Table des matières

Introduction Générale

Le chaos et les systèmes basés sur le chaos ont été étudie largement dans la littérature. Le chaos est possible si l'equation à au moins une dimension 3. Parmi les systèmes chaotique, les systèmes chaotique simples, proposés par Zeraoulia Elhadj et J. C. Sprott, ont suscité un intérêt considérable dans la littérature en raison de leur simplicité et de richesse de leur comportement dynamique. Les systèmes chaotique simples basés sur les **systèmes de jerky** peuvent être d'écrits comme suit

$$x''' = J(x, x', x''),$$

où J est appelé **Jerky** qui est la dérivation d'une seule variable scalaire x. Dans un système neutonien x, x', x'', x''' sont déplacements, vitesse, accélération et jerky, respectivement. Si un système est le système dérivé du quatrième ordre de la forme

$$x'''' = J(x, x^{'}, x'', x'''),$$

il est appelé **systèmes de hyperjerky** ou **systèmes de snap**. Il existe plusieurs études sur les systèmes hyperjerky dans la littérature.

Nous avons divise ce travail à trois chapitres comme suit

Chapitre 1 : Nous denons certaines définitions et notions générales sur les systèmes dynamique et les différents types d'équations.

Chapitre 2 : Nous denons quelque équations transformable aux forme de Jerky.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous denons les conditions qui devraient être disponible pour la transformation d'équation différentielle à une forme de hyperjerky.

Chapitre 1

Préliminaires sur les systémes dynamique

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les notions de la théorie des systémes dynamiques, ainsi que certaines de leurs propriétés que l'on utilisera dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Notions générales sur les systèmes dynamique

En mathématique, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le systéme solaire (régi par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l' évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un proqramme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamique à temps discrets comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).
Deux aspects importants d'un système dynamique sont qu'il est
• **causal,** c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.
• **déterministe,** c'est-à-dire qu'à une " condition initiale" donnée à l'instant "présent" va correspondre à chaque instant utérieur un seul état "futur" possible.
Une notion importante est celle de système dynamique réversible pour lequel on peut également décrire un état passé du système à partir de son présent et de son futur.
Autrement dit, en renversant la flèche du temps on a encore un système dynamique.
Matimatique un système dynamique réversible est un cas particulier d'action de qroupe (le groupe étant celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ dans le cas discret et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ dans le cas continu).

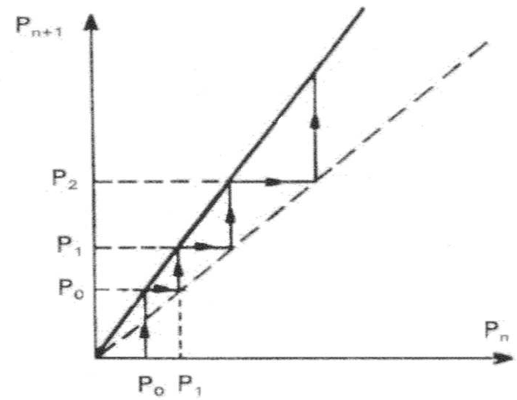

FIG. 1.1 – Evolution d'un systéme discret.

1.1.1 Système dynamique à temps discret

Un exemple est fourni par un modèle de la croissance d'une population animale. On sait que si quelques animaux sont mis dans un vaste espace réunissant toutes les conditions favorables à leur vie, en moyenne leur nombre croît. En effet, des naissances interviennent au printemps, des morts en hiver. Il est donc préférable de n'effectuer le dénombrement "qu'à temps discret", par exemple tous les ans à une date fixe. L' expérience montre qu'au début, les animaux étant peu nombreux, chaque année qui passe voit leur population multipliée par un certain nombre C. Exprimée sous forme algébrique, cette loi de croissance s' écrit

$$P_{n+1} = CP_n,$$

où l'indice n indique le numéro d'ordre de l'année. Le nombre C peut être de l'ordre de 2 ou 3 pour les mammifères de taille moyenne ; il est considérablement plus élevé pour de petits animaux comme les souris ou les lapins. l' equation ci-dessus "s'intègre" facilement comme suit

$$P_n = C^n P_0,$$

où P_0 désigne la population initiale. On a donc une croissance exponentielle. Voir **Fig. 1.1**.

1.1.2 Système dynamique à temps continu

Un système dynamique continu est défini par une équation différentielle du premier ordre (EDP parabolique ou équation différentielle ordinaire) où le temps est la variable décrivant l'évolution du système

$$x^{'}(t) = f(x(t), t),$$

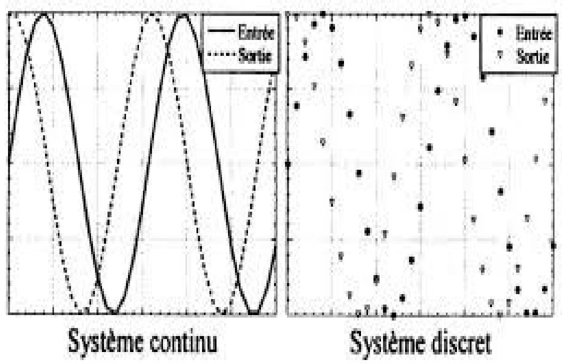

FIG. 1.2 – Type des systèmes dynamique.

Avec une condition initiale

$$x(t_0) = x_0,$$

A titre d'exemple, l' equation

$$P' = \frac{dp}{dt} = CP, \tag{1}$$

peut être vue comme une limite continue de l' equation (1). Pour $C > 0$, elle décrit aussi un modèle simple de croissance d'une population, quand la population est petite. La solution est bien connue

$$P(t) = P_0 \exp(Ct),$$

où $P_0 = P(0)$ désigne la population initiale. Un autre exemple de système dynamique continu est fourni par l' equation différentielle logistique :

$$P(t) = \frac{LP_0 \exp(LKt)}{L - P_0 + P_0 \exp(LKt)},$$

Utilisant cette formule, on voit facilement que ce modèle prédit la croissance ou la décroissance de la population initiale vers l'équilibre L. Un système dynamique discret est souvent beaucoup plus compliqué que son analogue continu. Voir **Fig. 1.2**.

1.1.3 Système dynamique autonome

Si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire).

Exemple 1.1 ***Le pendule simple à tige rigide :*** *L'état d'un tel pendule est composé de sa position angulaire et de sa vitesse angulaire. Son espace d'état est donc*
(1) $\mathbb{R}^2$ *si on traduit la position angulaire par un réel.*

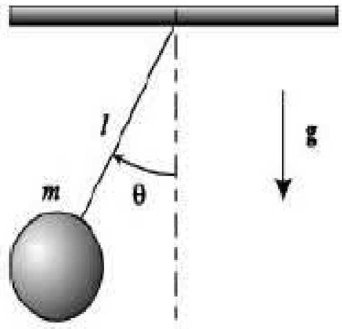

FIG. 1.3 – Pendule simple.

*(2) Le produit d'un cercle par la droite réelle, donc un cylindre, si on traduit la position angulaire par un réel à $2k\pi$ près. Voir **Fig. 1.3**.*

1.1.4 Système dynamique non-autonome

Sa loi d'évolution dépend alors du temps.

Exemple 1.2 *On peut encore utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non-autonome à une système autonome. En effet, la non-autonomie se traduit par une équation de la forme $x' = f(x,t)$. Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, ce qui réhabilite la forme $x' = f(x)$, avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l' equation supplémentaire $x'_{n+1} = 1$.*

Définition 1.1 *On appelle systéme dynamique, un triplet (Ω, T, f) ou Ω est un espace métrique (généralement $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$), T est l'ensemble $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, et f une application continue de $\Omega \times T$ dans Ω vérifiant*

$$\begin{cases} f(x,0) = x, & \forall x \in \Omega \\ \\ f(f(x),\tau) = f(x, t+\tau), & \forall t,\tau \in T\ , \forall t,\tau \in T,\ x \in \Omega \end{cases}$$

Ω espace des phases ou espace d'états.
T espace temporel.
f flot du systéme dynamique ou fonction d'évolution.

La fonction f d'écrit la façon dont le systéme évolue au cours du temps. Si cette fonction ne dépend pas du temps, le systéme est autonome. Le choix de l'espace temporel T est décisif, et dépend en général du phénoméne que l'on souhaite modéliser. Si $T = \mathbb{R}$, le systéme (Ω, T, f) est dit continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$, le systéme $(\Omega, T, f\ )$ est dit discret.

Exemple 1.3 ***L' oscillateur harmonique :*** *est un exemple de système autonome à temps continu. Le déplacement horizontal ζ d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort est régi par l' équation différentielle*

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \omega^2\zeta = 0,$$

où ω dépend des paramètres du problème. La loi d'évolution du système est donnée par

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

l'équation de l'oscillateur harmonique est d'ordre 2, elle n'est donc pas sous la forme souhaitée. On l'amène à cette forme en remplaçant $\xi \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^2$, ce qui la réduit de l'ordre 2 à l'ordre 1. La transformation est la suivante

$$x(t) = \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \zeta'(t) \end{pmatrix},$$

où ζ' désigne la dérivée de ζ par rapport au temps. On obtient l' équation de l'oscillateur sous la forme de l' équation différentielle vectorielle d'ordre 1

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x(t),$$

On a diminué l'ordre au prix de l'augmentation de la dimension ($x \in \mathbb{R}^2$, alors que ζ appartenait à $\mathbb{R}$).

Plus généralement, on passera de (dimension 1, ordre n) à (dimension n, ordre 1) en écrivant l'équation différentielle

$$\frac{d^n\zeta}{dt^n} = g\left(\zeta, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}, ..., \frac{d^{n-1}\zeta}{dt^{n-1}}\right),$$

sous la forme d'une équation différentielle vectorielle $x' = f(x)$, où x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ d\zeta/dt \\ \vdots \\ d^{n-2}\zeta/dt^{n-2} \\ d^{n-1}\zeta/dt^{n-1} \end{pmatrix},$$

En effet, on a

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \end{pmatrix},$$

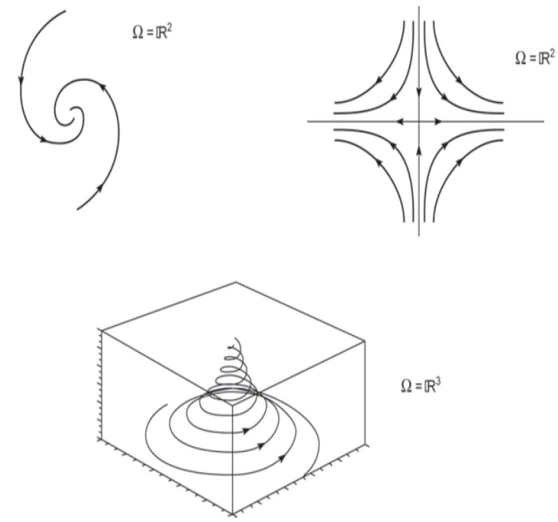

FIG. 1.4 – Trois portraits de phases.

Ici, **l' espace des états** est dans de nombreux cas **un domaine** Ω de l' espace $\mathbb{R}^n$.
l' espace de phase : Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui ont la propriété de définir complètement l' etat du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l' évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l' espace de phase ou chaque point définit un état et le point associé a cet état décrit une trajectoire, appelé également une **orbite**. Voir **Fig. 1.4**.

1.2 Différents types d'équations différentielles

Equation différentielle ordinare

Définition 1.2 *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \rightarrow x(t)$ et ses dérivées $x', x'', ..., x^{(n)}$ au point t définie par*

$$F(t, x, x', x^{''}, ..., x^{(n)}) = 0,$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Equation differentielle normale

Définition 1.3 *On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x^{''}, ..., x^{(n-1)}).$$

Equation differentielle autonome

Définition 1.4 *On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme*

$$x^{(n)} = f(x, x', x^{''}, ..., x^{(n-1)}),$$

autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité. Comme example, une equation du premier ordre autonome est donneé par

$$x^{'} = f(x),$$

1.3 Les systèmes linéaires et non linéaires

1.3.1 Systèmes linéaires

Définition 1.5 *Une EDO de type (4) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x^{(1)}(t) + a_0(t)x(t) = g(t),$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Exemple 1.4 *les équations différentielles suivantes sont linéaires*

$$(x - t)dt + 4tdx = 0,$$

$$x'' - 2x' + x = 0,$$

1.3.2 Systèmes non linéaires

Définition 1.6 *Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.*

Exemple 1.5 ***Le pendule simple** : Un pendule simple non amorti repéré par l'angle θ d'écart de sa tige (rigide) par rapport à la verticale descendante, à une énergie totale constante. Ceci se traduit, T*

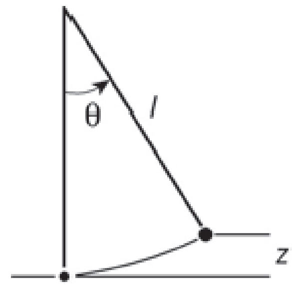

FIG. 1.5 – Le pendule simple.

représentant l' énergie cinétique et V l' énergie potentielle, par

$$\frac{1}{2}m.\nu^2 + m.g.z = \underbrace{\frac{1}{2}m.\nu^2}_{T} + \underbrace{m.l.g\,(1-\cos\theta)}_{V} = Cte,$$

tellque : m étant la masse, ν sa vitesse, l la longueur de la tige de masse nulle. Soit encore

$$\frac{1}{2}m.l^2.\dot{\theta}^2 - m.l.g.\cos\theta = Cte,$$

d'où par dérivation par rapport au temps

$$m.l^2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m.l.g.\sin\theta.\dot{\theta} = 0,$$

*Cette équation se simplifie et devient : $\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{l}\right).\sin\theta$, soit encore $\ddot{\theta} = -\sin\theta$. L' espace des états est de dimension 2. Avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on obtient $x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$. Voir **Fig. 1.5.***

1.4 Points d' équilibre d'un système non linéaire

Les systèmes linéaires possèdent un point d'équilibre unique. Mais, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre.

Exemple 1.6 *Soit le système physique linéarisé suivant*

$$x'(t) = -x(t), \quad x_0 = x(0),$$

*Le système possède un point d'équilibre unique $x = 0$. Dans le cas linéaire, le point d' équilibre est stable et les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales, décroissent vers l' état d'équilibre. Le point d'équilibre $x = 0$ est stable localement puisque toute trajectoire issue d'une condition initiale suffisamment proche converge vers cet état d'équilibre. Voir **Fig. 1.6.***

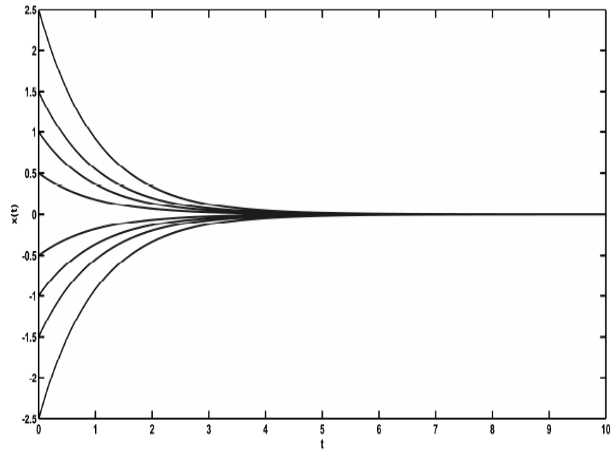

FIG. 1.6 – Point d'équilibre d'un systéme linéaire.

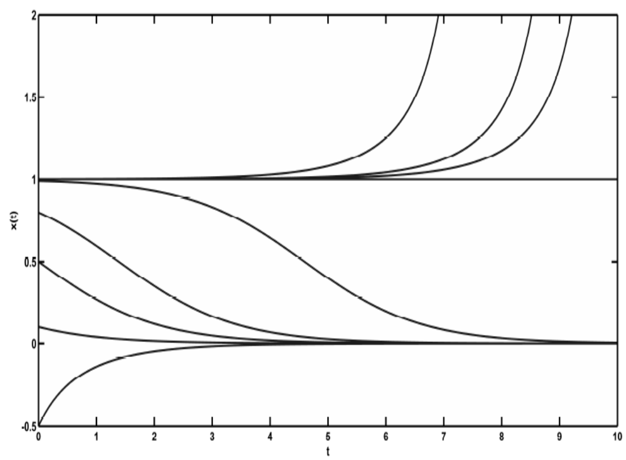

FIG. 1.7 – Points d'équilibre d'un systéme non linéaire.

Exemple 1.7 *Soit le système physique régi par l' equation différentielle suivante*

$$x'(t) = -x(t) + x^2(t), \ x_0 = x(0),$$

Le système possède deux points d'équilibre $x = 0$ *et* $x = 1$*. Dans le cas non linéaire, les deux points d'équilibre sont de nature différente. Le point* $x = 1$ *est instable constitue en quelque sorte une frontière de stabilité. L' axe est en effet divisé en deux régions de conditions initiales pour lesquelles les trajectoires sont convergentes vers l' état d'équilibre* 0 *ou sont divergentes. Voir* ***Fig. 1.7****.*

1.5 Cycles limites

Un système linéaire invariant dans le temps, pour osciller, doit avoir une paire de pôles sur l'axe imaginaire. Cette condition est évidemment très fragile vis à vis de perturbations et/ou erreurs de modélisation pouvant affecter la valeur de ces pôles. De plus, l'amplitude de l'oscillation obtenue en théorie dépend uniquement de la condition initiale. Au contraire, les systèmes non linéaires peuvent être le siège d'oscillations, (cycles limites), caractérisées par leur amplitude et leur fréquence, indépendantes de la condition initiale x_0, et sans excitation extérieure. Il est donc indispensable d'utiliser un système non linéaire si l'on souhaite réaliser en pratique une oscillation stable. Donc certains systèmes non linéaires présentent des oscillations d'amplitude et de période constante avec entrée nulle. Ces oscillations sont appelées cycles limites.

Exemple 1.8 *Soit le système suivant présenté par l' equation de Van Der Pol*

$$m.x''(t) + 2c.\left(x^2(t) - 1\right)x'(t) + k.x(t) = 0, \quad c > 0,$$

avec m, c et k sont des constantes liées au système physique.

1.6 Systèmes Dynamiques chaotiques

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre, il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière sensible de l'état initial.

Définition 1.7 *On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique :*
(a) La non-linéarité : *Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l' évolution dépend du temps.*
(b) Le déterminisme : *Un système chaotique à des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.*
(c) Sensibilité aux conditions initiales : *Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Par exemple, l'attracteur de Rôssler, l'attracteur de Lorenz. Voir* ***Figure. 1.8****.*

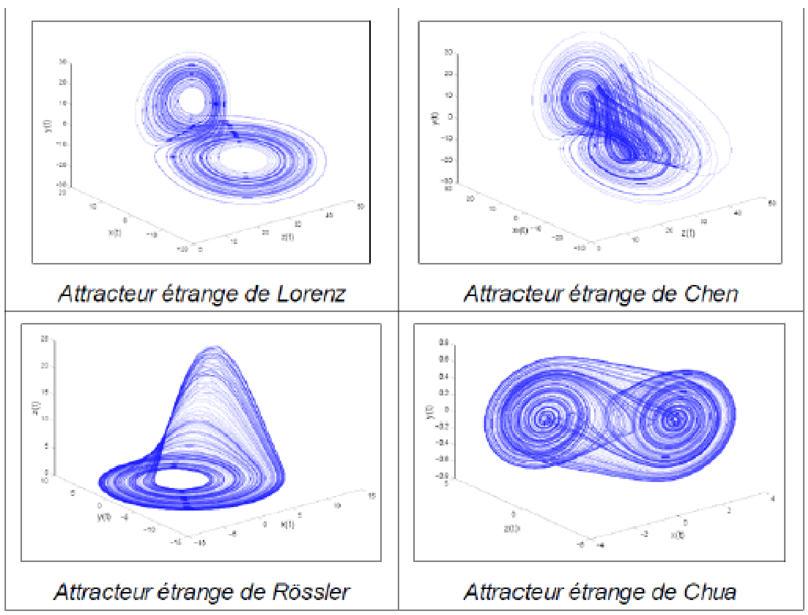

FIG. 1.8 – Quelques attracteurs étranges.

Chapitre 2

Les équations transformable aux forme de Jerky

Le système dynamique de type de jerky est une équation de la forme

$$x^{'''} = J(x, x^{'}, x^{''}),$$

avec une dépendance temporelle explicite $[7 - 8]$. Les trois premiers dérivés $(x^{'}, x^{''}, x^{'''})$ sont appelés **vélocité, accéliration**, et **jerky**, respectivement. La dynamique de jerky appartient à une sous-classe intéressant des système dynamiques, cela peut présenter un comportement régulier et chaotique comme les mouvements présenter par plusieurs exemples simple in $[2 - 3 - 4]$. La dynamique jerky peut se trouve dans plusieurs zones de physiques, par exemple, l' èquation différentielle chaotique de troisième ordre représentant un model de mouvement de **convection termique** donné dans $[1]$. En effet, la dynamique de jerky sont conceptuellement plus simple que les systèmes dynamique et montrent toutes les caractéristiques principale des champs de vecteurs tridimentionnels. En particulier, elle peuvent être considérées comme la géneralisation naturelle de la dynamique des mouvements. Donc les nouvelles méthodes d'étude du chaos sont possibles.

2.1 Quelque équations transformables aux forme de jerky

Le but essentielle de ce chapitre est l' étude des systèmes dynamique en 3-dimention. Ces systèmes sont transformables aux forme jerky.

Définition 2.1 *Un systeme de la form $x''' = J(x, x', x'')$ est appeller forme jerky.*

Proposition 2.1 *On peut transformer l'equation suivante*

$$(D) \quad \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + z, \\ z' = xz + \alpha y^2, \end{cases}$$

à la forme de jerky

$$x''' = xx'' + \alpha (x')^2 - x' + x^2,$$

telle que

$$y = -x' \quad \text{et} \quad z = -x'' - x.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y &= -x'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a

$$\begin{aligned} y' &= x + z, \\ z &= y' - x, \end{aligned}$$

telle que

$$y' = -x'',$$

danc

$$z = -x'' - x. \tag{2.2}$$

Par dérivé on obtient

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ x'' &= -y', \end{aligned}$$

par compensation de la deuxième équations de (D), nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= -x - z, \\ x''' &= -x' - z', \end{aligned}$$

par compensation de la première et la troisième équations de (D), nous obtenons

$$x''' = -x' - xz - \alpha y^2,$$

par compensation de (2.1) et (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} x''' &= -x' - x(-x'' - x) - \alpha(-x')^2, \\ x''' &= xx'' - x' + \alpha(x')^2 + x^2. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(F) \quad \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = -x + \alpha y, \\ z' = x^2 - z, \end{cases}$$

à la forme de jerky

$$x''' = x''(\alpha - 1) + x'(\alpha - 1) - x - \alpha x^2 + 2x'x, \tag{F$_1$}$$

telle que

$$y = \frac{1}{1+\alpha}(x'' + x' + x - x^2) \quad \textit{et} \quad z = \frac{1}{1+\alpha}(-x'' + \alpha x' - x + x^2).$$

Et on peut la transformer à la forme de jerky

$$y''' = (\alpha - 1)y'' + (\alpha - 1)y' - y - (y')^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha y y', \tag{F$_2$}$$

telle que

$$x = -y' + \alpha y \qquad \textit{et} \qquad z = -y'' + \alpha y' - y.$$

Preuve. Preuve de (F_1)

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + z, \\ z &= x' - y, \end{aligned}$$

$$z' = x'' - y', \tag{2.3}$$

on a

$$\begin{aligned} z' &= x^2 - z, \\ z &= x^2 - z', \end{aligned}$$

par compensation de (2.3), nous obtenons

$$z = x^2 - x'' + y',$$

par compensation de deuxième équation de (F), nous obtenons

$$z = x^2 - x'' - x + \alpha y,$$

telle que

$$y = x' - z,$$

donc

$$\begin{aligned} z &= x^2 - x'' - x + \alpha\left(x' - z\right), \\ z + \alpha z &= x^2 - x'' - x + \alpha x', \\ z\left(1 + \alpha\right) &= x^2 - x'' - x + \alpha x', \end{aligned}$$

alors

$$z = \frac{1}{1+\alpha}\left(-x'' + \alpha x' - x + x^2\right). \tag{2.4}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + z, \\ x'' &= -x + x^2 + \alpha y - z, \\ \alpha y &= x'' + x - x^2 + z, \end{aligned}$$

par compensation de (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha y &= x'' - x^2 + x + \frac{1}{1+\alpha}\left(-x'' + \alpha x' - x + x^2\right), \\ \alpha y &= x''\left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right) + \frac{\alpha}{1+\alpha}x' + x\left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right) + x^2\left(\frac{1}{1+\alpha} - 1\right), \\ \alpha y &= x''\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha}x' - x\frac{\alpha}{1+\alpha} - x^2\left(\frac{1}{1+\alpha}\right), \end{aligned}$$

donc

$$y = \frac{1}{1+\alpha}\left(x'' + x' - x - x^2\right). \tag{2.5}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + z, \\ x'' &= y' + z', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième et troisième équations de (F), nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= -x + \alpha y + x^2 - z, \\ x''' &= -x' + \alpha y' + 2x'x - z', \end{aligned}$$

par compensation de première et deuxième et troisième équations de (F) , nous obtenons

$$\begin{aligned} x''' &= -x' + \alpha(-x+\alpha y) + 2x(y+z) - x^2 + z, \\ x''' &= -x' - \alpha x + (\alpha^2+2x)y + (2x+1)z - x^2, \end{aligned}$$

par compensation de (2.4) et (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} x''' &= -x' - \alpha x + \frac{1}{1+\alpha}\left[\left(\alpha^2-1\right)x'' + \left(\alpha^2+\alpha\right)x' + \left(\alpha^2-1\right)x + \left(1-\alpha^2\right)x^2 + (2\alpha+2)\,xx'\right] - x^2, \\ x''' &= -x' - \alpha x + \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha+1}x'' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}x' + \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha+1}x \\ &\quad + \frac{(1-\alpha)(\alpha+1)}{\alpha+1}x^2 + \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+1}xx' - x^2, \\ x''' &= -x' - \alpha x + (\alpha-1)\,x'' + \alpha x' + (\alpha-1)\,x + (1-\alpha)\,x^2 + 2xx' - x^2, \\ x''' &= x''(\alpha-1) + x'(\alpha-1) - x - \alpha x^2 + 2x'x. \end{aligned}$$

■

Preuve. Preuve de (F_2)

On a

$$y' = -x + \alpha y,$$

$$x = -y' + \alpha y. \tag{2.6}$$

par dérivé la deuxième équation on obtient

$$y'' = -x' + \alpha y',$$

par compensation de première équation de (F), nous obtenons

$$y'' = -y - z + \alpha y',$$

alors

$$z = -y'' + \alpha y' - y. \tag{2.7}$$

On à

$$\begin{aligned} y' &= -x + \alpha y, \\ y'' &= -x' + \alpha y', \end{aligned}$$

par compensation de première équation de (F), nous obtenons

$$y'' = -y - z + \alpha y',$$

par dérivé on obtient

$$y''' = -y' - z' + \alpha y'',$$

par compensation de première et troisième équation de (F) , nous obtenons

$$y''' = x - \alpha y - x^2 + z + \alpha y'',$$

par compensation de (2.6) et (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
y''' &= (-y' + \alpha y) - \alpha y - (-y' + \alpha y)^2 + (-y'' + \alpha y' - y) + \alpha y'', \\
y''' &= -y' + \alpha y - \alpha y - \left((y')^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha y' y\right) - y'' + \alpha y' - y + \alpha y'', \\
y''' &= -y' + \alpha y - \alpha y - (y')^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha y' y - y'' + \alpha y' - y + \alpha y'', \\
y''' &= (\alpha - 1)\, y'' + (\alpha - 1)\, y' - y - (y')^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha y' y.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(G) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + z, \\ y' = xz - y, \\ z' = -x + y, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$x''' = (\alpha - 1)x'' + (\alpha - 1)x' - x - \alpha x^2 + x x',$$

telle que

$$y = x'' - \alpha x' + x \quad \text{et} \quad z = x' - \alpha x,$$

Preuve. On a

$$x' = \alpha x + z,$$

alors

$$z = x' - \alpha x. \tag{2.8}$$

On a

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha x + z, \\
x'' &= \alpha x' + z', \\
x'' &= \alpha x' - x + y,
\end{aligned}$$

donc

$$y = x'' - \alpha x' + x. \tag{2.9}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + z, \\ x'' &= \alpha x' + z', \end{aligned}$$

par compensation de première et troisième équation de (G) , nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha(\alpha x + z) + (-x + y), \\ x'' &= \alpha^2 x + \alpha z - x + y, \\ x'' &= \left(\alpha^2 - 1\right) x + \alpha z + y, \end{aligned}$$

par dérivé on obtient

$$x''' = \left(\alpha^2 - 1\right) x' + \alpha z' + y',$$

par compensation de première et troisième équation de (G) , nous obtenons

$$\begin{aligned} x''' &= \left(\alpha^2 - 1\right) x' + \alpha(-x + y) + (xz - y), \\ x''' &= \left(\alpha^2 - 1\right) x' - \alpha x + (\alpha - 1) y + xz, \end{aligned}$$

par compensation de (2.8) et (2.9)

$$\begin{aligned} x''' &= \left(\alpha^2 - 1\right) x' - \alpha x + (\alpha - 1)(x'' - \alpha x' + x) + x(x' - \alpha x), \\ x''' &= (\alpha - 1) x'' - (\alpha - 1)\alpha x' + x(\alpha - 1) + xx' - \alpha x^2 + \left(\alpha^2 - 1\right) x' - \alpha x, \\ x''' &= (\alpha - 1) x'' + x'\left(\alpha^2 - 1 - \alpha^2 + \alpha\right) + x(\alpha - 1 - \alpha) + xx' - \alpha x^2, \\ x''' &= (\alpha - 1) x'' + (\alpha - 1) x' - x - \alpha x^2 + xx'. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.4 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(H) \quad \begin{cases} x' = -y + z^2, \\ y' = x + \alpha y, \\ z' = x - z, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$z''' = (\alpha - 1)z'' + (\alpha - 1)z' - z - \alpha z^2 + 2z'z$$

telle que

$$x = z' + z \quad \text{et} \quad y = z^2 - z'' - z'$$

Preuve. On a

$$z' = x - z,$$
$$x = z' + z. \tag{2.10}$$

Par dérivé

$$x' = z'' + z'. \tag{2.11}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= -y + z^2, \\ y &= -x' + z^2, \end{aligned}$$

par compensation de (2.11) on obtient

$$y = -z'' - z' + z^2. \tag{2.12}$$

On a

$$\begin{aligned} z' &= x - z, \\ z'' &= x' - z', \end{aligned}$$

par compensation de première équation de (G) , nous obtenons

$$\begin{aligned} z'' &= -y + z^2 - z', \\ z''' &= -y' + 2z'z - z'', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième équation de (G) , nous obtenons

$$z''' = -(x + \alpha y) + 2z'z - z'',$$

par compensation de (2.10) et (2.12) on obtient

$$\begin{aligned} z''' &= -\left[z' + z + \alpha\left(-z'' - z + z^2\right)\right] + 2z'z - z'', \\ z''' &= -z' - z + \alpha z'' + \alpha z - \alpha z^2 + 2z'z - z'', \\ z''' &= (\alpha - 1) z'' + (\alpha - 1) z' - z - \alpha z^2 + 2z'z. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.5 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= -\alpha y, \\ y' &= x + z, \\ z' &= x + y^2 - z, \end{aligned} \right.$$

est transformable à système de jerky

$$x''' = -x'' - \alpha x' + 2\alpha x + \frac{1}{\alpha}\left(x'\right)^2, \tag{I$_1$}$$

telle que

$$y = -\frac{1}{\alpha}\, x' \qquad \text{et} \qquad z = -\frac{1}{\alpha}\, x'' - x\,.$$

Et transformable à système de jerky

$$y''' = -y'' - \alpha y' - 2\alpha y + 2yy', \tag{I$_2$}$$

telle que

$$x = \frac{1}{2}\left(y'' + y' + \alpha y - y^2\right) \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2}\left(-y'' + y' - \alpha y + y^2\right),$$

Preuve. Preuve de (I_1)

On a

$$x' = -\alpha y,$$

alors

$$y = -\frac{1}{\alpha}x'. \tag{2.13}$$

par dérivé on obtient

$$y' = -\frac{1}{\alpha}x''. \tag{2.14}$$

On a

$$\begin{aligned} y' &= x + z, \\ z &= y' - x, \end{aligned}$$

par compensation de (2.14) on obtient

$$z = -\frac{1}{\alpha}x'' - x. \tag{2.15}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= -\alpha y, \\ x'' &= -\alpha y', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième équation de (I), nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha\left(x+z\right), \\ x'' &= -\alpha x - \alpha z, \\ x''' &= -\alpha x' - \alpha z', \end{aligned}$$

par compensation de première et deuxième équation de (I)

$$\begin{aligned} x''' &= -\alpha\left(-\alpha y\right) - \alpha\left(x+y^2-z\right), \\ x''' &= \alpha^2 y - \alpha x - \alpha y^2 + \alpha z, \end{aligned}$$

par compensation de (2.13) et (2.15) on obtient

$$\begin{aligned} x''' &= \alpha^2\left(-\frac{1}{\alpha}x'\right) - \alpha x - \alpha\left(-\frac{1}{\alpha}x'\right)^2 + \alpha\left(-\frac{1}{\alpha}x'' - x\right), \\ x''' &= -\alpha x' - \alpha x + \frac{1}{\alpha}\left(x'\right)^2 - x'' - \alpha x, \\ x''' &= -x'' - \alpha x' + 2\alpha x + \frac{1}{\alpha}\left(x'\right)^2. \end{aligned}$$

■

Preuve. Preuve de (I_2)

On a

$$\begin{aligned} y' &= x+z, \\ y'' &= x'+z', \end{aligned}$$

par compensation de première et troisième équation de (I), nous obtenons

$$y'' = -\alpha y + x + y^2 - z,$$

telle que

$$x = y' - z,$$

donc

$$y'' = -\alpha y + y' - 2z + y^2,$$

$$z = \frac{1}{2}\left(-y'' + y' - \alpha y - y^2\right).$$

On à ci-dessus

$$y'' = -\alpha y + x + y^2 - z,$$

telle que

$$z = y' - x,$$

donc

$$\begin{aligned} y'' &= -\alpha y + x + y^2 - (y' - x), \\ y'' &= -\alpha y + x + y^2 - y' + x, \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(y'' + y' + \alpha y - y^2\right). \tag{2.17}$$

On a

$$\begin{aligned} y'' &= -\alpha y + x + y^2 - z, \\ y''' &= -\alpha y' + x' + 2y'y - z', \end{aligned}$$

par compensation de première et troisième équation de (I), nous obtenons

$$y''' = -\alpha y' - \alpha y + 2y'y - x - y^2 + z,$$

par compensation de (2.16) et (2.17) on obtient

$$\begin{aligned} y''' &= -\alpha y' - \alpha y + 2y'y - \frac{1}{2}\left(y'' + y' - y^2 + \alpha y\right) - y^2 + \frac{1}{2}\left(-y'' + y' + y^2 - \alpha y\right), \\ y''' &= -y'' - \alpha y' - 2\alpha y + 2yy' \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(J) \quad \begin{cases} x' = \alpha z, \\ y' = -\beta y + z, \\ z' = -x + y + y^2, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$y''' = -\beta y'' + (1 - \alpha)y' - \alpha\beta y + 2yy',$$

telle que

$$x = -y'' - \beta y' + y + y^2 \quad \text{et} \quad z = y' + \beta y.$$

Preuve. On a

$$z' = -x + y + y^2,$$

donc

$$x = -z' + y + y^2,$$

par dérivé la deuxième équation de (J) , on obtient

$$z' = y'' + \beta y',$$

donc

$$x = -y^{''} - \beta y' + y + y^2. \tag{2.18}$$

On a

$$z = y' + \beta y. \tag{2.19}$$

On a

$$y'' = -\beta y' + z',$$

par compensation de la troisième équation de (J) , nous obtenons

$$y'' = -\beta y' - x + y + y^2,$$

par dérivé on obtient

$$y''' = -\beta y'' - x' + y' + 2y'y,$$

par compensation de la première équation de (J) , nous obtenons

$$y''' = -\beta y'' - \alpha z + y' + 2y'y,$$

par compensation de(2.19) , nous obtenons

$$\begin{aligned} y''' &= -\beta y'' - \alpha(y' + \beta y) + y' + 2y'y, \\ y''' &= -\beta y'' - \alpha y' - \alpha\beta y + y' + 2y'y \\ y''' &= -\beta y'' + (1-\alpha)y' - \alpha\beta y + 2y'y \end{aligned}$$

■

Proposition 2.7 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(K) \quad \begin{cases} x' = xy - z, \\ y' = x - y, \\ z' = x + \alpha z, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$y''' = (\alpha - 1)y'' + (\alpha - 1)y' - y + (2 - \alpha)y'y - \alpha y^2 + y''y + y'^2,$$

telle que

$$x = y' + y \qquad \textit{et} \qquad z = y'y + y^2 - y'' - y'$$

Preuve. On a

$$y' = x - y,$$

donc

$$x = y' + y. \tag{2.21}$$

par dérivé

$$x' = y'' + y', \tag{2.22}$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= xy - z, \\ z &= xy - x', \end{aligned}$$

par compensation de (2.21) et (2.22) on obtient

$$z = (y' + y)\, y - (y'' + y')\,,$$

$$z = -y'' - y' + y'y + y^2. \tag{2.23}$$

On a

$$\begin{aligned} y' &= x - y, \\ y'' &= x' - y', \end{aligned}$$

par compensation de première équation de (K), nous obtenons

$$y'' = xy - z - y',$$

par dérivé

$$y''' = x'y + xy' - z' - y'',$$

par compensation de première et troisième équation de (K), nous obtenons

$$\begin{aligned} y''' &= (xy - z\ )\, y + xy' - (x + \alpha z) - y'', \\ y''' &= xy^2 - zy + xy' - x - \alpha z - y'', \end{aligned}$$

par compensation de (2.21) et (2.23)

$$\begin{aligned} y''' &= (y'+y)\,y^2 - \left(-y''-y'+y'y+y^2\right)y + (y'+y)\,y' - (y'+y) \\ &\quad -\alpha\left(-y''-y'+y'y+y^2\right) - y'', \\ y''' &= y'y^2 + y^3 - y'y^2 - y^3 + y''y + yy' + (y')^2 + yy' - y' - y \\ &\quad -\alpha y'y - \alpha y^2 + \alpha y'' + \alpha y' - y'', \\ y''' &= (\alpha-1)\,y'' + (\alpha-1)\,y' - y + (2-\alpha)\,y'y - \alpha y^2 + y''y + (y')^2 . \end{aligned}$$

■

Proposition 2.8 *On peut transformer l' èquation suivant*

$$(L)\qquad \begin{cases} x' = y + \alpha z, \\ y' = \beta x^2 - y, \\ z' = \gamma - x, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$x''' = -\,x'' - \alpha x' \;+ 2\beta x'x - \alpha x \;+ \alpha\gamma, \tag{L$_1$}$$

telle que

$$y = -\,x'' - \alpha x \;+ \beta x^2 + \alpha\gamma \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{\alpha}\left(x'' + x' + \alpha x - \beta x^2 - \alpha\gamma\right).$$

Et transformable à la forme de jerky

$$z''' = -\beta\gamma^2 - \beta\,(z')^2 + 2\beta\gamma z - z'' - \alpha z - \alpha z', \tag{L$_2$}$$

telle que

$$x = \gamma - z' \qquad \text{telle que} \quad y = -z'' - \alpha z\,,$$

Preuve. Preuve de (L_1)

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha z, \\ x'' &= y' + \alpha z', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième et troisième équation de (L), nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= \beta x^2 - y + \alpha\,(\gamma - x)\,, \\ x'' &= \beta x^2 - y + \alpha\gamma - \alpha x, \end{aligned}$$

alors

$$y = -x'' - \alpha x + \beta x^2 + \alpha\gamma. \quad (2.24)$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha z, \\ z &= \frac{1}{\alpha}(x' - y), \end{aligned}$$

par compensation de (2.24) on obtient

$$z = \frac{1}{\alpha}\left[x' - \left(-x'' - \alpha x + \beta x^2 + \alpha\gamma\right)\right],$$

alors

$$z = \frac{1}{\alpha}\left(x'' + x' + \alpha x - \beta x^2 - \alpha\gamma\right). \quad (2.25)$$

On a

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha z, \\ x'' &= y' + \alpha z', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième et troisième équation de (L), nous obtenons

$$\begin{aligned} x'' &= \beta x^2 - y + \alpha(\gamma - x), \\ x'' &= \beta x^2 - y + \alpha\gamma - \alpha x, \\ x''' &= 2\beta x' x - \beta x^2 + y - \alpha x' \end{aligned}$$

par compensation de (2.24) on obtient

$$\begin{aligned} x''' &= 2\beta x' x - \beta x^2 + \left(-x'' - \alpha x + \beta x^2 + \alpha\gamma\right) - \alpha x', \\ x''' &= -x'' - \alpha x' + 2\beta x' x - \alpha x + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

■

Preuve. Preuve de (L_2)

On a

$$z' = \gamma - x,$$

alors

$$x = \gamma - z'. \quad (2.26)$$

par dérivé on obtient

$$x' = -z'', \quad (2.27)$$

on a

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha z, \\ y &= x' - \alpha z, \end{aligned}$$

par compensation (2.27) on à

$$y = -z'' - \alpha z. \tag{2.28}$$

on à ci-dessus

$$z'' = -x',$$

par compensation de la première équation de (L), nous obtenons

$$\begin{aligned} z'' &= -y - \alpha z, \\ z''' &= -y' - \alpha z', \end{aligned}$$

par compensation de la deuxième et troisième équation de (L), nous obtenons

$$\begin{aligned} z''' &= -\left(\beta x^2 - y\right) - \alpha z', \\ z''' &= -\beta x^2 + y - \alpha z', \end{aligned}$$

par compensation de (2.26) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} z''' &= -\beta\left(\gamma - z'\right)^2 + \left(-z'' - \alpha z\right) - \alpha z', \\ z''' &= -\beta\left(\gamma^2 + \left(z'\right)^2 - 2\gamma z'\right) - z'' - \alpha z - \alpha z', \\ z''' &= -z'' - \alpha z' - \beta\left(z'\right)^2 - \beta\gamma^2 - +2\beta\gamma z' - \alpha z, \\ z''' &= -z'' + z'\left(2\beta\gamma - \alpha\right) - \alpha z - \beta\left(z'\right)^2 - \beta\gamma^2. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.9 *L' equation suivante*

$$(M) \quad \begin{cases} x' = -z, \\ y' = -x^2 - y, \\ z' = \alpha + \beta x + y, \end{cases}$$

est transformable à système de jerky

$$x''' = -x'' - \beta x' - \beta x + x^2 - \alpha,$$

telle que

$$y = -x'' - \alpha - \beta x \quad \textit{et} \quad z = -x'.$$

Preuve. On a

$$z' = \alpha + \beta x + y,$$

alors

$$y = -\alpha - \beta x + z', \tag{2.29}$$

par dérivé la première équation de (M), nous obtenons

$$z' = -x'',$$

par compensation en (2.29) , nous obtenons

$$y = -\alpha - \beta x - x''. \tag{2.30}$$

On a

$$x' = -z,$$

donc

$$z = -x'. \tag{2.31}$$

On à ci-dessus

$$x'' = -z',$$

par compensation de troisième équation de (M) ,nous ontenons

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha - \beta x - y, \\ x''' &= -\beta x' - y', \end{aligned}$$

par compensation de deuxième équation de (M) ,nous ontenons

$$x''' = -\beta x' + x^2 + y,$$

par compensation de (2.30) , on obtient

$$\begin{aligned} x''' &= -\beta x' + x^2 - \alpha - \beta x - x'', \\ x''' &= -x'' - \beta x' - \beta x + x^2 - \alpha. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1 *Noton que la dynamique Jerky de catégorie (I) permet de converter les uns aux autres par la transformation $y = (-\frac{1}{\alpha})x'$, comme le premier composante [ou $x = \frac{1}{2}(y'' + y + \alpha y - y^2)$ pour l'inverse], avec $\alpha \neq 0$, doit tenir. Ici la transformation correspandante est inversible, parce que* *les terms nonlineair contenant* x *n'apparaissent pas dans la dynamique jerky de* x*. La transformation de la dynamique jerky de catégorie* (L) *est le méme type que pour le catécorie* (I)*. Comme déjà mentionner, le systeme dynamique* (F) *et* (H) *posséder une dynamique jerky identique en dehores des étiquettes de la variable. Par conséquent, ces systèmes doit etre équivalents et il doit* y *avoire une transformation inversible entre les deux variables* (x, y, z) *de modèle* (H) *par* (ξ, η, ζ)*, la transformation correspandante* $T_{FH} : (x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$ *est donnèe par*

$$\xi = x + y + z, \quad \eta = x - (1+\alpha)y, \qquad \zeta = x.$$

Chapitre 3

Les équations transformables aux forme de hyperjerky

Par extention, un système **hyperjerky** est un système dynamique donnée par une équation différentielle ordinaire du $n^{ème}$-ordre avec $n \geq 4$ dérivant l'évolution temporelle d'une seule variable scalaire de la forme (pour $n = 4$)

$$x^{(4)} = H(x, x', x'', x^{'''}),$$

à été appellée **snap**, pour $n = 5$ est appellé **crackle**, pour $n = 6$ est appellé **pop**. Généralement, il n'ya pas des nom connu pour $n \geq 7$. L' étude du cas $n = 4$ est donnée dans ce chapitre.

3.1 Transformation d'un systéme en 4-D à une forme de hyperjerky

Cosidérons le système en $4 - D$ de la forme

$$\begin{cases} x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u + n_1(x), \\ y' = c_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u + n_2(x, y, z, u), \\ z' = c_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u + n_3(x, y, z, u), \\ u' = c_4 + b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u + n_4(x, y, z, u), \end{cases} \tag{3.1}$$

où les fonctions $n_1(x)$ et $(n_i(x, y, z, u))_{2 \leq i \leq 4}$ sont supposés être au moins de classe C^2 dans leurs arguments correspondants.

Nous fixons $i = 2, 3, 4$ tel que

$$\begin{aligned}
n_{11}(x) &= \frac{\partial n_1(x)}{\partial x}, \\
n_{111}(x) &= \frac{\partial^2 n_1(x)}{\partial x^2}, \\
n_{i1}(x,\ y,\ z,\ u) &= \frac{\partial n_i(x,\ y,\ z,\ u)}{\partial x}, \\
n_{i2}(x,\ y,\ z,\ u) &= \frac{\partial n_i(x,\ y,\ z,\ u)}{\partial y}, \\
n_{i3}(x,\ y,\ z,\ u) &= \frac{\partial n_i(x,\ y,\ z,\ u)}{\partial z}, \\
n_{i4}(x,\ y,\ z,\ u) &= \frac{\partial n_i(x,\ y,\ z,\ u)}{\partial u},
\end{aligned}$$

nous dérivons la forme hyperjerky de systeme (3.1) seulement par rappot à x. La même logique est particulièrement correcte pour y, z et u. Pour cet objectif, supposant que

$$b_{12} \neq 0,$$

puis à partir de la première équation de (3.1), on à

$$y\left(x, x^{'}, z, u\right) = -\frac{1}{b_{12}}\left(-x^{'} + c_1 + n_1(x) + b_{11}x + b_{13}z + b_{14}u\right),$$

ainsi

$$y'\left(x, x', x'', z, u\right) = f_1 z + f_2 x + f_3 u + f_4 + f_5,$$

avec

$$\begin{cases}
f_1 = \frac{b_{13}^2 b_{32} - b_{12}b_{13}b_{33} - b_{12}b_{14}b_{43} + b_{13}b_{14}b_{42}}{b_{12}^2}, \\
f_2 = \frac{b_{11}b_{13}b_{32} - b_{12}b_{13}b_{31} + b_{11}b_{14}b_{42} - b_{12}b_{14}b_{41}}{b_{12}^2}, \\
f_3 = \frac{b_{14}^2 b_{42} - b_{12}b_{13}b_{34} + b_{13}b_{14}b_{32} - b_{12}b_{14}b_{44}}{b_{12}^2}, \\
f_4\left(x, x', z, u\right) = -\frac{\left[b_{13}\left(c_3 + n_3(x,\ y,\ z,\ u) - \frac{b_{32}(c_1 + n_1(x))}{b_{12}}\right) + b_{14}\left(c_4 + n_4(x,\ y,\ z,\ u) - \frac{b_{42}(c_1 + n_1(x))}{b_{12}}\right)\right]}{b_{12}}, \\
f_5\left(x, x', x''\right) = -\frac{b_{11}b_{12} + b_{13}b_{32} + b_{14}b_{42} + b_{12}n_{11}(x)}{b_{12}^2}x' + \frac{1}{b_{12}}x''.
\end{cases} \tag{3.2}$$

en égalant la formule pour $y' = y'\left(x, x', x'', z, u\right)$ avec la deuxième équation de (3.1), nous obtenons

$$\left(f_1 - b_{23} + \frac{b_{13}b_{22}}{b_{12}}\right) z = n_2 - f_4 - f_6, \tag{3.3}$$

où

$$f_6\left(x, x', x''\right) = \frac{f_2 b_{12} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}}{b_{12}} x - \frac{b_{22}}{b_{12}} x' - c_2 + \frac{b_{22} c_1}{b_{12}} + \frac{b_{22}}{b_{12}} n_1(x) + f_5, \tag{3.4}$$

nous remarquons que le deuxième membre de (3.3) dépend de z dans la partie $n_2 - f_4$, donc, si nous supposons que

$$n_2(x,\ y,\ z,\ u) - f_4\left(x,\ x', z,\ u\right) = g_1(x,\ u),$$

c'est-à-dire, cette partie ne dépend pas le variable z, avec g_1 étant une fonction arbitraire des argument indiqués, alors

$$z\left(x,\ x',\ x''\right) = f_7\ f_6\left(x,\ x',\ x''\right), \tag{3.5}$$

si f_7 donné par

$$f_7 = \frac{b_{12}^2}{b_{12}^2 b_{23} - b_{13}^2 b_{32} - b_{12} b_{13} b_{22} + b_{12} b_{13} b_{33} + b_{12} b_{14} b_{43} - b_{13} b_{14} b_{42}}, \tag{3.6}$$

avec la condition

$$b_{12}^2 b_{23} - b_{13}^2 b_{32} - b_{12} b_{13} b_{22} + b_{12} b_{13} b_{33} + b_{12} b_{14} b_{43} - b_{13} b_{14} b_{42} \neq 0, \tag{3.7}$$

la fonction g_1 ne dépend pas de y puisque y dépend lui-même de z. Par conséquent la codition

$$n_2 - f_4 = g_1(x,\ u),$$

est équivalent à

$$\left(b_{12} n_2 + b_{13} n_3 + b_{14} n_4\right)(x,\ y,\ z,\ u) = b_{12} g_1(x,\ u) - b_{12} f_8(x), \tag{3.8}$$

où

$$f_8(x) = \frac{\left[b_{13}\left(c_3 - \frac{b_{32}(c_1 + n_1(x))}{b_{12}}\right) + b_{14}\left(c_4 - \frac{b_{42}(c_1 + n_1(x))}{b_{12}}\right)\right]}{b_{12}}, \tag{3.9}$$

selon (3.5), on à

$$z' = f_7\left(\frac{1}{b_{12}} x''' + f_{10}(x) x'' + f_9(x,\ x') x'\right),$$

où

$$\begin{cases} f_9(x,\ x') = \frac{b_{12}(f_2 - b_{21}) + b_{22} b_{11} + b_{22} n_{11}(x) - n_{111}(x)\ x'}{b_{12}}, \\ \\ f_{10}(x) = -\frac{b_{22}}{b_{12}} - \frac{(b_{11} b_{12} + b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42} + b_{12} n_{11}(x))}{b_{12}^2}, \end{cases} \tag{3.10}$$

en égalant la formule pour z' avec la troixiéme équation de (3.1), nous obtenons

$$-\frac{b_{12} b_{34} - b_{14} b_{32}}{b_{12}} u = -f_{11} - f_{12} - \frac{f_7}{b_{12}} x''', \tag{3.11}$$

où

$$\begin{cases} f_{11}(x,\ x',\ x'') = \frac{b_{11}b_{32}-\ b_{12}b_{31}}{b_{12}}x + \frac{-b_{32}\ +\ \ f_7\ f_9\ (x,\ x')\ b_{12}}{b_{12}}x' + f_7\ f_{10}(x)x'', \\ \\ f_{12}(x,\ x',\ x'',\ u) = -n_3(x,\ y,\ z,\ u) - c_3 + \frac{b_{32}(c_1+\ n_1(x)+\ f_6\ f_7\ b_{13})}{b_{12}} - f_6\ f_7 b_{33}, \end{cases} \tag{3.12}$$

nous remarquons que le deuxième membre de (3.11) dépend de u dans la partie $-f_{12}$. Donc si nous supposons que

$$-f_{12} = g_2(x,\ z),$$

c'est-à-dire, cette partie ne dépend pas du variable u, avec g_2 étant une fonction arbitraire des argument indiqués. Alors

$$u = \frac{f_7 x^{'''} + b_{12}\ f_{11}\left(x,\ x^{'},\ x^{''}\right) + b_{12}\ f_{12}\left(x,\ x^{'},\ x^{''}\right)}{b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32}}, \tag{3.13}$$

avec la condition

$$b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} \neq 0, \tag{3.14}$$

par conséquent la condition $-f_{12} = g_2(x, z)$ est équivalent à

$$-\ n_3(x,\ y,\ z,\ u) - c_3 + \frac{b_{32}\left(c_1 + n_1(x) + f_6\ f_7 b_{13}\right)}{b_{12}} - f_6\ f_7 b_{33} = g_2(x,\ z), \tag{3.15}$$

selon (3.13), on à

$$u' = f_{13}x^{(4)} + f_{14},$$

où

$$\begin{cases} f_{13} = \frac{f_7}{b_{12}b_{34}\ -\ b_{14}b_{32}}, \\ \\ f_{14}\left(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}\right) = \frac{b_{12}\ f_{11}^{'}\left(x,\ x',\ x^{''},\ x^{'''}\right)}{b_{12}b_{34}\ -\ b_{14}b_{32}} + \frac{b_{12}\ f_{12}^{'}\left(x,\ x',\ x^{''},\ x^{'''}\right)}{b_{12}b_{34}\ -\ b_{14}b_{32}}, \end{cases} \tag{3.16}$$

parceque

$$\frac{df_{11}\left(x,\ x^{'},\ x^{''}\right)}{dt} = f_{11}^{'}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right),$$

et puisque

$$f_{12} = -g_2(x,\ z),$$

alors

$$\frac{df_{12}(x,y,z,u)}{dt} = f_{12}^{'}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right),$$

encore, en égalant la formule pour u' avec la quatriéme equation de (3.1), nous obtenons

$$x^{(4)} = \frac{f_{15}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right) + f_{16}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right)}{f_{13}} = H\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right), \tag{3.17}$$

où

$$\begin{cases} f_{15}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''},\ u\right) = c_4 + b_{41}x + b_{43}\ f_7\ f_6 + \rho_0, \\ f_{16}\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''},\ u\right) = b_{42}\left[-\frac{1}{b_{12}}\left(-x^{'} + c_1 + n_1(x) + b_{11}x + \rho_1\right)\right], \\ \rho_0\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''},\ u\right) = b_{44}\left(\frac{f_7 x^{''''} + \ b_{12}\ f_{11} + \ b_{12}\ f_{12}}{b_{12}b_{34}\ -\ b_{14}b_{32}}\right) + n_4 - f_{14}, \\ \rho_1\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''},\ u\right) = b_{13}\ f_7\ f_6 + b_{14}\left(\frac{f_7 x^{'} + \ b_{12}\ f_{11}\ + b_{12}\ f_{12}}{b_{12}b_{34}\ -\ b_{14}b_{32}}\right). \end{cases} \tag{3.18}$$

Enfin, la forme (3.17) est la forme hyperjerky correspondante du systéme dynamique $4-D$. Plusieurs exemples chaotique de mouvement d'hyperjerk ont été étudiés dans la littérature. Certains d'entre eux sont énumérés dans $[6]$ avec de nombreuses illustrations. Par exemple, tous les oscillateurs forcés périodiquement et certains des oscillateurs couplés sont équivalents à une forme instantanée telle que montrée dans $[9]$. Cela comprend le pendule forcé sans frottement et l'oscillateur non amorti périodiquement forcé avec une force de rappel cubique. De même, le même type de système avec amortissement a été étudié dans $[4]$. Les exemples les plus simple des systèmes hyperjerky et chaotique ont été étudié dans $[6]$. Ceux-ci incluent les systèmes d'accrochage avec une fonction non linéaire et le cas chaotique dissipatif le plus simple avec une terme non linéaire quadratique unique est donnée par

$$x^{'''} + 6x^{''} = 1 - x^2.$$

3.2 L'expression de la transformation

Dans cette partie, nous dérivons une expression rigoureuse de la transformation entre le système dynamique $4-D$ donnèe par (3.1) et la formulaire hyperjerky (3.17). En effet la procédure ci-dessus définit une transformation inversible

$$T = T(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}),$$

à condition que

$$\begin{aligned} b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} &\neq 0 \text{ et } b_{12} \neq 0 \\ b_{12}^2 b_{23} - b_{13}^2 - b_{12}b_{13}b_{22} + b_{12}b_{13}b_{33} + b_{12}b_{14}b_{43} - b_{13}b_{14}b_{42} &\neq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} g_2(x,z) = -n_3 - c_3 + \frac{1}{b_{12}} b_{32}(c_1 + n_1(x) + f_6 f_7 b_{13}) - f_6 f_7 b_{33}, \\ g_1(x,u) = n_2 - f_4, \end{cases}$$

où g_1 et g_2 sont fonctions arbitraires de l'argument indiqué. La transformation $T\left(x,\ x^{'},\ x^{''},\ x^{'''}\right)$ est défini par

$$\begin{cases} T_1(x,y,z,u) = x, \\ T_2(x,y,z,u) = x^{'} = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + n_1(x), \\ T_3(x,y,z,u) = x^{''} = f_{17}(x,y) + f_{18}(x,z,u) + f_{19}(x,y,z,u), \\ T_4(x,y,z,u) = x^{'''} = \Psi_1 + \Psi_2, \end{cases} \tag{3.20}$$

telle que

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= f_{20}x^3 + f_{21}x^2y + f_{22}x^2 + f_{23}xy + f_{24}xz + f_{25}xu, \\ \Psi_2 &= f_{26}x + f_{27}y^2 + f_{28}yz + f_{29}yu + f_{30}y + f_{31}z + f_{32}u + f_{33}, \end{aligned}$$

et son inverse est défini par

$$\begin{cases} T_4^{-1}\left(x,x^{'},x^{''},x^{'''}\right) = x, \\ \\ T_4^{-1}\left(x,x^{'},x^{''},x^{'''}\right) = u = \frac{f_7\ x''' + b_{12}\ f_{11}(x,\ x',\ x'') + b_{12}\ f_{12}(x,\ x',\ x'')}{b_{12}b_{34} -\ b_{14}b_{32}}, \\ \\ T_3^{-1}\left(x,x^{'},x^{''},x^{'''}\right) = z = f_7\ f_6\left(x,x^{'},x^{''}\right), \\ \\ T_2^{-1}\left(x,x^{'},x^{''},x^{'''}\right) = y = \frac{1}{b_{12}}\left(-x' + c_1 + n_1(x) + b_{11}x + b_{13}z + b_{14}u\right), \end{cases} \tag{3.21}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}
&f_{17} = \left(b_{11}^{2} + n_{11}(x) b_{11} + b_{12} b_{21}\right) x + \left(b_{11} b_{12} + b_{12} b_{22} + b_{12} n_{11}(x)\right) y,\\
&f_{18} = \left(b_{11} b_{13} + b_{12} b_{23} + b_{13} n_{11}(x)\right) z + \left(b_{11} b_{14} + b_{12} b_{24} + b_{14} n_{11}(x)\right) u,\\
&f_{19} = \left(b_{11}(c_1 + n_1(x)) + b_{12}\left(c_2 + n_2(x,y,z,u) + n_{11}(x)(c_1 + n_1(x))\right)\right),\\
&f_{20} = b_{11}^{2} n_{111}(x),\\
&f_{21} = b_{11} b_{12} n_{111}(x),\\
&f_{22} = \xi_1 + \xi_2,\\
&f_{23} = \xi_3 + \xi_4,\\
&f_{24} = b_{12} b_{23} n_{11}(x) + b_{13} b_{33} n_{11}(x) + b_{14} b_{43} n_{11}(x) + b_{11} b_{13} n_{111}(x),
\end{aligned}\right. \tag{3.22}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&f_{25} = b_{12} b_{24} n_{11} + b_{13} b_{34} n_{11} + b_{14} b_{44} n_{11} + b_{11} b_{14} n_{111},\\
&f_{26} = \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 + \xi_9,\\
&f_{27} = b_{21}^{2} n_{111},\\
&f_{28} = b_{12} b_{13} n_{111},\\
&f_{29} = b_{12} b_{14} n_{111},\\
&f_{30} = \xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12},\\
&f_{31} = \xi_{13} + \xi_{14},\\
&f_{32} = \xi_{15} + \xi_{16},\\
&f_{33} = \xi_{17} + \xi_{18} + \xi_{19} + \xi_{20},
\end{aligned}\right. \tag{3.23}$$

où

$$\begin{cases} \xi_1 = b_{11}(n_{11}^2 + b_{11}n_{11} + c_1 n_{111} + n_1 n_{111})(x), \\ \xi_2 = b_{11}n_{111}(x)(c_1 + n_1(x)) + (b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31} + b_{14}b_{41})n_{11}(x), \\ \xi_3 = b_{12}(n_{11}^2(x) + b_{11}n_{11}(x) + (c_1 + n_1(x))n_{111}(x)), \\ \xi_4 = (b_{12}b_{22} + b_{13}b_{32} + b_{14}b_{42})n_{11}(x) + b_{11}b_{12}n_{111}(x), \\ \xi_5 = (c_1 + n_1(x))(n_{11}^2(x) + b_{11}n_{11}(x) + (c_1 + n_1(x))n_{111}(x)), \\ \xi_6 = b_{11}(b_{11}^2 + (b_{11} + c_1 + n_1)n_{11}(x) + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}(x, y, z, u)), \\ \xi_7 = b_{21}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b_{31}(b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_8 = b_{41}(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{12}n_{24}) + b_{12}n_{11}(x)(c_2 + n_2), \\ \xi_9 = b_{13}n_{11}(x)(c_3 + n_3(x, y, z, u)) + b_{14}n_{11}(c_4 + n_4(x, y, z, u)), \\ \xi_{10} = b_{12}(b_{11}^2 + n_{11}b_{11} + c_1 n_{11} + n_1 n_{11} + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}), \end{cases} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{cases} \xi_{11} = b_{22}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b_{32}(b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{12} = b_{42}(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{12}n_{24}) + b_{12}n_{111}(c_1 + n_1), \\ \xi_{13} = b_{23}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b_{33}(b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{14} = b_{43}(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{12}n_{24}) + b_{13}n_{111}(c_1 + n_1), \\ \xi_{15} = b_{24}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b_{34}(b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{16} = b_{44}(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{12}n_{24}) + b_{14}n_{111}(c_1 + n_1), \\ \xi_{17} = (c_1 + n_1)(b_{11}^2 + n_{11}b_{11} + c_1n_{11} + n_1n_{11} + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}), \\ \xi_{18} = (c_2 + n_2(x,y,z,u))(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,y,z,u)), \\ \xi_{19} = (c_4 + n_4(x,y,z,u))(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{12}n_{24}(x,y,z,u)), \\ \xi_{20} = (c_3 + n_3(x,y,z,u))(b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,y,z,u)). \end{cases} \tag{3.25}$$

Notez que la transformation inverse existe depuis la procérure décrite dans la seconde transforme du système dynamique $4-D$ donnèe par (3.1) à la forme hyperjerque donnèe par (3.17).

3.3 Exemples d'une dynamique de type hyperjerky

En utilisant la méthode ci-dessus, nous pouvons prouver que tout système dynamique de la forme fonctionnelle

$$\begin{cases} x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u + n_1(x), \\ y' = c_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u + n_2(x,y,z,u), \\ z' = c_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u + n_3(x,y,z,u), \\ u' = c_4 + b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u + n_4(x,y,z,u), \end{cases} \tag{3.26}$$

peut être réduit à dynamique de hyperjerky de la forme

$$x'''' = H\left(x, x', x'', x'''\right).$$

si les condition suivant vérifient

$$b_{12} \neq 0,\ b_{23} \neq 0,\ b_{34} \neq 0. \tag{3.27}$$

c'est à dire $b_{13} = b_{14} = b_{24} = 0$ dans système (3.1). Dabord, nous remarquons que si n_2 et n_3 ne dépend pas de z et u. Respectivement, ensuite il n'est pas nécessaire de considérer la fonction g_1 et g_2 défini ci-dessus. Dans ce cas, on à

$$y(x,\ x') = -\frac{1}{b_{12}}\left(-x^{'} + c_1 + n_1(x) + b_{11}x\right),$$

ainsi

$$y^{'}(x, x', x^{''}) = f_5 = -b_{11}b_{12} + \frac{b_{12}n_{11}(x)}{b_{12}^2}x^{'} + \frac{1}{b_{12}}x^{''},$$

et

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0, \qquad f_4 = 0,$$

également

$$z\left(x, x^{'}, x^{''}\right) = f_7\ f_6,$$

où

$$f_6 = \left(\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{12}}\right)x - \frac{b_{22}}{b_{12}}x^{'} - c_2 + \frac{b_{22}c_1}{b_{12}} + \frac{b_{22}}{b_{12}}n_1(x) + f_5,$$

$$f_7 = \frac{1}{b_{23}}, f_8(x) = 0,$$

d'où

$$z' = f_7\left(\frac{1}{b_{12}}x^{'''} + f_{10}(x)x^{''} + f_9x^{'}\right),$$

où

$$f_9 = \left(\frac{b_{12}(f_2 - b_{21}) + b_{22}b_{11} + b_{22}n_{11}(x) - n_{111}(x)x^{'}}{b_{12}}\right),$$

et

$$f_{10}(x) = \left(-\frac{b_{22}}{b_{12}} - \frac{(b_{11} + n_{11}(x))}{b_{12}}\right),$$

en égalant la formule pour z' avec la troixiéme equation de (3.26), nous obtenons

$$u = \frac{f_7x^{'''} + b_{12}f_{11} + b_{12}f_{12}}{b_{12}b_{34}},$$

où

$$f_{11} = \frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{12}}x + \frac{-b_{32} + f_7f_9(x,\ x')b_{12}}{b_{12}}x^{'} + f_7f_{10}(x)x^{''},$$

et

$$f_{12} = -n_3 - c_3 + \frac{b_{32}(c_1 + n_1(x))}{b_{12}} - f_6f_7b_{33},$$

donc nous avons

$$u' = f_{13}x^{(4)} + f_{14},$$

où

$$f_{13} = \frac{f_7}{b_{12}b_{34}} \quad \text{et} \quad f_{14} = \frac{f'_{11}}{b_{34}} + \frac{f'_{12}}{b_{34}},$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= \frac{f_{15} + f_{16}}{f_{13}} \\ &= H\left(x, x', x'', x'''\right), \end{aligned}$$

où

$$f_{15} = c_4 + b_{41}x + b_{43}f_7f_6 + \rho_0,$$

et

$$f_{16} = b_{42}\left(-\frac{1}{b_{12}}(-x' + c_1 + n_1(x) + b_{11}x)\right),$$

avec

$$\rho_0 = b_{44}\left(\frac{f_7x''' + b_{12}f_{11} + b_{12}f_{12}}{b_{12}b_{34}}\right) + n_4 - f_{14},$$

dans ce cas, l'expression de la transformation $T = T(x, x', x'', x''')$ est donnée par

$$\begin{cases} T_1(x, y, z, u) = x, \\ T_2(x, y, z, u) = x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + n_1(x), \\ T_3(x, y, z, u) = x'' = f_{17}(x, y) + f_{18}(x, z, u) + f_{19}(x, y, z, u), \\ T_4(x, y, z, u) = x''' = \Psi_1 + \Psi_2, \end{cases} \tag{3.28}$$

telle que

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= f_{20}x^3 + f_{21}x^2y + f_{22}x^2 + f_{23}xy + f_{24}xz, \\ \Psi_1 &= f_{26}x + f_{27}y^2 + f_{30}y + f_{31}z + f_{32}u + f_{33}, \end{aligned}$$

et son inverse est défini par

$$\begin{cases} T_1^{-1}(x, x', x'', x''') = x, \\ T_4^{-1}(x, x', x'', x''') = u, \\ T_3^{-1}(x, x', x'', x''') = z, \\ T_2^{-1}(x, x', x'', x''') = y, \end{cases} \tag{3.29}$$

telle que

$$\begin{aligned}
u &= \frac{f_7 x''' + b_{12}\ f_{11}(x,\ x',\ x'') \ +\ b_{12}\ \ f_{12}(x,\ x',\ x'')}{b_{12} b_{34}}, \\
z &= f_7\ f_6(x, x', x''), \\
y &= -\frac{1}{b_{12}}\,(-x' + c_1 + n_1(x) + b_{11} x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases}
f_{17} = (b_{11}^2 + n_{11}(x) b_{11} + b_{12} b_{21}) x + (b_{11} b_{12} + b_{12} b_{22} + b_{12} n_{11}(x)) y, \\
f_{18} = b_{12} b_{23} z, \\
f_{19} = (b_{11}(c_1 + n_1(x)) + b_{12}(c_2 + n_2(x, y)) + n_{11}(x)(c_1 + n_1(x))), \\
f_{20} = b_{11}^2 n_{111}(x), \\
f_{21} = b_{11} b_{12} n_{111}(x), \\
f_{22} = \xi_1 + \xi_2 \\
f_{23} = \xi_3 + \xi_4, \\
f_{24} = b_{12} b_{23} n_{11}(x), \\
f_{25} = 0, \\
f_{28} = 0, \\
f_{29} = 0 \\
f_{26} = \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8, \\
f_{27} = b_{12}^2 n_{111} \\
f_{30} = \xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12}, \\
f_{31} = \xi_{13} + \xi_{14}, \\
f_{32} = \xi_{15} + \xi_{16}, \\
f_{33} = \xi_{17} + \xi_{18} + \xi_{19} + \xi_{20},
\end{cases} \tag{3.30}$$

Où

$$
\begin{cases}
\xi_1 = b_{11}(n_{11}^2 + b_{11}n_{11} + c_1 n_{111} + n_1 n_{111})(x), \\
\xi_2 = b_{11}n_{111}(x)(c_1 + n_1(x)) + (b_{12}b_{21})n_{11}(x), \\
\xi_3 = b_{12}\left[n_{11}^2 + b_{11}n_{11}(x) + (c_1 + n_1(x)\right] n_{111}(x)), \\
\xi_4 = (b_{12}b_{22})n_{11}(x) + b_{11}b_{12}n_{111}(x), \\
\xi_5 = (c_1 + n_1(x))\left[n_{11}^2 + b_{11}n_{11}(x) + (c_1 + n_1(x))n_{111}(x)\right], \\
\xi_6 = b_{11}\left[b_{11}^2 + (b_{11} + c_1 + n_1)n_{11}(x) + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}(x,y)\right], \\
\xi_7 = b_{21}\left[b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,\ y)\right] + b_{31}\left[b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,\ y)\right], \\
\xi_8 = b_{41}\ (b_{12}n_{24}(x,\ y)) + b_{12}n_{11}(x)(c_2 + n_2(x,\ y)), \\
\xi_9 = 0, \\
\xi_{10} = b_{12}(b_{11}^2 + n_{11}b_{11} + c_1 n_{11} + n_1 n_{11} + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}),
\end{cases}
\tag{3.31}
$$

Et

$$\begin{cases} \xi_{11} = b_{22}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b_{32}(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{12} = b_{42}(b_{12}n_{24}) + b_{12}n_{111}(c_1 + n_1), \\ \xi_{13} = b_{23}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}) + b33(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{14} = b_{43}(b_{12}n_{24}), \\ \xi_{15} = b_{34}(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}), \\ \xi_{16} = b_{44}b_{12}n_{24}, \\ \xi_{17} = (c_1 + n_1)(b_{11}^2 + n_{11}b_{11} + c_1n_{11} + n_1n_{11} + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}), \\ \xi_{18} = (c_2 + n_2(x,y))(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,y)), \\ \xi_{19} = (c_4 + n_4(x,y,z,u))(b_{12}n_{24}(x,y)), \\ \xi_{20} = (c_3 + n_3(x,y,z))(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,y)), \end{cases} \tag{3.32}$$

nous remarquons que si $n_1(x) = 0$, donc l'expression de la transformation $T = T\left(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}\right)$ est donner par :

$$\begin{cases} T_1(x,y,z,u) = x, \\ T_2(x,y,z,u) = x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y, \\ T_3(x,y,z,u) = x'' = f_{17}(x,y) + f_{18}(z) + f_{19}(x,y), \\ T_4(x,y,z,u) = x''' = f_{26}x + f_{30}y + f_{31}z + f_{32}u + f_{33}(x,y,z,u), \end{cases} \tag{3.33}$$

Et son inverse est défini par

$$\begin{cases} T_1^{-1}(x, x', x^{''}, x^{'''}) = x \\ T_4^{-1}(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}) = u = \frac{f_7x^{'''} + b_{12}\ f_{11}(x,x',x'') + b_{12}f_{12}(x,x',x'')}{b_{12}b_{34}} \\ T_3^{-1}(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}) = z = f_7f_6(x, x^{'}, x^{''}) \\ T_2^{-1}(x, x', x^{''}, x^{'''}) = y = -\frac{1}{b_{12}}(-x' + c_1 + n_1(x) + b_{11}x) \end{cases} \tag{3.34}$$

Où

$$
\begin{cases}
f_{17} = (b_{11}^2 + b_{12}b_{21})x + (b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22})y, \\
f_{18} = b_{12}b_{23}z, \\
f_{19} = (b_{11}(c_1) + b_{12}(c_2 + n_2(x,y))) \\
f_{20} = 0, \; f_{21} = 0, \\
f_{22} = 0, \\
f_{23} = 0, \\
f_{24} = 0, \\
f_{25} = 0, \\
f_{28} = 0, \\
f_{29} = 0, \\
f_{27} = 0 \\
f_{26} = \xi_6 + \xi_7 + \xi_8, \\
f_{30} = \xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12}, \; f_{31} = \xi_{13} + \xi_{14} \\
f_{32} = \xi_{15} + \xi_{16}, \\
f_{33} = \xi_{17} + \xi_{18} + \xi_{19} + \xi_{20}
\end{cases}
\tag{3.35}
$$

Où

$$
\begin{cases}
\xi_1 = 0, \\
\xi_2 = 0, \\
\xi_3 = 0, \\
\xi_4 = 0, \\
\xi_5 = 0, \\
\xi_9 = 0 \\
\xi_6 = b_{11}\left[b_{11}^2 + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}(x,y)\right], \\
\xi_7 = b_{21}\left[b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,y)\right] + b_{31}\left[b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,y)\right], \\
\xi_8 = b_{41}(b_{12}n_{24}(x,y)), \\
\xi_{10} = b_{12}\left[b_{11}^2 + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}(x,y)\right], \\
\xi_{11} = b_{22}\left[b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,y)\right] + b_{32}\left[b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,y)\right], \\
\xi_{12} = b_{42}(b_{12}n_{24}), \\
\xi_{13} = b_{23}\left[b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x,y)\right] + b_{33}\left[b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x,y)\right], \\
\xi_{14} = b_{43}(b_{12}n_{24}),
\end{cases}
\tag{3.36}
$$

et

$$\begin{cases} \xi_{15} = b_{34}(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x, y)), \\ \xi_{15} = b_{44}b_{12}n_{24}(x, y), \\ \xi_{15} = c_1(b_{211} + b_{12}b_{21} + b_{12}n_{21}(x, y)), \\ \xi_{15} = (c_2 + n_2(x, y))(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{12}n_{22}(x, y)), \\ \xi_{15} = b_{12}n_{24}(x, y)(c_4 + n_4(x, y, z, u)), \\ \xi_{15} = (c_3 + n_3(x, y, z))(b_{12}b_{23} + b_{12}n_{23}(x, y)). \end{cases} \tag{3.37}$$

Nous trouvons maintenant des conditions suffisantes pour l' équivalence d'un système quadratique $4 - D$ avec un système hyperjerk. Selon l'analyse précédente, le système quadratique générale à $4 - D$ se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u + n_1(x), \\ y' = c_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u + n_2(x, y, z, u), \\ z' = c_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u + n_3(x, y, z, u), \\ u' = c_4 + b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u + n_4(x, y, z, u), \end{cases} \tag{3.38}$$

où

$$\begin{cases} n_1(x) = a_4x^2, \\ n_2 = b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7u^2 + b_8xy + b_9xz + b_{10}yz + b_{11}xu + b_{12}zu + b_{13}yu, \\ n_3 = e_4x^2 + e_5y^2 + e_6z^2 + e_7u^2 + e_8xy + e_9xz + e_{10}yz + e_{11}xu + e_{12}zu + e_{13}yu, \\ n_4 = d_4x^2 + d_5y^2 + d_6z^2 + d_7u^2 + d_8xy + d_9xz + d_{10}yz + d_{11}xu + d_{12}zu + d_{13}yu. \end{cases} \tag{3.39}$$

En utilisant la forme (3.26), il est facile de montrer que tout système quadratique $4 - D$ de la forme

$$\begin{cases} x' = c_1 + b_{11}x + b_{12}y + a_4x^2, \\ y' = c_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_8xy, \\ z' = c_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u + e_4x^2 + e_5y^2 + e_6z^2 + e_8xy + e_9xz + e_{10}yz, \\ u' = c_4 + b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u + n_4(x, y, z, u), \end{cases} \tag{3.40}$$

peut-il étre réduit à une forme hyperjerky dynamique de la forme

$$x^{''''} = H(x, x^{'}, x^{''}, x^{'''}).$$

Si les conditions (3.27) est verifie. Nous remarquons que la forme (3.40) contient 20 termes nonlinéare et que le système quadratique 4-D hyperchaotique le plus connu est le système de Rôssler qui contient un terme non-linéaire xz et est donné par

$$\begin{aligned} x' &= -y - z, \\ y' &= x + ay + u, \\ z' &= b + xz, \\ u' &= cu - dz, \end{aligned}$$

Mais ce système n'est pas équivalent à un système hyperjerky en raison de la présence d'une singularité. En [6], le système hyperchaotique simple a été étudié. Il est donné par

$$x'''' + x^4 x''' + Ax'' + x' + x = 0$$

Ce système ayant un attracteur hyperchaotic lorsque $A = 3,6$ avec des exposants de Lyapunov $(0.1310, 0.0358, 0. - 1.2550)$.

Bibliographie

[1] D. W. Moore, E. A. Spiegel, A thermally excited nonlinear oscillator, Astrophys. J. 143 (1966), 871-887.

[2] J. C. Sprott, Some simple chaotic flows, Phys. Rev. E 50 (1994), R647-R650.

[3] J. C. Sprott, Some simple chaotic jerk functions, Am. J. Phys. 65 (1997), 537-543.

[4] J. C. Sprott, Simplest dissipative chaotic flow, Phys. Lett. A 228 (1997), 271-274.

[5] J. C. Sprott, Elegant Chaos : Algebraically simple chaotic flows, World Scientific : Singapore, 2010.

[6] K. E. Chlouverakis, J. C. Sprott, Chaotic hyperjerk systems, Chaos, Solitons and Fractals 28 (2006), 739-746.

[7] R. Eichhorn, S. J. Linz, and P. Hanggi, Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows, Phys. Rev. E 58 (1998), 7151-7164.

[8] S. J. Linz, Newtonian jerky dynamics : Some general properties, Am. J. Phys. 66 (1998), 1109-1114.

[9] S. J. Linz, On hyperjerky systems, Chaos, Solitons and Fractals 37 (2008), 741-747.