République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Univérsité Larbi Tébessi -Tebessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : mathématique

Option : Equation aux Dérivées Partielles et applications

Thème

Modèles épidémiologiques et fonctions de Lyapunov

Présenté Par :

.Bouzghaia Mebarkha.

.Nasri Sendes.

Devant le jury :

Degaichia Hakima	MCA	Univérsité Larbi Tébessi -Tebessa	Président
Boughrara Elyazid	MAA	Univérsité Larbi Tébessi -Tebessa	Examinateur
Mezhoud Rachida	MAA	Univérsité Larbi Tébessi -Tebessa	Encadreur

Date de soutenance : 18/06/2019

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la dynamique d'un modèle d'épidémie avec diffusion en utilisant des techniques de Lyapunov, nous établissons la stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre endémique

Les mots clés : **HIV/SIDA ;Attracteur Globale ; Principe de maximum ; Function Lyapunov ; stabilité**

Abstract

The purpose of this work is to study the dynamics of an epidemic model with diffusion by using Lyapunov technique we establish the local and global stability of the disease free equilibrium and the endemic equilibrium

Keywords: **HIV/AIDS ;Global attractor ; Maximum principale ; Liapunov function ; stability**

ملخص

الغرض من هذا العمل هو دراسة ديناميات النموذج الوبائي مع الانتشار باستخدام تقنية Lyapunov التي نؤسسها للاستقرار المحلي والعالمي للتوازن الخالي من الأمراض والتوازن المستوطن

الكلمات المفتاحية: **.تابع ليوبونف,الاستقرار الكلي, الاستقرار المحلي ,الايدز**

Remerciments

Nous remercions avant tous ALLAH de nous avoir donné la force et le courage pour réaliser ce travail
Prière et salut sur notre prophète MOHAMED
Nous tenons à remercier très fort respectable enseignant et encadreur Mezhoud Rachida pour son soutien et encouragement
Nous remercions Dr.Deghaichia Hakima et Mr. Boughrara El Yazid accepté avec gentilles d'examiner notre travail
Aussi nous remercions par cette occasion toutes les enseignants du Département des mathématique et informatique sans oublier notre amies de la 2 éme année master math, promotion 2018-2019
Et à tout ce qui nous a encouragés d'un simple mot, sourire ou une prière de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Liste des figures

....

Liste des tableaux

....

Table des matières

Notation

Δ : La placian dans $\mathbb{R}^m$

$\frac{\partial}{\partial \eta}$: la dérivée normale vers l'exterieur à $\partial \Omega$

$L(t)$: la fonction de lyapunov

Ω : le domaine overt de $\mathbb{R}^m$

$\|f\|$: la norme de f

$\partial \Omega$: la frontiére

$\bar{\Omega}$:la dhérense

$\det(\jmath)$:detérminant de matrice jacobienne

tr : la trace de matrice jacobienne

$\mathbb{R}^m$: L'ensemble des réels de dimensions m.

lim :La limite

∇f :Le gradient de f.

min :Le minimum

max :Le maximum.

0.1

Introduction générale

Pour contrôler la maladie, des modèles d'épidémie mathématiques ont été introduits pour obtenir des informations sur la maladie chez certaines populations.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à certaines équations d'évolution dans le temps et dans l'espace d'une épidémie dans une populations d'invidus divisée en deux groupes.

Le mémoire est divisé en trois parties on expose dans la premiére partie les notions de base pour étudier le probléme (4) .

Dans la seconde partie on donne un aperçu general sur les maladies infectieux que seront étudiées en regardant des modèles simples.

La partie essentielle du mémoire se trouve dans le chapitre (3) dans lequel on à détaillé le travail de Yoshihiro Hamaya [12]

nous établissons l'existence globale et la limite des solutions d'un certain système de diffusion de réaction avec des conditions aux limites de Neumann homogène. En outre, nous donnons un résultat sur le comportement asymptotique des solutions.

Notre approche est basée sur un lyapunov fonctionnel.

nous étudions la stabilité globale et donnons une condition de seuil pour la maladie qui disparaît ou s'étend pour certains modèles épidémiques en fonction du taux de reproduction de base R_0.

Nous montrons que si $R_0 > 1$ le point d'équilibre libre est globalement asymptotiquement stable, et si $R_0 > 1$, ce point d'équilibre libre est instable et le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable.

Enfin, nous étudions la stabilité locale des points d'équilibre libre et endémique, où les taux de recrutement sont supposés être des constantes ou des paramètres variables.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Stabilité de 2×2 systéme

On rappélle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ deux variables et écrit le systéme suivant,

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

coeficient a_{ij} est nembre réelle

$$U = (x, y) \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

le systéme peut être écrit comme

$$UU' = Au.$$

Si A n'est pas singulier, que nous assumons toujours, le seul équilibre est $(x, y) = (0, 0)$. Nous allons étudier les propriétés qualitatives de la solution de $(1, 1)$, en particulier leur comporetement asymptotique comme $t \to +\infty$ étudier le systéme

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

nous mettons

$$\begin{cases} f(x, y) = x' = a_{11}x + a_{12}y \\ g(x, y) = y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

nous avons trouvé le point d'équilibre (x^*, y^*) telque

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = (0,0), \\ g(x^*, y^*) = (0,0), \end{cases}$$

alors la matrice jacobiénne$\jmath(x^*, y^*)$ et calculer les valeurs propres

$$\jmath(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la forme normale jordanie d'une matrice non singuliére, avec la propriété qu'il éxiste une matrice inversible B

telleque

$$BA = \jmath B$$

.

La matrice jordan j'existe et a les mêmes valeurs propres λ_1, λ_2 comme A. En outre si λ_1, λ_2 est nombre réel, puis, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

alors

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

si

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

alors

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

où

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

si les valeurs propres sont compléxes

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

puis

$$\jmath = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

alors

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

où

$$\jmath = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Si les valeurs propres sont compléxes

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

puis

$$\jmath = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

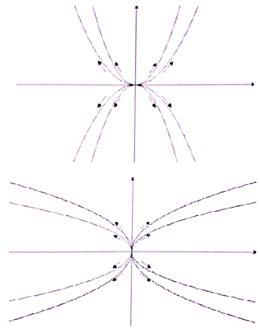
1.1.1 cas des système dynamique continues

Définition 1.1 *Si les valeurs propres* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont réelles et de même signe,la solution* $x = 0$ *est appelée noeud.*

Donc λ, μ *réels distincts et* $\lambda, \mu > 0$ *. Noeud asymptotiquement instable*

si $\lambda + \mu < 0$.

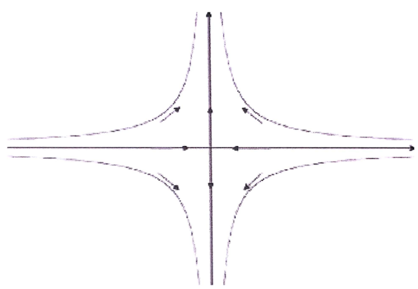
Toutes les trajectoires (sauf une) ont une direction limite commune "à l'origine"



Définition 1.2 *Si les valeurs propres* $\lambda_{1,...,}\lambda_n$ *sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution* $x = 0$ *est appelée selle.*

Donc $\lambda, \ \mu$ *réels distincts et* $\lambda, \ \mu < 0$ *.*

Point-selle (asymptotiquement instable).



Définition 1.3 *Si les valeurs propres* $\lambda_{1,...,}\lambda_n$ *sont complexes avec*

$$\operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0, \ i = 1, ..., n$$

les solution $x = 0$ *est appelée foyer.*

Donc

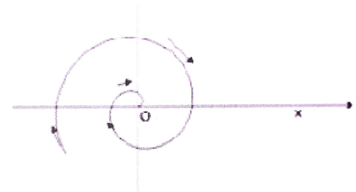
$$\lambda = \alpha + i\beta \ \textit{et} \ \mu = \lambda$$

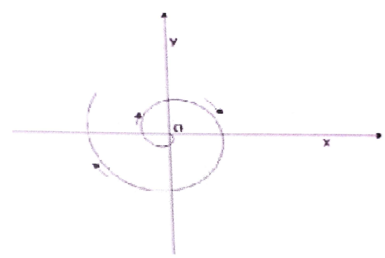
avec α, β *réels,*

$$\alpha \neq 0 \ \textit{et} \ \beta \neq 0$$

.

Foyer (asymptotiquement stable -resp. instable- si $\alpha < 0$ *-resp.* $\alpha > 0$ *).*





Définition 1.4 *Si les valeurs propres* $\lambda_{1,...,}\lambda_n$ *sont complexes avec*

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_i) = 0,\ i = 1, ..., n$$

.

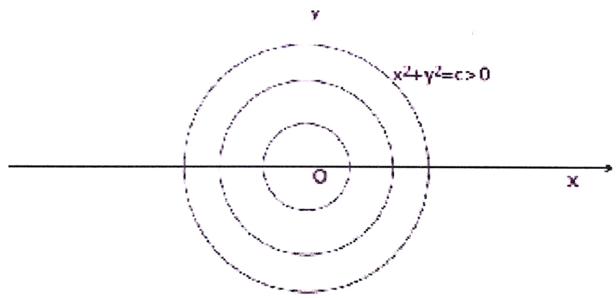
La solution $x = 0$ *est appelée centre.*

Donc

$$\alpha = i\beta \text{ et } \mu = i\beta$$

avec $\beta \neq 0$*. Centre (stable).*

Toutes les trajectoires sont fermées (solution périodique).


y
$x^2+y^2=c>0$
O
x

1.2 Stabilité au sens de Lyapunov

1.2.1 Généralités et définition

Définition 1.5 *(Fonction définie positive) Une fonction scalaire $U(x)$ continûment différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si*

1) $U(0) = 0$;

2) $U(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ / $x \neq 0$.

Si (2) est remplacé par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.6 *On dit que x_0, point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x)$$

est stable (au sens de Lyapunov)

pour tout ouvert U contenent x_0, il existe un ouvert V de conditions initiales, que pour tout $y \in V$ et pour $t \geq 0$, on dit :

$$x(t, y) \in U$$

.

1.2.2 Méthode de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyaponov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire :

si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 1.1 (*Stabilité locale*) *L'état d'équilibre $x_0 = 0$ est stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que*

1) $U(0) = 0$;

2)$U(x) > 0\ \forall x \neq 0;\ x \in \Omega;$

3)$\dot{U}(x) \leq 0\ \forall x \neq 0,\ x \in \Omega,$ *où* $\dot{U}$ *est la dérivée de* U *par rapport au temps et* Ω *est une région autour de* 0.

Si de plus (3) *est remplacée par* $U(x) < 0$ *alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable. La fonction* $U(x)$ *est appelée fonction de Lyaponov.*

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyaponov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction.

Une fonction de Lyaponov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre.

L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyaponov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de document.

Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif).

Théorème 1.2 *(Stabilité globale) L'état d'équilibre* x_0 *est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continûment dérivable* $U(x)$ *telle que*

1) $U(0) = 0$ *;*

2)$U(x) > 0\ \forall x \neq 0$ *;*

3)$\dot{U}(x) < 0\ \forall x \neq 0,$

$$\dot{U} \to \infty \text{ quand } \|x\| \to \infty.$$

1.2.3 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t),\ x \in \mathbb{R}^n$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positive, soit

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0,\ i = 1, ..., n.$$

Théorème 1.3 *(Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires)*

Le système linéaire.

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q, il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyaponov

$$A^T P + PA + Q = 0$$

Définition 1.7 *(Stabilité asymptotique globale)*

Si le système est asymptotiquement stable quelque soit le vecteur d'état initial $x(t = 0)$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable Linéarisation Soit un systéme autonome $\dot{x} = f(x)$ de classe C^1 et un point d'équilibre x_0, on appelle systéme linearisé en x_0 le système linéare $\dot{x} = Df(x_0)x$ oú $Df(x_0)$ est la dérivée de f en x_0.

Théorème 1.4 *(Poincare-Lyapunov) On considére le systéme, $\dot{x} = f(x)$ et x_0 un point d'équilibre.*

1) Si $Df(x_0)$ a toute ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors x_0 est asymptotiquement stable.

2)Si $Df(x_0)$ a (au moins) une valeur propre à partie réelle strictement positive alors x_0 est instable.

Théorème 1.5 *(Routh_Hurwitz Critéres de systémes de deuxiéme order)condition nécessaire et suffisante pour les deux racines du quadratique*

$$\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$$

avoir des réels négatifs sont

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0,$$

si $\alpha_2 = 0$ il y a anegenvalue $\lambda = 0$ tandis que si $\alpha_1 = 0$, et $\alpha_2 > 0$ il y a une paire de lignes d'injuste conjuguées sur le réel axe.il s'ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique de l'état constatif trivial du système linéaire de deuxiéme ordre $(B.2.8)$ sont donnés pare

Théorème 1.6

$$\beta < 0, \ \gamma > 0$$

où

$$\beta = tr\jmath^*, \gamma = \det \jmath^*$$

si l'une ou l'autre des inégalités est strictement violé, il est instable propriétées des racines de

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0$$

. les racines sont stables dans la quadrant de positive a partir de la bifurcation zéro eigenvalue peut avoir lieu si α_1-l'axe (positif) est traversé, et bifurcation Hopf si α_2-l'axe (positif) a été traversé.

Exemple 1.1 *croquis la phase pour le systéme*

$$\dot{U} = V, \ \dot{V} = -U(1-U) + cV$$

oú C est une constante positive les nullculines sond

$$V = 0 \ \ et \ V = U(1-U)/c$$

si $V > 0$, *donc* $\dot{U} > 0$,

si $V < 0$, *donc* $\dot{U} < 0$.

Si $V > U(1-U)/c$ *donc* $\dot{V} > 0$; *et vise versa.les stables sont à* $(0,0)$ *et* $(1,0)$.

La matrice jacobienne est

$$\jmath(U,V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+2U & c \end{pmatrix},$$

à $(0,0)$ *on a*

$$\gamma = \det \jmath^* = 1, \beta = tr\jmath^* = c > 0 \text{ et } \delta = disc\jmath^* = c^2 - 4.$$

Le caractére du point critique dépend de c; pour $c \geq 2$ *c'est un noeud instable alors que pour* $0 < c < 2$, *c'est une focus instable. à* $(1,0)$

on a $\gamma = \det \jmath^* = -1$, *de sorte que le point critique est un point de selle le plan de phase est la band de squeluil.*

Lemme 1.1 *(Barbalat's) supposons*

$$f(t) \in C_1(\alpha, \infty) \text{ et } \lim_{t\to\infty} f(t) = \alpha$$

où $\alpha < \infty$,*si* $\dot{f} - +$ *uniformément continu, puis*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$$

Preuve *nous prouvons le résultat par contradiction supposant*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) \neq 0$$

puis $\exists \epsilon > 0$ *et une séquence croissante monotone* $\{t_n\}$

Preuve *tel que*

$$t_n \to \infty \text{ comme } n \to \infty$$

et $\left|\dot{f}(t)\right| \geq \epsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *puisque* $\dot{f}(t)$ *est uniformément continue,pour* $\epsilon, \exists \delta > 0$

telque $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|t - t_n| < \delta \text{ comme } \left|\dot{f}(t) - f(t_n)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

donc si $t \in [t_n, t_n + \delta]$

puis

$$\begin{aligned} \left|\dot{f}(t)\right| &= \left|\dot{f}(t_n) - (\dot{f}(t_n) - \dot{f}(t))\right| \\ &\geq \left|\dot{f}(t_n)\right| - \left|\dot{f}(t_n) - \dot{f}(t)\right| \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

puis depuit $f(t) \in C_1$ *on a*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t)dt - \int_{\alpha}^{t_n} \dot{f}(t)dt\right| &= \int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t)dt \\ &\geq \int_{t_n}^{t_n+\delta} \left|\dot{f}(t)\right| dt \\ &\geq \int_{t_n}^{t_n+\delta} \frac{\epsilon\delta}{2} > 0,\end{aligned}$$

pourtant

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left|\int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t)dt - \int_{\alpha}^{t_n} \dot{f}(t)dt\right| &= \lim_{t\to\infty} \left|f(t_n+\delta) - f(t)\right| \\ &= \left|\lim_{t\to\infty} f(t_n+\delta)\right| - \lim_{t\to\infty}\left|f(t_n)\right| f(t_n+\delta) - \lim_{t\to\infty}\left|f(t_n)\right| \\ &= \lim_{t\to\infty}\left|f(t_n+\delta)\right| - \lim_{t\to\infty}\left|f(t_n)\right| \\ &= \left|\lim_{t\to\infty} f(t_n+\delta)\right| - \lim_{t\to\infty}\left|f(t_n)\right| \\ &= 0,\end{aligned}$$

c'est la contradiction cet effet

$$\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0.$$

■ ■

Théorème 1.7 *Dans ce chapitre nous cosidérons le système diffusif suivant avec condition limite. Soit* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *convergent presque partout vers une fonction mesurable* f*. On suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \geq 1$*, on ait*

$$|f_n| \leq g \quad p.p \ sur \ \Omega$$

Alors :

$$f \in L^1(\Omega) \ et \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \quad et \int_{\Omega} f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\ dx$$

Définition 1.8 *(Principe de maximum) Considérons le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ sur \ \Omega\times[0,+\infty], \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega\times[0,+\infty], \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ sur \ \Omega \end{cases} \tag{s}$$

Théorème 1.8 *Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et soit u la solution du problème (s),*

alors on a

$$\min\left\{0, \inf_\Omega u_0\right\} \leq u(x,t) \leq \max\left\{0, \sup_\Omega u_0\right\}, \qquad \forall (x,t) \subset \Omega \times [0,+\infty[$$

Définition 1.9 *(fonction lyapunov) Une fonction $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est positive définitif dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ in sur de point $x = x^*$ si*

$$(a)\,\Phi(x^*) = 0 \ \text{et} \ (b)\,\Phi(x) > 0,$$

pour tout $x \in \Omega \backslash \{x^*\}$, une fonction ψ est négative définitif si $-\psi$ est positive définitif pour un système $x^* = f(x)$ et une fonction $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Nous pouvons définir une dérivation la drivation de la fonction long des trajectoitres du système par

$$\dot{\Phi}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) f_i(x).$$

une fonction lyapunov $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pour un système $x^* = f(x)$ est une fonction définitive positive de maniére continue Φ sur Ω dont le dérivé le long trajectoire du système satisfait $\dot{\Phi}(x) \leq 0$ sur Ω si un fonction lyapunov existe pour un système donc x^* est un stable du système.

Si aussi $\dot{\Phi}$ à été négatif définitif, sur Ω donc x^* est globalement asymptotiquement stable sur Ω, c'est toute solution x du système avec un condition initiale sur Ω satisfait

$$x(t) \to x^* \ \text{comme} \ t \to \infty$$

1.2.4 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$. On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, son gradiant est le champ de vecteurs définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u(x) &= \nabla u(x) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right). \end{aligned}$$

Pour un champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de u la fonction définie par

$$\begin{aligned}\operatorname{div} u(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).\end{aligned}$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned}\triangle u(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).\end{aligned}$$

Soit est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière.

On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \Omega$, $v(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.On appelle dérivée normale d'une fonction régulière f sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x).v(x)$$

(produit scalaire du vecteur $\nabla f(x)$ avec le vecteur $v(x)$.

1.2.4.1 Espaces fonctionelle

On definit l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{muserable et} \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f|^p \, dx.$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{mesurable } \exists C \text{ et } |f| \leq C \; pp \text{ sur } \Omega \}.$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\| \, L^{\infty}(\Omega) &= \sup_{x\in\Omega} \text{ ess} \left| f(x) \right| \\ &= \inf \left\{ C;\ |f| \leq C \text{ pp sur } \Omega \right\}. \end{aligned}$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X), 1 \leq p \leq \infty$ commme suite

$$L^p(0,T,X) = \left\{ f : [0,T] \to X \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(0,T,X)} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\begin{cases} \|f\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|f\|^p_X \, dt \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \|f\|^{\infty}_{L^p(0,T,X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ ess } \|f\|_X \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

On définit les espaces $L^p_{log}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ comme suite

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable}\,;\, \exists k \text{ compacte telle que} \int_k |f|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_k |f|^p \, dx.$$

On définit les espaces

$$L^p_{loc}(Q, f(t,x), dtdx), 1 \leq p < \infty$$

comme suite

$$L^p_{loc}(Q, f(t,x), dtdx) = \left\{ f : Q \to \mathbb{R} \backslash \int_k |f|^p \, udtdx < +\infty; \text{pour } k \subset Q \right\}.$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev définit par

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,; 1 \leq i \leq n \right\},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \\ \|f\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|f\|^2_{L^2} + \|f'\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

D'une façon générale pour

$$m \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq p < \infty$$

, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définit comme suite

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \, ; \forall \alpha \in \mathbb{N}^* : |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \, ; \forall \alpha : |\alpha| \leq m \},$$

muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \ \ si \ 1 \leq p < \infty, \\ \\ \max_{x \in \Omega} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \ \ si \ p = \infty. \end{cases}$$

Où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_m} x_m}, |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m.$$

est la dérivée au sens des distributions.$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$C^K(\Omega), K \in \mathbb{N}$, désigne l'espace des fonctions K fois continûment différentiables sur et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

$C^{\mathbb{R}}_{x,t}, k$; $\mathbb{R} \in \mathbb{N}$, désigne l'espace des fonctions $\mathbb{R}$ fois continûment différentiable par rapport à $x$sur Ω et désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable par rapport à t sur Ω.Naturellement on a

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \ \text{ et } H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Théorème 1.9 *D'Otrogradski (où théorème de la divergence)Soit S une surface, frontière d'un domaine de volume V.*

Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur.Alors siA_1, A_2 et A_3sont des fonctions continues dans le domaine ,le théorème de la divergence s'exprime ainsi

$$\int_v \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dv = \int_S A_1 dydz + A_2 dzdx + A_3 dxdy$$

Théorème 1.10 *Sous forme vectorielle avec $f = (A_1, A_2, A_3)$ ceci peut s'écrire simplement*

$$\int_V \nabla.AdV = \int_S A.\eta dS$$

Ce théorème est appelé encore théorème de Green dans l'espace.

(Formule de Green)

Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$,

alors la formule de Green s'écrit

$$\int (\triangle u)\, vdx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

Chapitre 2

Modéles Mathématiques des épidémies

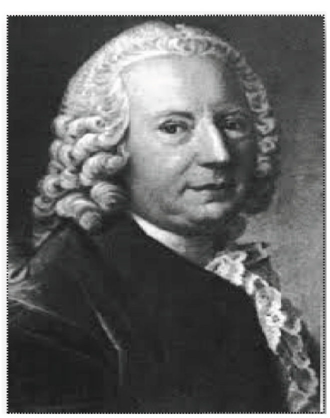
2.1 Introduction

Depuis assez long temps (env.350 ans), les mathématiques sont associées à l'étude et à la lutte contre les maladies infectieuses.

Au cours des derniéres décades, des résultats solides ont été obtenus en épidémiologie mathématiques.

Aujourd'hui la modélisation mathématiques des maladies infectieuses doit de relever de nouveaux défis.

Une histoire qui commence au $18^{éme}$ siécle une exception intéressante est un papier par Daniel Bernoulli.



Daniel Bernoulli, mathématicien et médecin suisse, $1700 - 1782$

Vers 1760, Bernoulli utilise le calcul différentiel dévloppé par Leibnitz et Newton au siècle précédent pour montrer que, malgré ses risques, la vaccination anti-variolique prolonge de 26 ans 7 mois à 29 ans 9 mois l'espérance de vie.

2.2 Les principaux modéles de l'épidémiologie

Dans les modèles l'épidémiologie, la population considérées est subdivisées en compartiments.

·Le compartiment S est celui des individus susceptibles (individus sains, qui peuvent attraper la maladie).

·Le compartiment I est celui des infectés (et infectieux!).

·Le compartiment R est celui des remis, i.e des individus guéris, qui sont immunisés (ou qui sont mort!).

·Dans certains modéles, on peut avoir d'autre compartiments

comme : E.D.M.V. etc

Pour simplifier nous supposerons ici que la taille de la population est constante (ce qui est raisonable si l'épidéme dure un temps relativement court)

On désignera par S_t le nombre de susceptibles à l'instant t, I_t le nombre d'infectés à l'instant t, R_t le nombre de remis à l'instant t, t peut être discret ($t = 0,1,2,3,...$) ou continu ($t \geq 0$)

Les 3 modéles les plus simples sont

Le modéle SIS

Le modéle SIR

Le modéle SIRS

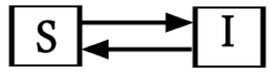
l'hypothèse d'une taille de population constante implique que

Dans le modéle SIS,

$$S_t + I_t = N$$

Dans les modéles SIR et SIRS,

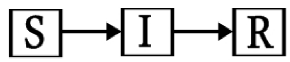
$$S_t + I_t + R_t = N$$



2.2.0.2 Schématiquement

Le modéle SIS : Les susceptibles est devienne infectés et les infectés qui guéri ce qui revient susceptibles et donc on a un cycle

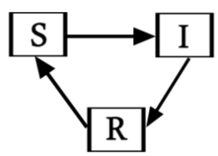
Le modèle SIR :



Les susceptibles devienne infectés et les infectés passe dans la case des remis

soit sont mort ou soit sont vivant mais immunisé donc il ne quite pas cette case R et revient pas en S

Le modéle SIRS :



On a un cycle les susceptibles sont infectés et les infectés sont remis et les remis l'immunité se perte au bout d'un certain temps et donc redevient susceptibles

Chapitre 3

Le comportement asymptotique d'un modéle épidémique diffusif $(AIDS)$

3.1 Introduction

L'étude de la dynamique de la transmission du VIH/SIDA à été d'une grande importance est à la fois mathématiciens appliqués et biologistes en raison de sa menace univereselle a l'humanité.

Les modèles mathématiques sont devenus des outils importants d'analyse la propagation et le contrôle du VIH/SIDA car il fournissent des solutions à court et à long terme

3.2 Modéle du systéme

dans ce chapitre nous considerons le système diffusif suivant avec conditions limites

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = D\triangle S + \Lambda - \lambda CT(t,x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \mu S(t,x), \quad t>0,\ x\in\Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t,x) = D\triangle I + \lambda C(T(t,x))\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I(t,x), \quad t>0,\ x\in\Omega, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t,x) = D\triangle A + \alpha I(t,x) - (d+\mu)A(t,x), \quad t>0,\ x\in\Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}(t,x) = \frac{\partial I}{\partial \eta}(t,x)\frac{\partial A}{\partial \eta} = 0, \quad t>0, \qquad x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$C(T)$: Une fonction croissante de T

$C'(T) \geq 0$, $(d/dT)(C(T)/T) \leq 0$ pour $T>0$ et $C(T(t,x)) \in C^1\left([0,\infty)\times\bar{\Omega},[0,\infty)\right)$

Λ :Les taux de recrutement de susceptibles

λ : Les risque sexuel moyen par partenaire (constante positive)

μ :Taux de mort naturel (non SIDA)

S :Le nombre d'individus susceptible

I : Le nombre d'individus infectieux

T : La populations totale

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \lambda CT\left(t\right)\frac{S(t)W(t)}{T(t,x)} - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda pCT\left(t\right)\frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_I + \mu)I(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} = \lambda\left(1-p\right)C\left(T\left(t\right)\right)\frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_Y + \mu)Y(t),\ t \geq 0, \\ \frac{dA(t)}{dt} = \alpha_I I(t) - (d+\mu)A(t), \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \alpha_Y Y(t) - \mu Z(t), \end{cases} \tag{2}$$

ou $W = I + Y$, et $T = W + S$,qui extension du modèle

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \lambda cS(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = -\lambda cS(t) - \left(\upsilon + \mu\right)I(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = p\upsilon I(t) - \left(d+\mu\right)A(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{dZ(t)}{dt} = (1-p)\upsilon I(t) - \mu Z(t), \end{cases}$$

proposé par Anderson et al. [1] en tant que modèle pour une groupe population d'homosexuel du spread du VIH/SIDA.Sur la main pour type d'équation différentielle partielle Fitzgibbn et Morgon [4] ont montré l'attractivité global de

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}\left(t,x\right) = d_1 S\Delta(t,x) - aS(t,x)I(t,x), t > 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}\left(t,x\right) = d_2\Delta I(t,x) - aS(t,x)I(t,x) - \lambda I\left(t,x\right), \quad t > 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial t}\left(t,x\right) = d_3\Delta R(t,x) + \lambda I(t,x)I(t,x), \quad t > 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}\left(t,x\right) = \frac{\partial I}{\partial \eta}\left(t,x\right) = \frac{\partial R}{\partial \eta}\left(t,x\right) = 0,\ t > 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}\left(t,x\right) = D\triangle S + \Lambda - \lambda CT\left(t,x\right)\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \mu S\left(t,x\right), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}\left(t,x\right) = D\triangle I + \lambda CT\left(t,x\right)\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I\left(t,x\right), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}\left(t,x\right) = \frac{\partial I}{\partial \eta}\left(t,x\right) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Dans le réste de ce document, nous signalons des résultats uniquement pour ce système(3).

Les fonctions $S, I \in C([0,\infty)\times\bar{\Omega}, R$ est appelé une solution classique de eq (3) si $\partial S/\partial t$, $\partial S/\partial x$, $\partial^2 S/\partial x^2$ $\partial^2 I/\partial x^2$ appartenir à l'espace $C([0,\infty)\times\Omega$, $\partial S/\partial\eta$ et $\partial I/\partial\eta$ existe sur $([0,\infty)\times\partial\Omega$ et l'équation (3) est identiquement satisfaite on peut montre que l'éxistence d'une solution est garantie pour l'équation(3) chaque fois que la fonction initiale $(S,0) = S_0(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}$ et $(I,0) = I_0(x) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$ appartenir à l'espace $C^1(\bar{\Omega})$.

le syestème (3) a toujours l'état d'infection libre.

3.3 Modèle système dans le cas ODE

En l'absence de diffusion, le système proposé se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t,x) = \Lambda - \lambda CT(t,x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \mu S(t,x), \quad t>0,\ x\in\Omega \\ \\ \frac{dI}{dt}(t,x) = \lambda CT(t,x)\frac{S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I(t,x), \quad t>0,\ x\in\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Où

$$T = S + I$$

il résulte du système (4)

$$\Lambda - \mu S - \sigma I = 0,$$

donc

$$S = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \tag{*}$$

Alors

$$I_0 = 0 \text{ et } S_0 = \frac{\Lambda}{\mu}$$

donc on a l'équilibre libre des maladies E_0

$$E_0 = (S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$$

Si $I \neq 0$,

$$\lambda CT(t,x)\frac{S(t,x)\,I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I(t,x) = 0$$

donne

$$\lambda CT(t,x)\,S(t,x) - \sigma T(t,x) = 0$$

puis

$$\lambda CT(t,x)\,S(t,x) - \sigma(S(t,x) + I(t,x)) = 0$$

$$S(t,x)\left[\lambda CT(t,x) - \sigma\right] - \sigma I(t,x) = 0$$

De $(*)$ on trouve

$$\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu}I\right)(\lambda C(T) - \sigma) - \sigma I = 0$$

$$\frac{\Lambda}{\mu}\lambda C(T) - \frac{\Lambda}{\mu}\sigma - \frac{\sigma I}{\mu}\lambda C(T) + \frac{\sigma^2 I}{\mu} - \sigma I = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{\Lambda}{\mu}(\lambda C(T) - \sigma)}{\sigma\left(1 - \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{\mu}\lambda C(T)\right)} \\ I &= \frac{\Lambda}{\mu}\frac{(\lambda C(T) - \sigma)}{(\mu - \sigma + \lambda C(T))} \end{aligned}$$

On substitue dans $(*)$ on trouve

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu - \sigma + \lambda C(T)}.$$

Donc en trouve l'équilibre endémique E^*

$$E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu - \sigma + \lambda C(T)}, \frac{\Lambda(\lambda C(T) - \sigma)}{\sigma(\mu - \sigma + \lambda C(T))}\right).$$

Il faut être S^*, I^* positives

donc

$$\mu - \sigma + \lambda C(T) > 0, \text{ et } (\lambda C(T) - \sigma) > 0$$

alors

$$(\lambda C(T) - \sigma) > 0.$$

3.3.1 Le numéro de réproduction de base R_0

$$X' = F(x) - V(x)$$

ou

$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda C(T)}{T} SI \\ 0 \end{bmatrix}, V(x) = \begin{bmatrix} \sigma I \\ -\Lambda + \frac{\lambda C(T)}{T} SI + \mu S \end{bmatrix}$

Les matrices jacobienne de $F(x)$ et $V(x)$ à l'équilibre libre des maladies sont :

$$\jmath_F(E_0) = \begin{matrix} \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\frac{\Lambda}{\mu}}{\frac{\Lambda}{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

ou $F = \left[\frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\frac{\Lambda}{\mu}}{\frac{\Lambda}{\mu}}\right]$

$$\jmath_V(E_0) = \begin{matrix} \sigma & 0 \\ \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\frac{\Lambda}{\mu}}{\frac{\Lambda}{\mu}} & \mu \end{matrix}$$

ou $V = [\sigma]$

$$FV^{-1} = \left[\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right][\sigma]^{-1} = \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma}$$

et

$$R_0 = \rho\left(FV^{-1}\right) = \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma}$$

3.3.2 Stabilité local des équilibres

On pose

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\lambda CT(x,t)S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \mu S(t,x), \\ \frac{\lambda CT(x,t)S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I(t,x), \end{cases}$$

La matrice jacobienne

$$\jmath(S,I) = \begin{pmatrix} -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial S}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial I}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{S^2}{T^2} \\ \lambda\frac{\partial C(T)}{\partial S}\frac{SI}{T} + \lambda C(T)\frac{I^2}{T^2} & \lambda\frac{\partial C}{\partial I}\frac{SI}{T} + \lambda C(T)\frac{S^2}{T^2} - \sigma \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det \jmath(S,I) &= \begin{vmatrix} -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial S}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial I}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{S^2}{T^2} \\ \lambda\frac{\partial C(T)}{\partial S}\frac{SI}{T} + \lambda C(T)\frac{I^2}{T^2} & \lambda\frac{\partial C}{\partial I}\frac{SI}{T} + \lambda C(T)\frac{S^2}{T^2} - \sigma \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial S}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda\frac{\partial C(T)}{\partial I}\frac{SI}{T} - \lambda C(T)\frac{S^2}{T^2} \\ -\mu & -\sigma \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \jmath = \lambda C(T)\left(\sigma\frac{I^2}{T^2} - \mu\frac{S^2}{T^2}\right) + \lambda C'(T)\frac{SI}{T}(\sigma-\mu) + \mu\sigma$$

Théorème 3.1 *(stabilité local de E_0) Si $R_0 < 1$ l'équilibre libre des maladies de point E_0 de système (4) est localement asymptotiquement stable.*

Si $R_0 = 1$, E_0 est localement stable.

Si $R_0 > 1$, E_0 est instable

Preuve

$$\jmath(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \\ 0 & -\sigma + \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \end{pmatrix},$$

$$det\jmath(E_0) = \mu\sigma - \mu\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right),$$

$$tr\jmath(E_0) = \lambda C(T) - (\mu+\sigma),$$

Si

$$\begin{cases} \det \jmath(E_0) > 0 \\ tr\jmath(E_0) < 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) < \sigma \\ \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) < (\mu+\sigma) \end{cases}$$

donc il faut

$$\lambda \frac{C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma} < 1$$

■

C- à -d $R_0 < 1$

Théorème 3.2 *Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique de système 4 est asymptotiquement stable*

Preuve

$$(E^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu-\sigma+\lambda C(T)}, \frac{\Lambda(\lambda C(T)-\sigma)}{\sigma(\mu-\sigma+\lambda C(T))}\right),$$

■

$$\det J(E^*) = \lambda C(T^*)\left(\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \mu \frac{S^{*2}}{T^{*2}}\right) + \lambda C'(T^*)\frac{S^* I^*}{T^*}(\sigma-\mu) + \mu\sigma$$

$$trJ(E^*) = \lambda C(T^*)\left(\frac{S^{*2} - I^{*2}}{T^{*2}}\right) - (\sigma+\mu)$$

On á

$$T^* = I^* + S^*$$

$$T^* = \frac{\Lambda\lambda C(T^*)}{\sigma(\mu-\sigma+\lambda C(T^*))}$$

$$\frac{I^*}{T^*} = \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}\right)$$

$$\frac{S^*}{T^*} = \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}$$

$$\frac{S^* I^*}{T^{*2}} = \frac{\Lambda(\lambda C(T^*-\sigma))}{\lambda C(T^*)(\mu-\sigma+\lambda C(T^*))}$$

$$\begin{cases} \det J\left(E^{*}\right)<0, \\ \\ trJ\left(E^{*}\right)>0, \end{cases}$$

On remplaçons dans $det\jmath\left(E^{*}\right)$

$$\det \jmath\left(E^{*}\right)=\lambda C\left(T^{*}\right)\left[\sigma\frac{I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}-\mu\frac{S^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}\right]+\lambda C^{\prime}\left(T^{*}\right)\frac{S^{*}I^{*}}{T^{*}}(\sigma-\mu)+\mu\sigma$$

$$tr\jmath\left(E^{*}\right)=\lambda C\left(T^{*}\right)\frac{S^{*^{2}}-I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}-(\mu+\sigma)$$

Il faut avoir

$$\begin{cases} \det \jmath\left(E^{*}\right)>0, \\ \\ tr\jmath\left(E^{*}\right)<0, \end{cases}$$

$$tr\jmath\left(E^{*}\right)=\lambda C\left(T^{*}\right)\frac{S^{*^{2}}-I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}-(\mu+\sigma)<0$$

Si

$$\lambda C\left(T^{*}\right)\frac{S^{*^{2}}-I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}<(\mu+\sigma)$$

$$\lambda C\left(T^{*}\right)\left(\frac{2\sigma}{\lambda C\left(T^{*}\right)}-1\right)<(\mu+\sigma)$$

$$\lambda C\left(T^{*}\right)>\sigma-\mu \tag{**}$$

$$\det \jmath\left(E^{*}\right)=\lambda C\left(T^{*}\right)\left(\sigma\frac{I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}-\mu\frac{S^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}\right)+\lambda C^{\prime}\left(T^{*}\right)\frac{S^{*}I^{*}}{T^{*}}(\sigma-\mu)+\mu\sigma>0$$

donc

$$\lambda C\left(T^{*}\right)\left(\sigma\frac{I^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}-\mu\frac{S^{*^{2}}}{T^{*^{2}}}\right)+\mu\sigma>-\lambda\frac{C^{\prime}\left(T^{*}\right)}{T^{*}}S^{*}I^{*}(\sigma-\mu),$$

et comme

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{C(T)}{T}\right) \leq 0 \text{ pour } T > 0$$

$$\begin{aligned} \lambda C(T^*)\left(\sigma\frac{{I^*}^2}{T^{*2}} - \mu\frac{{S^*}^2}{T^{*2}}\right) + \mu\sigma &> \lambda\frac{C(T^*)}{T^{*2}}S^* I^*(\mu - \sigma) \\ &> -\lambda^2\frac{S^* I^*}{T^{*2}}C^2(T^*) \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} &\lambda C(T^*)\left(\sigma\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}\right)^2 - \mu\left(\frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}\right)^2\right) + \mu\sigma \\ &+\lambda^2 C^2(T^*)\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}\right)\left(\frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}\right) \\ > \;\; &0 \end{aligned}$$

en multiplier par $\frac{\lambda C(T^*)}{\sigma}$

$$\left(\lambda^2 C^2(T^*) - \sigma\right)^2 - \mu\sigma + \mu\lambda C(T^*) + \lambda^2 C^2(T^*) - \sigma\lambda C(T^*) > 0,$$

$$\left(\lambda^2 C^2(T^*) - \sigma\right)^2 + (\lambda C(T^*) + \mu)(\lambda C(T^*) - \sigma) > 0,$$

$$(\lambda C(T^*) - \sigma)(2\lambda C(T^*) - \sigma + \mu) > 0.$$

Si

$$\begin{cases} \lambda C(T^*) > \sigma, \\ 2\lambda C(T^*) > \sigma - \mu, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda C(T^*) &> \sigma - \mu \\ \lambda C(T^*) + \mu &> \sigma \Longrightarrow \lambda C(T^*) > \sigma \end{aligned}$$

et comme $\frac{\Lambda}{\mu} > T^*$ alors

$$C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) > C(T^*)$$

et par suite

$$\frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma} > 1$$

3.3.3 Stabilité globale d'équilibre

Lemme 3.1 *De eq* (3)*,il s'ensuite que*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I)$$

alors nous avons l'inégalité suivante

$$0 < T\left(t,x\right) \leq \max\left\{\sup T\left(0,x\right), \frac{\Lambda}{\mu}\right\} = K, t > 0, x \in \bar{\Omega} \tag{4}$$

où

$$T\left(0,x\right) = S_0 + I_0\left(x\right)$$

Preuve 1/ Pour prouver $1^{ére}$ inégalité

$$T\left(t,x\right) > 0$$

$\forall\varepsilon > 0$, $T\left(t,x\right) > \varepsilon$ pour tout $t_0 > 0, x \in \bar{\Omega}$

$$T\left(x,t\right) > \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $t > t_0$, $x \in \bar{\Omega}$.

Si

$$t > t_0,\ T\left(t,x\right) > \frac{\varepsilon}{2}$$

sinon

$$t > t_1,\ T\left(x,t\right) < \frac{\varepsilon}{2}, x \in \bar{\Omega}$$

et

$$t_1 > t_0, x \in \bar{\Omega}, T\left(t,x\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{cases} t > t_0, x \in \bar{\Omega}, T(t,x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ \text{si non} \\ \\ t > t_1, x \in \bar{\Omega}, T(t,x) > \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ t_1 > t_0, x \in \bar{\Omega}, T(t,x) = \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$w_0(t,x) = T(t,x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

alors $w_0(t,x)$ prend un minimum sur $[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}$

$$w_0(t,x) < 0, t > t_1, x \in \bar{\Omega}$$

$$w_0(t_1, x_1) = 0$$

$$\sup w_0(t_0, x) > 0, x \in \bar{\Omega}$$

d'où la fonction $w_0(t,x)$ prend un minimun non négative sur $[t_0, t_1] * \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} &= \frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I) \\ &= D\Delta w_0 - \mu \left(w_0(t,x) + \frac{\varepsilon}{2} \right) + (\Lambda - \alpha I) \end{aligned}$$

On à

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

alors

$$D\Delta w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial t} - \mu w_0 = \mu \frac{\varepsilon}{2} - \Lambda + \alpha I$$

On à

$$T(t,x) = S(t,x) + I(t,x)$$

$$T\left(t,x\right)\geq I\left(t,x\right)$$

$$\begin{aligned} D\Delta w_0-\frac{\partial w_0}{\partial t}-\mu w_0 &= \mu\frac{\varepsilon}{2}-\Lambda+\alpha I \\ &\leq \alpha T+\mu\frac{\varepsilon}{2}-\Lambda \end{aligned}$$

et on à

$$T\left(t,x\right)<\frac{\varepsilon}{2}\implies\leq\left(\alpha+\mu\right)\frac{\varepsilon}{2}-\Lambda<0$$

sur $(t_1,\infty)*\Omega$, en suite il se pose d'une contradiction par le principal maximum (voir $[6,7,9])$.

Effectivement si $x_1\in\Omega$, puis

$$D\Delta w_0-\frac{\partial w_0}{\partial t}-\mu w_0$$

doit être non négatif à (t_1,x_1) contradiction.

On obtient

$$x_1\in\partial\Omega$$

et

$$w_0(t,x)>w_0(t_1,x_1)\forall(t,x)\in[t_0,t_1]*\Omega$$

et donc

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}\leq 0$$

(t_1,x_1), cette contradiction voir (9) il est clair que le point initail $T(0,x)$ et

$$T(t,x)>0,(t,x)\in(0,x)\times\Omega$$

par conséquent nous devons avoir l'inégalite premiaire $K\left\langle k_0,k_0\right\rangle>0$ nous

$$T(t,x)\leq K_0\left[0,\infty\right]\times\bar{\Omega}$$

si vrai en $K_0\rightarrow K$ nous trouvons seconde inégalité de lemme.

Si n' y à pas vrai donc il existe

$$(t_2,x_2)\in(0,\infty)\times\bar{\Omega}$$

telle que

$$T\left(t_2, x_2\right) > K_0$$

si nous établissons

$$w(t,x) = T(t,x) - K_0$$

donc

$$w(t_2, x_2) > 0$$

et

$$sup_{x\in\bar{\Omega}} w(0,x) \leq 0 (t_2 > 0)$$

d'où $w(t,x)$ prend un manimale positive sur $[0,t_2] \times \bar{\Omega}$ d'autre partie

$$w\left(t,x\right) = T\left(t,x\right) - K_0$$

donc

$$T\left(t,x\right) = w + K_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial T} &= \frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I) \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= D\Delta w - \mu\left(w + K_0\right) + (\Lambda - \alpha I) \\
& D\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} - \mu w \\
&= \mu K_0 - \Lambda + \alpha \\
&= \alpha I + (\mu K_0 - \Lambda) \geq 0.
\end{aligned}$$

En suite il se pose d une contradiction par le principal maximum voir [6, 7, 9] .

En effet si $x_2 \in \Omega$,

puis

$$D\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} - \mu w$$

doit étre négatif à t_2, x.C'est un contradiction, nous sommes ainsi obstense

$$x_2 \in \partial\Omega \text{ et } w(t,x) < w(t_2, x_2))$$

pour tout

$$(t,x) \in [0,t_2] \times \Omega$$

et donc $\frac{\partial w}{\partial \eta} > 0$ à (t_2, x_2).

C'est une contradiction à nouveau (voir[9]).

Donc nous devons avoir eq(4). ■

Théorème 3.3 *sous l'hypothese ci-dessus, si soit $R < 1$ ou $I_0(x) \equiv 0$ Puis pour chaque fonction initiale continue non négative la solution (S, I) de eq (3) satisfait*

$$\lim_{t\to\infty} [\sup I(t,x)] = 0$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \left[\sup \left| S(t,x) - \frac{\Lambda}{\boldsymbol{\mu}} \right|\right] = 0$$

Preuve Si

$$\frac{\Lambda}{\mu} \le T(0,x) \le K$$

nous pouvons montrer que :

$$T(x,t) \le \hat{T}(t), t > 0, x \in \bar{\Omega} \tag{5}$$

telle que $\hat{T}(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}(t) = -\mu\hat{T} + \Lambda, t > 0, \\ \\ \hat{T}(0) = K, \end{cases}$$

on considére la fonction

$$w_1(t,x) = T(t,x) - \hat{T}(t)$$

sur$[0,\infty) \times \bar{\Omega}$

donc

$$w_1(0,x) = T(0,x) - \hat{T}(0) \le 0$$

pour $x \in \bar{\Omega}$ et on autre

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \\ &= D\Delta T - \mu T + \Lambda - \alpha I + \mu\hat{T} - \Lambda \\ &= D\Delta w_1 - \mu\left(w_1 + \hat{T}\right) - \alpha I + \mu\hat{T}. \end{aligned}$$

D'autre partie on à

$$D\Delta w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial t} - \mu w_1 = \alpha I \geq 0$$

$$w_1(t,x) \leq 0$$

nous devons avoir eq(5). puisque

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= \frac{\Lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right) + k e^{-\mu t} \\ t &\to \infty \end{aligned}$$

on à

$$\begin{aligned} T(t,x) &\leq \hat{T}(t) \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu} \Rightarrow T(t,x) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \end{aligned}$$

$$\limsup\left[\sup T(t,x)\right] \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Par conséquent, pour la discussion du comportement asymptotique de la solution $t \to \infty$ nous pouvons (sans pêrte de généralité) supposer que

$$T(t,x) \leq \frac{\Lambda}{\mu},\ t > 0,\ x \in \bar{\Omega}. \tag{6}$$

En suite définir

$$f(t,x) = \frac{I(t,x)}{\sigma}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma}\left(D\Delta I + \frac{\lambda C(T)}{T} SI - \sigma I\right) \\ &= \frac{D}{\sigma}\Delta I + \left(\frac{\lambda C(T)}{\sigma T} S - 1\right) I \end{aligned}$$

et comme

$$S = T - I$$

alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\sigma}\Delta I + \left(\frac{1}{\sigma}\lambda C(T) - \frac{1}{\sigma T}\lambda C(T) I - 1\right) I$$

on à

$$R = \frac{\lambda C\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{\sigma}\Delta I + \frac{\lambda C(T)}{\sigma} I - \frac{\lambda C(T)}{\sigma T} I^2 - I \\
&\leq \frac{D}{\sigma}\Delta I + RI - \frac{\lambda C(T)}{\sigma T} I^2 - I \\
&\leq \frac{D}{\sigma}\Delta I - (1-R) I.
\end{aligned}$$

Par suite on trouve l'inégalité differentielle suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq D\Delta f - \sigma(1-R) f. \tag{7}$$

Donc, on peut voir

$$f(t,x) \to 0 \text{ comme } t \to \infty, x \in \bar{\Omega}.$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
w(t) \; &: = w(f)(t) \\
&: = \int_\Omega f^2(t,x)\, dx,\ t \geq 0
\end{aligned}$$

donc $w(t) \geq 0$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= 2\int f \frac{\partial f}{\partial t} dx \\
&\leq 2\int_\Omega f\left(D\Delta f - \sigma(1-R) f\right) dx
\end{aligned}$$

$$\leq -2D\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 dx - 2\sigma(1-R)\int_\Omega f^2 dx. \tag{8}$$

Puisque

$$2\int_\Omega f(D\Delta f)\, dx$$

$$\begin{aligned}
2D\int_\Omega f(\Delta f)\, dx &= 2D\int_\Omega f\left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx \\
&= \int f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx \\
&= f\frac{\partial f}{\partial x} - \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx.
\end{aligned}$$

On prendre H_1, H_2 definie par

$$H_1 = 2D,\ H_2 = 2\sigma\left(1 - R\right),$$

alors $H_1 > 0$, $H_2 > 0$ en raison de notre hypothése par suite on intégrons l'équation (8)pour $t \geq 0$

$$W\left(t\right) + H_1 \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial f\left(s,x\right)}{\partial x}\right)^2 dxds + H_2 \int_0^t \int_\Omega f^2 dxds \leq W\left(0\right). \tag{9}$$

Puisque $W\left(t\right) \geq 0$ on trouve

$$H_1 \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial f\left(s,x\right)}{\partial x}\right)^2 dxds < \frac{W\left(0\right)}{H_1},$$

$$H_2 \int_0^T \int_\Omega f^2\left(s,x\right) dxds < \frac{W\left(0\right)}{H_2}. \tag{10}$$

Donc

ainsi, nous concluons de que (8) et (10)

$$W\left(t\right) \in L^1\left[0,\infty\right) \text{ et } \frac{\partial W}{\partial t} \in L^1\left[0,\infty\right)$$

d'aprés lemme Barbalate's [5, Lemma 1.2.2.],on obtient

$$W\left(t\right) \rightarrow 0,\ \text{et } f \rightarrow 0 \text{ sur } L^2,\ \text{comme } t \rightarrow \infty$$

c'est

$$\left\|f\left(t,\cdot\right)\right\|_{L^2} \rightarrow 0,\ \text{comme } t \rightarrow \infty \tag{11}$$

où $\left\|\cdot\right\|_{L^2}$ dénote le norme de fonction sur Ω , nous prouvons ensuite que

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} \left|f\left(t,x\right)\right| \rightarrow 0,\ \text{comme } t \rightarrow \infty \tag{12}$$

il faut faire voir[7] , nous prenons note du bornitude de $f\left(t,x\right)$ par l'équation (6).

Ainsi, nous voyons que l'orbite de l'équation (7), qui est $\left\{f\left(t,\cdot\right)/\ t \geq 0\right\}$ est relativement compact assertion (12) découle de ce fait .

En effet si l'equation (12) c'est pas vrai ,

alors il existe des séquences $\{t_n\}_{t_n\rightarrow\infty}$comme $n \rightarrow \infty$, et $\{x_n\} \subset \bar{\Omega}$, telque

$$\forall\varepsilon,\ |f(t_n, x_n)| \geq \varepsilon > 0,\ n = 1, 2, 3, ...$$

Nous pouvons supposer que

$$x_n \to x_0, \text{et} \quad f(t_n, x) \to \tilde{f}(x)$$

uniformement sur $\bar{\Omega}$ pour certains

$$x_0 \in \bar{\Omega},\ \text{et } \tilde{f} \in C\left(\bar{\Omega}\right) \text{ comme } n \to \infty$$

Si necessaire en prenant une sous séquence de ces en particulier nous obtenons

$$\left|\tilde{f}(x_0)\right| \geqslant \varepsilon$$

C'est une contradiction parce que

$$\int \tilde{f}^2 dx = \lim \|f(t_n, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$$

eq (11)

donc nous devons avoir eq (12)Par la définition de f,on à

$$I(t, x) \ \to 0 \text{ comme } t \to \infty,\ x \in \bar{\Omega} \tag{13}$$

$x \in \bar{\Omega}$,depuis S est borné

$$\frac{\lambda C(T)}{T} SI \to 0, x \in \bar{\Omega} \text{ comme } t \to \infty.$$

Nous prétendons en suite que

$$S \to \frac{\Lambda}{\mu} \text{ comme } t \to \infty,\ x \in \bar{\Omega}\ .$$

Par eq(13) $, \forall\varepsilon > 0, \exists t_2 > 0$

telque

$$I(t, x) < \varepsilon \text{ pour } t \geq \ t_2,\ x \in \bar{\Omega}.$$

Puis alors il suffit de eq(14) prouver

$$T(t,x) \geq \tilde{T}(t), \ t \geq t_2, \ x \in \bar{\Omega}, \tag{15}$$

où $\tilde{T}(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}\tilde{T}(t) = -\mu\tilde{T}(t) + \Lambda - \alpha\varepsilon, \ t > t_2$$

$$\tilde{T}(t_2) = \tilde{T}_2, 0 < \tilde{T}_2 \leq \sup_{x\in\bar{\Omega}} T(t_2,x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

En suite nous avons

$$\tilde{T}(t) \leq T(t,x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \ t \geq t_2, \ x \in \bar{\Omega}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t) &= \tilde{C}e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\alpha\varepsilon}{\mu}, \tilde{C} = e^{-\mu t_2}\left(\tilde{T}_2 - \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha\varepsilon}{\mu}\right) \\ t &\to \infty \ \ \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Dans l'inégalité ci-dessus,

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\mu} &\leq \liminf_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} T(t,x)\right] \\ &\leq \lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} T(t,x)\right] \\ &\leq \lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} S(t,x)\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} I(t,x)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} S(t,x)\right] \\ &\leq \lim_{t\to\infty}\left[\sup_{x\in\bar{\Omega}} T(t,x)\right] \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

a voir eq (15), nous considérons la fonction $w_2(t,x) := \tilde{T}(t) - T(t,x)$ sur $[t_2,\infty) \times \bar{\Omega}$,

en suite

$$w_2(t_2,x) = \tilde{T}_2 - T(t_2,x) \leq 0$$

pour $x \in \bar{\Omega}$, et en outre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{T}(t)}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial T} \\
&= -\mu\tilde{T} + \Lambda - \alpha\varepsilon - D\Delta T + \mu T - \Lambda + \alpha I \\
&= -\mu\tilde{T} - \alpha\varepsilon - D\Delta\left(\tilde{T} - w_2\right) + \mu\left(\tilde{T} - w_2\right) + \alpha I \\
&= -\mu\tilde{T} + D\Delta w_2 + \mu\left(\tilde{T} - w_2\right) + \alpha\left(I - \varepsilon\right),
\end{aligned}$$

alors

$$D\Delta w_2 - \frac{\partial w_2}{\partial t} + \mu\tilde{T} - \mu w_2 - \mu\tilde{T} = \alpha\left(\varepsilon - I\right),$$

et donc

$$= D\Delta w_2 - \frac{\partial w_2}{\partial t} - \mu w_2 = \alpha\left(\varepsilon - I\right) \geq 0.$$

Donc par le même raisonnement que celui pour $w_1(t,x)$ on peut voir ça $w_2(t,x) \leq 0$; c'est eq (15) détient ainsi nous avons eq (14)

cela a complété le preuve de théoreme 01 ■

Théorème 3.4 *Sous l'hypothése ci-dessus, de $R > 1$, et $I_0(x) \neq 0$, puis pour chaque fonction initiale continue nons négative, il y a un unique équilibre positif (S^*, I^*) de eq(3) satisfait*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup\left|I(t,x) - I^*\right|\right] = 0,$$

et

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup\left|S(t,x) - S^*\right|\right] = 0,\ x \in \bar{\Omega}.$$

Preuve En ordre de prouver ce theoréme, nous avons besoin du corollaire suivant.

comme il y'a une preuve compléte de ce résultat dans [2], nous omettons la preuve de cela pour la simplicité.

corollaire

Si $R_0 > 1$, donc il y'a une unique position équilibre endémique (E^*)

avec

$$T = S + I$$

le système (3) est équivalent à

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta I - \mu T - \alpha I + \Lambda \tag{16}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\Delta I + \lambda I \left[C(T) - C(T) \frac{I}{T} - \frac{\sigma}{\lambda} \right]. \tag{17}$$

Ce système possède le positif équilibre (E^*) où

$$T^* = S^* + I^*$$

nous pouvons récrire eq (16) à la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu (T - T^*) - \alpha (I - I^*) \tag{18}$$

car

$$-\mu T^* - \alpha I^* + \Lambda = 0$$

aussi pour eq (17) comme

$$\lambda I^* \left[C(T^*) - \frac{I^* C(T^*)}{T^*} \right] = \frac{\sigma}{\lambda}$$

nous avons alors

$$= D\Delta I + \lambda I G(T) - \lambda I \frac{C(T)}{T} (I - I^*), \tag{19}$$

où

$$G(T) = [C(T) - C(T^*)] \left(1 - \frac{I^*}{T^*} \right) + I^* C(T) \frac{T - T^*}{TT^*}.$$

Puisque $C(T)$ croissante, alors $G(T) > 0$ pour $T > T^*$ et $G(T) < 0$ pour$T < T^*$.

Nous définission maintenant la fonction $V(t)$ par

$$V(t) = V(T, I)(t) = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\alpha} \int_{T^*}^{T} G(s)\, ds + I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*} \right) dx. \tag{20}$$

donc$V(T^*, I^*) = 0$ et $V(T, I) > 0$ pour d'autre admissible (T, I).

En outre nous le long de la solution eq (16) et eq (17).

$$\begin{aligned}
\frac{dV\left(t\right)}{dt} &= \int_{\Omega}\left\{\frac{\lambda}{\alpha}G\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial t}-I^{*}\frac{\partial I/\partial t}{I}\right\}dx \\
&= \int_{\Omega}\left\{\frac{\lambda}{\alpha}G\left(T\right)\left(D\Delta T-\mu\left(T-T^{*}\right)-\alpha\left(I-I^{*}\right)\right)\right. \\
&\quad +\left(D\Delta T+\lambda IG\left(T\right)-\lambda I\frac{C\left(T\right)}{T}\left(I-I^{*}\right)\right) \\
&\quad \left.-I^{*}\left(D\frac{\Delta I}{I}+\lambda G\left(T\right)-\frac{\lambda C\left(T\right)}{T}\left(I-I^{*}\right)\right)\right\}dx \\
&= \frac{\lambda D}{\alpha}\int_{\Omega}\Delta TG\left(T\right)dx-\frac{\lambda\mu}{\alpha}\int_{\Omega}G\left(T\right)\left(T-T^{*}\right)dx
\end{aligned}$$

$$+D\int_{\Omega}\Delta I\frac{I-I^{*}}{I}dx-\lambda\int_{\Omega}C(T)\frac{\left(I-I^{*}\right)^{2}}{T}dx<0 \tag{21}$$

pour tout $(T,I)\neq(T^{*},I^{*})$

pour conduire cela nous continuons à estimer pour eq (21) plus détail

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda D}{\alpha}\int_{\Omega}\Delta TG\left(T\right)dx &= \frac{\lambda D}{\alpha}\left\{\frac{\partial T}{\partial x}C\left(T\right)-\int_{\Omega}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial G\left(T\right)}{\partial x}dx\right\} \\
&= -\frac{\lambda D}{\alpha}\int_{\Omega}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial G\left(T\right)}{\partial x}dx. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Ici

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G\left(T\right)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[C\left(T\right)-C\left(T^{*}\right)\right]\left(1-\frac{I^{*}}{T^{*}}\right)\right\} \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(I^{*}C\left(T\right)\frac{T-T^{*}}{TT^{*}}\right)\right\} \\
&= \left(1-\frac{I^{*}}{T^{*}}\right)\frac{\partial C\left(T\right)}{\partial x}+\frac{\partial C\left(T\right)}{\partial x}\left\{I^{*}\left(\frac{1}{T^{*}}-\frac{1}{T}\right)\right\} \\
&\quad +I^{*}C\left(T\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T^{*}}-\frac{1}{T}\right) \\
&= \left(1-\frac{I^{*}}{T^{*}}\right)C'(T)\frac{\partial T}{\partial x}+I^{*}C(T)\left(\frac{\partial T/\partial x}{T^{2}}\right), \quad C\left(T\right)=\frac{dC(T)}{dT}.
\end{aligned}$$

En remplaçons en (22)

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda D}{\alpha}\int_{\Omega}\frac{\partial T}{\partial x}\left\{\left(1-\frac{I^{*}}{T}\right)\acute{C}\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x}+I^{*}C\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial T^{2}}\right\} \\
&= -\frac{\lambda D}{\alpha}\int_{\Omega}\frac{\partial T}{\partial x}\left(1-\frac{I^{*}}{T}\right)\acute{C}\left(T\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^{2}dx+-\frac{\lambda DI^{*}}{\alpha}\int_{\Omega}C\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial T^{2}}\frac{\left(\partial T/\partial x\right)^{2}}{T^{2}}dx
\end{aligned}$$

ainsi $V(t)$ de eq (20) est nondans t, c'est existe une constante $C_1 \geq 0$ de

telle que

$$V(t) \to C_1 \text{ comme } t \to \infty$$

puisque

$$I(t,x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$$

$I(t,x)$ est uniformément délimité dans $[0,\infty) \times \Omega$ ainsi nous voyons cela pour $h > 0$ il existe $C(h) > 0$ telque

$$|I(t+h,\cdot) - I(t,\cdot)| \leq C(h) \text{ pour } t \geq 0$$

á partir eq (21)

on a

$$V(t) \leq -W(T,I)(t) \leq 0$$

oú $W(T,I)(t)$, est la fonction de la rigueur de la main dans eq (21)

on pose

$$\dot{V}(t) \neq 0$$

.

Pour toute séquence

$$\{t_k\}, t \to \infty \text{ comme } k \to \infty$$

et un certain nombre positive β, $\exists \delta > 0$

telque

$$\dot{V}(t) < -\beta \tag{23}$$

si

$$|I(t+t_k,\cdot) - I(t,\cdot)| \leq \delta$$

$0 \leq t \leq \delta$ et k est suffisement grand pour les régions $[t_k, t_k+\delta]$,

nous pouvons voir ça

$$\dot{V}(t) < -\beta$$

$$\int_{t_k}^{t_k+\sigma} \dot{V}(t)\,dt < -\beta \int_{t_k}^{t_k+\delta} dt,$$

$$V(t_k+\delta)-V(t_k)<-\beta t,$$

$$V(t_k+\delta)\leq V(t_k)-\beta\delta.$$

intégrer sur $[t_k, t_k+\delta]$ les deux côtés de eq (23) et puisque eq (24) vrai pour tout grand nombre k et

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=C_1\geq 0,$$

il contradisent depuis β_0 est positif cela montré que

$$\dot{V}(t)=0.$$

Alors nous avons

$$W(T,I)(t)=0.$$

Nous obtenons ainsi $T\to T^*$et $I\to I^*$par continuité de V et W.

Le comportement asymptotique de S se déclenche maintenant à partir de la cible ci-dessus sur le comportement de T et I le fait que $S=T-I$, alors $S\to S^*$. ■

Remarque 3.1 *Notre résultat en théoreme* (1) *donne le résultat comme dans l'extension de l'équation de cook ,mais maintenant à l'équation différentielle partielle avec diffusion cependant , le résultat en théoreme* (2) *ne s'etend donc pas .*

C'est seulement applicable au cas $p=1$ dans l'equ (2) *et à la condition de $C(T)$ avec l'equation avec diffusion, c'est notre eq* (3) *notez que $C(T)$ et généralement supposé être approximativement linéare pour les petits "T" et qu'elle approche d'un niveau de soturation pour une grand surface "T" (voir, [1,2]) pour cette raison notre condition de $C(T)$ n'est pas si forte. Si $C(T)$ est une augmentation linéaire alors nous pouvons laisser tomber la condition de $C(T)$, dans le cas $p=1$, il est malheureusement, il est évident que le SIDA est en fait une maladie progresive et que la plupart des personnes on était infectées continueront a se développer "full_ blown" .SIDA dans ce cas les classes Y et Z ne sont plus nécessaires.*

Pour cas $0<p<1$ de type équation différentielle ordinaire . le lecteur est appelé [2,3]

Conclusion

La modélisation mathématique au fil des années a été utile pour analyser diverses dynamiques de maladies,telles que le VIH/SIDA, le paludisme et la tuberculose,et joue également un rôle important dans la compréhension des schémas épidémiologique de contrôle des maladies, car elle permet de prédire à court et à long terme la maladies.

RÉFÉRENCES

[1] R.M. Anderson, G.F. Medley, R.M. May, A.M. Johnson, A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (HIV), the causative agent of AIDS, IMA J. Math.Med. Biol. 3(1986)229-263.

[2] Asma Touil, Existence globale ou eplosion en temps fini des solutions D'equation D'evolution, Université Batna 2

[3] C. Castillo-Chavez, K. Cooke, W. Huang, S.A. Levin, On the role of long incubation periods in the dynamics of acquired immunode ciency syndrome (AIDS), J. Math. Biol. 27 (1989) 373-398.

[4] C. Castillo-Chavez, K. Cooke, W. Huang, S.A. Levin, The role of long periods of infectiousness in the dynamics of acquired immunodeficiency syndrome (AIDS), in : C. Castillo-Chavez, S.A. Levin,C. Shoemaker (Eds.), Mathematical Approaches to Problems in Resource Management and Epidemiology,Lecture Notes in Biomathematics, vol. 81, Springer, New York Inc., 1989.

[5] W.E. Fitzgibbon, J.J. Morgan, A di usive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension,Di erential and Integral Equations 1 (1988) 125-132.

[6] K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[7] Nicholas Ferris Britton, Essential Mathematical Biology, MA, Dphil centre mathematical Biology, Departement of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, UK

[8] S. Murakami, Y. Hamaya, Global attractivity in an integrodifferential equation with diffusion, Differential Equations Dyn. Systems 3 (1995) 35- 42.

[9] S. Murakami, T. Yoshizawa, Asymptotic behavior in a system of Volterra integrodifferential equations with diffusion, Dyn. Systems Appl. 3 (1994) 175-188.

[10] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Math. Sci., Springer, New York, 1983.

[11] M.H. Protter, H.F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer, New York Inc.,1984.

[12] Yoshihiro Hamaya, On the asymptotic behavior of a di usive epidemic model (AIDS), Department of Mathematical Information Science, Okayama University of Science, 1-1 Ridai-chyo, Okayama 700, Japan, Received 14 February 1998 ; accepted 25 February 1998