République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessa - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques & Informatique
Filière :Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Thème

Théorème de point fixe commun dans des espaces b-métriques

Présentée Par :
BOUGHAMBOUZ Souàd
GOUASMIA Ahlem
Devant le jury :

Mr Smail BOUZENADA	MCA	Université de Larbi Tébessa	Président
Mr Abdelhak HAFDALLAH	MAA	Université de Larbi Tébessa	Examinateur
Mr Khaled BERRAH	MAA	Université de Larbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 27/05/2018

Remerciments

Nous remrcions en premier lieu **ALLAH**, Le Tout Puissant qui nous a guidé par sa grandeur et fait en sorte que nos promesses deviennent une réalité par ce modeste travail.

Au terme de cette recherche nous somme très heureux de pouvoir remercier tous ceux et celles qui notre accompagné et soutenu tout le long de cette aventure.

Nous voudrions tout d'abord remercier très vivement et sincèrement notre encadreur Monsieur le Professeur **BERRAH KHALED** de nous avoir confié ce sujet de thèse et qui nous avons honoré d'avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il nous apporté, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer, et son soutien qui nous avons permis d'achever ce travail.

Nos respect et nos vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur **BOUZNADA Ismail** et le Professeur **HAFDALLEH Abdelhak** d'avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre thèse, leurs présence dans ce Jury nous fait un grand honneur.

Nous remercions tout spécialement nos chers parents pour ses prières, ses recommandations, et pour nous avoir activement apporté un soutien inconditionnel tout au long de nos études.

Enfin, Nous présentons nos sincères remerciements profonds à notrecher frère **Dr. Taki Eddine OUSSAEIF** pour sa suivi, ses conseils et pour pleine coopération et encouragement permanent tout au long de la réalisation de ce modeste travail, Recevez ici, toute notre gratitude et toute notre sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale

Résumé

Dans ce travail on a étudié des théorèmes de point fixe commun dans l'espace b-métrique. Nous avons démontré de nouveaux théorèmes de point fixe commun pour des applications contractantes, selon la contraction rationnelle et la contraction de Pata. Nous avons également soutenu ces résultats avec des applications et exemples.

Les mots clés: Espace b-métrique, Point fixe commun, Application faiblement compatible, Application contractante, contraction rationnelle, contraction de Pata.

Abstract

In this work we studied some common fixed point theorems in a b-metric space. We proved some new common fixed point theorems for the contractant applications under both rational contraction and Pata contraction. We also supported these results with applications and examples.

Keywords: b-metric space, Common fixed point, Weakly compatibility mapping, Contraction mapping, rational contraction, Pata contraction .

ملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة بعض نظريات النقطة الصامدة المشتركة في فضاء ب-متري، كما قدمنا براهين لنظريات جديدة للنقطة الصامدة المشتركة حيث تكون التطبيقات المقلصة تحتى شرطي التقلص الكسري و تقلص باتا في الفضاء الب-متري، وقد دعمنا في الأخير نتائجنا بتطبيقات و أمثلة.

الكلمات المفتاحية: الفضاءات البيمترية ، النقطة الثابتة المشتركة ، التطبيقات الضعيفة توافقيا، التطبيقات المنكمشة ، التقلص الكسري ،انكماش Pata.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Préliminaires **5**

1.1 **Notions de base** 5

1.2 **Les applications contractantes** 7

1.3 **Quelques types de contractions** 8

1.4 **Compatibilité des applications** 9

1.4.1 **Les applications compatibles** 9

1.4.2 **Les applications faiblement compatibles** 10

1.5 **Théorème de point fixe contraction de Banach** 11

1.6 **Espace b-métrique** 12

2 Théorèmes de point fixe commun dans l'espace b-métrique utilisant la contraction rationnelle **15**

2.1 **Introduction** 15

2.2 **Résultats principaux** 15

2.3 **Application au système d'équations linéaires** 29

2.4 **Une application aux système d'équations intégrales** 31

3 Théorème de point fixe commun dans l'éspace b-métrique utilisant la contraction de Pata **33**

3.1 **Introduction** 33

3.2 **Résultats principaux** 34

3.3 **Exemple** 41

Conclusion **43**

Bibliographie **43**

Introduction générale

«La théorie du point fixe» est un bon mélange d'analyse, de la topologie et de la géométrie, les idées topologiques sont présentes dans presque tous les domaines des mathématiques d'aujourd'hui. Les théorèmes de point fixe donnent les conditions dans lesquelles les applications (simples ou a valeurs multiples) qui assurent des solutions.

Au cours des dernières années, la théorie des points fixes a été révélée comme un outil très puissant et important dans l'étude des phénomènes non linéaires. En particulier, les techniques de point fixe ont été appliquées dans une diversité de domaines comme la biologie, la chimie, l'économie, l'ingénierie, la théorie des jeux et de la physique.

Un espace métrique abstrait sert fréquemment comme un objet mathématique utile dans la modélisation des systèmes physiques, dans un ensemble dans lequel on sait mesurer la distance entre deux points (un espace métrique)

La théorie du point fixe est l'une des célèbres théories classiques en mathématiques, dernièrement elle a connu un développement considérable à cause de ces applications énormes dans plusieurs branches de la science, en particulier dans la théorie du controle, les systèmes dynamiques, la théorie des équations différentielles, la théorie du chaos, la théorie des jeux et ainsi dans l'intelligence artificielle et la programmation logique etc.

L'idée de l'espace b-métrique a été initiée à partir des travaux de Bourbaki [11], [31] et Bakhtin [5]. Czerwik [18] a donné un axiome qui était plus faible que l'inégalité triangulaire et formellement défini un espace b-métrique en vue de généraliser le théorème de la contraction de Banach. La théorie du point fixe dans l'espace b-métrique est un domaine trés dynamique dans la recherche mathématique. Cette théorie consiste à résoudre un problème trés simple et élémentaire : pour une application f d'un ensemble non vide dans lui meme X (espace b-métrique), un point fixe de f est un point x de X pour lequel $f(x) = x$.

Un théorème fondamentale concernant les points fixes est celui de Banach [7]. Selon ce mathématicien, dans un espace métrique ordinaire complet X muni d'une métrique d, toute contraction

f i.e. $d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq kd\left(x,y\right)$ avec $0<k<1$ pour tout $x,y\in X$, admet un point fixe unique (vérifie la propriété du point fixe).
Par la suite, de nombreux chercheurs ont prouvé que la notion d'applications contractives définie précédemment dans l'espace métrique ordinaire, peut s'étendre à l'espace b-métrique.
Récemment, grace à l'évolution des notions de la commutativité des applications (commutativité, faiblement commutative, compatibilité, faiblement compatible...), les mathématiciens ont pu transformer le problème du point fixe au point fixe commun pour plus cette notions qui constitue pour nous un intéret vitale. Parmi les divers résultats publiés, on peut se référer en particulier : [13], [19], [10], [9], [14], [3], [36] et [1].
L'un des aspects importants à étudier, concernont le théorème de point fixe commun dans l'espace b-métrique est d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes impliquant l'existence d'un point fixe commun.
Dans ce cadre nous avons conçu notre travail qui regroupe en plus d'une introduction général et conclusion, trois chapitres.
Le premier chapitre sera consacré à quelques déffinitions et quleque notions qui sont indisponsable pour le reste de notre travail.
Dans la deuxième chapitre nous allons démontrer des théorèmes de point fixe pour des applications contractantes dans l'espace b-métrique complet. L'originalité de ce travail est l'utilisation de la contraction rationnelle dans un espace b-metrique complet pour démontre un point fixe commun dans un premier plan, et dans deuxième plan l'application d'un systéme d'équations intégrales sur ce théorème.
On trouvera dans le dernier chapitre les théorèmes de point fixe commun dans l'espace b-métrique complet satisfaisant la contractante de Pata.

Chapitre 1

Préliminaires

Le présent chapitre est dédié aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Notions de base

Définition 1.1 "***Espace métrique***" *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

a) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
b) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
c) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).
On appelle espace métrique tout ensemble non vide X muni d'une distance d et on le note (X, d).

Exemple 1.1 *Notons $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ L'application $d : \Bbbk \times \Bbbk \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) = |x - y|$$

est une distance sur $\Bbbk$, appellée distance usuelle.

Définition 1.2 " ***Suite de Cauchy***" *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X, d) est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall p, q \geq n\ \ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n,m\to\infty} d\left(x_p, x_q\right) = 0.$$

Exemple 1.2 *Dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *la suite définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$

$$\begin{aligned} d\left(x_p, x_q\right) &= \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \\ &= \left|\frac{p-q}{pq}\right| \\ &\leq \frac{p}{pq} \leq \frac{1}{q} \\ &\leq \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}$ *suite de Cauchy.*

Définition 1.3 "***Suite convergente***" *Soit* (X, d) *un espace mertique alors* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* X *est appelée suite convergente si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d\left(x_n, x\right) < \varepsilon$$

on note alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.1 *Toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse est généralement faux.*

Définition 1.4 "***Continuité***" *Soient* (X, d) *et* (X, d') *deux espaces métrique et* $T : (X, d) \to (X, d')$ *une application dite séquentiellement continue a* $x_0 \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\left(Tx, Tx_0\right) < \varepsilon.$$

Définition 1.5 " ***Espace métrique complet***" *Un espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* X *converge dans* X.

1.2 Les applications contractantes

"**Contraction de Banach**" **:** Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe. Comme il est basé sur un processus itératif, alors il peut être rendu éffectif sur un ordinateur pour trouver le point fixe d'une application contractante, il peut ainsi realiser l'exactitude désirée tout en jouant sur le nombre d'itérations dont on a besoin.Ce théorème est dû a Banach en 1922. il s'agit d'une abstraction de la méthode classique
des approximations successives introduite par Liouville en 1837 et développée pour la première fois par Picard en 1890.

Définition 1.6 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$ une application est dite :*

1. lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, on a

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y). \tag{1.1}$$

2. contraction ou une application contractante s'il existe $k \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y). \tag{1.2}$$

3. contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$, et $x \neq y$ on a :

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

Exemple 1.3 *Soit $X = \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par*

$$Tx = \frac{1}{2}x + 1, \ x \in \mathbb{R}$$

alors T est une contraction.

Remarque 1.1 *Notons que contraction $\Rightarrow$ contractive $\Rightarrow$ lipchtisienne et que tout les applocations sont uniformement continues.*

Définition 1.7 *Soit (X, d) un espace métrique, et $T : X \to X$ une application, on dit qu'un point $x \in X$ et un point fixe de T si et seulement si $T(x) = x$.*

1.3 Quelques types de contractions

1- Contraction de Boyd-Wong

Théorème 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet. et $T : X \to X$ une application Supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$*

pour tout $t > 0$ et vérifiant :

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)).$$

pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^*. En outre, pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.
Dans ce cas, T est dite ϕ-contractive ou contraction non linéaire.

2- Contraction de Meir-Keeler

Théorème 1.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \delta \text{ implique } d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X. De plus, pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

3- Contraction de Geraghty

Définition 1.8 *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite contraction de Geraghty si et seulement si il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1$ implique $t_n \to 0$ et pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)).$$

Théorème 1.3 *Toute contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.*

4- Contraction de Matkowski

Définition 1.9 *Une application $T : X \to X$ d'un espace métrique (X, d) est dite contraction de Matkowski (ou φ-contraction) si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Théorème 1.4 *Toute φ-contraction T d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.*

5- Contraction de Caristi

Théorème 1.5 *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}_+$ semi-continue inférieurement telle que :*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx),$$

pour tout $x \in X$. Alors T admet un point fixe.

6- Contraction de Branciari

Théorème 1.6 *Soit T une application d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 \leq k \leq 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue vérifiant :

$$\int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt > 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Alors T a un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a : $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

1.4 Compatibilité des applications

1.4.1 Les applications compatibles

Avant de citer la notion de la compatibilité due à Jungck [24], on va rappeler la définition de la commutativité et de la commutativité faible :

Définition 1.10 *[25] Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même. S et T sont dites commutatives si $STx = TSx$, pour tout $x \in X$.*

Sessa [42] a généralisé la dernière définition en introduisant la commutativité faible. S et T sont dites faiblement commutatives si et seulement si $d(STx, TSx) \leq d(Tx, Sx)$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.11 *[24] S et T sont dite compatibles si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0$, pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant :*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$.

Remarque 1.2 *Si S et T sont commutatives, alors elles sont faiblement commutatives, donc compatibles, mais la réciproque est fausse en général.*

Exemple 1.4 *Soient $X = \mathbb{R}$ et d la métrique euclidienne. Définissions :*

$$Sx = \frac{x+1}{2}, \quad \textit{et} \quad Tx = 2x - 1$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.On a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1,$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} S(1 + \frac{2}{n}) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{2}{n}) = 1,$$

Donc la paire (S, T) est compatible.

1.4.2 Les applications faiblement compatibles

Définition 1.12 *[26] S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence ; i.e., pour tout $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$, alors $STu = TSu$.*

Exemple 1.5 *Soit $X = [0, 2]$ muni de la métrique euclidienne, définissons S et T par :*

$$Sx = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} ; \ Tx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Le point 1 satisfaisant $S(1) = T(1) = 1$ et $ST(1) = TS(1) = 1$, alors la paire(S, T) est faiblement compatible.

1.5 Théorème de point fixe contraction de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom : le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Théorème 1.7 ***(Banach 1922)*** *soit (X, d) un espace métrique complet (ou de Banach si X possède une norme) et $T : X \to X$ une contraction alors T admet un point fixe unique dans X, c-à-d $\exists u \in X$ tel que $Tu = u$ et aussi ce point peut étre obtenu comme limite de la suite engendrée par l'itération $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in N$ avec x_0 un élément arbitraire dans X, et*

$$d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Preuve. **(a) Existence :**
Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, 3, ... \tag{1.3}$$

Par (1.2) et (1.3), on trouve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq k\, d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{aligned}$$

continuant ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Puis, il faut prouver que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X.
Soient $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &= d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ ... \ + d(x_{n+m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \ ... \ + k^{n+m-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n d(x_1, x_0)[1 + k + k^2 + \ ... \ + k^{m-1}] \\ &\leq k^n\, d(x_1, x_0)[\frac{1-k^{m-n+1}}{1-k}] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

alors, on prend $m, n \to \infty$

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X alors$\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$.

(b) Unicité :

Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tel que $x = T(x)$ et $y = T(y)$, alors

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \Rightarrow d(x, y) \leq kd(x, y).$$

Par conséquent, $d(x, y) = 0$ ce qui entraine $x = y$. ■

1.6 Espace b-métrique

Définition 1.13 *[5] Soit X un ensemble non vide et soit $s \geq 1$ un nombre réel donné. Une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, est appelé une b-métrique si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous $x, y, z \in X$:*

1) $d(x, y) = 0$ si $x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x)$,
3) $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Une paire (X, d) est appelé un espace b-métrique.

Remarque 1.3 *Il est clair que la définition de l'espace métrique est un cas partuclier dans l'espace b-métrique.*

Exemple 1.6 *[10] L'espace $l_p(0 < p < 1)$,*

$$l_p = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

avec la fonction $d : l_p \times l_p \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $x = x_n$, $y = y_n \in l_p$ est un espace b-métrique. Par un calcul élémentaire, on obtient que

$$d(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}} [d(x, y) + d(y, z)].$$

Exemple 1.7 [10] *Soit* $l_p(0 < p < 1)$ *de toutes les fonctions réelles* $x(t)$, $t \in [0,1]$ *tel que* $\int_0^1 |x(t)|^p \, dt < \infty$ *un espace b-métrique si on prend*

$$d(x,y) = \left[\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

pour chaque $x, y \in l_p$.

Exemple 1.8 [22] *Soit* $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et soit* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *est définie par*

$$d(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{si } m = n, \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, & \text{si l'un de } m,n \text{ est pair et l'autre est pair ou } \infty, \\ 5, & \text{si l'un de } m,n \text{ est impair et l'autre est impair(et } m \neq n \text{) ou } \infty, \\ 2, & \text{sinon .} \end{cases}$$

Ensuite, en considérant tous les cas possibles, on peut vérifier que (X,d) *est un espace b-métrique avec* $s = \frac{5}{2}$. *Cependant, soit* $x_n = 2n$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$d(2n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

C'est, $x_n \to \infty$, *mais* $d(x_n, 1) = 2 \nrightarrow 5 = d(\infty, 1)$ *quand* $n \to \infty$.

Définition 1.14 [8] *Soit* E *un ensemble non-vide et* $T : E \to E$ *une application. On dit que* $x \in E$ *est un point fixe de* T *si* $T(x) = x$ *et dénote par* FT *or* $Fix(T)$ *l'ensemble de tous les points fixes de* T. *Soit* E *un ensemble quelconque et* $T : E \to E$ *une application. Pour tout* $x \in E$ *on définie* $T^n(x)$ *inductivement par* $T^0(x) = x$ *et* $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$. *Pour chaque* $x_0 \in X$, *la suite* $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset X$ *donnée par*

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, ...$$

est appelé la suite d'approximations successives avec la valeur initiale x_0. *Il est aussi connu sous le nom d'itération de Picard à partir de* x_0.

Lemme 1.1 [40] *Soit* (X,d) *un espace b-métrique et* $\{y_n\}$ *est une suite dans* X *tel que* $d(y_{n+1}, y_n)$ *est décroissante et que* $\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, y_n) = 0$.

Si $\{y_{2n}\}$ n'est pas une suite de Cauchy alors il existe $\delta > 0$ et deux suites strictement croissantes $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ d'entiers positifs tels que les suites suivantes tendent à δ lorsque $k \to \infty$:

$$d(y_{2m_k}, y_{2n_k}),\ d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}),\ d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k}),\ d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k+1}),\ d(y_{2m_k+1}, y_{2n_k+1}).$$

Théorème 1.8 *[37] " **Contraction de Pata**" Soit (X, d) un espace b-métrique, et $f : X \to X$ une application, soit $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes fixes et $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ une fonction croissante, disparaissant avec continuité à 0. Si l'inégalité*

$$d(fx, fy) \leq (1 - \varepsilon)d(x, y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + \|x\| + \|y\|]^{\beta}$$

est satisfait pour chaque $\varepsilon \in [0, 1]$ et tout $x, y \in X$, alors f a un point fixe unique $z \in X$. Ici, $\|x\| = d(x_0, x)$ pour un point choisi $x_0 \in X$.

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe commun dans l'espace b-métrique utilisant la contraction rationnelle

2.1 Introduction

Le concept de l'espace b-métrique a été introduit par Bakhtin dans [5] et utliseé par Czerwik dans [17]. Il est bien connu que le théorème de l'application de contraction de Banach est l'un des résultats pivots de l'analyse fonctionnelle.
Soit $T : X \to X$ est un application contractante et l'espace métrique (X, d) est complet alors l'applicaion T a un point fixe unique. En effet, l'inégalité (1.2) implique la continuité de T. Ainsi, il y a des conditions de contractions qui implique l'existence d'un point fixe dans un espace métrique complet mais n'implique pas la continuité (voir [36]).
Dans ce chapitre, on établi une contraction rationnelle pour les applications définis sur l'espace b-métrique et on montre quelques nouveaux théorèmes de point fixe pour ces contractions. Ces résultats généralisent des résultats dans [36].

2.2 Résultats principaux

Théorème 2.1 *Soit (X, d) un espace b-métrique complet et l'application T une contractante. Alors il existe $x^* \in X$ un point fixe de T selon le contraction de Banach.*

Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, 3, ...$$

Par (1.2) et (1.3), on trouve

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_{n+1}) & = & d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ & \leq & k\ d(x_{n-1}, x_n) \\ & \leq & k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{array}$$

continuant ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Puis, il faut prouver que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X.
Soient $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_m) & \leq & s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)] \\ & \leq & sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ \dots\ + s^m d(x_{n+m-1}, x_m) \\ & \leq & sk^n d(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d(x_0, x_1) + \ \dots\ + s^m k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ & \leq & (sk^n) d(x_0, x_1)[1 + (sk) + (sk)^2 + \ \dots\ + (sk)^{m-1}] \\ & \leq & (sk^n)\ d(x_0, x_1)[\dfrac{1 - (sk)^{m-n+1}}{1 - sk}] \\ & \leq & \dfrac{(sk^n)}{1 - sk}\ d(x_0, x_1), \end{array}$$

alors, on prend $m, n \to \infty$

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X alors $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$.
Passant à montrer que x^* et un point fixe de T

$$\begin{array}{rcl} d(x^*, Tx^*) & \leq & s\,[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)] \\ & \leq & sd(x^*, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, Tx^*) \\ & \leq & sd(x^*, x_{n+1}) + sd(Tx_n, Tx^*) \\ & \Rightarrow & d(x^*, Tx^*) \leq sd(x^*, x_{n+1}) + skd(x_n, x^*). \end{array}$$

Alors, on trouve $d(x^*, Tx^*) \leq 0$, lorsque $n \to \infty$, ce qui donne $Tx^* = x^*$.
En suite, on prouve que x^* est le point fixe unique de T.
supposons que x' est un autre point fixe de T, alors on a $Tx' = x'$ et

$$\begin{array}{rcl} d(x^*, x') & = & d(Tx^*, Tx') \\ & \leq & kd(x^*, x'), \end{array}$$

ce qui donne

$$(1-k)d(x^*, x') \leq 0,$$

donc

$$d(x^*, x') \leq 0,$$

ce qui contredit la définition de la distance. Donc

$$d(x^*, x') = 0.$$

Alors $x^* = x'$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1. ■

Théorème 2.2 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique complet. On définie la suite* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *par la récursivité*

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0.$$

Soit $T : X \to X$ *une application satisfisant la contraction suivante :*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda_1 d(x, y) + \lambda_2[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad \forall x, y \in X, \tag{2.1}$$

où $s \geq 1$, *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \frac{1}{3})$.

Alors il existe $x^* \in X$ tel que $x_n \to x^*$ et x^* est un point fixe unique de T.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Par (1.3), on trouve

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n),$$

en utilisant (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)] \\ &\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda_2) d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

donc, il vient

$$(1-\lambda_2) d(x_n, x_{n+1}) \leq (\lambda_1 + \lambda_2) d(x_{n-1}, x_n),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2}\right) d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

où

$$k = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2},$$

comme $\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1$, alors $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 - \lambda_2$; qui imlique

$$k = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2} \leq 1,$$

d' autre part

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-2,} x_{n-1}), \end{aligned}$$

continuant ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Ainsi T est une application contractante.
Maintenant, on doit montrer que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X.
Soient $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)] \\ &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\quad + \ldots + s^m d(x_{n+m-1}, x_m) \\ &\leq sk^n d(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d(x_0, x_1) \\ &\quad + \ldots + s^m k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (sk^n) d(x_0, x_1)[1 + (sk) + (sk)^2 + \ \ldots \ + (sk)^{m-1}] \\ &\leq (sk^n) d(x_0, x_1) \left[\frac{1 - (sk)^{m-n+1}}{1 - sk}\right], \end{aligned}$$

ainsi si $m, n \to \infty$ alors

$$\lim_{m,n \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X, alors $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$.

On prouve d'abord que x^* est un point fixe de T

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &\leq s\left[d(x^*,x_n)+d(x_n,Tx^*)\right]\\
&\leq s\left[d(x^*,x_n)+d(Tx_{n-1},Tx^*)\right]\\
&\leq sd(x^*,x_n)+sd(Tx_{n-1},Tx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_n)+s[\lambda_1 d(x_{n-1},x^*)]\\
&\quad +s\lambda_2[d(x_{n-1},Tx_{n-1})+d(x^*,Tx^*)]\\
&\leq sd(x^*,x_n)+s\lambda_1 d(x_{n-1},x^*)\\
&\quad +s\lambda_2 d(x_{n-1},x_n)+s\lambda_2 d(x^*,Tx^*),
\end{aligned}$$

donc on trouve

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &\leq sd(x_n,x^*)+s\lambda_1 d(x_{n-1},x^*)+s^2\lambda_2[d(x_{n-1},x^*)+d(x^*,x_n)]+s\lambda_2 d(x^*,Tx^*)\\
&\leq sd(x_n,x^*)+s\lambda_1 d(x_{n-1},x^*)+s^2\lambda_2 d(x_{n-1},x^*)+s^2\lambda_2 d(x^*,x_n)+s\lambda_2 d(x^*,Tx^*),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
(1-s\lambda_2)d(x^*,Tx^*) &\leq sd(x_n,x^*)+s\lambda_1 d(x_{n-1},x^*)+s^2\lambda_2 d(x_{n-1},x^*)+s^2\lambda_2 d(x_n,x^*)\\
&\leq (s+s^2\lambda_2)d(x_n,x^*)+(s\lambda_1+s^2\lambda_2)d(x_{n-1},x^*),
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$d(x^*,Tx^*)\leq \frac{(s+s^2\lambda_2)}{(1-s\lambda_2)}d(x_n,x^*)+\frac{(s\lambda_1+s^2\lambda_2)}{(1-s\lambda_2)}d(x_{n-1},x^*),$$

donc, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} d(x^*,Tx^*)=0,\ \text{i.e}\ Tx^*=x^*.$$

Finallement, il reste de montrer que x^* est le point fixe unique de T. On suppose que x' est un autre point fixe de T, alors on a $Tx'=x'$ et

$$\begin{aligned}
d(x^*,x') &= d(Tx^*,Tx')\\
&\leq \lambda_1 d(x^*,x')+\lambda_2[d(x^*,Tx^*)+d(x',Tx')]\\
&\leq \lambda_1 d(x^*,x'),
\end{aligned}$$

alors, on trouve

$$(1-\lambda_1)d(x^*,x')\leq 0,$$

ce qui implique que $x^*=x'$. ■

Théorème 2.3 *Soit (X, d) un espace b-métrique complet. On définie la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ par la récursivité*

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0.$$

Soit $T : X \to X$ une application satisfisant la contraction suivante :

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda_1 d(x, y) + \lambda_2 d(x, Tx) + \lambda_3 d(y, Ty) + \lambda_4[d(y, Tx) + d(x, Ty)], \quad \forall x, y \in X \tag{2.2}$$

où $s \geq 1$ et $\lambda_1 + 2s\lambda_2 + \lambda_3 + 2s\lambda_4 \leq 1$.

Avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ réels non négatifs.
Aors il existe $x^* \in X$ tel que $x_n \to x^*$ et x^* est un point fixe unique de T .
Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, 3...$$

Utilisant (1.3) et (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + \lambda_3 d(x_n, Tx_n) + \lambda_4[d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)] \\
&\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_3 d(x_n, x_{n+1}) + \lambda_4[d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})] \\
&\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_3 d(x_n, x_{n+1}) + s\lambda_4[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\
&\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_3 d(x_n, x_{n+1}) + s\lambda_4 d(x_{n-1}, x_n) + s\lambda_4 d(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4) d(x_{n-1}, x_n) + (\lambda_3 + s\lambda_4) d(x_n, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(1 - \lambda_3 - s\lambda_4) d(x_n, x_{n+1}) \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4) d(x_{n-1}, x_n),$$

donc, on trouve

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4)}{(1 - \lambda_3 - s\lambda_4)} d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq k\ d(x_{n-1}, x_n),
\end{aligned}$$

où

$$k = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4)}{(1 - \lambda_3 - s\lambda_4)} \leq 1,$$

car $\lambda_1 + 2s\lambda_2 + \lambda_3 + 2s\lambda_4 \leq 1$,
donne $\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4 \leq 1 - \lambda_3 - s\lambda$, alors

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_4)}{(1 - \lambda_3 - s\lambda_4)} \leq 1,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-2,} x_{n-1}), \end{aligned}$$

continuant ce processus, il vient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Maintenant, il s'agit de montrer que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X.
Soit $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + ... \\ &\leq sk^n d(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + s^m k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq sk^n d(x_0, x_1)[1 + (sk) + (sk)^2 + ... + (sk)^{m-1}], \end{aligned}$$

alors, on trouve

$$d(x_n, x_m) \leq sk^n d(x_0, x_1) \left[\frac{1 - (sk)^{m-n+1}}{1 - sk} \right],$$

lorsque on prend $m, n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_m) \leq 0,$$

ce qui contredit la définition de la distance. Donc, on résulte

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de cauchy dans X et $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$.
Maintenant, on passe à montrer que x^* et un point fixe de T.
On a

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq s\left[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)\right] \\ &\leq sd(x^*, x_{n+1}) + sd(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq sd(x^*, x_{n+1}) + s\lambda_1 d(x_n, x^*) + s\lambda_2 d(x_n, Tx_n) + s\lambda_3 d(x^*, Tx^*) \\ &\quad + s\lambda_4[d(x^*, Tx_n) + d(x_n, Tx^*)], \\ &\leq sd(x^*, x_{n+1}) + s\lambda_1 d(x_n, x^*) + s\lambda_2 d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + s\lambda_3 d(x^*, Tx^*) + s\lambda_4 d(x^*, Tx_n) + s\lambda_4 d(x_n, Tx^*) \\ &\leq sd(x^*, x_{n+1}) + s\lambda_1 d(x_n, x^*) + s^2\lambda_2 d(x_n, x^*) + s^2\lambda_2 d(x^*, x_{n+1}) \\ &\quad + s\lambda_3 d(x^*, Tx^*) + s\lambda_4 d(x^*, x_{n+1}) + s^2\lambda_4[d(x_n, x^*) + d(x^*, Tx^*)], \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned}
&(1-s\lambda_3-s^2\lambda_4)d(x^*,Tx^*)\\
\leq\ & sd(x^*,x_{n+1})+s\lambda_1 d(x_n,x^*)+s^2\lambda_2 d(x_n,x^*)+s^2\lambda_2 d(x^*,x_{n+1})\\
&+s\lambda_4 d(x^*,x_{n+1})+s^2\lambda_4 d(x_n,x^*),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
(1-s\lambda_3-s^2\lambda_4)d(x^*,Tx^*) \ &\leq\ (s+s^2\lambda_2+s\lambda_4)d(x_{n+1},x^*)\\
&\quad +(s\lambda_1+s^2\lambda_2+s^2\lambda_4)d(x_n,x^*),
\end{aligned}$$

on obtient

$$d(x^*,Tx^*) \leq \frac{(s+s^2\lambda_2+s\lambda_4)}{(1-s\lambda_3-s^2\lambda_4)}d(x_{n+1},x^*)+\frac{(s\lambda_1+s^2\lambda_2+s^2\lambda_4)}{(1-s\lambda_3-s^2\lambda_4)}d(x_n,x^*).$$

Alors, on trouve $d(x^*,Tx^*)\leq 0$, lorsque $n\to\infty$, ce qui donne $Tx^*=x^*$.
Finallement, il reste de prouver que x^* est le point fixe unique de T. Supposons que x' est un autre point fixe de T, alors on a $Tx'=x'$ et

$$\begin{aligned}
d(x^*,x') &= d(Tx^*,Tx')\\
&\leq \lambda_1 d(x^*,x')+\lambda_2 d(x^*,Tx^*)+\lambda_3 d(x',Tx')\\
&\quad +\lambda_4[d(x',Tx^*)+d(x^*,Tx')]\\
&\leq \lambda_1 d(x^*,x')+\lambda_2 d(x^*,x^*)+\lambda_3 d(x',x')\\
&\quad +\lambda_4[d(x',x^*)+d(x^*,x')]\\
&\leq \lambda_1 d(x^*,x')+\lambda_4[d(x',x^*)+d(x^*,x')]\\
&= (\lambda_1+2\lambda_4)d(x',x^*).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $x^*=x'$. ■

Théorème 2.4 *Soit (X,d) un espace b-métrique complet et soient $S,T:X\to X$ deux applications satisfaisant la condition*

$$d(Sx,Ty)\leq \lambda d(x,y)+\frac{\mu d(x,Sx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)}. \tag{2.3}$$

Pour $x,y\in X$ et λ,μ réels non négatifs, avec $\lambda+\mu<1$, alors S et T ont un point fixe commun unique .

Preuve. Soit $x_0\in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X définie comme suit

$$x_n=Sx_{n-1},\ \text{et}\ \ x_{n+1}=Tx_n,\ n=1,2,3,..,\tag{2.4}$$

à partir de (2.3) et (2.4) , on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Sx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) + \frac{\mu d(x_{n-1}, Sx_{n-1}) d(x_n, Tx_n)}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} \\ &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) + \frac{\mu d(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_{n-1}, x_n)}, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$1 + d(x_{n-1}, x_n) \geq d(x_{n-1}, x_n) \Rightarrow \frac{d(x_{n-1}, x_n)}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} \leq 1,$$

posons $k = \frac{\lambda}{1-\mu} \leq 1$, donc on aura

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

conséquent, on trouve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

On montre d'abord que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X. Ainsi pour $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)] \\ &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\quad + \ldots + s^m d(x_{n+m-1}, x_m) \\ &\leq sk^n d(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + s^m k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (sk^n) d(x_0, x_1)[1 + (sk) + (sk)^2 + \ldots + (sk)^{m-1}] \\ &\leq (sk^n)\ d(x_0, x_1)[\frac{1 - (sk)^{m-n+1}}{1 - sk}] \\ &\leq \frac{(sk^n)}{1 - sk}\ d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

si on prend $m, n \to \infty$, on aura

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Ce qui donne que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X alors $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$. Encore, il suffit de montrer que x^* et un point fixe de T.

On a

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &\leq s\left[d(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx^*)\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(x_{n+1},Tx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(Tx_n,Tx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,Tx_n)d(x^*,Tx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,x_{n+1})d(x^*,Tx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x^*)+s\left[\lambda d(x^*,x^*)+\frac{\mu d(x^*,x^*)d(x^*,Tx^*)}{1+d(x^*,x^*)}\right],
\end{aligned}$$

donc on obtient la contadiction $d(x^*,Tx^*)\leq 0$.
Ensuite, on trouve

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &= 0\\
&\Rightarrow Tx^*=x^*.
\end{aligned}$$

Donc x^* est un point fixe de T.
Par la mème méthode on montre aussi que x^* et un point fixe de S.
On a

$$\begin{aligned}
d(x^*,Sx^*) &\leq s\left[d(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Sx^*)\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(x_{n+1},Sx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(Sx_n,Sx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,Sx_n)d(x^*,Sx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,x_{n+1})d(x^*,Sx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x^*)+s\left[\lambda d(x^*,x^*)+\frac{\mu d(x^*,x^*)d(x^*,Sx^*)}{1+d(x^*,x^*)}\right],
\end{aligned}$$

donc on obtient la contadiction $d(x^*,Sx^*)\leq 0$.
Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
d(x^*,Sx^*) &= 0\\
&\Rightarrow Sx^*=x^*.
\end{aligned}$$

Donc x^* point fixe de S.
Il reste à prouver l'unicité du point fixe commun.

supposons que x' est un autre point fixe de T et de S alors on a $Tx' = x'$, et $Sx' = x'$,

$$\begin{aligned} d(x^*, x') &= d(Sx^*, Tx') \\ &\leq \lambda d(x^*, x') + \frac{\mu d(x^*, Sx^*) d(x', Tx')}{1 + d(x^*, x')} \\ &\leq \lambda d(x^*, x') + \frac{\mu d(x^*, x^*) d(x', x')}{1 + d(x^*, x')} \\ &\leq \lambda d(x^*, x'), \end{aligned}$$

il vient

$$(1 - \lambda) d(x^*, x') \leq 0 \Longrightarrow d(x^*, x') \leq 0,$$

ce qui contredit la définition de la distance. on resulte

$$d(x^*, x') = 0.$$

Alors $x^* = x'$.
D'où l'unicité du point fixe commun. ■

Théorème 2.5 *Soient S et T deux applications définis sur un espace b-métrique complet dans lui même satisfaisant la condition*

$$d(Sx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + \frac{\mu d(x, Sx) d(y, Ty) + \gamma d(y, Sx) d(x, Ty)}{1 + d(x, y)}. \tag{2.5}$$

Pour tout $x, y \in X$. λ, μ, γ réels non négatifs, avec $\lambda + \mu + \gamma < 1$, alors S et T ont un point fixe commun unique .

Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Sx_{n-1}, \text{ et } x_{n+1} = Tx_n, \; n = 1, 2, 3, .., $$

à partir de (2.4) et (2.5) , on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Sx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) + \frac{\mu d(x_{n-1}, Sx_{n-1}) d(x_n, Tx_n) + \gamma d(x_n, Sx_{n-1}) d(x_{n-1}, Tx_n)}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} \\ &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) + \frac{\mu d(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1}) + \gamma d(x_n, x_n) d(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 + d(x_{n-1}, x_n)}, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$1 + d(x_{n-1}, x_n) \geq d(x_{n-1}, x_n) \Rightarrow \frac{d(x_{n-1}, x_n)}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} \leq 1,$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_{n+1}) & \leq & \lambda d(x_{n-1},x_n)+\mu d(x_n,x_{n+1}) \\ (1-\mu)d(x_n,x_{n+1}) & \leq & \lambda d(x_{n-1},x_n) \\ d(x_n,x_{n+1}) & \leq & \dfrac{\lambda}{1-\mu}d(x_{n-1},x_n), \end{array}$$

et aussi

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n-1},x_n) & = & d(Sx_{n-2},Tx_{n-1}) \\ & \leq & \lambda d(x_{n-2},x_{n-1})+\dfrac{\mu d(x_{n-2},Sx_{n-2})d(x_{n-1},Tx_{n-1})+\gamma d(x_{n-1},Sx_{n-2})d(x_{n-2},Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-2},x_{n-1})} \\ & \leq & \lambda d(x_{n-2},x_{n-1})+\dfrac{\mu d(x_{n-2},x_{n-1})d(x_{n-1},x_n)+\gamma d(x_{n-1},x_{n-1})d(x_{n-2},x_n)}{1+d(x_{n-2},x_{n-1})} \\ & \Rightarrow & d(x_{n-1},x_n)\leq \lambda d(x_{n-2},x_{n-1})+\mu d(x_{n-1},x_n) \\ & \Rightarrow & d(x_{n-1},x_n)\leq \dfrac{\lambda}{1-\mu}d(x_{n-2},x_{n-1}), \end{array}$$

posons $k=\frac{\lambda}{1-\mu}\leq 1$, donc on aura

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_{n+1}) & \leq & kd(x_{n-1},x_n) \\ & \leq & k^2d(x_{n-2},x_{n-1}), \end{array}$$

par conséquent, on trouve

$$d(x_n,x_{n+1})\leq k^n d(x_0,x_1).$$

On montre d'abord que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X. Ainsi pour $m,n>0$ avec $m>n$:

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_m) & \leq & s[d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_m)] \\ & \leq & sd(x_n,x_{n+1})+s^2d(x_{n+1},x_{n+2})+s^3d(x_{n+2},x_{n+3}) \\ & & +\ ...\ +s^md(x_{n+m-1},x_m) \\ & \leq & sk^nd(x_0,x_1)+s^2k^{n+1}d(x_1,x_0)+...+s^mk^{n+m-1}d(x_0,x_1) \\ & \leq & (sk^n)d(x_0,x_1)[1+(sk)+(sk)^2+...+(sk)^{m-1}] \\ & \leq & (sk^n)\ d(x_0,x_1)[\dfrac{1-(sk)^{m-n+1}}{1-sk}] \\ & \leq & \dfrac{(sk^n)}{1-sk}\ d(x_0,x_1), \end{array}$$

Si on prend $m,n\to\infty$, on aura

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n,x_m)=0.$$

Ce qui donne que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans X alors $\{x_n\}$ converge vers $x^*\in X$.

Encore, il suffit de montrer que x^* et un point fixe de T.
On a

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &\leq s\left[d(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx^*)\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(x_{n+1},Tx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(Tx_n,Tx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,Tx_n)d(x^*,Tx^*)+\gamma d(x^*,Tx_n)d(x_n,Tx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,x_{n+1})d(x^*,Tx^*)+\gamma d(x^*,x_{n+1})d(x_n,Tx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x^*)+s\left[\lambda d(x^*,x^*)+\frac{\mu d(x^*,x^*)d(x^*,Tx^*)+\gamma d(x^*,x^*)d(x^*,Tx^*)}{1+d(x^*,x^*)}\right],
\end{aligned}$$

donc on obtient la contadiction $d(x^*,Tx^*)\leq 0$.
Ensuite, on trouve

$$\begin{aligned}
d(x^*,Tx^*) &= 0\\
&\Rightarrow Tx^*=x^*.
\end{aligned}$$

donc x^* est un point fixe de T.
Par la mème méthode on montre aussi que x^* et un point fixe de S.
On a

$$\begin{aligned}
d(x^*,Sx^*) &\leq s\left[d(x^*,x_{n+1})+d(x_{n+1},Sx^*)\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(x_{n+1},Sx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+sd(Sx_n,Sx^*)\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,Sx_n)d(x^*,Sx^*)+\gamma d(x^*,Sx_n)d(x_n,Sx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x_{n+1})+s\left[\lambda d(x_n,x^*)+\frac{\mu d(x_n,x_{n+1})d(x^*,Sx^*)+\gamma d(x^*,x_{n+1})d(x_n,Sx^*)}{1+d(x_n,x^*)}\right]\\
&\leq sd(x^*,x^*)+s\left[\lambda d(x^*,x^*)+\frac{\mu d(x^*,x^*)d(x^*,Sx^*)+\gamma d(x^*,x^*)d(x^*,Tx^*)}{1+d(x^*,x^*)}\right].
\end{aligned}$$

Donc on obtient la contadiction $d(x^*,Sx^*)\leq 0$.
Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
d(x^*,Sx^*) &= 0\\
&\Rightarrow Sx^*=x^*.
\end{aligned}$$

Donc x^* point fixe de S.
Il reste à prouver l'unicité du point fixe commun.
supposons que x' est un autre point fixe de T et de S alors on a $Tx' = x'$, et $Sx' = x'$,

$$\begin{aligned} d(x^*, x') &= d(Sx^*, Tx') \\ &\leq \lambda d(x^*, x') + \frac{\mu d(x^*, Sx^*)d(x', Tx') + \gamma d(x', Sx^*)d(x^*, Tx')}{1 + d(x^*, x')} \\ &\leq \lambda d(x^*, x') + \frac{\mu d(x^*, x^*)d(x', x') + \gamma d(x', x^*)d(x^*, x')}{1 + d(x^*, x')} \\ &\leq (\lambda + \gamma)d(x^*, x'), \end{aligned}$$

il vient

$$(1 - \lambda - \gamma)d(x^*, x') \leq 0 \Longrightarrow d(x^*, x') \leq 0,$$

ce qui contredit la définition de la distance. on resulte

$$d(x^*, x') = 0.$$

Alors $x^* = x'$.
D'où l'unicité du point fixe commun. ■

2.3 Application au système d'équations linéaires

Dans cette section, nous donnons une application en utilisant le théorème **2.1**.
Soit $X = \mathbb{R}^n$ est un espace b-métrique avec la distance

$$d_\infty(x,y) = 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| .$$

Où $x, y \in X$. Avec $p > 1$ Si

$$\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \text{ pour tout } i,j = 1,2,...,n,$$

alors le système linéaire suivant

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.6}$$

de n équations linéaires a une solution unique.

Preuve. Il est facile de montrer que (X, d_∞) est un espace b-métrique, il faut vérifie les trois conditions suivants :

$1-$ $d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$2-$ $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$,

$3-$ $d_\infty(x,y) \leq s[d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)]$.

Donc

$1-$ $d_\infty(x,y) = 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 0$

$\Rightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i$

$2-$ $d_\infty(x,y) = 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 2^p \max_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i| = d_\infty(y,x)$,

$3-$

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i - z_i + z_i| \\ &\leq 2^p \max_{1\leq i\leq n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq 2^p \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + 2^p \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i| \\ &\leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

Maintenant on va prouver que l'application T donnée par

$$T(x) = Ax - b,$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$

est une contraction, donc si on pose $T(x) = 0 \Rightarrow Ax - b = 0 \Rightarrow Ax = b$, alors si $T(x) = 0$ a une solution unique implique que $Ax = b$ a une solution unique.
On suppose que T est un point fixe alors

$$\begin{aligned} Tx^* &= x^* \\ Ax^* - b &= x^* \\ Ax^* - x^* &= b \\ x^* &= (A - I)^{-1} b. \end{aligned}$$

où A est inverssible.

On a $T(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j - b_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j - b_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j - b_n \end{pmatrix}$

d'après

$$\begin{aligned} d_\infty(Tx, Ty) &= 2^p \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right| \\ &= 2^p \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right| \\ &\le 2^p \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, |x_j - y_j| \\ &\le 2^p (\max_{1\le i\le n} |x_j - y_j|) \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, d_\infty(x, y) \\ &\le \alpha d_\infty(x, y). \end{aligned}$$

On obtient d'abord que T est une application de contraction. Et avec la théorème 2.1 le système d'équation linéaire (2.6) a une solution unique. ■

2.4 Une application aux système d'équations intégrales

Théorème 2.6 *Soit* $X = C([a,b], \mathbb{R}^n)$, $a > 0$ *et* $d : X \times X \to X$ *est défini comme suit :*

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|^p, \quad p > 1$$

considérer les équations intégrales d'Urysohn

$$x(t) = \int_a^b K_1(t,s,x(s)\,ds + g(t), \tag{2.7}$$

$$y(t) = \int_a^b K_2(t,s,y(s)\,ds + h(t), \tag{2.8}$$

où $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, $x, g, h \in X$.
Supposons que $K_1, K_2 : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont tels que $F_x, G_y \in X$ pour chaque $x, y \in X$, où

$$F_x = \int_a^b K_1(t,s,x(s)\,ds, \qquad G_y = \int_a^b K_2(t,s,y(s)\,ds \quad \text{pour chaque } t \in [a,b].$$

S'il existe des réels non négatifs λ, μ avec $\lambda + \mu < 1$ tel que pour chaque $x, y \in X$

$$|F_x(t) - G_y + g(t) - h(t)| \leq \lambda A(x,y)(t) + \mu B(x,y)(t),$$

pour tous $x, y \in X$, où

$$A(x,y)(t) = |(x)(t) - (y)(t)|,$$

$$B(x,y)(t) = \frac{|F_x(t) + g(t) - x(t)|\,|G_y(t) + h(t) - (y)(t)|}{1 + d(x,y)},$$

alors le Systéme d'équation intégrale (2.7) et (2.8) avoir une solution commune unique.
Preuve. définir $S, T : X \to X$ par

$$Sx = F_x + g, \qquad Ty = G_y + h,$$

puis

$$d(Sx, Ty) = \sup_{t \in [a,b]} |F_x(t) - G_y(t) + g(t) - h(t)|,$$

$$d(x, Sx) = \sup_{t \in [a,b]} |F_x(t) + g(t) - x(t)|,$$

et

$$d(y, Ty) = \sup_{t \in [a,b]} |G_y(t) + h(t) - y(t)|,$$

on voit facilement que

$$d(Sx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + \frac{\mu d(x, Sx)\, d(y, Ty)}{1 + d(x, y)},$$

Pour chaque $x, y \in X$, par théoréme 2.4, l'équation intégrale d'Urysohn (2.7) et (2.8) posséde une solution commune unique. ■

Chapitre 3

Théorème de point fixe commun dans l'éspace b-métrique utilisant la contraction de Pata

3.1 Introduction

Il existe des centaines des recherches traitant la généralisation du principe de base de la contraction de Banach. Grosso modo, ils suivent deux lignes d'investigation.
La première ligne concerne les généralisations de la condition de contraction. On mentionne ici les travaux de Cirié (voir exemple [15], [16]). Un des résultats récents intéressants de ce genre a été obtenu par V.Pata dans [37]. Plusieurs auteurs ont déjà utilisé des conditions de type Pata pour obtenir de nouveaux résultats de point fixe (exepmle, [6], [12], [20], [28], [29], [30]).
L'autre ligne d'investigation traite de diverses généralisations d'espaces métriques et des résultats qui peuvent être obtenus dans de nouveaux cadres. Parmi des dizaines de telles généralisations, on cite ce qui suit. L'espace b-métrique ont d'abord été étudiés par I. A. Bakhtin en 1989 [5], et S. Czerwik en 1993[17], Il existe une vaste littérature concernant ce type d'espaces, on mentionne seulement quelques uns [[1], [2], [4], [21], [22], [23], [32], [33],[34], [35], [38],[41], [43]].
Dans ce chapitre, on obtient des résultats de point fixe (commun) pour les applications dans l'espace b-métrique avec les conditions de type Pata. En particulier, on montre que les résultats d'article [6], peuvent être obtenus comme des conséquences de résultats plus généraux et de manière beaucoup plus courte.

3.2 Résultats principaux

Théorème 3.1 *Soit (X, d) un espace b-métrique complet avec $s \geq 1$ et. Supposons que pour certains $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \in [0, \alpha]$ des constants fixes et $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ une fonction croissante, disparaissant avec continuité à 0. si $f : X \to X$ une application*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy)\} \\ &+\Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + \|x\| + \|y\| + \|fx\| + \|fy\|\right]^{\beta}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour tous $x, y \in X$ et $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors f à un point fixe unique .

Preuve. L'existence de z :

A partir de x_0, on définie la suite $\{x_n\}$ comme suit

$$x_n = fx_{n-1} = f^n x_0$$

et

$$c_n = \|x_n\| = d(x_n, x_0).$$

Premièrement, on a la suite $d(x_{n+1}, x_n)$ est non-croissant, alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq \ \dots \ \leq d(x_1, x_0), \tag{3.2}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

En effet, on pose $\varepsilon = 0$, $x = x_n$, $y = x_{n-1}$ dans (3.1), on obtient (3.2).

La suite $\{c_n\}$ est bornée.

En utilisant (3.2), on déduit l'estimation suivante

$$\begin{aligned} c_n &= d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_1) + 2c_1 = d(fx_n, fx_0) + 2c_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit de (3.1) on trouve

$$\begin{aligned} c_n &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\{d(x_n, x_0), d(x_n, fx_n), d(x_0, fx_0)\} \\ &+\Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + \|x_n\| + \|x_0\| + \|fx_n\| + \|fx_0\|\right]^{\beta} + 2c_1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} c_n &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\{d(x_n, x_0), d(x_n, x_{n+1}), d(x_0, x_1)\} \\ &+\Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + \|x_n\| + \|x_0\| + \|x_{n+1}\| + \|x_1\|\right]^{\beta} + 2c_1, \end{aligned}$$

ensuite on obtient

$$c_n \leq \frac{1-\varepsilon}{s} d(x_n, x_0) + \Lambda \varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) \left[1 + \|x_n\| + \|x_0\| + \|x_{n+1}\| + \| x_1\|\right]^\beta + 2c_1.$$

En utilisant $d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1)$, $d(x_{n+1}, x_0) \leq d(x_n, x_0)$ et (3.2), comme $\beta \leq \alpha$, l'inégalité précédente implique que

$$c_n \leq \frac{1-\varepsilon}{s} c_n + \Lambda \varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) \left[1 + c_0 + 2c_n + 2c_1\right]^\alpha + 2c_1,$$

maintenant

$$\left[1 + c_0 + 2c_n + 2c_1\right]^\alpha \leq (1 + 2c_n)^\alpha (1 + 2c_1)^\alpha + c_0^\alpha \leq 2^\alpha c_n^\alpha (1 + 2c_1)^\alpha + c_0^\alpha,$$

ce qui implique que

$$c_n \leq \frac{1-\varepsilon}{s} c_n + a\varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) c_n^\alpha + b,$$

pour certains $a, b > 0$, alors

$$\varepsilon c_n \leq a\varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) c_n^\alpha + b.$$

Maintenant, pour la même raison que dans [37], il s'ensuit que la suite $\{c_n\}$ est bornée. $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$. Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ et pour $x = x_n$, $y = x_{n-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(fx_n, fx_{n-1}) \leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\right\} \\ &\quad + \Lambda \varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) \left[1 + 2\|x_n\| + \|x_{n-1}\| + \|x_{n+1}\|\right]^\beta, \end{aligned}$$

donc

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1-\varepsilon}{s} d(x_n, x_{n-1}) + K\varepsilon\psi(\varepsilon), \qquad K > 0$$

Si $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = d^* > 0$, alors

$$d^* \leq \frac{1-\varepsilon}{s} d^* + K\varepsilon\psi(\varepsilon), \quad K \geq 0$$

$$\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{s}\right) d^* \leq K\varepsilon\psi(\varepsilon), \quad K \geq 0$$

ce qui implique que

$$d^* \leq K\varepsilon\psi(\varepsilon), \quad K \geq 0$$

$\forall \varepsilon \in [0, 1]$, alors on trouve $d^* \leq 0$, ce qui contredit avec la définition de la distance alors $d^* = 0$. la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy. Si ce n'est pas le cas, on choisi $\delta > 0$, $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ comme dans lemma 1.1. On pose $x = x_{2m(k)-1}$, $y = x_{2n(k)}$ dans (3.1), on obtient

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) \leq \frac{1-\varepsilon}{s} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) + K\varepsilon\psi(\varepsilon) \tag{3.3}$$

où $d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \to \delta$, $d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) \to \delta$. Lorsque $k \to \infty$ dans (3.3), on obtient $\delta \leq K\psi(\varepsilon)$,
ce qui implique que $\delta = 0$, une contraduction.
On prend (X, d) est complet, nous pouvons maintenant l'existence de $z \in X$ auquel $\{x_n\}$ converge.
Enfin, tout ce qui reste à montrer est :
z est un point fixe de f. Pour cela, nous observons que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et pour $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} d(fz, z) &\leq d(fz, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, z) = d(fz, fx_n) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \frac{1}{s} d(fz, z), \end{aligned}$$

alors

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right) d(fz, z) \leq 0,$$

donc on trouve

$$d(fz, z) \leq 0,$$

ce qui contredit avec la définition de la distance alors $d(fz, z) = 0$, ce qui implique que $fz = z$, d'où le résultat.

L' unicité :

Pour $u, v \in X$, deux points fixes, on écrit (3.1) à la forme suivant

$$\begin{aligned} d(fu, fv) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\{d(u, v), d(u, fu), d(v, fv)\} \\ &\quad + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + \|u\| + \|v\| + \|fu\| + \|fv\|\right]^{\beta}, \end{aligned}$$

si $fu = u$ et $fv = v$ alors on trouve

$$d(u, v) \leq \frac{1-\varepsilon}{s} d(u, v) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + 2\|u\| + 2\|v\|\right]^{\beta},$$

$$\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{s}\right) d(u, v) \leq \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + 2\|u\| + 2\|v\|\right]^{\beta},$$

donc

$$d(u, v) \leq K\psi(\varepsilon),$$

pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, ce qui implique que

$$d(u, v) = 0.$$

■

Soit (X, d) un espace b-métrique et $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ une fonction croissante et continue à 0 avec $\psi(0) = 0$.

Théorème 3.2 *[37]Soit (X,d) un espace b-métrique complet avec $s\geq 1$ et $f,g:X\to X$ deux applications tel que $fX\subset gX$. Supposons que pour certains $\Lambda\geq 0$, $\alpha\geq 1$, $\beta\in[0,\alpha]$:*

$$\begin{aligned} d(fx,gy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s}\max\left\{\frac{d(gx,gy)}{2s},d(gx,fx),d(gy,fy)\right\} \\ &+\Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1+\|gx\|+\|gy\|+\|fx\|+\|fy\|\right]^{\beta}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pour tous $x,y\in X$ et $\varepsilon\in[0,1]$. Alors f et g ont un point de coincidence unique. De plus, si f et g sont faiblement compatibles alors ils ont un point fixe commun unique.

Preuve. Soit $x_0\in X$ arbitraire, formons une suite de Jungck $\{y_n\}$ par $y_n=fx_n=gx_{n+1}$ (c'est possible si $fX\subset gX$). Si $y_n=y_{n+1}$ pour un certain n, il n'ya rien à prouver. Par conséquent, supposons donc que $y_n\neq y_{n+1}$ pour chaque $n\in\mathbb{N}_0$.

Étape 1 :

On pose $\varepsilon=0$ dans (3.4) on obtient

$$\begin{aligned} d(y_n,y_{n+1}) &= d(fx_n,fx_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{s}\max\left\{\frac{d(y_{n-1},y_n)}{2s},d(y_{n-1},y_n),d(y_n,y_{n+1})\right\} \\ &\leq \frac{1}{s}d(y_{n-1},y_n), \end{aligned} \tag{3.5}$$

pour chaque $n\in\mathbb{N}$. il s'ensuit que $d(y_n,y_{n+1})$ est une suite strictement décroissante, tendant vers 0 lorsque $n\to\infty$.

Étape 2 :

Il s'agit de preuver par induction que la suite $c_n=d(y_n,y_0)$ est bornée par $2sc_1$.

L'assertion est valable pour $n=1$ et $n=2$. Supposons que $c_n\leq 2sc_1$ pour certains $n\in\mathbb{N}$.

Ensuite, Il suffit de montrer que $c_{n+1}\leq 2sc_1$.

Alors, en prenant $\varepsilon=0$, il vient

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(y_{n+1},y_0)\leq s(d(y_{n+1},y_1)+d(y_1,y_0)) \\ &= s(d(fx_{n+1},fx_1)+d(y_1,y_0)) \\ &\leq s\left(\frac{1}{s}\max\left\{\frac{d(gx_{n+1},gx_1)}{2s},d(gx_{n+1},fx_{n+1}),d(gx_1,fx_1)\right\}+d(y_1,y_0)\right) \\ &= \max\left\{\frac{d(y_n,y_0)}{2s},d(y_n,y_{n+1}),d(y_0,y_1)\right\}+sd(y_1,y_0) \\ &= d(y_0,y_1)+sd(y_1,y_0) \\ &= (1+s)\,c_1\leq 2sc_1, \end{aligned}$$

puisique $\frac{d(y_n,y_0)}{2s}$ et $d(y_n,y_{n+1})$ ne sont pas plus grands que $d(y_0,y_1)$. Cela termine la preuve inductive.

Étape 3 :

Afin de prouver que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, supposons le contraire.

En utilisant [[41], lemme1.7] (remplacé ε par δ), on obtient qu'il existe $\delta > 0$ et deux suites $\{n(k)\}$ et $\{m(k)\}$ des entiers positifs tels que $n(k) > m(k) > k$,

$$d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) \geq \delta, \quad d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) < \delta,$$

et

$$\frac{\delta}{s} \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}), \tag{3.6}$$

remplacer $x = x_{m(k)+1}$, $y = x_{n(k)}$,dans la condition (3.4) on trouve

$$d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}) \leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})}{2s}, d(y_{m(k)}, y_{m(k)+1}), d(y_{n(k)-1}, y_{n(k)})\right\} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon),$$

pour une constante K, puisque la suite $\{y_n\}$ est bornée, passant à la limite supérieure, et en utilisant (3.6), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{s} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}) \\
&\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})}{2s}, 0, 0\right\} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \\
&\leq \frac{1-\varepsilon}{s}\frac{\delta}{2s} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon),
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\delta}{s} \leq \frac{1-\varepsilon}{s}\frac{\delta}{2s} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \leq \frac{(1-\varepsilon)\delta}{s} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon). \tag{3.7}$$

Posons $\varepsilon = 0$, on trouve $\delta = 0$, ce qui donne une contradiction.

Par conséquent, $y_n = fx_n = gx_{n+1}$ est une suite de Cauchy, et $gx_n \to gz$, quand $n \to \infty$, pour un certain $z \in X$, on montrera que $fz = gz$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}d(fz, gz) &\leq d(fz, fx_n) + d(fx_n, gz) \\
&\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(gz, gx_n)}{2s}, d(fz, gz), d(gx_n, fx_n)\right\} + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) + d(fx_n, gz),
\end{aligned}$$

s'ensuit que, pour n assez grand.

$$\frac{1}{s}d(fz, gz) \leq \frac{1-\varepsilon}{s}d(fz, gz) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon),$$

et on obtient facilement que $fz = gz$.

L'unicité de point de coincidence vérifie facilement si en prenant $\varepsilon = 0$ dans (3.4).Et que c'est un point fixe commun de f et g (voir exp [27]).

Soit z' un autre point fixe de f et g

$$\begin{aligned} d(fz, fz') &\leq \frac{1}{s}\max\left\{\frac{d(gz,gz')}{2s}, d(fz,gz), d(gz',fz')\right\} \\ &\Rightarrow d(fz,fz') \leq \frac{1}{2s^2} d(gz,fz'), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d(z,z') &\leq \frac{1}{2s^2} d(z,z') \\ &\Rightarrow (1-\frac{1}{2s^2})d(z,z') \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit avec la définition de la distance alors $d(z,z') = 0, \Rightarrow z = z'$. ■

En mettant $g = i_X$ dans le théoréme précédent, on obtient

Corollaire 3.1 *Soit (X,d) un espace b- métrique complet avec $s \geq 1$ et soit $f : X \to X$ une application, supposons que pour certains $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1, \beta \in [0,\alpha]$:*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s}\max\left\{\frac{d(x,y)}{2s}, d(x,fx), d(y,fy)\right\} \\ &\quad +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1+\|x\|+\|y\|+\|fx\|+\|fy\|\right]^{\beta} \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour $x, y \in X$ et $\varepsilon \in [0,1]$. Alors f a un point fixe unique.

Théorème 3.3 *Soit (X,d) un espace b- métrique complet avec $s \geq 1$ et soit $f : X \to X$ une application tel que $fX \subset gX$, supposons que pour certains $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1, \beta \in [0,\alpha]$:*

$$d(fx, fy) \leq \frac{1-\varepsilon}{2s} d(gx, gy) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1+\|gx\|+\|gy\|\right]^{\beta} \tag{3.9}$$

pour tous $x, y \in X$ et $\varepsilon \in [0,1]$. Alors f et g ont un point de coincidence unique. De plus, si f et g sont faiblement compatibles alors ils ont un point fixe commun unique.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ arbitraire, formons une suite de Jungck $\{y_n\}$ par $y_n = fx_n = gx_{n+1}$ (c' est possible si $fX \subset gX$). Si $y_n = y_{n+1}$ pour un certain n, il n'ya rien à prouver. Par conséquent, supposons donc que $y_n \neq y_{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$.

Étape 1 :

On pose $\varepsilon = 0$ dans (3.9) on obtient

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &= d(fx_n, fx_{n+1}) \\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{2s} d(y_{n-1}, y_n). \end{aligned}$$

Étape 2 :

Il s'agit de preuver par induction que la suite $c_n = d(y_n, y_0)$ est bornée par $2sc_1$.
Ensuite, ll suffit de montrer que $c_{n+1} \leq 2sc_1$.
Alors, en prenant $\varepsilon = 0$, il vient

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(y_{n+1}, y_0) \leq s(d(y_{n+1}, y_1) + d(y_1, y_0)) \\ &= s(d(fx_{n+1}, fx_1) + d(y_1, y_0)) \\ &\leq s(\frac{1}{2s}d(gx_{n+1}, gx_1) + d(y_1, y_0)) \\ &= \frac{1}{2}d(y_n, y_0) + sd(y_1, y_0) \\ &\leq sc_1 + sc_1 = 2sc_1 \end{aligned}$$

Étape 3 :

Afin de prouver que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, supposons le contraire.
En utilisant [[41], lemme1.7] (remplacé ε par δ), on obtient qu'il existe $\delta > 0$ et deux suites $\{n(k)\}$ et $\{m(k)\}$ des entiers positifs tels que $n(k) > m(k) > k$,

$$d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) \geq \delta, \quad d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) < \delta,$$

et

$$\frac{\delta}{2s} \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}). \tag{3.10}$$

Remplacer $x = x_{m(k)+1}$, $y = x_{n(k)}$, dans la condition (3.9) on trouve

$$d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}) \leq \frac{1-\varepsilon}{2s}d(y_{m(k)}, (y_{n(k)-1}) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon),$$

pour une constante K, puisque la suite $\{y_n\}$ est bornée, passant à la limite supérieure, et en utilisant (3.10), on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2s} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}) \\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{2s}d(y_{m(k)}, (y_{n(k)-1}) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon), \\ &\leq \frac{(1-\varepsilon)\delta}{2s} + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon = 0$, on trouve $\delta = 0$, ce qui donne une contradiction
Par conséquent, $y_n = fx_n = gx_{n+1}$ est une suite de Cauchy, et $gx_n \to gz$, quand $n \to \infty$, pour un certain $z \in X$, on montrera que $fz = gz$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s}d(fz, gz) &\leq d(fz, fx_n) + d(fx_n, gz) \\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{2s}d(gz, gx_n) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) + d(fx_n, gz), \end{aligned}$$

s'ensuit que, pour n assez grand.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2s}d(fz,gz) &\leq \frac{1-\varepsilon}{2s}d(gz,gz)+K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)+d(fz,gz)\\ &\leq K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)+d(fz,gz).\end{aligned}$$

Et on obtient facilement que $fz = gz$.
l'unicitié :
Si en prenant $\varepsilon = 0$ dans (3.9)
soit z^* un autre point fixe de f et g, et prenant $\varepsilon = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}d(fz,fz^*) &\leq \frac{1}{2s}d(gz,gz^*)\\ &\Rightarrow d(z,z^*)\leq \frac{1}{2s}d(z,z^*)\\ &\Rightarrow (1-\frac{1}{2s})d(z,z^*)\leq 0\end{aligned}$$

Donc on obtient la contadiction $d(z, z^*) \leq 0$
Alors $d(z, z^*) = 0 \Rightarrow z = z^*$. ■

3.3 Exemple

Soit (X, d) l'espace b-métrique de l'exemple 1.7 (où la b-métrique d n'est pas continue). Considérons l'application suivante $f : X \to X$.

$$fx = \begin{cases} 100, & x \leq 100, \\ 4, & \text{sinon} \end{cases}$$

et laissez-nous vérifier la condition de contraction (3.8). Le seul cas non trivial est quand $x \in \{1, 2, ..., 100\}$ et $y \in \{101, 102, ..., \infty\}$. Alors

$$d(fx,fy) = d(100,4) = \left|\frac{1}{100}-\frac{1}{4}\right| = \frac{24}{100},$$

et il suffit de vérifier cette inégalité

$$\frac{24}{100} \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{5}\max\left\{\frac{d(x,y)}{5}, d(x,100), d(y,4)\right\}+\varepsilon^2,$$

(qui est la condition (3.8) avec $\Lambda = 1$, $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$). On a

$$\max\frac{d(x,y)}{5} = \max\begin{cases}\frac{1}{5}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|, & x \text{ et } y \text{ sont pairs ou l'un est pair et l'autre est } \infty,\\ \frac{1}{5}.5, & x \text{ et } y \text{ sont impairs ou l'un est impair et l'autre est } \infty,\\ \frac{1}{5}.2, & \text{sinon}\end{cases} \leq 1,$$

$$\max d(x,100)=\begin{cases}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{100}\right|, & \text{si } x \text{ est pair}\\ 2, & \text{si } x \text{ est impair}\end{cases} \leq 2,$$

$$\max d(y,4)=\begin{cases}\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{4}\right|, & \text{si } \ y \text{ est pair ou } \infty,\\ 2, & \text{si } \ y \text{ est impair ou } \infty\end{cases} \leq 2.$$

Par conséquent, on montre que

$$\frac{24}{100}\leq\frac{2(1-\varepsilon)}{5}.2+\varepsilon^2,$$

qui est rempli pour chaque $\varepsilon\in\mathbb{R}$, Surtout pour $\varepsilon\in[0,1]$.Alors f a un point fixe unique.

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse aux théorème de point fixe commun dans l'espace b-métrique avec différentes conditions et propriétés pour éclairer le concept de point fixe avec plusieurs applications et ensuite pour établir l'existence et l'unicité de point fixe commun.
Où, après d'analyse profonde dans l'espace b-métrique qui généralise l'espase métrique usuelle, on a pu parvenir à ces résultats :
1. Obtenir des théorèmes de point fixe pour des applications de contraction dans l'espace b-métrique complet.
2. Obtenir des théorèmes de point fixe commun utilisant la contraction rationnelle dans l'esapce b-métrique complet et application au système d'équations linéaires et aussi d'équations intégrales.
3. Obtenir des théorèmes de point fixe commun pour deux applications faiblement compatibles dans l'esapce b-métrique complet en utilisant la contraction de Pata.
On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns :
Théorèmes du point fixe commun pour des applications faiblement compatibles dans l'esapce b-métrique complet avec les différents conditions contractives.

Bibliographie

[1] A. **A**ghajani, M. Abbas, J. R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, Math. Slovaca, 64 (2014), 941-960.1.

[2] A. **A**mini-Harandi, Fixed point theory for quasi-contraction maps in b-metric spaces, Fixed Point Theory, 15 (2014), 351-358.1.

[3] **A**ydi et al., A fixed point theorem for set valued quasicontractions in b-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012 2012 :88.

[4] **A**. Azam, N. Mehmood, J. Ahmad, S. Radenovi c, Multivalued xed point theorems in cone b-metric spaces, J. Inequal. Appl., 2103 (2013), 9 pages.1

[5] I.A. **B**akhtin, The contraction mapping principle in quasi-metric spaces, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst. 30 (1989), 26-37.

[6] S. **B**alasubramanian, A Pata-type fixed point theorem, Math. Sci., 8 (2014), 65-69.1, 3.3, 4.

[7] **B**anach S., sur les operations dans les ensembles abstraites et leurs applications, Fund. Math. 3(1922), 133-181.

[8] V.,**B**erinde, Iterative Approximation of Fixed points, Springer, (2006).

[9] **B**erinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, (2006).

[10] **B**oriceanu, M., Fixed Point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics, studia Univ Babes, Bolya : Math. LIV (3) (2009), 1-14.

[11] **B**ourbaki, N. Topologie Generale ; Herman : Paris, France, 1974.

[12] M. **C**hakraborty, S. K. Samanta, A fixed point theorem for Kannan-type maps in metric spaces, arXiv, (2012), 7.

[13] **C**hatterjea, S. K, Fixed point theorems, C.R. Acad. Bulgare Sci. 25, 1972, 727-730.

[14] **C**houdhury, B. S., Unique fixed point theorem for weakly ccontractive mappings, Kathmandu Univ. J. Sci, Eng and Tech, 5 (1),2009, 6-13.

[15] L. B. **C**irié, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267-273.1, 4.

[16] L. B. **C**irié, Some Recent Results in Metrical Fixed Point Theory, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Belgrade, (2003).1.

[17] S. **C**zerwik, Non-linear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. Atti Sem Math Fig Univ Modena, 46(2), (1998), 263-276.

[18] S. **C**zerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inf. Univ. Ostrav., 1 (1993), 5-1.1, 2.2.

[19] **C**zerwik, S., Nonlinear set-valued contration mappings in b-metric spaces, Atti Sem Math Fis Univ Modena. 46(2), (1998), 263-276.

[20] M. **E**shaghi, S. Mohseni, M. R. Delavar, M. De La Sen, G. H. Kim, A. Arian, Pata contractions and coupled type fixed points, Fixed Point Theory Appl., 2014 (2014), 10 pages.1.

[21] N. **H**ussain, D. -Dori c, Z. Kadelburg, S. Radenovi c, Suzuki-type xed point results in metric type spaces, Fixed Point Theory Appl., 2012 (2012), 12 pages.1, 2.5.

[22] N. **H**ussain, V. Parvaneh, J. R. Roshan, Z. Kadelburg, Fixed points of cyclic (; ' ; L ; A ;B)-contractive mappings in ordered b-metric spaces with applications, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013), 18 pages.1, 2.5, 2.6.

[23] M. **J**ovanovi c, Z. Kadelburg, S. Radenovi c, Common xed point results in metric type spaces, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), 15 pages.1

[24] G. **J**ungck, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. Math. Sci., 9 (1986), 771-779.

[25] G. **J**ungck, Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83 (4) (1976), 261-263.

[26] G. **J**ungck and B. E. Rhoades, Fixed point for set valued functions without continuity, Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998), 227-238.

[27] G. **J**ungck, Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces, Far East J. Math. Sci., 4 (1996), 199–215.3.

[28] Z. **K**adelburg, S. Radenovi c, Fixed point and tripled xed point theorems under Pata-type conditions in ordered metric space, Intern. J. Anal. Appl., 6 (2014), 113-122.1.

[29] Z. **K**adelburg, S. Radenovi c, Fixed point theorems for Pata-type maps in metric spaces, J. Egypt. Math.Soc., (in press). 1, 4.

[30] Z. **K**adelburg, S. Radenovi c, A note on Pata-type cyclic contractions, Sarajevo J. Math., (in press). 1.

[31] **K**annan, R, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 1968, 71-76.

[32] E. **K**arapinar, Wei-Shih Du, A note on b-cone metric and its related results : Generalizations or equivalence ?, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013), 7 pages.1.

[33] M. A. **K**hamsi, Remarks on cone metric spaces and xed point theorems of contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), 7 pages.1, 2.4, 2.13.

[34] M. A. **K**hamsi, N. Hussain, KKM mappings in metric type spaces, Nonlinear Anal., 73 (2010), 3123-3129.1.

[35] P. **K**umam, N. V. Dung, V. T. Le Hang, Some equivalences between cone b-metric spaces and b-metric spaces, Abstract Appl. Anal., 2013 (2013), 8 pages.1, 2.5.

[36] **M**ehmet Kir, Hiikmi kiziltunc ; On some well known fixed point theorems in b-metric spaces, Turkish Journal of Analysis and Number theory, 2013, Vol.1, No.1, 13-16.

[37] V. **P**ata, A fixed point theorem in metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 10 (2011), 299{305.1, 2.1, 4.

[38] B. **P**opovi c, S. Radenovi c, S. Shukla, Fixed point results to tvs-cone b-metric spaces, Gulf J. Math., 1 (2013), 51-64.1.

[39] S. **R**adenovi c, Z. Kadelburg, Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces, Banach J. Math. Anal.5 (2011), 38{50.2.4, 2.13.

[40] S. **R**adenovic´ , Z. Kadelburg, D. Jandrlic´ , A. Jandrlic´ , Some results on weakly contractive maps, Bull. Iranian Math. Soc. 38(3) (2012) 625–645.

[41] J. **R**. Roshan, V. Parvaneh, Z. Kadelburg, Common xed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 7 (2014), 229-245.1, 3.

[42] S. **S**essa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. Beograd 32 (46) (1982), 149-153.

[43] T. **V**an An, N. Van Dung, Z. Kadelburg, S. Radenovi c, Various generalizations of metric spaces and xed point theorems, Rev. Real Acad. Cienc. Exac., Fis. Nat., Ser. A, Math., 109 (2015), 175-198.1