Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine :Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équation différentielle aux dérivées partielles et applications

Thème :

Etude des opérateurs inverses dans un espace de dimension quelconque

Présenté par :
FARES Zineb
AMOR Assia

Devant le jury :

DEGAICHI Nouar	M.A.A	Université de Tébessa	Président
MESSOUDANE Hadia	M.C.A	Université de Tébessa	Rapporteur
BOUGHRARA Lyazid	M.A.A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance : 24/05/2017

Note :.........**Mention :**..

Table des matières

Remerciements

Nous rendons grâce à Dieu qui nous a donné la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Pour commencer nous tenons à remercier chaleureusement le docteur Hadia Messoudane qui a encadré notre travail pour son suivi attentif et le soutient qu'elle nous a toujours témoigné nous a permis de mener à bien ce travail.
Qu'elle trouve ici l'expression de nos profonde gratitude.

Nous tenons tout particulièrement à remercier les membres de ce jury :
le président : N. Degaichi
l'examinateur : L. Boughrara
Nous exprimons notre reconnaissance
Avant de terminer, nous tenons à dire merci à tous ceux qui ont participé à notre soutient moral à savoir chaque membre de nos familles, nos amies , en particulier ma collègue dans ce travail, nos enseignants et tous qui nous a encouragé.
Et à l'ensemble des personnes présentes à cette soutenance.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mon très cher **père**,ce qu'il prend en charge moi et m'avoir aidé tout au long de mon carrière de l'étude.
A la source de mes efforts ma copine **mère**.
A mon merveilleux frère **Omran** et je lui souhaite tout le succès possible dans le BAC.
A mes chères **soeurs** qui m'ont toujours soutenu.
A ma petite bella **Sanouta**.
A les fleurs parfumées de ma vie mes belles amis.
A tous mes camarades et les étudiants qui m'ont accompagné dans ma vie scolaire.
A mes enseignants et tous les étudiants de département de **Maths et info**.
A ma deuxième famille **Math dictionnary**.

ZINEB

$\boxed{\text{Notations}}$

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire :

$\mathbf{H}$: Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(\mathbf{H})$: L'agèbre des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert.
$R(A)$: L'image d'un opérateur.
$N(A)$: Le noyau d'un opérateur.
$A^{\perp}$: L'orthogonal de A.
$\{A\}^{'}$: Le commutant de A.
$\{A\}^{''}$: Le bicommutant de A.
$A_{/T}$: La restriction de A au sous espace vectoriel T.
$\rho(A)$: La résolvante de A.
$r(A)$: Le rayon spectrale de A.
$\oplus$: Signe de somme directe.
$K(H)$: L'ensemble des applications compactes.
A : L'algèbre de Banach.
$dist$: Distance.
$\Bbbk$: Le corps des nombres réels ou complexes.
A^{*} : La matrice adjoint de A.
$\underline{A}$: L'application linéaire associe de la matrice A.
$\mathbb{C}^{m,n}(\Bbbk)$: L'espace des matrices $m \times n$ sur $\Bbbk$.
$T_{N(A)}$: T un supplémentaire de $N(A)$ dans V .
$S_{R(A)}$: S un supplémentaire de $R(A)$ dans W.
$I(A)$: Groupe des inverses intérieurs.
$J(A)$: Groupe des inverses extérieurs.
$P_{(N(A))}$: projecteur définit sur $N(A)$.
$Q_{(R(A))}$: $\{Q; Q^2 = Q; R(Q) = R(A)\}$.
$P_{R(A)}$: $\{P; P^2 = P, R(P) = R(A) \text{ et } P^{*} = P\}$.

Résumé

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et A un opérateur linéaire défini de V dans W.

Nous définissons l'inverse généralisé $\mathcal{B}$ de A, qui est la solution du système suivant : $\left\{\begin{matrix} A\mathcal{B}A = A \\ \mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B} \end{matrix}\right\}$

Où $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire défini de W dans V.

Le système précédent admet plusieurs solutions.

Abstract

Let V, W two vectoriels spaces over the field $\mathbb{K}$, let A a linear operator defined from V to W.

We defined the generalized inverse of the operator A, noted $\mathcal{B}$, the solution of the following system : $\left\{\begin{matrix} A\mathcal{B}A = A \\ \mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B} \end{matrix}\right\}$

Such that $\mathcal{B}$ is a linear operator defined : $W \to V$.

The previous system has many solutions.

Introduction Générale

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématiques, beaucoup de problèmes sont interpretés par une équation du type $Ax = y$, où A est un opérateur linéaire définit d'un espace vectoriel E dans un autre espace vectoriel F.
Pour que l'équation proposée admette une solution pour y dans F, il est nécessaire que A possède un inverse.
Malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné.
Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel, d'une manière que cet opérateur existe pour une classe plus large d'opérateurs linéaires.
Un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé de A.
Si A_0 est un opérateur linéaire vérifiant $AA_0A = A$ et $A_0AA_0 = A_0$, ces propriétés, qui sont celles de l'inverse ordinaire, rendent A_0 aussi proche de l'inverse de A, ou autrement dit on est proche d'obtenir $A_0A = I_E$; où I_E est l'identité dans E.
Les opérateurs les plus proches de l'identité du point de vue propre, sont les projecteurs (l'application identique est une projection dont l'image est l'espace tout entier), pour cela, cherchons A_0 vérifiant l'une ou les deux équations :

$$A_0A = PE$$
$$AA_0 = QF$$

où P et Q étant des projecteurs vérifiant de plus $AQ = A$ et (ou) $A_0P = A_0$.
L'inversibilité a été connue depuis longtemps ; Fredholm l'a utilisé pour traiter les équations integrales, aussi par Hurwitz, Hilbert, ...,
Et ainsi des définitions de ce genre d'opérateurs apparaissent, donnant naissance à une terminologie variée, suivie de notations différentes, mais possédant toutes un point commun, faisant apparaitre leurs proprietés proches de celles de l'inverse usuel.
Parmi la terminologie existante, citons par exemple : inverse partiel, inverse intérieur, inverse extérieur, quasi inverse, pseudo-inverse, inverse généralisé,.... D'autres inverses portent les noms de leurs fondateurs, par exemple : l'inverse de Moore, l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de Drazin, de Duffin,...
On remarque que cette notion d'inversion est liée aux racines d'ordre k de l'identité, qui sont des opérateurs linéaires S tels que $S^k = I$.
Des paragraphes sont consacrés à ces racines dans des éspaces différents.

L'inversion généralisée possède un aspect pratique ; on en trouve des applications dans des domaines différents tels que les équations matricielles, équations à opérateurs, approximation, etc...
Ce travail est réparti sur trois chapitres :
Le premier chapitre contient des notions de base d'analyse fonctionnelle et dans le deuxième on présente différents types d'opérateur inverse,enfin on étudie quelques inverses généralisés.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques notions d'analyse fonctionnelle qu'on va utiliser ultérieurement.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1 *Soit E un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, E est muni de deux lois, addition et multiplication par un scalaire , on dit que E est un espace vectoriel si :*

$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$
i) $x + y \in E.$
ii) $\lambda x \in E.$

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$,*

$\forall x, y \in E \quad, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
i) $-(-x) = x.$
ii) $0_{\mathbb{K}} x = 0.$
iii) $-(\lambda x) = (-\lambda x) = \lambda (-x).$

1.1.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.2 *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, F est un sous ensemble de E.*

On dit que $(F, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si :
i) F est non vide .

ii) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda x \in F$.

1.1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*

On appelle norme sur E toute application $\|.\|$ défini de E vers $\mathbb{R}^+$,
(ie) $\quad \|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant : $\forall\,(x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
iiii) $\|x.y\| = \|x\|.\|y\|$.
$(E, \|.\|)$ est appellée espace vectoriel normé.

Proposition 1.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.*

On appelle distance $d\,(x, y) = \|y - x\|$ toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant : $\forall x, y, z \in E$
i) $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) $d\,(x, y) = d\,(y, x)$.
iii) $d\,(x, y) \leq d\,(x, z) + d\,(z, y)$.

Exemple 1.1 *Pour $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes :*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq\, i\, \leq n} |x_i| \,.$$

Proposition 1.3 *Pour tout $(x, y) \in E^2$; on a :*

i) $\|x - y\| = \|y - x\|$.
ii) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
iii) $\|x\| \geq 0$.

Définition 1.4 *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'ils existent deux constantes α et β strictement positives telles que :*

Pour tout $x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Définition 1.5 (***Suite de Cauchy***) *: Soit E un espace vectoriel, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \succ 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, m \succ n : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.1 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

1.1.4 Espace complet

Définition 1.6 *Soit E un espace vectoriel, on dit que E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.7 *Un espace de **Banach** est un espace vectoriel normé complet.*

1.2 Espace topologique

Définition 1.8 *On appelle espace topologique un couple (E, θ) formé d'un ensemble E et d'une topologie θ sur E, c'est-à dire un ensemble de parties de E qu'on appelle les ouverts de E,*

satisfaisant les propriétés suivantes :
i) E et ϕ appartient à θ.
ii) θ est stable par intersection finie.
iii) θ est stable par union quelconque.

Définition 1.9 *Un espace topologique (E, θ) est dit **séparé** si pour tout couple (x, y) de points distincts, il existe deux ouverts disjoints U et V contenant respectivement x et y.*

Définition 1.10 *Dans un espace topologique, une partie V est appellée **voisinage** d'un point x s'il existe un ouvert U contenant x et contenu dans V.*

Théorème 1.1 *Une partie X de E est **ouverte** si et seulement s'elle est un voisinage de chacun de ses points.*

Théorème 1.2 *Soit X une partie de l'espace topologique E, on appelle **intérieur** de X, Le plus grand ouvert contenu dans X. Le plus petit fermé contenant X est dit **l'adhérence** de X.*

1.3 Espace de Hilbert

1.3.1 Produit scalaire

Définition 1.11 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on appelle **produit scalaire** toute application : $\langle ., . \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :*

$\forall x, y, z \in H$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y; z\rangle$
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$.

1.3.2 Espace préhilbertien

Définition 1.12 *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace* ***préhilbertien*** *tel que :*

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle .$$

Définition 1.13 *Un espace préhilbertien* $(H, \langle ., .\rangle)$ *est appelé* ***espace de Hilbert*** *s'il est complet pour la norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.14 (***L'orthogonalité***) *: Soit* H *un espace préhilbertien et* x, y *deux vecteurs de* H*, on dit que* x *est* ***orthogonal*** *à* y *si et seulement si* $\langle x, y\rangle = 0$ *et on écrit* $x \perp y$.

Définition 1.15 *Soit* N *un sous espace d'un espace de Hibert* H*, le complémentaire* ***orthogonal*** *de* N $\left(\textit{noté } N^{\perp}\right)$ *est définit par :*

$N^{\perp} = \{y \in H, \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in N\}$.
Telque : $N^{\perp}$ est un sous espace fermé de H.

1.4 Opérateur linéaire borné

1.4.1 Opérateur borné dans un espace de Banach

On désigne par $(E, \|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, on désigne par $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.
Si $F = E$, on note simplement $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ et $L(E) = L(E, E)$.
On rappelle qu'une application linéaire A défini de E dans un espace vectoriel F est appelée un opérateur de plus on dit que A est un **opérateur borné** si A est continu (i, e) : $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

A est un opérateur linéaire de E dans F si :

$$\begin{cases} A(x+y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in E \\ A(\lambda x) = \lambda A(x); \forall \lambda \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Rappelons que la norme de $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est définie par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$$

Définition 1.16 *Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de V ; on dit que V_1 et V_2 sont **supplémentaires** si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ et $V_1 + V_2 = V$.*

De façon équivalente : tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique $v_1 + v_2 = v$
Où $v_1 \in V$ et $v_2 \in V$. V est alors somme directe de V_1 et V_2 , noté par : $V_1 \oplus V_2 = V$.

Proposition 1.4 *Tout sous espace vectoriel possède un supplémentaire.*

Définition 1.17 *On appelle opérateur linéaire $A : V \to W$, toute application telle que :*

$\forall v_1, v_2 \in V$, $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$ et $\forall v \in V, \forall \alpha \in \Bbbk$, on ait : $A(\alpha v) = \alpha Av$.

Définition 1.18 *Soit P un opérateur linéaire défini de V dans lui même.*

On dit que P est un **projecteur** si $P^2 = P$.

Proposition 1.5 *Tout projecteur P décompose V en somme directe de deux sous espaces V_1 et V_2 tels que :*

$V_1 \oplus V_2 = V$, Où $V_1 = N(P)$ et $V_2 = R(P)$.

Proposition 1.6 *Toute somme directe détermine un projecteur P.*

Preuve. Soit $V_1 \oplus V_2 = V$, quelque soit $v \in V$ il existe (v_1, v_2) unique tel que : $v_1 + v_2 = v$,
on définit P par : $P(v_1 + v_2) = v_1$.
Alors P est linéaire et $P = P^2$. ■

Proposition 1.7 *Soit $P : V \to V$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $P = P^2$
2. $P(v) = v$; $\forall v \in R(P)$
3. $R(I - P) = N(P)$

4. $R(P) = N(I - P)$
5. $V = R(I - P) \oplus R(P)$

1.4.2 Inverse d'un opérateur

Soient H et H' des espaces de Hilbert et $A \in L(H, H')$ un opérateur.

Définition 1.19 *On dit que A est inversible s'il existe $B \in L(H, H')$ tel que :*

$A \circ B = I_{H'}$, et $B \circ A = I_H$,
où I_H $(resp\ I_{H'})$ est l'opérateur identité de H $(resp\ de\ H')$.
Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique.
On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note par A^{-1}.
*Cas particulier où $H = H'$: Soit $T \in L(H, H)$.
Dans le cas où H est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents.
Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant :

Théorème 1.3 *Si* $\dim H \prec +\infty$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. T est inversible.
2. T est injectif.
3. T est surjectif.
4. T admet un inverse à droite $(i.e.\ il\ existe\ U \in L(H, H)\ tel\ que\ T \circ U = I_H)$.
5. T admet un inverse à gauche $(i.e. il\ existe\ V \in L(H, H)\ tel\ que\ V \circ T = I_H)$.

Remarque 1.2 *Si H est de dimension infinie les équivalences précédentes ne sont pas vraies.*

Contre-exemple :
Soit $H = l^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de la norme $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Considérons l'application $S : l^2 \to l^2$ définie pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$, par $Sx = y = (y_n)_{n \geq 1}$
où : $y_1 = 0, y_2 = x_1, ..., y_n = x_{n+1}, ... (\forall n \geq 1)$.
Autrement dit Sx est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un $rang$.
L'application S est linéaire de l^2 dans lui même et c'est une isométrie puisque $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$.
Donc $S \in L(l^2)$.

On appelle S l'opérateur de décalage dans l^2. On voit alors facilement que :

1) S est injective ($car\ S\ est\ isométrique$)

2) S n'est pas surjective.

3) S admet un inverse à gauche $T : x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto Tx = (x_{n+1})_{n\geq 1}$ (c'est l'opérateur qui «efface» la première coordonnée donc on a clairement $T \circ S = I_{l^2}$).

4) L'opérateur T n'est pas inverse à droite de l'opérateur S.

1.4.3 Adjoint d'un opérateur

Définition 1.20 *L'application T^* définie de H_2 dans H_1 par :*

$$\forall x \in H_1\ , \forall y \in H_2\ \ (Tx, y)_2 = (x, T^* y)\,.$$

est appelée **l'adjoint** de T.

1.4.4 Auto-adjoint

Définition 1.21 *Soit $B \in \mathbb{C}^{n,n}(\mathbb{C})$, on dit que la matrice B est **auto-adjointe**, ou **Hérmitienne**, si $B^* = B$.*

1.4.5 Matrice positive et définie positive

Définition 1.22 ***(Matrice positive)***

Soit B une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ou complexes.
On dit que la matrice B est positive, si $\forall x \in \mathbb{C}^n : \langle Bx, x\rangle \geq 0$.

Définition 1.23 ***(Matrice définie positive)***

Soit B une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ou complexes.
On dit que B est une matrice définie positive si B est positive et $x = 0 \iff \langle Bx, x\rangle = 0$.
On rappelle que le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$, est défini par :
$\forall z, y \in \mathbb{C}^n :\ \ \langle z, y\rangle = \sum_{i=0}^{n} \overline{y_i} z_i\ ;\ z = (z_1, ..., z_n)\,,\ \ y = (y_1, ..., y_n)\,.$
Soit N une matrice définie positive d'ordre n
La formule ci–dessous, définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$

$$[z, y] = \langle z, y\rangle_N = \langle Nz, y\rangle$$

Proposition 1.8 *Soit B une matrice hérmitienne. La matrice B est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives .*

Elle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Remarque 1.3 *Toute matrice hérmitienne et définie positive est inversible.*

Chapitre 2

Différents types d'opérateur inverse

2.1 Introduction

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$ et A un opérateur linéaire défini de V dans W.
Au début de ce chapitre on va définir quelques types d'opérateurs inverses.

2.2 Différents types d'opérateurs inverses

soit A un opérateur défini de V dans W .

2.2.1 Inverse intérieur

Définition 2.1 *Soit $B : W \to V$ un opérateur linéaire, on dit que B est un inverse intérieur de A, si $ABA = A$.*

Proposition 2.1 *Soit B un inverse intérieur de A ; alors on a :*

1. $(AB)^2 = AB$.
2. $(BA)^2 = BA$.
3. $R(AB) = R(A)$.
4. $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(BA)$.

Preuve.

1. On a $ABA = A$, mutiplions à droite par B on aura : $ABAB = AB$, d'où $(AB)^2 = AB$.
2. On a $ABA = A$, mutiplions à gauche par B on aura : $BABA = BA \Longrightarrow (BA)^2 = BA$.

3. On a $ABA = A$, d'où $R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A)$.
4. On a $ABA = A$, d'où $N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A)$.

■

Théorème 2.1 *Tout opérateur linéaire admet un inverse intérieur linéaire.*

Preuve. Soit A un opérateur linéaire défini de V dans W
On pose $V = T \oplus N(A)$ et $W = R(A) \oplus S$
c'est-à-dire T est un Supplémentaire de $N(A)$ dans V et S un supplémentaire de $R(A)$ dans W
on considère $A_{/T} = \hat{A} \left(i.e; \hat{A} : T \to R(A) \right)$
Alors $\hat{A}$ admet un inverse $\hat{B} : R(A) \to T$
on définit B sur W dans V par : $B(v) = \hat{B}(v), \forall v \in R(v)$ et $B(v) = 0 \; ; \forall v \in S$. ■

Exemple 2.1 *Soit A un opérateur linéaire définit par :*

$A : l_2 \to l_2$
$A(x_1; x_2; ...) = (0; x_1; x_2; ...)$
On définit l'opérateur : $B : l_2 \to l_2$
$B(x_1; x_2; ...) = (x_2; x_3; ...)$
On a : $ABA(x_1; x_2; ...) = AB(0; x_1; x_2; ...)$
$= A(x_1; x_2; ...)$.
Donc B est l'inverse intérieur de l'opérateur A.

Corollaire 2.1 *Soit A un opérateur linéaire défini de V dans W, tel que :*

$Av = w : v \in V$ et $w \in W$. Soit $B : W \to V$ un opérateur linéaire,
alors B est un inverse intérieur de A si et seulement si Bw est une solution de l'équation $Av = w$ pour tout w appartenant à $R(A)$.

Proposition 2.2 *Soit B un inverse intérieur de A, alors $(I - BA)$ est un projecteur sur $N(A)$.*

Preuve. On a : $(I - BA)^2 = I + (BA)^2 - 2BA$
$= I + BA - 2BA$
$= I - BA$.
Et $(I - BA)v = v - BAv$
$= v, \forall v \in N(A);$
$(i.e; R(I - BA) = N(A))$. ■

Proposition 2.3 *Soient A, B deux opérateurs linéaires tels que :*

$A : V \to W$ et $B : W \to V$, B est un inverse intérieur linéaire de l'opérateur A, alors on a : $V = N(A) \oplus R(BA)$ et $W = R(A) \oplus N(AB)$.

Proposition 2.4 : *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $B \in I(A)$.
2. $(AB)^2 = AB$ et $R(AB) = R(A)$.
3. $(BA)^2 = BA$ et $N(A) = N(BA)$.
4. $(BA)^2 = BA$ et $V = N(A) \oplus R(BA)$.
5. $(AB)^2 = AB$ et $W = N(AB) \oplus R(A)$.
6. $(BA)^2 = BA$ et $N(B) \cap R(A) = \{0\}$.

Preuve. $1 \Longrightarrow 2$. on applique la proposition (2.1) ; nous trouvons 2
$2 \Longrightarrow 3$, il est évident que : $(AB)^2 = AB$
Par (2.1) et (2.2) on a : $R(I - BA) = N(BA)$

$$= N(A)$$

$3 \Longrightarrow 4$, $V = N(BA) \oplus R(BA)$

$$= N(A) \oplus R(BA)$$

$4 \Longrightarrow 5$, il est évident que : $(AB)^2 = AB$

$$W = N(AB) \oplus R(AB)$$
$$= N(AB) \oplus R(A)$$

$5 \Longrightarrow 6$, il est évident que : $(BA)^2 = BA$,
soit $\omega \in N(B) \cap R(A)$ et $\omega \neq 0$
$B\omega = 0 \Longrightarrow AB\omega = 0$,
donc on a une contradiction parce que : $N(AB) \cap R(A) = \{0\}$.
Il est évident que 6 implique : $ABA = A$. ■

Proposition 2.5 *Soit B un inverse intérieur de A, on pose $P = I - BA$ et $Q = AB$*

$Q^{\wr}$ et $P^{\wr}$ *des projecteurs sur $R(A)$ et $N(A)$ respectivement, on définit $B^{\wr}$ par :*

$$B^{\wr} = \left(I + P - P^{\wr}\right) B \left(I - Q + Q^{\wr}\right)$$

alors, $B^{\wr}$ est un autre inverse intérieur de A.

Preuve. On a : $AB^{\wr}A = A\left(I + P - P^{\wr}\right) B \left(I - Q + Q^{\wr}\right) A$ tel que :
$Q^{\wr} = Q^2$ et $P^{\wr} = P^2$

$$= A\left(I + I - BA - P^2\right) B \left(I - AB + Q^2\right) A$$
$$= A\left(I + I - BA - (I - BA)^2\right) B \left(I - AB + (AB)^2\right) A$$

$= A(I + I - BA - I - BA + 2BA)\,B\,(I - AB + AB)\,A$
$= ABA = A$

alors : $B^{\wr}$ est un inverse intérieur de A. ■

2.2.2 Inverse extérieur

Définition 2.2 *Soit B un opérateur linéaire défini $B : W \to V$, on dit que B est un inverse extérieur de A, si $BAB = B$.*

Proposition 2.6 *Soit $B : W \to V$ un inverse extérieur de A, alors :*

1. $(BA)^2 = BA$ et $(AB)^2 = AB$.
2. $R(BA) = R(B)$ et $N(B) = N(AB)$.
3. $V = N(BA) \oplus R(B)$ et $W = N(B) \oplus R(AB)$.

Semblable à la preuve de la proposition (2.1).

Proposition 2.7 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $B \in J(A)$.
2. $(BA)^2 = BA$ et $R(BA) = R(B)$.
3. $(BA)^2 = BA$ et $V = N(BA) \oplus R(B)$.
4. $(AB)^2 = AB$ et $N(B) = N(AB)$.
5. $(AB)^2 = AB$ et $W = N(B) \oplus R(AB)$.
6. $(AB)^2 = AB$ et $N(A) \cap R(B) = \{0\}$.

Semblable à la preuve de la proposition (2.4).

Corollaire 2.2 *Si $B_1 \in I(A)$ et $B_2 \in J(A)$, alors $B_1AB_2 \in I(A) \cap J(A)$.*

2.2.3 Inverse généralisé

Définition 2.3 *Soit $B : W \to V$ est un opérateur linéaire. Si $B \in J(A) \cap I(A)$, on dit que B est un inverse généralisé de A.*

Proposition 2.8 *Tout opérateur linéaire admet un inverse généralisé.*

Exemple 2.2 *On rappelle que $C([0;1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$*

Soit $A : C([0;1]) \longrightarrow C([0;1])$ un opérateur linéaire ,tel que : $A(x(t)) = x(t^2)$.
on défini B de $C([0;1])$ dans lui même par ■ $B(x(t)) = x(\sqrt{t})$
nous avons,

$$ABA(x(t)) = AB(x(t^2)) = A(x(t))$$
$$BAB(x(t)) = BA(x(\sqrt{t})) = B(x(t))$$

alors, B est un inverse généralisé de A.

Proposition 2.9 *Soit B est un inverse généralisé de A, alors :*

1. $(AB)^2 = AB$ et $(BA)^2 = BA$.
2. $N(B) = N(AB)$ et $N(A) = N(BA)$.
3. $R(AB) = R(A)$ et $R(BA) = R(B)$.

d'autre part, $V = N(A) \oplus R(B)$ et $W = N(B) \oplus R(A)$.
on utilise les propositions (2.1) et (2.6) pour la preuve.

Remarque 2.1 *Si B est un inverse généralisé de A,*

alors AB est un projecteur sur $R(A)$ et BA est un projecteur sur $R(B)$.

2.2.4 Inverse intérieur topologique

$a)$ **Inverse droit intérieur topologique**

Ci-après : W est un espace vectoriel topologique
$\overline{R(A)}$ est la fermeture de $R(A)$ dans W,
Q un projecteur sur W tel que :

$$Q \in L(W) \quad \text{et} \quad R(Q) = \overline{R(A)}$$

on écrit alors,

$$W = \overline{R(A)} \oplus S$$
$$\theta_Q := R(A) \oplus S = R(A) \oplus N(Q)$$

maintenant on considère $A : V \longrightarrow \theta_Q$ et $Q^{-} := Q/\theta_Q$
si $B_{Q^{\sim}} : \theta_Q \rightarrow V$ est un inverse intérieur de A et $AB_{Q^{\sim}} = Q^{-}$,
alors $B_{Q^{\sim}}$ est dit un inverse droit intérieur topologique.
soit B un inverse intérieur de A,
si AB est un projecteur (continu) sur $R(A)$ dans θ_Q ,
on a, par la proposition (2.5)

$$B_{Q^{\sim}} = B(I - AB + Q^{-}) \text{ est un inverse droit intérieur topologique.}$$

Proposition 2.10 *Soit Q un projecteur continu sur $\overline{R(A)}$,*

alors A admet un inverse droit intérieur topologique si et seulement s'il existe un opérateur linéaire, noté par : A_d vérifiant :

$$\begin{cases} A_d : R(A) \oplus N(Q) \to V \\ AA_dA = A \ sur \ V \\ AA_d = Q \ sur \ R(A) \oplus N(Q) \end{cases}$$

$b)$ **Inverse gauche intérieur topologique**

Soit A un opérateur défini sur $D(A) \subset V$ dans W.

Définition 2.4 *On dit que le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in L(V)$ si $N(A) \subset R(P), \forall x \in D(A); P(x) \in N(A)$ et $D(A) \cap N(P)$ est dense dans $N(P)$.*

dans ce cas nous appelons :
$C_P := D(A) \cap N(P)$, est le support de A.

Définition 2.5 *Soit B un inverse intérieur linéaire de A.*

si BA admet une extension au projecteur $(I-P) \in L(V)$ tel que : $R(I-P) = \overline{R(BA)}$,
alors on dit que B est un inverse gauche intérieur topologique.
nous utilisons la notation A_g pour l'inverse gauche intérieur topologique.

Théorème 2.2 *Soit $A : D(A) \to W$ un opérateur linéaire. Si $U = A_g$,*

alors $D(A)$ est décomposable par rapport à P.
Preuve. Pour tout $z \in N(A)$;
on a $UAz = (I-P)z = 0 \implies \forall z \in N(A); Pz = z$
donc $N(A) \subset R(P)$
$UAz = (I-P)z; \forall z \in D(A)$
$\implies Pz = z - UAz; \forall z \in D(A)$
$\implies APz = Az - AUAz; \forall z \in D(A)$
alor,$Pz \in N(P); \forall z \in D(A)$
nous avons,$\overline{R(UA)} = N(P)$;
donc,$D(A) \cap N(P)$ est dense dans $N(P)$. ■

Théorème 2.3 *Si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in L(V)$,Alors, A admet un inverse gauche intérieur topologique.*

Preuve. Soit U' un inverse intérieur de A,
on écrit $P' = I - U'A$.
Soit $\tilde{P}$ la restriction de P à $D(A)$
par la proposition (2.5)
$U = \left(2I - U'A - \tilde{P}\right)U'$ et $UA = I - P'$
aussi,
$R(UA) = N(P) = N(P) \cap D(A) = C_P$, qui est dense dans $N(P) = R(I - P)$.
Si V et W sont des espaces de dimensions finies, où V est un espace de Hilbert,
soit P le projecteur orthogonal sur $N(A)$,
alors A admet un inverse gauche intérieur topologique A_g ,
vérifie :

$$\begin{cases} AA_gA = A \\ (AA_g)^* = AA_g \end{cases} \quad \blacksquare$$

Chapitre 3

Les inverses généralisés

3.1 Introduction

Ci-après on présente quelques types des inverses généralisés.

3.2 Les inverses généralisés

3.2.1 Inverse généralisé topologique

Définition 3.1 *Soient W et V des espaces vectoriels topologiques, $A : D(A) \subset V \to W$ un opérateur linéaire.*

U un opérateur défini $U : W \to V$.Si U vérifie :

1. U est un inverse droit intérieur topologique de A.
2. U est un inverse gauche intérieur topologique de A.
3. $UAU = U$.Alors, U est un inverse généralisé topologique, on le note par $A^{*}_{P,Q}$.

Théorème 3.1 *Soit $A : D(A) \to W$ un opérateur linéaire, si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in L(V)$ et s'il existe un projecteur Q sur $\overline{R(A)}$,*

alors A admet un inverse généralisé topologique unique (relatif au choix de P et Q) noté par $A^{*}_{P,Q}$ et vérifie :

1. $D\left(A^{*}_{P,Q}\right) = R(A) \oplus N(Q)$.
2. $R\left(A^{*}_{P,Q}\right) = C_P(A)$.
3. $N\left(A^{*}_{P,Q}\right) = N(Q)$.

4. $A^*_{P,Q}Ax = x - Px$;pour tout $x \in D(A)$.
5. $AA^*_{P,Q}y = Qy$;pour tout $y \in D\left(A^*_{P,Q}\right)$.

Théorème 3.2 *Soit $A \in L(V,W)$. On suppose que $N(A)$ admet un supplémentaire topologique dans V et $\overline{R(A)} = R(A)$ admet un supplémentaire topologique dans W, soient P un projecteur sur $N(A)$ dans V et Q un projecteur sur $R(A)$ dans W,*

alors A admet un inverse généralisé topologique unique noté par : $A^*_{P,Q}$ qui vérifie les équations suivantes :

1. $AA^*_{P,Q}A = A$ *sur* V.
2. $A^*_{P,Q}AA^*_{P,Q} = A^*_{P,Q}$ *sur* W.
3. $A^*_{P,Q}Ax = x - Px$; pour tout $x \in V$.
4. $AA^*_{P,Q}y = Qy$; pour tout $y \in W$.

Preuve. On définit $A^*_{P,Q}$ par : $A^*_{P,Q}Ax = x; \quad x \in N(P)$
$A^*_{P,Q}y = A^*_{P,Q}y_1 \quad , \quad A^*_{P,Q}y_2 = 0$
où $y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(A)$ et $y_2 \in N(Q)$
Il est évident que l'inverse généralisé est unique ■

Remarque 3.1 $A^*_{P,Q}$ *dans ce cas est une application continue.*

3.2.2 Inverse généralisé de Moore- Penrose

Ce genre d'inverse généralisé est le plus important, car il conserve une bonne partie des propriétés des inverses ordinaires, telle que l'unicité de l'inverse, les propriétés de symétrie et beaucoup d'autres qui font concept central en algèbre linéaire, analyse numérique et dans diverses applications.

$a)$ **L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire**

Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert.

Proposition 3.1 *Soient $A \in L(H_1, H_2)$ tel que : $R(A) = \overline{R(A)}$, alors l'inverse généralisé de A existe et unique, on le note par : A^+ qui vérifie les équations suivantes :*

$$\begin{cases} XAX = X \quad \dots \quad (1) \\ AXA = A \quad \dots \quad (2) \\ XA = I - P_{N(A)} \quad \dots \quad (3) \\ AX = P_{R(A)} \quad \dots \quad (4) \end{cases}$$

Preuve. Soit A un opérateur défini de $H_1 \to H_2$, $N(A)$ et $R(A)$ sont des sous espaces fermés dans H_1 et H_2;
alors ils existent deux projecteurs orthogonaux $P_{N(A)}$ et $P_{R(A)}$ sur $N(A)$ et $R(A)$ respectivement, tels que :
$H_1 = N(A) \oplus N\left(P_{N(A)}\right) = N(A) \oplus N(A)^{\perp}$
et
$H_2 = R(A) \oplus R\left(P_{R(A)}\right) = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$
Par le théoreme (3.2) A^{+} existe et défini par :
$A^{+}(y) = 0; \forall y \in R(A)^{\perp}$ et $A^{+}y = \left(A_{/R(A^*)}\right)^{-1} y \,; \forall y \in R(A)$. ■

$b)$ **L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice**

Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$,
on définit $\underline{A}^{+} : \mathbb{C}^{n} \to \mathbb{C}^{m}$ par :

$$\underline{A}^{+}(y) = 0; \forall y \in R(A)^{\perp} \text{ et } \underline{A}^{+}y = \left(\underline{A}_{/R(A^*)}\right)^{-1} y; \forall y \in R(A).$$

Remarquons que $\underline{A}^{+}$ est un inverse généralisé de $\underline{A}$

Proposition 3.2 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$*, alors*

1. $A^{+}Ax = 0, \forall x \in N(A)$ et $A^{+}Ax = x, \forall x \in R(A^{*}) = R(A^{+})$.
2. $AA^{+}y = 0, \forall y \in R(A)^{\perp}$ et $AA^{+}y = y, \forall y \in R(A)$.
3. $A^{+}A$ est le projecteur orthogonal sur $R(A^{*}) = R(A^{+})$ dans $\mathbb{C}^{m}$.
4. AA^{+} est le project

Définition de l'inverse généralisé de Moore :

Si $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$,
alors A^{+} l'unique inverse généralisé qui vérifie les équations suivantes :
1) $A^{+}A = P_{R(A^*)}$
2) $AA^{+} = P_{R(A)}$

Définition de l'inverse généralisé de Penrose :

Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$,
alors A^{+}est la solution unique du système suivant :

$$(s)\begin{cases} XAX = X & \ldots(1) \\ AXA = A & \ldots(2) \\ (XA)^* = XA & \ldots(3) \\ (AX)^* = AX & \ldots(4) \end{cases}$$

Théorème 3.3 *Les deux définitions précédentes sont équivalentes .*

Preuve. Supposons que $A^+A = P_{R(A^*)}$ et $AA^+ = P_{R(A)}$,
on applique(c) et (d) de la proposition (3.2),
alors : A^+A et AA^+ sont des projecteurs orthogonaux.
D'autre part, $A^+AA^+ = P_{R(A^*)}A^+$
$= P_{R(A^+)}A^+ = A^+.$
et $AA^+A = P_{R(A)}A = A$
Enfin, A^+ est une solution du système (s).
Réciproquement, si A^+ est une solution du système (s)
alors, nous avons, $AA^+A = A$
d'où $A^+AA^+A = A^+A$
donc $(A^+A)^2 = A^+A.$
Par la proposition (3.2) on a :
$(A^+A)^* = A^+A$ et $R(A^+A) = R(A^+) = R(A^*)$
donc, $A^+A = P_{R(A^*)}.$
De la même façon, nous montrons que $AA^+ = P_{R(A)}.$ ■

Proposition 3.3 *soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$,alors :*

1. $R(A) = R(AA^+) = R(AA^*)\,.$
2. $R(A^+) = R(A^*) = R(A^+A) = R(A^*A)\,.$
3. $R(I - AA^+) = N(AA^+) = R(A^*A)^{\perp}\,.$
4. $R(I - A^+A) = N(A^+A) = N(A) = R(A^*)^{\perp}\,.$

3.2.3 Inverse de Drazin

Lemme 3.1 *pour toute matrice carrée A il existe un nombre positive k telle que : $\mathbb{C}^n = R\left(A^k\right) \oplus N\left(A^k\right)$.*

Définition 3.2 *Soit A une matrice définie sur $\mathbb{C}^{n,n}$, le plus petit entier positif tel que : $\mathbb{C}^n = R\left(A^k\right) \oplus N\left(A^k\right)$, qui est aussi le plus petit entier positif tel que : $rg\left(A^{k+1}\right) = rg\left(A^k\right)$*

s'appelle l'indice de A, on le note par : $ind\,(A)$.
Si A est inversible on a, $ind\,(A) = 0$.

Lemme 3.2 *Si $\underline{A}$ est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ et $ind\,(\underline{A}) = k$, alors l'application définie par : $\underline{A_1}$: $R\left(\underline{A}^k\right) \to R\left(\underline{A}^k\right)$; telle que : $\underline{A_1}$= $\underline{A}_{/R\left(A^k\right)}$ est inversible.*

$\underline{A}(R\left(\underline{A}^k\right)) = R\left(\underline{A}^{k+1}\right) = R\left(\underline{A}^k\right)$.

Définition 3.3 *Si $A \in \mathbb{C}^{n,n}\,(\mathbb{C})$, l'inverse de **Drazin** de A est une matrice carrée d'ordre n*

notée A^D qui satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} XAX = X \\ XA = AX \\ XA^{k+1} = A^k \end{cases}$$

k : est l'indice de A

Définition 3.4 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}\,(\mathbb{C})$, $ind\,(A) = k$ et tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$ s'écrit de manière unique $x = u + v$, où $u \in R\left(A^k\right)$ et $v \in N\left(A^k\right)$.*

On définit $\underline{A}^D$ sur $\mathbb{C}^n$ par :
$\underline{A}^D x = \underline{A}_{/R\left(A^k\right)} u$, $\underline{A}^D$ est appelée l'inverse de Drazin de l'opérateur $\underline{A}$

Proposition 3.4 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}\,(\mathbb{C})$ et $ind\,(A) = k$, alors :*

1. $R\left(A^D\right) = R\left(A^k\right)$ et $N\left(A^D\right) = N\left(A^k\right)$.
2. $A^D A = AA^D = P_{R\left(A^k\right),N\left(A^k\right)}$.
3. $\left(I - A^D A\right) = \left(I - AA^D\right) = P_{N\left(A^k\right),R\left(A^k\right)}$.
4. $A^{\alpha+1}A^D = A^\alpha; \forall \alpha \geq k$ où α est un entier positif.
5. Si A est inversible alors, $A^D = A^{-1}$

Preuve. 1), 3) et 5) sont évidentes.
2) Nous avons, $R\left(A^D\right) = R\left(A^D AA^D\right) \subset R\left(A^D A\right)$
$= R\left(AA^D\right) \subset R\left(A^D\right)$
Donc , $R\left(A^D\right) = R\left(A^D A\right) = R\left(AA^D\right)$
aussi,
$N\left(A^D\right) = N\left(A^D AA^D\right) \supset N\left(AA^D\right)$
$= N\left(A^D A\right) \supset N\left(A^D\right)$
donc , $N\left(A^D\right) = N\left(AA^D\right) = N\left(A^D A\right)$
D'autre part, il est évident que : $\left(AA^D\right)^2 = \left(A^D A\right)^2 = AA^D$.

$$
\begin{aligned}
4)\ \forall \alpha \geq k \ \ , A^{\alpha+1}A^{D} &= A^{\alpha-k+k+1}A^{D} \\
&= A^{\alpha-k}A^{k+1}A^{D} \\
&= A^{\alpha-k}A^{k} = A^{\alpha}. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.2.4 Le groupe inverse

Définition 3.5 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, on considère le système suivant :*

$$
(G) \begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = XA \end{cases}
$$

Si X est une solution du système (G) ,
alors on dit que X est le groupe inverse de A on le note par $A^{\#}$.

Proposition 3.5 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, et de $rang$ r, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $rg\,(A) = rg\,(A^2)$.
2. $R\,(A) = R\,(A^2)$.
3. $R\,(A) \oplus N\,(A) = \mathbb{C}^n$.
4. $A^{\#}$ existe.

Preuve. Les relations $1)$ et $2)$ sont équivalentes.
Par l'application de la définition (3.2),
donc $2)$ et $3)$ sont équivalentes.
On va montrer l'équivalence entre $2)$ et $4)$
$4) \Longrightarrow 2)$, le système (G) est équivalent au système suivant :

$$
(G1) \begin{cases} A^2X = A \\ X^2A = X \\ AX = XA \end{cases}
$$

donc, $R\,(A) = R\,(A^2X) \subset R\,(A^2) \subset R\,(A)$,
alors $R\,(A) = R\,(A^2)$.
$2) \Longrightarrow 4)$ Soit $A = FE$ tels que : $F \in \mathbb{C}_r^{n,r}$, $E \in \mathbb{C}_r^{r,n}$ et $rg\,(A) = r$
$(i, e$ F et E forment la factorisation de même $rang$ de $A)$.
Remarquons que, $EF \in \mathbb{C}^{r,r}$.
D'autre part, $R\,(A) = R\,(A^2)$,
Alors, EF est inversible.
On pose $X = F\,(EF)^{-2}\,E$, remarquons que X est une solution du système (G) . $\blacksquare$

Proposition 3.6 *Quand le groupe inverse de A existe, il est unique.*

Preuve. Supposons que nous avons deux groupes inverses $A_1^{\#}$ et $A_2^{\#}$.
On applique successivement les trois équations de (G),
on obtient :
$$\begin{aligned} A_1^{\#} &= A_1^{\#^2} A \\ &= A_1^{\#^2}\left(A^2 A_2^{\#}\right) \\ &= A_1^{\#}\left(A_1^{\#} A^2\right) A_2^{\#} \\ &= A_1^{\#} A A_2^{\#} \\ &= A_1^{\#}\left(A^2 A_2^{\#}\right) A_2^{\#} \\ &= \left(A_1^{\#} A^2\right) A_2^{\#^2} \\ &= A_2^{\#^2} \\ &= A_2^{\#}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

3.2.5 Inverse pondéré

Définition 3.6 *Soient M et N deux matrices d'ordre m et n respectivement.*

Alors, le système suivant :
$$(W1)\begin{cases} XAX = X \\ AXA = A \\ (XA)^* = N^{-1}XAN \\ (AX)^* = MAXM^{-1} \end{cases}$$
admet une solution unique, elle s'appelle l'inverse généralisé pondéré de A,
on le note par : $A^+_{M,N}$.
L'inverse généralisé $A^+_{M,N}$ est donné par :
$$A^+_{M,N} = N^{-\frac{1}{2}}\left(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}}\right) + M^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 3.7 *le système (W_1) admet une solution unique.*

Preuve. On suppose que l'on a X_1, X_2 deux inverses généralisés pondérés de A
$$\begin{aligned} X &= X_1AX_1 \\ &= M^{-1}(X_1A)^* MX_1 \\ &= M^{-1}(X_2A)^* MX_1 \\ &= X_2AX_1 \\ &= X_2N(AX_1)^* \\ &= X_2N(AX_2)^* \\ &= X_2AX_2 \end{aligned}$$

$= X_2$. ■

Proposition 3.8 *On suppose que X est une solution de (W_1)*

1) Si $\mathbb{C}^m$ muni du produit scalaire

$$[z, y] = \langle z, y \rangle_M = \langle Mz, y \rangle \qquad z, y \in \mathbb{C}^m$$

alors, XA est le projecteur orthogonal sur $N^{-1}R(A^*)$,
on le note par ■ $I - P_{N(A)}^{N^{-1}}$
2) Si $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$[z, y] = \langle z, y \rangle_N = \langle Nz, y \rangle \qquad z, y \in \mathbb{C}^n$$

alors, AX est le projecteur orthogonal sur $R(A)$,
on le note par ■ $P_{R(A)}^M$

Preuve. 1) $AXA = A \implies XAXA = XA$

$$\implies (XA)^2 = XA$$

$z, y \in \mathbb{C}^n \quad [XAz, y] = \langle (NXAz), y \rangle$

$$= \langle z, (NXA)^* y \rangle$$
$$= \langle z, (NXA) y \rangle$$
$$= \langle Nz, (XA) y \rangle$$
$$= [z, XAy]$$

donc, $(XA)^* = XA$

$R(XA) = N(N^{-1}XAN)^{\perp}$

$$= N(N^{-1}A^+AN)^{\perp}$$
$$= N\left((AN)^+ AN\right)^{\perp}$$
$$= N^{-1}R(A^*)$$

2) De la même manière, nous pouvons prouver que AX est le projecteur orthogonal sur $R(A)$. ■

3.2.6 Inverse $A_{T,S}^{(2)}$

Théorème 3.4 *Soient $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}, T$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n, \dim T = s \leq r$*

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ et $\dim S = m - s$, alors
$X \in A\{2\}$ tel que : $R(X) = T$ et $N(X) = S \iff AT \oplus S = \mathbb{C}^m$
X est dans ce cas unique, et on le note par : $A_{T,S}^{(2)}$.

Proposition 3.9 *Soient $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}, T$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n, \dim T = r$*

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ et $\dim S = m - r$,
alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $AT \oplus S = \mathbb{C}^m$.
2. $R(A) \oplus S = \mathbb{C}^m$ et $N(A) \oplus T = \mathbb{C}^n$.
3. Il existe $X \in A\{1,2\}$ tel que : $R(X) = T$ et $N(X) = S$.

Exemple 3.1 *calcul* $A^{(2)}_{T,S}$:

soit $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,3}_2$$

T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$, engendré par les vecteurs $e_1\,(0;0;1)$ et $e_2\,(1;0;1)$
S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$, S engendré par les vecteurs suivants :
$e'_1\,(0;0;0;1)$ $e'_2\,(1;0;0;1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0;-2;1;-3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3;-4;-4;-3)$$

$e'_1\,(0;-2;1;-3)$ et $e'_2\,(3;-4;-4;-3)$ sont linéairement indépendants, alors AT est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$,engendré par les vecteurs suivants :
$e'_1\,(0;-2;1;-3)$ et $e'_2\,(3;-4;-4;-3)$
on remarque que : $AT \oplus S = \mathbb{C}^4$ et $\dim AT = rg\,(A) = 2$.
on pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la proposition (3.10) on a :
Il existe $X \in A\{1,2\}$ tel que : $X = U(VAU)^{-1}V$, $R(X) = T$, $N(X) = S$

$$(VAU)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2 *soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{3,4}$

T est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$,engendré par les vecteurs suivants :
$e_1\,(0;0;1;1)$, $e_2\,(1;1;0;0)$
S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$, S engendré par le vecteur $e'_1\,(1;1;-1)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{4,3}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{22}^{4,2}$ $\quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{2,3}$

Donc,

$$VAU = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}$$

Et

$$(VAU)^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{T,S}^{(2)} = U\,(VAU)^{-1}\,V = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -9 & 1 \\ 10 & -9 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

La notion d'inversibilité est l'une des notions les plus importantes dans tous les domaines de mathématiques.
Notre travail consacré à l'étude de l'inverse généralisé qui est un opérateur possède le maximum de propriétés que possède l'inverse s'il existe.
Dans notre travail on a étudié ces notions de certains cotés :

1. différents types d'opérateur inverse$(intérieur, extérieur, généralisé...)$
2. quelques inverses généralisés$(topo\log ique, Moore_penrose, Dra\sin, pondéré...)$
3. Exemples de calcul.

Malgré qu'on a parlé de certains points concernant les inverses mais il reste toujours pauvre, car il reste plusieurs notions qu'on a pas évoqué, peut être qu'ils seront plus tard un sujet de recherche.
Nous espérons que nous avons réussi à donner une idée sur les inverses d'un opérateur.

Bibliographie

[1] A .Ben-Israel and T. N. E. Greville «generalized inverses, theory and application» New York ,London,
1973
[2] A. KARA .Rôle des projections dans la théorie des inverses généralisés.
[3] M. Z . Nashed « Generalized inverses and applications» Academic Press-1976.
[4] Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint.18 mars 2008.
[5] R. H. Bouldin «Generalized inverses and factorizations, Recent applications of generalized inverses», Pitman Ser. Res. Notes in Math., vol. 66, 1982, pp. 233{249. MR 83j :47001.
[6] R.Penrose, A generalized inverse for matrices, Proc.camb.Phil.Soc. 52 (1955).
[7] S. L. Campbell and C.D. Meyer «EP operators and generalized inverse» canad, math bull.vol 18 (3) 1975.
[8] S .L. Campbell and C. D. Meyer «Generalized inverses of Linear Transformations » North Carolina State
university Raleigh, Pitman ,London, 1979.
[9] S. R. Caradus «Generalized inverses and operator theory» Queens paper in pure and applied mathematics,
Queens University, Kingston, Ontario, 1978.
[10] Y .L. Chen «Iterative methods for computing the generalized inverses $\left(A_{T,S}^{(2)}\right)$ of a matrix A » North-holland.
[11] Zekraoui Hanifa.SUR LES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES $G_K\_INVERSES$ DES MATRICES.3 Juillet 2011.