$D^\alpha C = 0, \quad (C \textit{ constant })$$

$$D^\alpha x^\beta \;=\; \begin{cases} 0 & \textit{avec } \;\beta \in \mathbb{N}_0, \quad \textit{et } \beta < [\alpha] \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}, & \textit{avec } \beta \in \mathbb{N}_0, \quad \textit{et } \beta \notin \mathbb{N} \textit{ et } \beta > [\alpha] \end{cases}$$

nous utilisons la fonction de plafond $[\alpha]$ pour désigner le plus petit nombre entier supérieur ou égal à α, la fonction de sol $[\alpha]$ indique l'entier le plus grand inférieur ou égal à α et $\beta > [\alpha]$ à désigner l'ordre de x. Nous utilisons également $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ et $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$. Semblable à la différenciation d'ordre entier, La diffé renciation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire.

3.2.3 Relations matricielles fondamentales

Dans cette partie, nous avons donné des relations matricielles fondamentales pour transformer l'équation (3.13) aux formes d'équation matricielle. Pour obtenir la solution numérique de la diffusion fractionnaire de l'espace unidimensionnel problème en utilisant les polynômes de Fibonacci, nous évaluons d'abord les coefficients de Fibonacci de la fonction inconnue. La solution approximative (3.14) peut être écrite sous la forme matricielle

$$u_N(x,t) = F(x)\overline{F}(t)A, \tag{3.16}$$

où

$$F(x) = [F_1(x)F_2(x)...F_N(x)]_{1\times N}\,.$$

$$\overline{F}(t) = \begin{bmatrix} F(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & F(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F(t) \end{bmatrix}_{N\times N^2},$$

et

$$A = [A_1A_2...A_N]^T_{1\times N^2}\,,$$

tel que

$$A_i = [a_{i1}a_{i2}...a_{iN}]^T_{1\times N}\,, \quad i = 1, 2, ...N,$$

ici, la matrice $F(x)$ peut être écrite comme

$$F(x) = X(x)C^T, \tag{3.17}$$

$$X(x) = \left[1\ x\ ...\ x^{N-1}\right].$$

si N est pair, et on pose $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \frac{(n-2)}{2} \\ \frac{(n-2)}{2} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{(n-4)}{2} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{(n-2)}{2} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} \frac{(n+2)}{2} \\ \frac{(n-4)}{2} \end{pmatrix} & ... & \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

si N impair

$$C = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{\frac{(n-1)}{2}}{\frac{(n-3)}{2}} & 0 & \binom{\frac{(n-1)}{2}}{\frac{(n-5)}{2}} & \cdots & 0 \\ \binom{\frac{(n-1)}{2}}{\frac{(n-1)}{2}} & 0 & \binom{\frac{(n+1)}{2}}{\frac{(n-3)}{2}} & 0 & \ldots & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}$$

C est la matrice caractéristique des relations matricielles, nous pouvons exprimer les relations

$$\overline{F}(t) = \overline{X}(t)\overline{C}^T, \tag{3.18}$$

où

$$\overline{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & X(t) \end{bmatrix},$$

et

$$\overline{C}^T(t) = \begin{bmatrix} C^T & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C^T & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C^T \end{bmatrix},$$

d'abord des relations (3.16) (3.18), on peut obtenir la solution souhaitée $u(x,t)$ de l'équation (3.13) défini par la série tronquée de Fibonacci (3.14) sous forme de matrice comme suit :

$$u(x,t) = X(x)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T A \tag{3.19}$$

deuxièmement, nous pouvons définir la forme matricielle des dérivées partielles pour chaque indépendance des variables du terme $u(x,t)$, nous présentons la relation entre la matrice $X(x)$ et ses dérivées $X'(x)$ qui peuvent être exprimé comme :

$$X'(x) = X(x)B,$$

de même, la relation entre la matrice $X(t)$ et sa dérivée $X'(t)$ est écrite :

$$\overline{X}'(x) = \overline{X}(t)\overline{B},$$

$$u_x(x,t) = X(x)BC^T\overline{X}(t)\overline{C}^T A, \quad (3.20)$$
$$u_t(x,t) = X(x)C^T\overline{X}(t)\overline{BC}^T A, \quad (3.21)$$

oú

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

Enfin, nous pouvons expliquer la forme matricielle de $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$ qui est la dérivée fractionnée de $u(x,t)$ terme, peut être écrit comme :

$$\left[\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}\right] = M(x)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T A, \quad (3.22)$$

où

$$M(x) = \frac{\partial^\alpha X(x)}{\partial x^\alpha} = \left[0 \ D^\alpha x \ D^\alpha x^2 \dots D^\alpha x^{N-1}\right]_{1\times N},$$

tel que

$$D^\alpha x^i = \tfrac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-\alpha)} x^{i-\alpha}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

En utilisant les relations (3.20), (3.21), (3.22) dans l'équation (3.13), on peut avoir la forme de matrice fermée

$$\underbrace{X(x)C^T\overline{X}(t)\overline{BC}^T - c(x)M(x)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T}_{W(x,t)} A = q(x,t),$$

en bref, la forme est écrite

$$W(x,t)A = q(x,t). \quad (3.23)$$

nous avons les formes matricielles correspondantes pour la condition initiale et pour la limite condition (3.13) au moyen de la relation (3.19).

$$\begin{aligned} u(x,0) &= X(x)C^T\overline{X}(0)\overline{C}^T A = k(x) \\ u(0,t) &= X(0)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T A = g_0(t) \\ u(l,t) &= X(l)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T A = g_1(t) \end{aligned}$$

Méthode de collocation

Pour l'équation matricielle (3.23) en utilisant des points de collocation définis par :

$$x_i = \tfrac{1}{N-1}\left(i-1\right), \quad i = 1, 2, ..., N,$$
$$t_i = \tfrac{\tau}{N-1}\left(j-1\right), \quad j = 1, 2, ..., N,$$

est obtient le système d'équations matricielles

$$W(x_i, t_j)A = q(x_i, t_j), \quad i = 1, 2, ..., N, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

En utilisant le système d'équation matricielle, l'équation matricielle fondamentale devient

$$WA = Q \quad \text{ou} \quad [W; Q]\,.$$

La matrice fondamentale de l'équation.(3.17) de l'équation (3.13) correspond à un système de N^2 algébrique équations pour les coefficients N^2 inconnus a_{mn}, $m, n = 1, 2, ..., N$. D'autre part, en utilisant des points de collocation, nous pouvons obtenir une forme matricielle de la condition initiale

$$U_1 A = K,$$
$$U_1 = \left[X(x)C^T\overline{X}(0)\overline{C}^T\right], \quad K = [k(x_i)]_{N\times 1}\,, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

et la forme matricielle des conditions aux limites, comme suit

$$U_2 A = G_0,$$

$$U_2 = \left[X\left(0\right)C^T\overline{X}\left(t\right)\overline{C}\right], \quad G_0 = \left[g_0\left(t_j\right)\right]_{N\times 1} \quad j = 1, 2, ..., N.$$

et

$$U_3 A = G_1,$$
$$U_3 = \left[X\left(l\right)C^T\overline{X}(t)\overline{C}^T\right], \quad G_1 = \left[g_1\left(t_j\right)\right]_{N\times 1}, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Par la suite, afin d'obtenir la solution de l'équation sous l'initiale et la limite conditions, nous pouvons écrire une matrice augmentée qui contient tous les composants de ce problème

$$\left[\widetilde{W};\widetilde{Q}\right]=\begin{bmatrix} U_1;K \\ U_2;G_0 \\ U_3;G_1 \\ W;Q \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les coefficients Fibonacci inconnus sont obtenus comme

$$A=\left(\widetilde{\widetilde{W}}\right)^{-1}\widetilde{\widetilde{Q}}.$$

Où $\left[\widetilde{\widetilde{W}};\widetilde{\widetilde{Q}}\right]$ est généré en utilisant la méthode d'élimination de Gauss, puis en enlevant zéro rangées de la matrice augmentée $\left[\widetilde{W};\widetilde{Q}\right]$.

3.2.4 Algorithme et analyse d'estimation d'erreur

Dans cette section, nous donnerons une estimation d'erreur efficace pour le polynôme Fibonacci l'approximation et aussi une technique pour obtenir la solution corrigée du problème (3.13) en utilisant la méthode de correction résiduelle, pour notre objectif, nous définissons la fonction résiduelle pour la méthode actuelle comme :

$$R_N\left(x,t\right)=L\left[u_N\left(x,t\right)\right]-q(x,t),$$

où

$$L\left[u_N\left(x,t\right)\right]=\frac{\partial u_N\left(x,t\right)}{\partial x}-c(x)\frac{\partial^\alpha u_N\left(x,t\right)}{\partial x^\alpha}.$$

Notez que, la solution polynomiale Fibonacci satisfait le problème suivant

$$L\left[u_N\left(x,t\right)\right]=\frac{\partial u_N\left(x,t\right)}{\partial x}-c(x)\frac{\partial^\alpha u_N\left(x,t\right)}{\partial x^\alpha}=q(x,t)+R_N(x,t), \tag{3.24}$$

avec les conditions initiales et limites

$$\begin{aligned} u_N\left(x,0\right)&=K(x),\ 0<x<l,\\ u_N\left(0,t\right)&=g_0(t),\ 0<t\leq\tau,\\ u_N\left(l,t\right)&=g_1(t),\ 0<t\leq\tau. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En outre, la fonction d'erreur $e_N(x,t)$ peut être définie comme

$$e_N\left(x,t\right)=u(x,t)-u_N\left(x,t\right), \tag{3.26}$$

où $u(x,t)$ est la solution exacte du problème (3.13) .
En utilisant les équations (3.13) et (3.24) (3.26), on a l'équation différentielle d'erreur

$$L\left[e_N\left(x,t\right)\right] = L\left[u\left(x,t\right)\right] - L\left[u_N\left(x,t\right)\right] = -R_N(x,t)$$

avec les conditions homogènes

$$\begin{aligned} e_N\left(x,0\right) &= 0,\ 0<x<l, \\ e_N\left(0,t\right) &= 0,\ 0<t\leq\tau, \\ e_N\left(l,t\right) &= 0,\ 0<t\leq\tau. \end{aligned}$$

Par la suite, le problème d'erreur peut être écrit comme :

$$\frac{\partial e_N(x,t)}{\partial x} - c(x)\frac{\partial^\alpha e_N(x,t)}{\partial x^\alpha} = -R_N(x,t),$$

$$\begin{array}{c} e_N\left(x,0\right)=0,\ 0<x<l, \\ e_N\left(0,t\right)=0,\ 0<t\leq\tau, \\ e_N\left(l,t\right)=0,\ 0<t\leq\tau. \end{array} \tag{3.27}$$

Résoudre le problème (3.27) de la même manière que dans "La dérivée fractionnaire sens de Caputo", on obtient l'approximation $e_{N,M}(x,t)$ à $e_N(x,t)$, $M>N$ celle est l'erreur fonction basée sur la fonction résiduelle. Nous notons que si la solution exacte du problème (3.13) est inconnue, alors la fonction d'erreur peut être estimée par $e_{N,M}(x,t)$ qui se trouve sans la solution exacte et également clairement vu à partir d'un algorithme d'estimation d'erreur donné. Au moyen de la solution polynomiale Fibonacci $u_N(x,t)$ et de la fonction d'estimation d'erreur $e_{N,M}(x,t)$, on obtient la solution polynomiale Fibonacci corrigée

$$u_{N,M}(x,t) = u_N(x,t) + e_{N,M}(x,t).$$

3.3 Résolution des équations algébriques par Fibonacci

3.3.1 Equations algébriques générales

Pour trouver une solution (réelle) d'une équation algébrique

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, a_i \in \mathbb{R}.$$

Nous recherchons la suite de type Fibonacci correspondante

$$F_{i+1} = p_1F_i + p_2F_{i-1} + ... + p_nF_{i-n+1},$$

alors

$$\lim_{i\to\infty}\left(p_1\frac{F_i}{F_{i+1}}+p_2\frac{F_{i-1}}{F_{i+1}}+...+p_n\frac{F_{i-n}}{F_{i+1}}\right)=1=...=\left(\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+...+\frac{p_n}{x^n}\right),$$

et en comparant les coefficients suit $p_j=-a_j,\quad j=1,...,n.$

3.3.2 Equations quadratique

Nous avons remarqué que $x^2-x-1=0$, resp. $x^2+x-1=0$ ont φ resp. $\frac{1}{\varphi}$ comme des solutions positives. Ici appartiennent la suite de Fibonacci et donc la limite de "Fibonacci quotients" donnent la solution (positive) de ces équations quadratiques spéciales. Donc l'un pourrait demander, compte tenu d'une équation quadratique générale $x^2-ax-b=0$, $a,b\in$ mathbbR, trouver une suite de type Fibonacci telle que la solution positive soit la limite du quotient des éléments adjacents de cette suite !

Commençons par une suite de type Fibonacci définie par $F_{i+1}=pF_i+qF_{i-1}$, puis suit que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1=p\frac{F_i}{F_{i+1}}+q\frac{F_{i-1}}{F_{i+1}}\right)=\left(1=\frac{p}{x}+\frac{q}{px+q}\right)=\left(1=\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)$$

Maintenant, en comparant les coefficients, on obtient finalement $p:=a$, $q:=b$. Par conséquent, on peut recevoir une solution d'une équation quadratique avec deux coefficients non triviaux en calculant la limite des "quotients Fibonacci", c'est-à-dire la limite de la suite des rapports de deux nombres Fibonacci adjacents. Notez que la suite du quotient est convergente, si seulement l'équation quadratique a des solutions réelles.

3.3.3 Equation cubique

Un général l'équation cubique $x^3+ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in R\backslash\{0\}$, trouve un type Fibonacci est une suite de telle sorte qu'une solution réelle soit la limite du quotient des éléments adjacents de cette suite encore une fois, nous commençons par une suite de type Fibonacci définie par

$$Fi+1=pF_i+qF_{i-1}+rF_{i-2}. \tag{3.28}$$

Un court calcul montre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1=p\frac{F_i}{F_{i+1}}+q\frac{F_{i-1}}{F_{i+1}}+r\frac{F_{i-2}}{F_{i+1}}\right)=...=\left(1=\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}\right).$$

En comparant les coefficients, nous recevons $p=-a, q=-b, r=-c$. Notez que la suite de Fibonacci-quotient généralisée est certainement convergente, aussi longtemps qu'au moins $q\neq 0$ et $r\neq 0$. Les équations cubiques possèdent toujours au moins une solution réelle.

3.4 Equation elliptique

3.4.1 Points intégrés sur la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$

Nous donnons une nouvelle preuve que la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$ n'a que l'intégrale points $(x, y) = (2, 0)$ et $(x, y) = (28.844.402, \pm 15.491.585.540)$ en utilisant l'élémentaire des méthodes de théorie des nombres et certaines propriétés de Fibonacci et Lucas généralisés Soient P et Q entiers non nuls avec $P^2 + 4Q \neq 0$. La suite généralisée de Fibonacci $(F_n(P, Q))$ et la suite de Lucas $(L_n(P, Q))$ sont définis par la suite suivante :

$$F_n(P, Q) = 0, \quad F_1(P, Q) = 1, \quad F_{n+2}(P, Q) = PF_{n+1}(P, Q) + QF_n(P, Q), \quad \text{pour } n \geq 0,$$

et

$$L_n(P, Q) = 2, \quad L_1(P, Q) = P, \quad L_{n+2}(P, Q) = PL_{n+1}(P, Q) + QL_n(P, Q), \quad \text{pour } n \geq 0.$$

$F_n(P, Q)$ s'appelle le nombre généralisé de Fibonacci et $L_n(P, Q)$ s'appelle le nombre généralisé de Lucas. En outre, les nombres généraux de Fibonacci et Lucas sont négatifs les indices sont définis comme :

$$F_{-n}(P, Q) = \frac{-F_n(P,Q)}{(-Q)^n} \quad \text{et} \quad L_{-n}(P, Q) = \frac{L_n(P,Q)}{(-Q)^n} \quad \text{pour } n \geq 1, \tag{3.30}$$

(resp). Prenant $\alpha = \frac{\left(P+\sqrt{P^2+4Q}\right)}{2}$ et $\beta = \frac{\left(P-\sqrt{P^2+4Q}\right)}{2}$ pour être la racine de la équation caractéristique $x^2 - Px - Q = 0$, nous avons les expressions bien connues appelées formules de Binet

$$F_n(P, Q) = \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)} \quad \text{et} \quad L_n(P, Q) = \alpha^n - \beta^n. \tag{3.31}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Au lieu de $F_n(P, Q)$ et $L_n(P, Q)$, nous utilisons F_n et L_n, (resp). Pour $P = Q = 1$, la suite (F_n) est la suite de Fibonacci (F_n) et la suite (L_n) est la suite de Lucas (L_n). Si $P = 2$ et $Q = 1$, nous avons le célèbre la suite dr Pell (P_n) et la suite de Pell-Lucas (Q_n). Pour $Q = -1$, on représente (F_n) et (L_n) par (f_n) et (l_n), (resp). Ainsi, $f_0 = 0, f_1 = P$ et $F_{n+1} = Pf_n - f_{n-1}$ et $l_0 = 2, l_1 = P$ et $L_{n+1} = Pl_n - l_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. En outre, il est vu de l'équation (3.30) que

$$f_{-n} = -f_n\,(P, -1) \quad \text{et} \quad l_{-n} = l_n\,(P, -1)\,.$$

Il y a eu beaucoup d'intérêt à déterminer le problème des points intégrés sur elliptique les courbes lipidiques et de nombreuses méthodes avancées ont été développées pour résoudre de tels problèmes

$$y^2 = x^3 + 27x - 62, \tag{3.32}$$

est $(x, y) = (28.844.402, \pm\, 154.914.585.540)$. Ensuite, le même problème a été traité par certains auteurs. Zhu et Chen ont trouvé tous les points intégrés sur (3.32) en utilisant un nombre algébrique la théorie et l'analyse p-adic. Wu a prouvé que (3.32) n'a que les points intégrales $(x, y) = (2, 0)$ et $(28.844.402, \pm\, 154.914.585.540)$ en utilisant des résultats de quartique Diophandes équations de dents avec des méthodes de nombre élémentaire. Ensuite, les auteurs ont trouvé les points intégrés sur (3.32) en utilisant des méthodes similaires à celles données dans cet application, détermine que le plus grand point intégral de la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$ est $(X, y) = (28.844.402, \pm\, 154.914.585.540)$.

Théorème 3.7 *Soit $P > 2$. Si $f_n = cx^2$ avec $c \in \{1, 2, 3, 6\}$ et $n > 3$, alors $(n, P, c) = (4, 448, 1)$ ou $(6, 3, 1)$.*

Lemme 3.1 *Soit $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Ensuite $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$.*
Les identités bien connues pour (f_n) et (l_n) sont les suivantes :

$$f_{2n} = f_n l_n \tag{3.33}$$

$$l_n = f_{n+1} - f_{n-1} \tag{3.34}$$

$$f_{2k+1} - 1 = f_k l_{k+1} \tag{3.35}$$

En outre, si P est pair, alors

$$f_n \text{ est pair} \Leftrightarrow n \text{ est pair}, \tag{3.36}$$

$$f_n \text{ est impair} \Leftrightarrow n \text{ est impair}. \tag{3.37}$$

Théorème 3.8 *La courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$ n'a que les points intégrés $(x, y) = (2, 0)$ et $(28.844.402, \pm 154.914.585.540)$.*

Preuve. Supposons que (x, y) soit un point intégral sur la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$. On voit aisément que $x > 0$. D'autre part, évidemment, la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$ n'a que le point intégral $(x, y) = (2, 0)$ avec $y = 0$. Par la suite, on peut supposer que $y \neq 0$. Laisser $k = x - 2$. En remplaçant cette valeur de k en $y^2 = x^3 + 27x - 62$, on obtient

$$y^2 = k\left(k^2 + 6k + 39\right). \tag{3.38}$$

Depuis $y \neq 0$, il est évident que $y^2 > 0$. D'autre part, puisque $k^2 + 6k + 39 = (k+3)^2 + 30 > 0$, nous concluons que $k > 0.$, k/y^2 ou $(k^2 + 6k + 39)/y^2$ De toute évidence, $d = (k, k^2 + 6k + 39) = 1, 3, 13$

ou 39. Donc nous obtenons de (3.38) cette

$$k = da^2, \quad k^2 + 6k + 39 = db^2 \quad y = \pm dab, \tag{3.39}$$

Pour certains nombres entiers positifs a et b. Si $d = 1$, puis de (3.39) on obtient $a^4+6a^2+39 = b^2$. L'achèvement du carré donne $(a^2+3)^2+30 = b^2$. Cela implique que $[b-(a^2+3)]\,[b+(a^2+3)] = 30$. Il est facile de montrer que là-bas ne sont pas des nombres entiers a et b satisfaisant l' équation précédente. Si $d = 3$, puis de (3.39) on obtient $9a^4+18a^2+39 = 3b^2$. L'achèvement du carré donne

$$b^2 - 3\left(a^2+1\right)^2 = 10 \tag{3.40}$$

(Impossible de démontrer (3.40)).
Si $d = 13$, puis de (3.39), nous avons immédiatement $169a^4+78a^2+39 = 13b^2$. Compléter le carré donne

$$\left(13a^2+3\right)^2 - 13b^2 = -30 \tag{3.41}$$

(Impossible de démontrer (3.41).)
Enfin, nous considérons (3.32) pour le cas où $d = 39$. Si $d = 39$, puis de (3.39) on obtient $k = 39a^2$ et $k^2+6k+39 = 39b^2$. Substituer $k = 39a^2$ en $k^2+6k+39 = 39b^2$ et compléter le carré donne

$$\left(39a^2+3\right)^2 + 30 = 39b^2 \tag{3.42}$$

Cette équation est sous la forme

$$f^2 - 39l^2 = -30 \tag{3.43}$$

Soit $x_n + y_n\sqrt{39}$ soit une solution de l'équation $x^2 - 39y^2 = 1$. Puisque la solution fondamentale de cette équation est $\alpha = 25+4\sqrt{39}$, on obtient $x_n + y_n\sqrt{39} = \alpha^n$, et donc $x_n = (\alpha^n+\beta^n)/2$ et $y_n = \frac{(\alpha^n-\beta^n)}{2\sqrt{39}}$, o ù $\beta = 25-4\sqrt{39}$. On peut facilement voir que $x_n = \frac{l_n(50,-1)}{2}$ et $x_n = 4f_n(50,-1)$ l'équation a exactement deux classes de solution et la base des solutions est $3+\sqrt{39}$et $3-\sqrt{39}$. Ainsi, la solution générale de (3.43) est donnée par

$$a_n + b_n\sqrt{39} = \left(3-\sqrt{39}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{39}\right) \tag{3.44}$$

$$a_n + b_n\sqrt{39} = \left(3+\sqrt{39}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{39}\right) \tag{3.45}$$

Avec $n \geq 1$, Compte tenu de la première équation (3.44), on obtient aisément $a_n = 3x_n - 39y_n$. Comme $x_n = l_n/2$ et $y_n = 4f_n$, il s'ensuit que

$$a_n = \frac{(3l_n - 312f_n)}{2}.$$

De (3.34), si nous écrivons $f_{n+1} - f_{n-1}$ au lieu de l_n et réorganisons l'équation ci-dessus, alors nous obtenons $a_n = -81f_n - 3f_{n-1}$. Cela signifie que $39a^2+3 = -81f_n - 3f_{n-1}$ par (3.42) . Diviser les deux côtés de l'équation donnent $13a^2 + 1 = -27f_n - f_{n-1}$. Cependant, il est impossible pour $13a^2 + 1 > 0$ et $n \geq 1$. Une autre possibilité est que $-39a^2 - 3 = -81f_n - 3f_{n-1}$, ce qui implique que

$$13a^2 + 1 = 27f_n + f_{n-1}. \tag{3.46}$$

On peut démontrer par la méthode d'induction que

$$f_n \equiv \begin{cases} -n \pmod{13} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n \pmod{13} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \tag{3.47}$$

et

$$u_n \equiv n \pmod{8}. \tag{3.48}$$

Donc, en utilisant (3.48) dans l'équation (3.46). Conduisent à une contradiction.Maintenant, nous considérons l'équation (3.45). Ensuite, nous avons immédiatement $a_n = 3x_n + 39y_n$. Puisque $x_n = l_n/2$ et $y_n = 4f_n$, il s'ensuit que $a_n = (3l_n + 312f_n)/2$. En vue de (3.34), on obtient aisément $a_n = 3f_{n+1} + 81f_n$. Par (3.42), on obtient $39a^2 + 3 = 3f_{n+1} + 81f_n$, ce qui implique que

$$13a^2 + 1 = f_{n+1} + 27f_n. \tag{3.49}$$

Supposons que n soit impair. En utilisant (3.47), on obtient

$$f_{n+1} + 27f_n \equiv -n - 1 + 27n \equiv -1 (\bmod 13),$$

une contradiction par (3.49). Donc, n est pair. Maintenant, supposons que a est pair dans l'équation. (3.49). Ensuite, utiliser (3.48) donne

$$f_{n+1} + 27f_n \equiv n + 1 + 3n \equiv 6 (\bmod 8)$$

i.e

$$4n \equiv 6 (\bmod 8)$$

Ce qui est impossible. Ainsi, a est pair, et donc $a = 2m$ pour un entier positif m. en remplaçant $a = 2m$ en (3.49), on obtient :

$$52m^2 + 1 = f_{n+1} + 27f_n. \tag{3.50}$$

Dans l'équation ci-dessus, si m est impair, alors à partir de (3.48) on obtient :

$$f_{n+1} + 27f_n \equiv n + 1 + 3n \equiv 4n + 1 \equiv 5 (\bmod 8)$$

Ce qui implique que

$$n \equiv 1 (\bmod 2)$$

Mais c'est impossible puisque n est pair. Ensuite, m est pair et donc nous condisent que $4|a$. Nous revenons maintenant à **(3.49)**. Comme n est pair, $n = 2r$ pour certains $r > 0$. Ensuite **(3.49)** devient

$$13a^2 = f_{2r+1} - 1 + 27f_{2r}.$$

Par **(3.35)** et **(3.33)**, on peut voir que $f_{2r+1} - 1 + 27f_{2r} = f_r l_{r+1} + 27f_r l_r = f_r(l_{r+1} + 27l_r)$ et donc

$$13a^2 = fr(l_{r+1} + 27l_r).$$

En utilisant **(3.34)** , on obtient $13a^2 = f_r(f_{r+2} - f_r + 27f_{r+1} - 27f_{r-1})$. Compte tenu de la ré currence relation de la suite, nous avons immédiatement

$$13a^2 = f_r(3,848f_r - 104f_{r-1})$$

Diviser les deux côtés de l'équation ci-dessus et réorganiser l'équation donne

$$a2 = 8fr(37fr - fr - 1).$$

Depuis $4|a$, il s'ensuit que

$$2(a/4)^2 = f_r(37f_r - f_{r-1})$$

Par le lamme précédant, puisque $(f_r, f_{r-1}) = 1$, clairement,$(f_r, 37f_r - f_{r-1}) = 1$. Cela implique que soit

$$37f_r - f_{r-1} = 2c^2 \tag{3.51}$$

ou

$$u_r = 2c^2 \tag{3.52}$$

Pour un entier positif c, où $f_r = f_r(50, -1)$. Par **(3.36)** et **(3.37)**, on constate que $37f_r - f_{r-1}$ est toujours pair. Par suite **(3.51)** est impossible. Par la théorème précédant, **(3.52)** est impossible cas lorsque $r > 3$. Par suite, nous avons $r \leq 3$. D'autre part, puisque $f_r = 2c^2$ est même, de **(3.36)**, il s'ensuit que r est pair. Comme r est pair et $n = 2r$, on obtient $n = 4$. Substitut tuttant cette valeur de n dans **(3.49)**, on obtient

$$13a^2 + 1 = f_5 + 27f_4,$$

puisque $f_5 = 6.242.501$ et $f_4 = 124.900$, un calcul simple montre que $a = 860$. Plus-Dessus, puisque $k = 39a^2$ et $x = k + 2$, on obtient $k = 28.844.400$ et donc $x = 28.844.402$ en remplaçant $x = 28.844.402$ en $y^2 = x^3 + 27x - 62$ donne $y = \pm\ 15.491.585.402$. Par suite, Le théorème est prouvé, la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 27x - 62$ n'a que les points inté grés $(x, y) = (2, 0)$ et $(x, y) = (28.844.402, \pm\ 15.491.585.540)$, qui est le plus grand point intégral dessus. Ceci complète la preuve du théorème principal. ■

Bibliographie

[1] A. K. Bahşı, S. Yalçınbaş, Numerical solutions and error estimations for the space fractional diffusion equation with variable coefficients via Fibonacci collocation method, Springerplus 2016 (5) : 1375.

[2] N. D. Cahill, J. R. D'Errico, J. P. Spence, Complex Factorizations of the Fibonacci and Lucas Numbers, Fibonacci Quart. 41 (2003), 13-19.

[3] L. Carlitz, Fibonacci notes 4 : Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 12 (4) (1974), 317-322.

[4] L. Carlitz, Fibonacci notes 4 : Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart. 13 (2) (1975), 97-103.

[5] J. R. Hoggatt, B. Marjorie, Roots of Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart. 11 (3) (1973), 271-274.

[6] O. Karaatli, R. Keskin, Integral points on the elliptic curve, J. Inequal. Appl., 2013, 2013 :221.

[7] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Application, John Willey & Sons, Inc., 2001.

[8] G.-Y. Lee, M. Asci, Some Properties of the (p, q)-Fibonacci and (p, q)-Lucas Polynomials, J. Appl. Math. 2012, ArticleID 264842 (2012).

[9] R. S. Melham, A. Shannon, Inverse trigonometric and hyperbolic summation formulas involving generalized Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 33 (1995), 32-40.

[10] D. T. Tollu, Y. Yazlik, N. Taskara, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, Adv. Difference Equ. 2013, 2013 :174

[11] S. Vajda, Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section, theory and applications, Ellis Horwood books in Mathematics and its Applications, 1989.

[12] G. Weiss, Solving algebraic equations with Fibonacci sequences, Proc. 9th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, January 29 ?February 1, 2014. Vol. 1, 9 ?18

[13] J. Wang, Some new results for the (p,q)-Fibonacci and Lucas polynomials, Adv. Difference Equ. 2014, 2014 :64.

Conclusion

Dans notre jour, l’étude des nombres de Fibonacci généralisation et application a été l’objet d’un grand nombre de recherche parce que ce modèle mathématique peut s’appliquer à plusieurs satiations et ce modelé est application de représentation qui doit rester un outil de la réalité.

Et ce travail est une petite introduction, nous avons choisi quelques propriétés et applications .