



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique



كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والبيئة
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et Appliquées

Thème

Bifurcation des cycles limites via la théorie de moyennisation

Présenté Par :
Harkat Khelil
Aimene Imad

Devant le jury :

Mr Ouannas Adel	MCA	Université Larbi Tébessi -Tébessa	Président
Mr Smaal Hichem	MAA	Université Larbi Tébessi -Tébessa	Examineur
Mr Diab Zouhair	MCB	Université Larbi Tébessi -Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Résumé

.....

Les mots clés :

Abstract

.....

Keywords:

ملخص

.....

..... **الكلمات المفتاحية:**

Remerciements

Table des matières

Introduction générale.....10

Liste des figures

.....

Liste des tableaux

.....

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions premièrement l'existence de cycles limites du système différentiel à quatre dimensions

$$x' = A_0 x + \varepsilon F(x),$$

où ε est un paramètre suffisamment petit,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est donné par

$$F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b,$$

avec $A \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction linéaire par morceaux

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, 1), \\ mx, & \text{si } x \in [1, \infty), m \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

La seconde partie de ce travail est l'étude de l'existence de cycles limites d'un satellite rigide dumbbell dans un orbite circulaire ayant des équations de mouvement de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\phi}{dt}\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)\tan\phi + 3\sin\theta\cos\theta = \varepsilon F_1^*\left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3\cos^2\theta\right)\sin\phi\cos\phi = \varepsilon F_2^*\left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \end{cases}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et F_1^*, F_2^* sont des fonctions lisses périodiques en t .

Mots clés : Cycle limite, fonction linéaire par morceaux, satellite rigide dumbbell, orbite circulaire.

Abstract

In this work, we first study the existence of limit cycles of the four-dimensional differential system

$$x' = A_0x + \varepsilon F(x),$$

where ε is a sufficiently small parameter

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ is given by

$$F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b,$$

with $A \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ and $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ the piecewise linear function

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \in (-\infty, 1), \\ mx, & \text{for } x \in [1, \infty), m \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

The second part of this work is the study of the existence of limit cycles of a rigid dumbbell satellite in a circular orbit having equations of motion in the form

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\phi}{dt}\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)\tan\phi + 3\sin\theta\cos\theta = \varepsilon F_1^*\left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3\cos^2\theta\right)\sin\phi\cos\phi = \varepsilon F_2^*\left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \end{cases}$$

where ε is a sufficiently small parameter and F_1^*, F_2^* are periodic smooth functions in t .

Keywords : Limit cycle, piecewise linear function, rigid dumbbell satellite, circular orbit.

ملخص:

في هذه المذكرة ندرس أولا وجود الدورات المنتهية لجملته معادلات تفاضلية في البعد الرابع

$$x' = A_0 x + \varepsilon F(x);$$

حيث ε هو وسيط ذو قيمة صغيرة جدا.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ دالة معرفة بالشكل

$$F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b,$$

و $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ، $A \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ و $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة خطية متقطعة معرفة كما يلي

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1), \\ mx, & x \in [1, \infty), m \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

في الجزء الثاني من هذا العمل ندرس وجود الدورات المنتهية لقمر دمبل الصناعي في مسار دائري والذي معادلة حركته معرفة بالشكل

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \frac{d\phi}{dt} \left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right) \tan \phi + 3 \sin \theta \cos \theta = \varepsilon F_1^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \\ \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \left(\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3 \cos^2 \theta \right) \sin \phi \cos \phi = \varepsilon F_2^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right) \end{cases}$$

حيث ε هو وسيط ذو قيمة صغيرة جدا و F_1^*, F_2^* دوال ملساء دورية

بالنسبة للمتغير t .

الكلمات المفتاحية:

دورة منتهية، دالة خطية متقطعة، قمر دمبل الصناعي، مسار دائري.

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire

A ma très chère mère

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et L'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A mon très cher père

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi.

A tous les membres de ma famille, petits et grands je leur exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour.

A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas cité le nom

A mon cher et dynamique encadreur, *Dr DIAB ZOUHAIRE.*

Un remerciement particulier et sincère pour tous vos efforts fournis

Pour moi.

Aux collègues de ma promotion

Je vous estime énormément.

HARKAT KHELIL

DÉDICACE

Si la dédicace peut exprimer juste une fraction de ma fidélité

Je l'allouerai en premier lieu :

A mes chers parents pour leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, et leur prière
tout au long de mes études.

A mes chères sœurs et mes chers frères pour leur
et appui et leurs encouragements permanents et leurs soutiens moraux.

A seaux que grâce à eux je suis devenu quelqu'un sachant lire et écrire, et à mon

Camarade et collègue qui a su enduré avec moi les efforts

De la réalisation de ce modeste mémoire

Et finalement merci d'être toujours là pour moi et avec moi.

AIMENE IMAD

REMERCIEMENTS

On remercie tout d'abord le bon DIEU de nous avoir donné le courage et la volonté d'achever cette mémoire de fin d'étude..

Nous tenons à remercier particulièrement Mr DAIB ZOUHAIR que, en tant qu'encadreur, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour le soutien, l'aide, et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Non sincères remerciements vont à mon Mr OUANNAS ADEL d'avoir accepté d'assurer la présidence du jury de notre mémoire.

On souhaite exprimer également notre gratitude aux membres du jury.

On remercie Mr SMAAL HICHEM d'avoir accepté d'examiner cette mémoire. On les remercie à la fois pour leur intérêt vis-à-vis de mes travaux de recherche, pour l'effort investi pour la lecture du manuscrit, ainsi que pour les remarques et les discussions lors de la soutenance.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et remerciements, à tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatiques à L'Université de TEBESSA qui ont été pour beaucoup dans notre cursus universitaire.

Nous n'oublions pas nos parents et nos frères pour leur contribution, leur soutien, leurs encouragements et leur patience toute au long de mon parcours scolaire et universitaire sans eux nous ne serons pas là aujourd'hui.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Liste des figures

Figure N°	Titre	Page
1.1	Cycle limite stable	8
1.2	Cycle limite instable	8
1.3	Cycle limite semi-stable	8
1.4	Nœud propre stable si $\lambda_1=\lambda_2<0$	10
1.5	Nœud propre instable si $\lambda_1=\lambda_2>0$	10
1.6	Nœud impropre stable si $\lambda_1<\lambda_2<0$	10
1.7	Nœud impropre instable si $\lambda_1>\lambda_2>0$	10
1.8	Col (Selle) si $\lambda_1<0<\lambda_2$ ou $\lambda_2<0<\lambda_1$	11
1.9	Nœud exceptionnel stable si $\lambda<0$	11
1.10	Nœud exceptionnel instable si $\lambda>0$	11
1.11	Centre	13
1.12	Foyer stable si $\lambda_1=\alpha+i\beta$ et $\alpha<0$	13
1.13	Foyer instable si $\lambda_1=\alpha+i\beta$ et $\alpha>0$	13

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Rappels et Généralités	
	4
1.1 Système dynamique	4
1.2 Champ de vecteurs	4
1.3 Point critique	5
1.4 le système linéarisé	5
1.5 Point critique hyperbolique	5
1.6 Point critique dégénéré	5
1.7 Point critique puits	5
1.8 Point critique source	6
1.9 Point critique selle	6
1.10 Centre isochrone globale dans \mathbb{R}^4	6
1.11 Système différentiel autonome	6
1.12 Flot du système différentiel	6
1.13 Notions de stabilité	7
1.14 Cycle limite	7
1.15 Cycle limite hyperbolique	7
1.16 Solution périodique	8
1.17 Plan et portrait de phase	8
1.18 Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2	9
1.19 Matrice fondamentale	14
2 Cycles limites dans un centre linéaire à quatre dimensions	15
2.1 Introduction et résultats principaux	15
2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre	16
2.3 Preuve du théorème 2.1.1	18

TABLE DES MATIÈRES

3 Cycles limites d'un satellite rigide dumbbell dans un orbite circu-	
laire	22
3.1 Introduction et résultats principaux	22
3.2 Un autre méthode de la moyennisation du premier ordre	26
3.3 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2	27
3.4 Preuve des corollaires 3.1.1 et 3.1.2	31
Conclusion	33
Bibliographie	34

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

où P et Q sont des polynômes réels en les variables x et y . Dans son allocution au Congrès international de mathématiques de Paris en 1900, Hilbert a soulevé la question du nombre de cycles limites de ces systèmes différentiels. Il reste l'une des questions ouvertes les plus difficiles de la théorie qualitative des systèmes différentiels polynomiaux plans.

Soit H_m le nombre maximum possible de cycles limites de (1) lorsque P et Q sont de degré au plus m . Les H_m sont les nombres de Hilbert et le problème de savoir si H_m est fini est toujours un problème, même pour le cas le plus simple de systèmes différentiels polynomiaux quadratiques ($m = 2$). Le meilleur résultat dans cette direction est probablement la preuve de la conjecture de Dulac par Ilyashenko [11] et [7] selon différentes méthodes. Ce résultat indique qu'un système polynomial donné ne peut pas avoir un nombre infini de cycles limites. Notez que cela n'implique pas que H_m est fini.

D'autre part, il y a eu un certain succès pour trouver les bornes inférieures de H_m . Ainsi, on sait que $H_2 \geq 4$ (voir [19]) et $H_3 \geq 11$ (voir [13]). Plusieurs auteurs ont établi que H_m grandit au moins aussi vite que m^2 avec m . cela, Ilyashenko [10] a prouvé que

$$H_m \geq \frac{1}{2}(m^2 + m - 2).$$

Basarab-Horwath et Lloyd [1] ont montré que

$$H_m \geq \frac{1}{4}(m - 1)(m + 2).$$

Christopher et Lloyd [5] ont prouvé que

$$H_m \geq \frac{1}{2} (m+1)^2 (\log_2(m+1) - 3) + 3m.$$

Dans ces trois derniers résultats, les cycles limites se produisent dans plusieurs nids, c'est-à-dire qu'ils n'entourent pas un point singulier unique. En 1954, Otrokov [17] a déclaré que

$$H_m \geq \frac{1}{2} (m^2 + 5m - 20 - 6(-1)^m),$$

et que tous ces cycles limites sont situés dans un petit voisinage d'un point singulier unique. Malheureusement, la preuve d'Otrokov est difficile à comprendre pour nous. Ce travail se compose de trois chapitres qui se déclinent comme suit :

Le premier chapitre présente des rappels et généralités sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre on étudie la bifurcation des cycles limites des orbites périodiques d'un centre à quatre dimensions dans une classe de systèmes différentiels linéaires par morceaux de la forme

$$\dot{x} = A_0 x + \varepsilon F(x).$$

Où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ε est un paramètre suffisamment petit, $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est donné par $F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$ tel que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 1), \\ mx & \text{si } x \in [1, +\infty), m \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Dans le troisième chapitre nous avons donné les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de la dynamique d'attitude perturbée d'un satellite rigide dumbbell dans un orbite circulaire

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\phi}{dt} \left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right) \tan \phi + 3 \sin \theta \cos \theta = \varepsilon F_1^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3 \cos^2 \theta \right) \sin \phi \cos \phi = \varepsilon F_2^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \end{cases}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et F_1^*, F_2^* sont des fonctions lisses périodiques en t avec

$$F_1^* \left(t, 0, \frac{d\theta}{dt}, 0, \frac{d\phi}{dt} \right) = 0,$$

$$F_2^* \left(t, 0, \frac{d\theta}{dt}, 0, \frac{d\phi}{dt} \right) = 0.$$

CHAPITRE 1

RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions et résultats fondamentaux sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

- (1) $\Psi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- (2) $\Psi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- (3) $\Psi(0, x) = x$,
- (4) $\Psi(t + s, x) = \Psi(t, \Psi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Champ de vecteurs

Définition 1.2.1 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une application*

$$X : x = (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x))^T,$$

de classe C^k définie sur U à valeurs dans \mathbb{R}^n est appelée un champ de vecteurs de classe C^k sur U . À un tel champ de vecteur, on associe le système différentiel

$$\{\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \Leftrightarrow \dot{x} = X(x).$$

1.3 Point critique

Définition 1.3.1 Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système différentiel (1.1), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0) = 0.$$

1.4 le système linéarisé

Définition 1.4.1 Considérons le système différentiel (1.1). Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.2)$$

où

$$A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

et

$$f(x_0) = 0,$$

est appelé le linéarisé de (1.1) en x_0 .

1.5 Point critique hyperbolique

Définition 1.5.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.1) est dit hyperbolique lorsque toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ sont à partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, il est dit non-hyperbolique.

1.6 Point critique dégénéré

Définition 1.6.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.1) est dit dégénéré si au moins une des n valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ est nulle.

1.7 Point critique puits

Définition 1.7.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.1) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement négatives.

1.8 Point critique source

Définition 1.8.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.1) est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement positives.

1.9 Point critique selle

Définition 1.9.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.1) est appelé s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

1.10 Centre isochrone globale dans \mathbb{R}^4

Définition 1.10.1 Soit le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = -x_4, \\ \dot{x}_4 = x_3, \end{cases} \quad (1.3)$$

l'origine de \mathbb{R}^4 est un centre isochrone globale pour le système (1.3), c.-à-d, tous les orbites différentes de l'origine sont périodiques à la même période 2π .

1.11 Système différentiel autonome

Définition 1.11.1 On appelle système différentiel autonome un système différentiel pour lequel f ne dépend pas du temps :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1.12 Flot du système différentiel

Définition 1.12.1 On appelle flot du système différentiel $\dot{x} = f(x)$ où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ où $\phi(t, x_0)$ est la solution de ce système telle que $\phi(0, x_0) = x_0$.

1.13 Notions de stabilité

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

on suppose que $f(t, x)$ satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.13.1 Une solution $\varphi(t)$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.4)$$

telle que $\varphi(t_0) = \varphi_0$ est dit **stable** au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0) - \varphi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0,$$

si en plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$, alors la solution $\varphi(t)$ est un **asymptotiquement stable**.

Définition 1.13.2 La solution $\varphi(t) = 0$ est **stable** au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0,$$

si en plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0, \varphi(t) = 0$ est dite **asymptotiquement stable**.

1.14 Cycle limite

Définition 1.14.1 Un cycle limite est une orbite fermée isolée, c'est à dire au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.

La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.

1.15 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.15.1 Supposons que le système (1.4) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Soit

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

Si $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$) alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (resp. stable). Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande $\delta = 0$.

Une orbite périodique $(x(t), y(t))$ ayant $\delta \neq 0$ est un cycle limite hyperbolique.

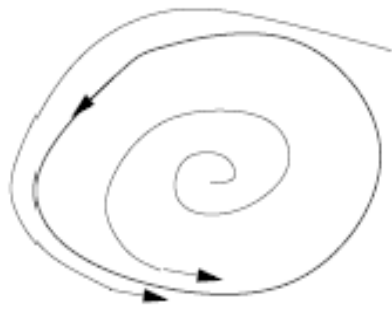


Fig. 1.1. Cycle limite stable

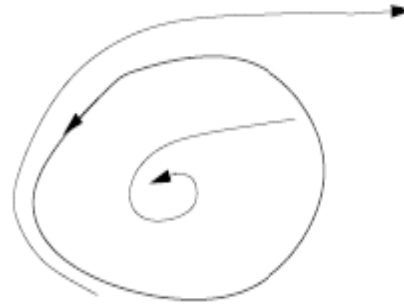


Fig. 1.2. Cycle limite instable

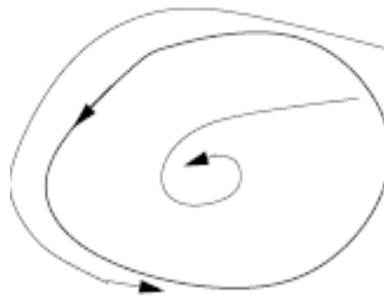


Fig. 1.3. Cycle limite semi-stable

1.16 Solution périodique

Définition 1.16.1 Supposons que $x = \Gamma(t)$ est une solution de système différentiel (1.1) et supposons qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Gamma(t + T) = \Gamma(t) \text{ pour } T > 0.$$

Alors $\Gamma(t)$ s'appelle une solution périodique de système (1.1). Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie la formule précédent est appelé période.

1.17 Plan et portrait de phase

Définition 1.17.1 Soit le système planaire (1.4) un portrait de phase est l'ensembles des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes

d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.4) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.18 Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{cases}$$

ce système s'écrit sous la forme matricielle

$$\dot{Y} = AY,$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1) **Cas A est diagonale** et les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y_1 = a e^{y_1 t}, \\ y_2 = b e^{y_2 t}. \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions, dépendant de deux paramètres a et b l'ensemble des solutions, consistue un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} . Si de plus on se donne $Y(0) = Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, alors Y est pas faitement déterminé $Y = \begin{pmatrix} y_1^0 e^{y_1 t} \\ y_2^0 e^{y_2 t} \end{pmatrix}$.

On peut représenter l'ensemble des solutions dans le plan (y_1, y_2) pour a et b donnés, la courbe $(y_1(t), y_2(t))$ s'appelle une courbe intégrale, elle est donnée par une représentation paramétrique en fonction de t .

Si $\lambda_1 = \lambda_2$

on a alors

$$\begin{cases} y_1 = \frac{a}{b} y_2 & \text{si } b \neq 0, \\ (y_1 = a e^{y_1 t}, y_2 = 0) & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

C'est une famille de droites passant par l'origine.

Si $\lambda_1 > 0$, y_1 et y_2 tendent vers $\pm\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et vers 0 lorsque $t \rightarrow -\infty$ si

1.18. CLASSIFICATION DES POINTS D'ÉQUILIBRE DANS \mathbb{R}^2

$\lambda_1 < 0$, c'est le contraire. La flèche sur les droites représente le sens du temps

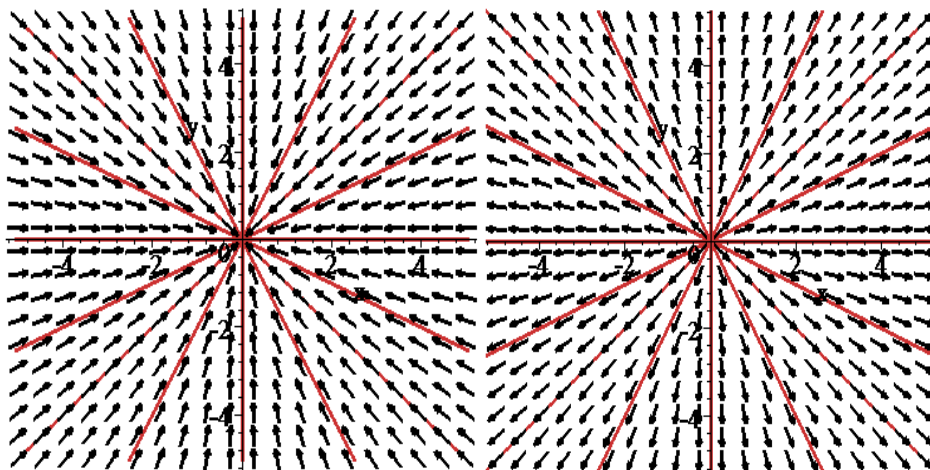


Fig. 1.4. *Noeud propre stable* si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Fig. 1.5. *Noeud propre instable* si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

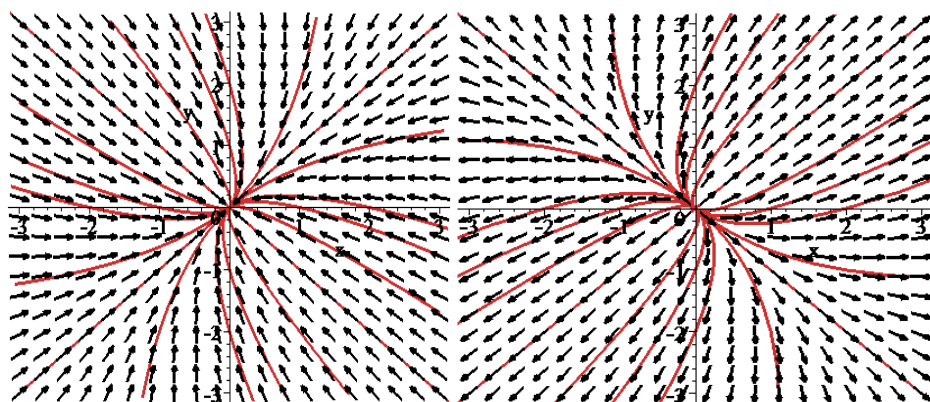


Fig. 1.6. *Noeud impropre stable* si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Fig. 1.7. *Noeud impropre instable* si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Lorsque les deux valeurs propres sont négatives, il suffit de renverser le sens du temps l'origine devient alors un point stable.

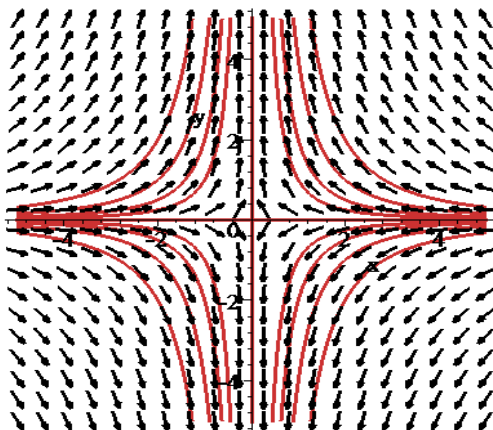


Fig. 1.8. Col (*Selle*) si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

2) Cas A non diagonalisable alors λ est valeur propre double

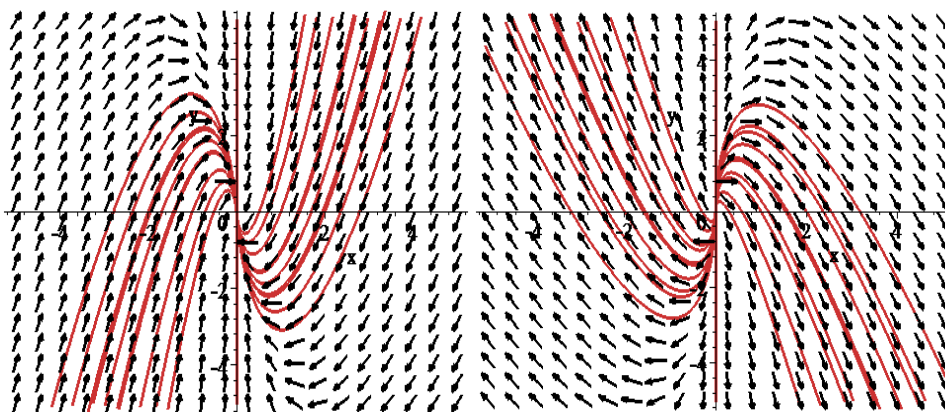


Fig. 1.9. Noeud exceptionnel
stable si $\lambda < 0$.

Fig. 1.10. Noeud exceptionnel
instable si $\lambda > 0$.

3) Cas A a deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes (i.e $\text{Im } \lambda_i \neq 0$). Notons donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta, \end{cases} \quad \beta \neq 0.$$

Il leur correspond deux vecteurs propres complexes U et \bar{U} , avec

$$AU = \lambda_1 U,$$

1.18. CLASSIFICATION DES POINTS D'ÉQUILIBRE DANS \mathbb{R}^2

écrivons $U = V^1 + iV^2$, et égalons partie réelle et partie imaginaire.

$$A(V^1 + iV^2) = (\alpha + i\beta)(V^1 + iV^2),$$

$$\begin{cases} AV^1 = \alpha V^1 - \beta V^2, \\ AV^2 = \beta V^1 + \alpha V^2, \end{cases}$$

dans la base (\vec{V}^1, \vec{V}^2) (vecteur dont les coordonnées sont (V^1, V^2) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2)), la matrice A se transforme en

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

module cette transformation, nous nous ramenons donc à étudier le système

$$Z' = BZ,$$

On obtient la solution s'écrit comme suite

$$Z = e^{Bt}C,$$

C vecteur quelconque de \mathbb{R}^n

Calculons e^{Bt}

$$B = \alpha I + \beta J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I et J commutent évidemment, d'où

$$e^{Bt} = e^{\alpha t I} e^{\beta t J},$$

nous avons déjà calculé e^{Jt} , d'où

$$e^{\beta t J} = \cos \beta t I + \sin \beta t J,$$

et

$$e^{Bt} = e^{\alpha t} (\cos \beta t I + \sin \beta t J) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & + \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{cases} z_1 = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), \\ z_2 = e^{\alpha t} (-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t), \end{cases}$$

écrivons c_1 et c_2 sous la forme

$$\begin{cases} c_1 = a \cos b & a > 0, \\ c_2 = a \sin b & b \in [0, 2\pi[, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} z_1 = a e^{\alpha t} \cos(-b + \beta t), \\ z_2 = a e^{\alpha t} \sin(-b + \beta t), \end{cases}$$

CHAPITRE 1. RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS

1^{er} cas : $\alpha = 0$, les valeurs propres sont imaginaires pures, $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$

$$\begin{cases} z_1 = a \cos(-b + \beta t), \\ z_2 = a \sin(-b + \beta t), \end{cases}$$

d'où

$$z_1^2 + z_2^2 = a^2.$$

Si $(\vec{V}^1, \vec{V}^2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a une famille de cercles concentriques sinon une famille d'ellipses.

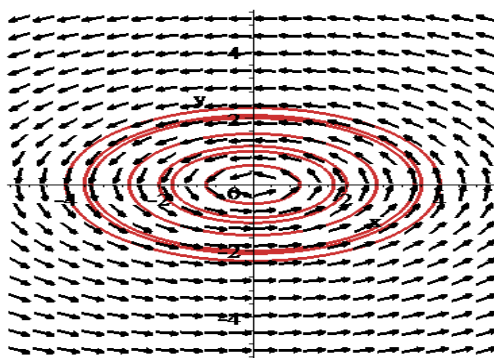


Fig. 1.11. Centre

2^{ème} cas : $\alpha \neq 0$ donc $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, on a alors

$$z_1^2 + z_2^2 = a^2 e^{2\alpha t},$$

soit la courbe en polaires

$$\begin{cases} \rho = a e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta+b)}, \\ \theta = -b + \beta t. \end{cases}$$

C'est une spirale logarithmique.

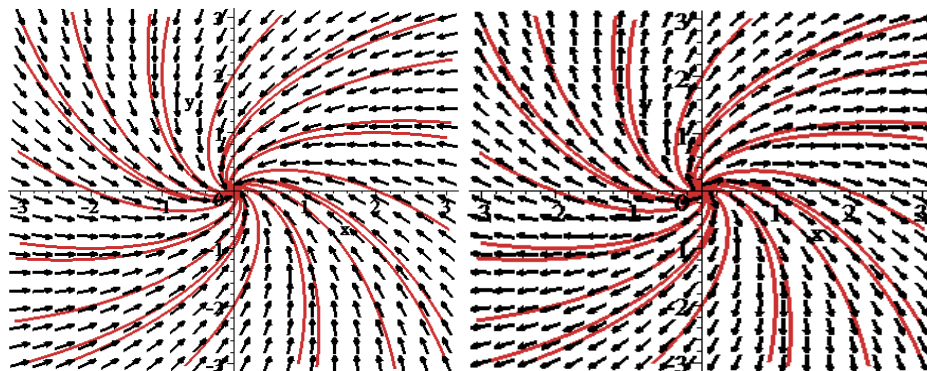


Fig. 1. 12. *Foyer stable si*
 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\alpha < 0$.

Fig. 1.13. *Foyer instable si*
 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\alpha > 0$.

1.19 Matrice fondamentale

Définition 1.19.1 soit $x'(t) = A(t)x(t)$ un système différentiel linéaire à coefficients constants, où A est un fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , chaque $A(t)$ étant une matrice carrée réelle de taille n la solution $x(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n . soit (u_1, u_2, \dots, u_n) un système fondamentale de solution c'est-à-dire que (u_1, u_2, \dots, u_n) est base de l'espace vectoriel des solution. on appelle **matrice fondamentale** associé à ce système de solution la matrice $M(t)$ dont les coordonnées des vecteurs $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$. En particulier on a $u_i(t) = M(t)e_i$ si (e_1, e_2, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

CHAPITRE 2

CYCLES LIMITES DANS UN CENTRE LINÉAIRE À QUATRE DIMENSIONS

2.1 Introduction et résultats principaux

Dans la théorie qualitative des équations différentielles, l'étude de leurs cycles limites est devenue l'un des sujets principaux. Pour une équation différentielle donnée ε , un cycle limite est une orbite périodique de ε isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ε .

De nombreuses questions se posent sur les cycles limites des équations différentielles planaires. Deux grandes lignes de recherche pour de telles équations sont, d'abord le 16^{ème} problème de Hilbert, voir par exemple [12] ; [14], et deuxièmement l'étude du nombre de cycles limites émergeant des orbites périodiques d'un centre quand nous le perturbons dans une classe donnée d'équations différentielles, voir, par exemple, le livre [6] et leurs références. Plus précisément, le problème du centre linéaire planaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

et perturbation de cela

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x, y),\end{aligned}$$

à l'intérieur d'une classe donnée d'équations différentielles polynomiales et l'étude des cycles limites bifurquant à partir des orbites périodiques du centre linéaire a suscité l'intérêt et les recherches de nombreux mathématiciens. Bien entendu, ε est un paramètre suffisamment petit. Ici, notre principal souci est de porter ce problème à une dimension supérieure lorsque la perturbation est linéaire par morceaux.

2.2. MÉTHODE DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence de cycles limites du système à quatre dimensions

$$x' = A_0x + \varepsilon F(x), \quad (2.1)$$

pour $|\varepsilon| \neq 0$ est un paramètre suffisamment petit, où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

et $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est donné par

$$F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b,$$

avec $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction linéaire par morceaux

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, 1), \\ mx, & \text{si } x \in [1, \infty), m \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon = 0$ le système (2.1) devient

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2, \\ x'_2 = x_1, \\ x'_3 = -x_4, \\ x'_4 = x_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 2.1.1 *Au plus 3 cycles limites du système (2.1) qui bifurque des orbites périodiques du système (2.3), extension au premier ordre de la fonction de déplacement de (2.1) par rapport au petit paramètre ε .*

2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre

Le but de cette section est de présenter la méthode de moyennisation du premier ordre telle qu'elle a été obtenue dans Buica & Llibre [3]. La différenciation du champ de vecteurs n'est pas nécessaire. Les conditions spécifiques pour l'existence d'un zéro isolé simple de la fonction moyennée sont données en degrés de Brouwer. En fait, la théorie du degré Brouwer est le point clé dans la preuve de ce théorème. Nous rappelons ici que la continuité d'une fonction dimensionnelle finie est une condition suffisante pour l'existence de son degré Brouwer (voir [15] pour des définitions précises).

Théorème 2.2.1 *On considère le système différentiel suivant*

$$x'(t) = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.4)$$

où $H : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodique en la première variable, et D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . On définit $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme

$$h(z) = \int_0^T H(s, z) ds, \quad (2.5)$$

et on suppose que

- (i) H et R sont localement lipschitzienne par rapport à x ;
- (ii) Pour $a \in D$ avec $h(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(h, V, 0) \neq 0$. Ensuite, pour $|\varepsilon| > 0$ est un paramètre suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.4) telle que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ici, nous aurons besoin de certains faits de la preuve de théorème 2.1.1. L'hypothèse (i) assure l'existence et l'unicité de la solution de chaque problème de valeur initiale sur l'intervalle $[0, T]$. Ainsi, pour chaque $z \in D$, il est possible de dénoter par $x(\cdot, z, \varepsilon)$ la solution de (2.4) avec la valeur initiale $x(\cdot, z, \varepsilon) = z$.

On considère aussi la fonction $\zeta : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\zeta(z, \varepsilon) = \int_0^T [\varepsilon H(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)] dt. \quad (2.6)$$

De la preuve de théorème 2.2.1 (voir [22]) nous extrairons les faits suivants.

Remarque 2.1 *Pour tout $z \in D$ la relation suivante est vérifiée*

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = \zeta(z, \varepsilon).$$

La fonction ζ peut être écrite sous la forme

$$\zeta(z, \varepsilon) = \varepsilon h(z) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1),$$

où h est donné par (2.5) et le symbole $\mathcal{O}(1)$ désigne une fonction bornée sur chaque sous-ensemble compact de $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. De plus, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, $z = \varphi(0, \varepsilon)$ est un zéro isolé de $\zeta(\cdot, \varepsilon)$.

Pour les systèmes concrets, il est possible que la fonction ζ ne soit pas globalement différentiable, mais que la fonction h l'est. En fait, seule la différentiabilité dans un voisinage d'un zéro de h isolé pourrait suffire. Dans ce cas, on peut utiliser la remarque suivante pour vérifier l'hypothèse (ii) du théorème 2.2.1.

Remarque 2.2 *Soit $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $h(a) = 0$, où D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Lorsque a est un simple zéro de h (c'est-à-dire $Jh(a) \neq 0$), il existe un voisinage V tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$. Puis $d_B(h, V, 0) \in \{-1, 1\}$.*

2.3 Preuve du théorème 2.1.1

Lemme 2.3.1 *Par un changement linéaire des variables, et éventuellement une permutation des variables, le système (2.1) peut être transformé en le système*

$$x' = A_0 x + \varepsilon \bar{A} x + \varepsilon \varphi(x_1) \bar{b}, \quad (2.7)$$

$$\text{où } \bar{A} = (a_{ij}) \text{ et } \bar{b} = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. En faisant le changement linéaire $x = Jy$, avec J inversible, le système (2.1) devient

$$\dot{y} = J^{-1} A_0 J y + \varepsilon J^{-1} A J y + \varepsilon \varphi(k^T J y) J^{-1} b.$$

Il est facile de trouver J inversible qui vérifie $J^{-1} A_0 J = A_0$ et $k^T J = e_1^T$.

Pour appliquer la méthode de moyennisation, nous avons mis le système sous une forme plus appropriée. Il est facile de voir que le changement de variables (x_1, x_2, x_3, x_4) en (θ, r, ρ, s) par

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \sin \theta, \\ x_3 &= \rho \cos(\theta + s), \\ x_4 &= \rho \sin(\theta + s), \end{aligned}$$

on transforme le système (2.1) en un système de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1), \\ \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1), \\ \frac{ds}{d\theta} &= \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} H_1 &= \cos \theta [b_1 \varphi(r \cos \theta) + a_{11} r \cos \theta + a_{12} r \sin \theta + a_{13} \rho \cos(\theta + s) + a_{14} \rho \sin(\theta + s)] \\ &\quad + \sin \theta [b_2 \varphi(r \cos \theta) + a_{21} r \cos \theta + a_{22} r \sin \theta + a_{23} \rho \cos(\theta + s) + a_{24} \rho \sin(\theta + s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \cos(\theta + s) [b_3 \varphi(r \cos \theta) + a_{31} r \cos \theta + a_{32} r \sin \theta + a_{33} \rho \cos(\theta + s) + a_{34} \rho \sin(\theta + s)] \\ &\quad + \sin(\theta + s) [b_4 \varphi(r \cos \theta) + a_{41} r \cos \theta + a_{42} r \sin \theta + a_{43} \rho \cos(\theta + s) + a_{44} \rho \sin(\theta + s)], \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. CYCLES LIMITES DANS UN CENTRE LINÉAIRE À QUATRE DIMENSIONS

$$\begin{aligned}
 H_3 = & (1/r) \{ \sin \theta [b_1 \varphi(r \cos \theta) + a_{11} r \cos \theta + a_{12} r \sin \theta + a_{13} \rho \cos(\theta + s) + a_{14} \rho \sin(\theta + s)] \\
 & + \cos \theta [b_2 \varphi(r \cos \theta) + a_{21} r \cos \theta + a_{22} r \sin \theta + a_{23} \rho \cos(\theta + s) + a_{24} \rho \sin(\theta + s)] \} \\
 & - (1/\rho) \sin(\theta + s) \{ [b_3 \varphi(r \cos \theta) + a_{31} r \cos \theta + a_{32} r \sin \theta + a_{33} \rho \cos(\theta + s) + a_{34} \rho \sin(\theta + s)] \\
 & + \cos(\theta + s) [b_4 \varphi(r \cos \theta) + a_{41} r \cos \theta + a_{42} r \sin \theta + a_{43} \rho \cos(\theta + s) + a_{44} \rho \sin(\theta + s)] \}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, appliquez le théorème 2.2.1 en obtenant $h : D_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ où

$$h_i(r, \rho, s) = \int_0^{2\pi} H_i(\theta, r, \rho, s) d\theta.$$

On a

$$\begin{aligned}
 h_1(r, \rho, s) &= b_1 I_1(r) + \pi(c_1 r + c_2 \rho \cos s + c_3 \rho \sin s), \\
 h_2(r, \rho, s) &= I_1(r)(b_3 \cos s + b_4 \sin s) + \pi(c_4 \rho + c_5 r \cos s + c_6 r \sin s), \\
 h_3(r, \rho, s) &= I_1(r)(-b_2 \rho + b_4 r \cos s - b_3 r \sin s) + \pi(c_7 r \rho + c_6 r^2 \cos s + c_5 r^2 \sin s \\
 &\quad + c_3 \rho^2 \cos s - c_2 \rho^2 \sin s),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

où c_i sont des constantes qui dépendent linéairement de a_{ij} et

$$I_1(r) = \begin{cases} m \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} + mr \arctan(\sqrt{r^2 - 1}), & \text{si } r \geq 1, \\ 0, & \text{si } 0 < r < 1. \end{cases}$$

La prochaine étape est d'appliquer le théorème 2.2.1. ■

Lemme 2.3.2 *L'équation $I_1(r) = cr$ est telle que*

1. Si $\frac{c}{m} < 0$ ou $\frac{c}{m} \geq \frac{\pi}{2}$ alors l'équation n'a pas de solution.
2. Si $c = 0$ alors l'intervalle $(0, 1]$ est un continu de solutions.
3. Si $0 < \frac{c}{m} < \frac{\pi}{2}$ alors il y a une solution unique $r^* > 1$.

Preuve. Si $c = 0$ il est facile de voir que tout $r \in (0, 1]$ est une solution. Pour $c \neq 0$ on considère le changement de variable $u = \sqrt{r^2 - 1}$ et on obtient l'équation équivalente

$$\arctan(u) = \frac{-u}{1 + u^2} + \frac{c}{m}.$$

une simple analyse graphique montre que pour $0 < \frac{c}{m} < \frac{\pi}{2}$ nous avons une seule solution $u^* > 0$ qui correspond à $r^* > 1$.

En résolvant les deux premières équations de (2.9) on obtient

$$\begin{aligned}
 I_1(r) &= \frac{k_2(s)}{d(s)} r, \\
 \rho &= \frac{k_1(s)}{d(s)} r,
 \end{aligned}$$

2.3. PREUVE DU THÉORÈME 2.1.1

où

$$\begin{aligned} k_1(s) &= (b_1c_6 - b_4c_1) \sin s + (b_1c_5 - b_3c_1) \cos s \\ &= (b_1c_6) \sin s + (b_1c_5) \cos s, \\ k_2(s) &= \pi(c_1c_4 - c_3c_6 \sin^2 s - (c_3c_5 + c_2c_6) \sin s \cos s - c_2c_5 \cos^2 s), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(s) &= -b_1c_4 + b_4c_3 \sin^2 s + (b_4c_2 + b_3c_3) \sin s \cos s + b_3c_2 \cos^2 s \\ &= -b_1c_4. \end{aligned}$$

En substituant dans la troisième équation, nous obtenons

$$\frac{f(s)}{(d(s))^2} r^2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} f(s) &= (c_3\pi \cos s - c_2\pi \sin s)(k_1(s))^2 + (b_4 \cos s - b_3 \sin s)d(s)k_2(s) \\ &\quad - b_2k_1(s)k_2(s) + (c_6\pi \cos s - c_5\pi \sin s)(d(s))^2 + c_7\pi d(s)k_1(s) \\ &= (c_3\pi \cos s - c_2\pi \sin s)(k_1(s))^2 + (c_6\pi \cos s - c_5\pi \sin s)(d(s))^2 + c_7\pi d(s)k_1(s). \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} c_1 = a_{11} + a_{22}, \\ c_2 = a_{13} + a_{24}, \\ c_3 = a_{14} - a_{23}, \\ c_4 = a_{33} + a_{44}, \\ c_5 = a_{42} + a_{31}, \\ c_6 = a_{41} - a_{32}, \\ c_7 = a_{12} - a_{34} + a_{43} - a_{21}. \end{cases}$$

Observez que si s^* est une solution de $f(s) = 0$, alors elle ne peut être liée à une solution périodique du système (2.1) que si elle satisfait $d(s^*) \neq 0, \frac{k_1(s^*)}{d(s^*)} > 0$ et

$0 < \frac{k_2(s^*)}{md(s^*)} < \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, nous appliquons le lemme 2.3.2 et obtenons $r^* > 1$.

Et la seconde équation de (2.9) donne ρ^* .

Voyons maintenant le nombre maximum de solutions à l'équation $f(s) = 0$. En substituant $\cos s = x$ et $\sin s = \sqrt{1 - x^2}$ dans $f(s) = 0$ on obtient

$$(\delta_1x + \delta_2x^3) + (\delta_3 + \delta_4x^2)\sqrt{1 - x^2} = 0, \quad (2.10)$$

et en substituant $\cos s = x$ et $\sin s = -\sqrt{1 - x^2}$ dans $f(s) = 0$ on obtient

$$(\delta_1x + \delta_2x^3) - (\delta_3 + \delta_4x^2)\sqrt{1 - x^2} = 0, \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned}\delta_1 &= c_3c_6^2 + c_6c_4^2 - 2c_2c_5c_6 - c_7c_5c_4, \\ \delta_2 &= c_3c_5^2 - c_3c_6^2 + 2c_2c_5c_6, \\ \delta_3 &= -c_7c_6c_4 + c_5c_4^2 - c_2c_6^2, \\ \delta_4 &= c_2c_6^2 - c_2c_5^2 + 2c_3c_5c_6,\end{aligned}$$

les équations (2.10) et (2.11) sont équivalentes à

$$(\delta_1x + \delta_2x^3)^2 - (\delta_3 + \delta_4x^2)^2(1 - x^2),$$

qui a le degré six. Observez que les solutions apparaissent par paires $\{x_0, -x_0\}$. Donc, si s^* est une solution, alors $s^* + \pi$ l'est aussi. Les fonctions $d(s), k_1(s), k_2(s)$ et $f(s)$ ont les propriétés $d(s + \pi) = d(s)$, $k_1(s + \pi) = -k_1(s)$, $k_2(s + \pi) = k_2(s)$ et $f(s + \pi) = -f(s)$.

Explication

$$\begin{aligned}d(s) &= -b_1c_4 = -c_4 \Rightarrow d(s + \pi) = d(s), \\ k_1(s + \pi) &= b_1c_6 \sin(s + \pi) + b_1c_5 \cos(s + \pi) = c_6 \sin(s + \pi) + c_5 \cos(s + \pi) \\ &= -c_6 \sin(s) - c_5 \cos(s) = -k_1(s),\end{aligned}$$

et on obtient, de la même façon $k_2(s + \pi) = k_2(s)$.

$$\begin{aligned}f(s + \pi) &= (c_3\pi \cos(s + \pi) - c_2\pi \sin(s + \pi))(-k_1(s))^2 + (c_6\pi \cos(s + \pi) - c_2\pi \sin(s + \pi))(d(s))^2 \\ &\quad + c_7\pi(d(s))(-k_1(s)) = -(c_3\pi \cos(s) - c_2\pi \sin(s))(k_1(s))^2, \\ &\quad - (c_6\pi \cos(s) - c_2\pi \sin(s))(d(s))^2 - c_7\pi d(s)k_1(s) = -f(s).\end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\frac{k_1(s^*)}{d(s^*)} > 0 \Rightarrow \frac{k_1(s^* + \pi)}{d(s^* + \pi)} < 0.$$

Nous concluons que le nombre maximal de cycles limites pour (2.1), jusqu'à l'expansion de premier ordre de la fonction de déplacement, est de trois. ■

CHAPITRE 3

CYCLES LIMITES D'UN SATELLITE RIGIDE DUMBBELL DANS UN ORBITE CIRCULAIRE

L'objectif de ce chapitre est fournir les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques (cycles limites) de la dynamique d'attitude perturbée d'un satellite rigide dumbbell dans un orbite circulaire.

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce travail,, nous considérons la dynamique d'attitude, perturbée par de petits couples, d'un satellite rigide dumbbell sur une orbite circulaire soumise au couple gravitationnel d'un champ de force de Newton central. Notre objectif est de fournir des conditions suffisantes pour l'existence de mouvements périodiques autour du centre de masse du satellite, asymptotiques par rapport au mouvement de translation dans un système de coordonnées absolues. Ce type de mouvement, appelé équilibre cylindrique, est bien connu dans la littérature astrophysique sur la dynamique du satellite (voir par exemple Guirao et al. [9] ; [20], [21]).

Ces mouvements ont une application importante sur les problèmes d'orientation des satellites puisqu'un satellite ne peut atteindre un régime nominal spécifié le long de trajectoires périodiques que sous l'influence des couples gravitationnels et d'autres petits couples perturbés induits par un mécanisme de contrôle. Suivant les méthodes développées dans [21], les équations du mouvement régissant la dynamique d'attitude d'un satellite rigide dumbbell sont

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\phi}{dt} \left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right) \tan \phi + 3 \sin \theta \cos \theta = \varepsilon F_1^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\left(1 + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3 \cos^2 \theta \right) \sin \phi \cos \phi = \varepsilon F_2^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt}\right), \end{cases} \quad (3.1)$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES D'UN SATELLITE RIGIDE DUMBELL
DANS UN ORBITE CIRCULAIRE

avec θ et ϕ les angles eulériens de nutation et de précession. Les couples perturbés F_i^* , sont des fonctions lisses périodiques en t avec

$$\begin{aligned} F_1^* \left(t, 0, \frac{d\theta}{dt}, 0, \frac{d\phi}{dt} \right) &= 0, \\ F_2^* \left(t, 0, \frac{d\theta}{dt}, 0, \frac{d\phi}{dt} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et ε est un paramètre suffisamment petit. Dans ce travail, nous nous intéressons aux fonctions périodiques émergeant de la solution d'équilibre $\theta = 0$ et $\phi = 0$ de (3.1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

En faisant le changement $x = \theta$ et $y = \phi$ et en linéarisant les équations de (3.1) en cet équilibre on obtient

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \varepsilon F_1 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) + \varepsilon^2 R_1 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, \varepsilon \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \varepsilon F_2 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) + \varepsilon^2 R_2 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, \varepsilon \right), \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} F_1 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) &= f_1 \left(t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) x + f_2 \left(t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) y, \\ F_2 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) &= f_3 \left(t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) x + f_4 \left(t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) y, \end{aligned}$$

et f_i sont des fonctions lisses en les variables $\left(t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$. Par contre, les fonctions f_i sont périodiques en t et dans la résonance $p : q$ avec certaines des solutions périodiques du satellite dumbbell non perturbé donné par

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

L'objectif de ce travail est de fournir, en utilisant comme outil principal la théorie de moyennisation, un système d'équations non linéaires dont les zéros simples fournissent des solutions périodiques des valeurs perturbées. satellite rigide dumbbell dans un orbite circulaire avec équations de mouvement données par (3.2). Quelques autres travaux utilisant des techniques similaires (voir [2] pour plus de détails), [4], [8], [9] où la méthode est utilisée pour les variables d'angle d'action.

l'origine est un point d'équilibre unique du système non perturbé (3.3), les valeurs propres en ce point sont

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

$$\pm\sqrt{3}i, \quad \pm 2i.$$

Par conséquent, ce système dans l'espace de phase $\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right)$ a deux plans de solutions périodiques à l'exception de l'origine. Ces solutions périodiques ont des périodes

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad T_2 = \pi,$$

selon qu'ils appartiennent ou non au plan associé aux vecteurs propres à valeurs propre $\pm\sqrt{3}i$ ou $\pm 2i$, respectivement. Nous allons étudier, laquelle de ces solutions périodiques persistent pour le système perturbé (3.2) lorsque ε est un paramètre suffisamment petit et les fonctions perturbées F_i pour $i = 1, 2$ admet une période pT_1/q , ou pT_2/q , où p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

On définit les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \frac{1}{-2p\pi} \int_0^{pT_1} \sin(\sqrt{3}t) \Delta_1(t) f_1(t, \Delta_2(t), 0) dt, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= \frac{\sqrt{3}}{2p\pi} \int_0^{pT_1} \cos(\sqrt{3}t) \Delta_1(t) f_1(t, \Delta_2(t), 0) dt, \\ \mathcal{G}_1(Z_0, W_0) &= \frac{1}{-2p\pi} \int_0^{pT_2} \sin(2t) \Delta_3(t) f_4(t, 0, \Delta_4(t)) dt, \\ \mathcal{G}_2(Z_0, W_0) &= \frac{1}{p\pi} \int_0^{pT_2} \cos(2t) \Delta_3(t) f_4(t, 0, \Delta_4(t)) dt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= X_0 \cos(\sqrt{3}t) + \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t), \\ \Delta_2(t) &= Y_0 \cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}X_0 \sin(\sqrt{3}t), \\ \Delta_3(t) &= Z_0 \cos(2t) + \frac{W_0}{2} \sin(2t), \\ \Delta_4(t) &= W_0 \cos(2t) + 2Z_0 \sin(2t), \end{aligned}$$

un zéro (X_0^*, Y_0^*) du système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

tel que

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \right) \neq 0,$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES D'UN SATELLITE RIGIDE DUMBBELL
DANS UN ORBITE CIRCULAIRE

s'appelle un zéro simple du système (3.5). De même, un zéro (Z_0^*, W_0^*) du système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1(Z_0, W_0) = 0, \\ \mathcal{G}_2(Z_0, W_0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

tel que

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (Z_0, W_0)} \Big|_{(Z_0, W_0) = (Z_0^*, W_0^*)} \right) \neq 0,$$

s'appelle un zéro simple du système (3.6).

Théorème 3.1.1 *On suppose que les fonctions F_1^* et F_2^* du satellite dumbbell perturbé avec les équations de mouvement (3.1) sont périodiques en t de la période pT_1/q avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour tout zéro simple $(X_0^*, Y_0^*) \neq (0, 0)$ du système non linéaire (3.5), le satellite dumbbell perturbé (3.1) admet une solution périodique*

$$\left(\theta(t, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(t, \varepsilon), \phi(t, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(t, \varepsilon) \right),$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) = (X_0^*, Y_0^*, 0, 0),$$

Corollaire 3.1.1 *On considère le système (3.1) avec*

$$\begin{aligned} F_1^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt} \right) &= \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^4 + \sin \phi \sin \theta \left(1 - \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right), \\ F_2^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt} \right) &= \cos \theta - \sin(\sqrt{3}t) \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= -\cos \phi \left(1 - \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.1) admet une solution périodique avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0, 0 \right).$$

De même, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 *On suppose que les fonctions F_1^* et F_2^* du satellite dumbbell perturbé avec les équations de mouvement (3.1) sont périodiques en t de la période pT_2/q*

3.2. UN AUTRE MÉTHODE DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour tout zéro simple $(Z_0^*, W_0^*) \neq (0, 0)$ du système non linéaire (3.6), le satellite dumbbell perturbé (3.1) admet une solution périodique

$$\left(\theta(t, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(t, \varepsilon), \phi(t, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(t, \varepsilon) \right),$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) = (0, 0, Z_0^*, W_0^*).$$

Corollaire 3.1.2 On considère le système (3.1) avec

$$\begin{aligned} F_1^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt} \right) &= \sin \phi \sin \theta \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi + \sin(2t) \sin \phi \left(1 - \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt}, \\ F_2^* \left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \phi, \frac{d\phi}{dt} \right) &= \sin \phi - \sin(2t) \sin \phi \frac{d\phi}{dt} - \sin \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.1) admet trois solutions périodiques avec

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) &= \left(0, 0, 1, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) &= \left(0, 0, \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, 0 \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta(0, \varepsilon), \frac{d\theta}{dt}(0, \varepsilon), \phi(0, \varepsilon), \frac{d\phi}{dt}(0, \varepsilon) \right) &= \left(0, 0, \frac{1 + \sqrt{17}}{4}, 0 \right). \end{aligned}$$

Remarque 3.1 Les impulsions s'appliquent à un satellite rigide dumbbell dans un orbite circulaire soumise au couple gravitationnel d'un champ de force newtonien central, sont en général des fonctions de l'angle de Euler et de certaines cartes dépendant de la variable indépendante t (temps). Les applications présentées dans les corollaires 3.1.1 et 3.1.2 représentent des moments habituels qui modélisent le rayonnement solaire obtenu par les panneaux solaires situés sur le satellite. Pour plus d'informations, voir [16].

3.2 Un autre méthode de la moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon G_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 G_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3.7)$$

de $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $G_0, G_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $G_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 , T -périodiques en t , et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . L'hypothèse principale est que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G_0(t, \mathbf{x}), \quad (3.8)$$

a une sous-variété des solutions périodiques de dimension k .

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ la solution du système non perturbé (3.8) telle que $x(0, z, \varepsilon) = z$. Nous écrivons la linéarisation du système non perturbé le long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ comme

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = D_x G_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) \mathbf{y}. \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, on note $M_z(t)$ une matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.9), et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c.à.d. $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Théorème 3.2.1 *Soit V un ouvert borné de \mathbb{R}^k et soit $\beta : \mathbf{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 . Supposons que*

(i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \mathbf{Cl}(V)\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (3.8) est T -périodique

(ii) Pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $\mathbf{M}_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (3.9) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le bloc supérieur droit une matrice $k \times (n-k)$ nulle, et dans le bloc inférieur droit une matrice $\Delta_\alpha(n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$. On considère la fonction $\mathcal{G} : \mathbf{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt \right). \quad (3.10)$$

Si il existe $a \in V$ avec $\mathcal{G}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{G}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (3.7) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Théorème 3.2.1 retourne à Malkin [16] et [18], pour une preuve plus courte, voir [2].

3.3 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

En introduisant les variables $(X, Y, Z, W) = \left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right)$ et on écrit le système différentiel du satellite dumbbell perturbé (3.2) comme un système du premier ordre

3.3. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

défini dans \mathbb{R}^4 , on obtient

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y, \\ \frac{dY}{dt} = -3X + \varepsilon F_1(t, X, Y, Z, W) + \varepsilon^2 R_1(t, X, Y, Z, W, \varepsilon), \\ \frac{dZ}{dt} = W, \\ \frac{dW}{dt} = -4Z + \varepsilon F_2(t, X, Y, Z, W) + \varepsilon^2 R_2(t, X, Y, Z, W, \varepsilon), \end{cases} \quad (3.11)$$

le système (3.11) avec $\varepsilon = 0$ est équivalent au système de satellite dumbbell non perturbé (3.3). D'autre part, les orbites périodiques du système non perturbé sont décrites dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Les solutions périodiques du système non perturbé avec $\varepsilon = 0$ sont*

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 \cos(\sqrt{3}t) + \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t), \\ Y(t) &= Y_0 \cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}X_0 \sin(\sqrt{3}t), \\ Z(t) &= 0, \\ W(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

de période T_1 , et

$$\begin{aligned} X(t) &= 0, \\ Y(t) &= 0, \\ Z(t) &= Z_0 \cos(2t) + \frac{W_0}{2} \sin(2t), \\ W(t) &= W_0 \cos(2t) - 2Z_0 \sin(2t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

de période T_2 .

Le système non perturbé étant un système différentiel linéaire, la preuve en est une routine

Preuve de théorème 3.1.1 On suppose que les fonctions F_1 et F_2 du satellite dumbbell perturbé avec les équations de mouvement (3.2) sont périodiques en période pT_1/q avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers. Alors le système (3.2) est périodique en t avec période pT_1 .

Nous appliquerons le théorème 3.2.1 au système différentiel (3.11). Nous notons que

le système (3.11) peut être écrit comme un système (3.7), prenant

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \\ G_0(t, \mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} Y \\ -3X \\ W \\ -4Z \end{pmatrix}, \\ G_1(t, \mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ F_1(t, X, Y, Z, W) \\ 0 \\ F_2(t, X, Y, Z, W) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$G_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(t, X, Y, Z, W, \varepsilon) \\ 0 \\ R_2(t, X, Y, Z, W, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons quelles solutions périodiques (3.12) du système non perturbé correspondant au système (3.11) avec $\varepsilon = 0$ peut être continué de solutions périodiques du système non perturbé pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

Nous allons décrire les différents éléments qui apparaissent dans la déclaration du théorème 3.2.1. Nous avons donc que $\Omega = \mathbb{R}^4, k = 2$ et $n = 4$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. On prend le sous-ensemble ouvert et borné V du plan $Z = W = 0$ comme

$$V = \left\{ (X_0, Y_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 < \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} < r_2 \right\}.$$

Comme d'habitude, $\mathbf{Cl}(V)$ désigne la fermeture de V . Si $\alpha = (X_0, Y_0)$, alors nous pouvons identifier V avec l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|\alpha\| < r_2\},$$

ici $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . La fonction $\beta : \mathbf{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\beta(\alpha) = (0, 0)$. Par conséquent, dans notre cas, le ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \mathbf{Cl}(V)\} = \left\{ (X_0, Y_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 \leq \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \leq r_2 \right\}.$$

Clairement pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha) = (X(t), Y(t), 0, 0)$ donné par (3.12) de période pT_1 . On calcul la matrice fondamentale

3.3. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

$M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ du système différentiel linéaire avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution T -périodique $\mathbf{z}_\alpha = (X_0, Y_0, 0, 0)$ telle que $M_{\mathbf{z}_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^4 , nous concluons que $M(t) = M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ est égal

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) & \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & \cos(\sqrt{3}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2t) & \frac{\sin(2t)}{2} \\ 0 & 0 & -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Notez que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ ne dépend pas de la solution périodique particulière $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$. Depuis la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(pT_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) & \frac{\sin\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right)}{2} \\ 0 & 0 & -2\sin\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) & 1 - \cos\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

satisfait aux hypothèses de l'énoncé (ii) du théorème 3.2.1 parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) & \frac{\sin\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right)}{2} \\ -2\sin\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) & 1 - \cos\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\left(\frac{4\sqrt{3}p\pi}{3}\right) \neq 0,$$

nous pouvons appliquer ce théorème au système non perturbé. Maintenant $\xi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\xi(X, Y, Z, W) = (X, Y)$. On calcule la fonction

$$\mathcal{G}(X_0, Y_0) = \mathcal{G}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt \right),$$

et on obtient

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} F_1(t, \Delta_1(t), \Delta_2(t), 0, 0) dt \\ \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \cos(\sqrt{3}t) F_1(t, \Delta_1(t), \Delta_2(t), 0, 0) dt \end{pmatrix}.$$

En utilisant

$$F_1(t, \Delta_1(t), \Delta_2(t), 0, 0) = \Delta_1(t) f_1(t, \Delta_2(t), 0, 0),$$

on obtient les fonctions données par [\(3.4\)](#). Ensuite, par le théorème 3.2.1, nous avons cela pour chaque zéro simple $(X_0^*, Y_0^*) \in V$ du système de fonctions non linéaires

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = 0, \quad \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0, \quad (3.14)$$

nous avons une solution périodique $(X, Y, Z, W)(t, \varepsilon)$ du système non perturbé telle que $(X, Y, Z, W)(t, \varepsilon) \rightarrow (X_0^*, Y_0^*, 0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.4 Preuve des corollaires 3.1.1 et 3.1.2

Preuve du corollaire 3.1.1. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.1, le système non linéaire (3.5) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \frac{Y_0(3X_0^2 + Y_0^2)}{48}, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= \frac{(3(\sqrt{3} - 3X_0)X_0^2 - (\sqrt{3} - 3X_0)Y_0^2)}{24}.\end{aligned}$$

Ce système admet une solution réelle suivante

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right),$$

de plus

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \bigg|_{(X_0, Y_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)} \right) = \frac{1}{384},$$

vérifiez que cette solution est simple. Donc, par le théorème 3.1.1, nous n'avons qu'une solution périodique de (3.1). Ceci complète la preuve du corollaire 3.1.1.

Preuve du corollaire 3.1.2. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.2, le système non linéaire (3.6) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(Z_0, W_0) &= \frac{(Z_0 - 1)W_0}{8}, \\ \mathcal{G}_2(Z_0, W_0) &= \frac{(4Z_0(2 + Z_0 - 2Z_0^2) - W_0^2(1 + 2Z_0))}{16},\end{aligned}$$

ce système admet les quatre solutions réelles suivantes

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(1, +\frac{2\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(1, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, 0 \right),$$

et

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, 0 \right).$$

3.4. PREUVE DES COROLLAIRES 3.1.1 ET 3.1.2

Les solutions qui diffèrent par un signe sont différentes conditions initiales de la même solution périodique du système (3.2) et

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (Z_0, W_0)} \Big|_{(Z_0, W_0) = (1, \pm \frac{2\sqrt{3}}{3})} \right) &= \frac{-1}{16}, \\ \det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (Z_0, W_0)} \Big|_{(Z_0, W_0) = (\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 0)} \right) &= \frac{-17 - 7\sqrt{17}}{256}, \\ \det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (Z_0, W_0)} \Big|_{(Z_0, W_0) = (\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 0)} \right) &= \frac{-17 + 7\sqrt{17}}{256}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.1.2, nous n'avons que trois solutions périodiques du satellite dumbbell perturbé. Ceci complète la preuve du corollaire 3.1.2.

CONCLUSION GÉNÉRALE

La méthode de moyennisation est une méthode efficace pour étudier le nombre maximal des cycles limites des systèmes différentiels discontinus perturbés.

L'application de la méthode de moyennisation aux systèmes différentiels discontinus perturbés dans \mathbb{R}^4 a donné des résultats intéressants.

L'application d'autre méthode de la moyennisation aux systèmes différentiels perturbés dans \mathbb{R}^4 a permis d'étudier l'existence des cycles limites de ce système.

- [1] P. Basarab- Horwath and N. G. Lloyd, Co-existing fine foci and bifurcating limit cycles, *Neieuw Arch Wisk.*, **6**, (1988), 295 – 302.
- [2] A. Buică, J. P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **6** (2007), 103 – 111,.
- [3] A. Buică, J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brower degree, *Bull. Sci. Math.*, **128** (2004), 7 – 22.
- [4] M.T. de Bustos, J.L.G. Guirao, J. A.Vera and J. Vigo-Aguiar, Periodic orbits and C^1 -integrability in the planar Stark–Zeeman problem, *J. Math. Phys.*, **53.8** (2012), 082701.
- [5] C. J. Christopher and N. G. Lloyd, Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers, *Proc. Royal Soc. London A* **450** (1995), 219 – 224.
- [6] C. Christopher, C. Li, *Limit Cycles of Differential Equations*, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona. Birkhauser Verlag, Basel, 2007.
- [7] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, *Actualités Mathématiques*, Hermann, Paris, 1992.
- [8] J. L. G. Guirao, J. Llibre, J. A. Vera, Generalized van der Waals Hamiltonian : periodic orbits and C^1 nonintegrability, *Phys. Rev. E, Stat. Nonlinear Soft Matter Phys.*, **85** (2012), 036603.
- [9] J. L. G. Guirao, J. Llibre, J. A. Vera, On the dynamics of the rigid body with a fixed point : periodic orbits and integrability, *Nonlinear Dyn.*, (2013). doi :10.1007/s11071 – 013 – 0797 – 8.
- [10] Yu. S. Il' yashenko, The origin of limit cycles under perturbations of the equation $dw/dz = -R_z/R_w$ where $R(z, w)$ is a polynomial, *Math USSR- Sb.*, **7** (1969), 353 – 364.
- [11] Yu. S. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. **94**. Providence, RI Amer. Math. Soc., 1991.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] Y.S. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (2002), 301 – 354.
- [13] Li Jibin and Li Chunfu, Global bifurcations of planar disturbed Hamiltonian systems and distributions of limit cycles of cubic systems” *Acta Math. Sinica* **28** (1985), 509 – 521.
- [14] J. Li, Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, **13** (2003), 47 – 106.
- [15] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [16] I.G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian), Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [17] N. F. Otrokov, On the number of limit cycles of a differential equation in a neighborhood of a singular point, *Mat. Sb.* **34** (1954), 127 – 144 (in Russian).
- [18] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, (French), Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **8**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [19] Shi Songling, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, *Sci. Sinica* **A23** (1980) 153 – 158.
- [20] J. A. Vera, Dynamics of a triaxial gyrostat at a Lagrangian equilibrium of a binary asteroid, *Astrophys. Space Sci.* **323**(4) (2009), 375 – 382.
- [21] J. A. Vera, On the dynamics of a gyrostat on Lagrangian equilibria in the three body problem, *Multibody Syst. Dyn.* **23**(3) (2010), 263 – 291.
- [22] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, 1991.

APPENDICE

Dans cet appendice on utilise le logiciel de Maple pour calculer les intégrales difficiles et simplifier quelques formulés.

Chapitre 02 :

> restart;

> x1t:=-x[2]+epsilon*(a[11]*x[1]+a[12]*x[2]+
a[13]*x[3]+a[14]*x[4]+phi(x[1])*b[1]);

$$x1t := -x_2 + \varepsilon (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + \phi(x_1) b_1)$$

> x2t:=x[1]+epsilon*(a[21]*x[1]+a[22]*x[2]+a
[23]*x[3]+a[24]*x[4]+phi(x[1])*b[2]);

$$x2t := x_1 + \varepsilon (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + \phi(x_1) b_2)$$

> x3t:=-x[4]+epsilon*(a[31]*x[1]+a[32]*x[2]+
a[33]*x[3]+a[34]*x[4]+phi(x[1])*b[3]);

$$x3t := -x_4 + \varepsilon (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + \phi(x_1) b_3)$$

> x4t:=x[3]+epsilon*(a[41]*x[1]+a[42]*x[2]+a
[43]*x[3]+a[44]*x[4]+phi(x[1])*b[4]);

$$x4t := x_3 + \varepsilon (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 + \phi(x_1) b_4)$$

> rt:=simplify(subs(x[1]=r*cos(theta),x[2]=r
*sin(theta),x[3]=rho*cos(theta+s),x[4]=rho
*sin(theta+s),(x[1]*x1t+x[2]*x2t)/r));

$$rt := \varepsilon (a_{11} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) a_{12} r \sin(\theta)$$

$$+ \cos(\theta) a_{13} \rho \cos(\theta + s) + \cos(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta + s)$$

$$+ \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1 + \sin(\theta) a_{21} r \cos(\theta) + a_{22} r$$

$$- a_{22} r \cos(\theta)^2 + \sin(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta + s)$$

$$+ \sin(\theta) a_{24} \rho \sin(\theta + s) + \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2)$$

> thetat:=simplify(subs(x[1]=r*cos(theta),x[
2]=r*sin(theta),x[3]=rho*cos(theta+s),x[4]
=rho*sin(theta+s),(x[1]*x2t-x[2]*x1t)/r^2)
);

$$\begin{aligned}
\text{thetat} := & (\varepsilon a_{21} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) \varepsilon a_{22} r \sin(\theta) \\
& + \cos(\theta) \varepsilon a_{23} \rho \cos(\theta + s) + \cos(\theta) \varepsilon a_{24} \rho \sin(\theta + s) \\
& + \cos(\theta) \varepsilon \phi(r \cos(\theta)) b_2 + r - \sin(\theta) \varepsilon a_{11} r \cos(\theta) - \varepsilon a_{12} r \\
& + \varepsilon a_{12} r \cos(\theta)^2 - \sin(\theta) \varepsilon a_{13} \rho \cos(\theta + s) \\
& - \sin(\theta) \varepsilon a_{14} \rho \sin(\theta + s) - \sin(\theta) \varepsilon \phi(r \cos(\theta)) b_1) / r
\end{aligned}$$

> **rhot:=simplify(subs(x[1]=r*cos(theta),x[2]=r*sin(theta),x[3]=rho*cos(theta+s),x[4]=rho*sin(theta+s),(x[3]*x3t+x[4]*x4t)/rho));**

$$\begin{aligned}
\text{rhot} := & \varepsilon (\cos(\theta + s) a_{31} r \cos(\theta) + \cos(\theta + s) a_{32} r \sin(\theta) \\
& + a_{33} \rho \cos(\theta + s)^2 + \cos(\theta + s) a_{34} \rho \sin(\theta + s) \\
& + \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3 + \sin(\theta + s) a_{41} r \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta + s) a_{42} r \sin(\theta) + \sin(\theta + s) a_{43} \rho \cos(\theta + s) + a_{44} \rho \\
& - a_{44} \rho \cos(\theta + s)^2 + \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4)
\end{aligned}$$

> **st:=collect(-thetat+simplify(subs(x[1]=r*cos(theta),x[2]=r*sin(theta),x[3]=rho*cos(theta+s),x[4]=rho*sin(theta+s),(x[3]*x4t-x[4]*x3t)/rho^2)),epsilon);**

$$\begin{aligned}
\text{st} := & (- (a_{21} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta + s) \\
& + \cos(\theta) a_{24} \rho \sin(\theta + s) + \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2 \\
& + \cos(\theta) a_{22} r \sin(\theta) - \sin(\theta) a_{11} r \cos(\theta) - a_{12} r \\
& + a_{12} r \cos(\theta)^2 - \sin(\theta) a_{13} \rho \cos(\theta + s) \\
& - \sin(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta + s) - \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1) / r + (\\
& \cos(\theta + s) a_{41} r \cos(\theta) + a_{43} \rho \cos(\theta + s)^2 \\
& + \cos(\theta + s) a_{44} \rho \sin(\theta + s) + \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\theta + s) a_{42} r \sin(\theta) - \sin(\theta + s) a_{31} r \cos(\theta) \\
& - \sin(\theta + s) a_{32} r \sin(\theta) - \sin(\theta + s) a_{33} \rho \cos(\theta + s) - a_{34} \rho \\
& + a_{34} \rho \cos(\theta + s)^2 - \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3) / \rho) \varepsilon
\end{aligned}$$

> **e1:=simplify(series(rt/thetat,epsilon=0,2));**

$$\begin{aligned}
e1 := & (a_{11} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) a_{12} r \sin(\theta) \\
& + \cos(\theta) a_{13} \rho \cos(\theta + s) + \cos(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta + s) \\
& + \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1 + \sin(\theta) a_{21} r \cos(\theta) + a_{22} r \\
& - a_{22} r \cos(\theta)^2 + \sin(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta + s) \\
& + \sin(\theta) a_{24} \rho \sin(\theta + s) + \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2) \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

> **F1:=op(1,e1);**

$$\begin{aligned}
F1 := & a_{11} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) a_{12} r \sin(\theta) \\
& + \cos(\theta) a_{13} \rho \cos(\theta + s) + \cos(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta + s) \\
& + \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1 + \sin(\theta) a_{21} r \cos(\theta) + a_{22} r \\
& - a_{22} r \cos(\theta)^2 + \sin(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta + s) \\
& + \sin(\theta) a_{24} \rho \sin(\theta + s) + \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2
\end{aligned}$$

> **e2:=simplify(series(rhot/thetat,epsilon=0,2));**

$$\begin{aligned}
e2 := & (\cos(\theta + s) a_{31} r \cos(\theta) + \cos(\theta + s) a_{32} r \sin(\theta) \\
& + a_{33} \rho \cos(\theta + s)^2 + \cos(\theta + s) a_{34} \rho \sin(\theta + s) \\
& + \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3 + \sin(\theta + s) a_{41} r \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta + s) a_{42} r \sin(\theta) + \sin(\theta + s) a_{43} \rho \cos(\theta + s) + a_{44} \rho \\
& - a_{44} \rho \cos(\theta + s)^2 + \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4) \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

> **F2:=op(1,e2);**

$$\begin{aligned} F2 := & \cos(\theta + s) a_{31} r \cos(\theta) + \cos(\theta + s) a_{32} r \sin(\theta) \\ & + a_{33} \rho \cos(\theta + s)^2 + \cos(\theta + s) a_{34} \rho \sin(\theta + s) \\ & + \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3 + \sin(\theta + s) a_{41} r \cos(\theta) \\ & + \sin(\theta + s) a_{42} r \sin(\theta) + \sin(\theta + s) a_{43} \rho \cos(\theta + s) + a_{44} \rho \\ & - a_{44} \rho \cos(\theta + s)^2 + \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4 \end{aligned}$$

> **e3:=simplify(series(st/thetat,epsilon=0,2));**

$$\begin{aligned} e3 := & -(\rho a_{21} r \cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_{23} \rho^2 \cos(\theta + s) \\ & + \cos(\theta) a_{24} \rho^2 \sin(\theta + s) + \rho \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2 \\ & + \rho \cos(\theta) a_{22} r \sin(\theta) - \rho \sin(\theta) a_{11} r \cos(\theta) - \rho a_{12} r \\ & + \rho a_{12} r \cos(\theta)^2 - \sin(\theta) a_{13} \rho^2 \cos(\theta + s) \\ & - \sin(\theta) a_{14} \rho^2 \sin(\theta + s) - \rho \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1 \\ & - \cos(\theta + s) a_{41} r^2 \cos(\theta) - r a_{43} \rho \cos(\theta + s)^2 \\ & - r \cos(\theta + s) a_{44} \rho \sin(\theta + s) - r \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4 \\ & - \cos(\theta + s) a_{42} r^2 \sin(\theta) + \sin(\theta + s) a_{31} r^2 \cos(\theta) \\ & + \sin(\theta + s) a_{32} r^2 \sin(\theta) + r \sin(\theta + s) a_{33} \rho \cos(\theta + s) \\ & + r a_{34} \rho - r a_{34} \rho \cos(\theta + s)^2 + r \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3) / \\ & (r \rho) \epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

> **F3:=op(1,e3);**

$$\begin{aligned} F3 := & -(\rho a_{21} r \cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_{23} \rho^2 \cos(\theta + s) \\ & + \cos(\theta) a_{24} \rho^2 \sin(\theta + s) + \rho \cos(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \cos(\theta) a_{22} r \sin(\theta) - \rho \sin(\theta) a_{11} r \cos(\theta) - \rho a_{12} r \\
& + \rho a_{12} r \cos(\theta)^2 - \sin(\theta) a_{13} \rho^2 \cos(\theta + s) \\
& - \sin(\theta) a_{14} \rho^2 \sin(\theta + s) - \rho \sin(\theta) \phi(r \cos(\theta)) b_1 \\
& - \cos(\theta + s) a_{41} r^2 \cos(\theta) - r a_{43} \rho \cos(\theta + s)^2 \\
& - r \cos(\theta + s) a_{44} \rho \sin(\theta + s) - r \cos(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_4 \\
& - \cos(\theta + s) a_{42} r^2 \sin(\theta) + \sin(\theta + s) a_{31} r^2 \cos(\theta) \\
& + \sin(\theta + s) a_{32} r^2 \sin(\theta) + r \sin(\theta + s) a_{33} \rho \cos(\theta + s) \\
& + r a_{34} \rho - r a_{34} \rho \cos(\theta + s)^2 + r \sin(\theta + s) \phi(r \cos(\theta)) b_3) / \\
& (r \rho)
\end{aligned}$$

> **collect(expand(F1), phi);**

$$\begin{aligned}
& (\cos(\theta) b_1 + \sin(\theta) b_2) \phi(r \cos(\theta)) + a_{11} r \cos(\theta)^2 \\
& + \cos(\theta) a_{12} r \sin(\theta) + a_{13} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \\
& - \cos(\theta) a_{13} \rho \sin(\theta) \sin(s) + \cos(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta) \cos(s) \\
& + a_{14} \rho \cos(\theta)^2 \sin(s) + \sin(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta) \cos(s) \\
& + \sin(\theta) a_{21} r \cos(\theta) + a_{22} r - a_{22} r \cos(\theta)^2 \\
& - a_{23} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) + a_{24} \rho \sin(\theta)^2 \cos(s) \\
& + \sin(\theta) a_{24} \rho \cos(\theta) \sin(s)
\end{aligned}$$

> **%-(cos(theta)*b[1]+sin(theta)*b[2])*phi(r*cos(theta));**

$$\begin{aligned}
& a_{11} r \cos(\theta)^2 + \cos(\theta) a_{12} r \sin(\theta) + a_{13} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \\
& - \cos(\theta) a_{13} \rho \sin(\theta) \sin(s) + \cos(\theta) a_{14} \rho \sin(\theta) \cos(s) \\
& + a_{14} \rho \cos(\theta)^2 \sin(s) + \sin(\theta) a_{23} \rho \cos(\theta) \cos(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(\theta) a_{21} r \cos(\theta) + a_{22} r - a_{22} r \cos(\theta)^2 \\
& - a_{23} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) + a_{24} \rho \sin(\theta)^2 \cos(s) \\
& + \sin(\theta) a_{24} \rho \cos(\theta) \sin(s)
\end{aligned}$$

> **int(%,theta=0..2*Pi);**

$$\begin{aligned}
& a_{11} r \pi - a_{23} \rho \sin(s) \pi + a_{22} r \pi + a_{14} \rho \sin(s) \pi \\
& + a_{13} \rho \cos(s) \pi + a_{24} \rho \cos(s) \pi
\end{aligned}$$

> **collect(collect(collect(collect(%,r),sin),cos),Pi);**

$$\begin{aligned}
& (\\
& (a_{13} \rho + a_{24} \rho) \cos(s) + (-a_{23} \rho + a_{14} \rho) \sin(s) + (a_{22} + a_{11}) r \\
&) \pi
\end{aligned}$$

> **collect(expand(F2),phi);**

$$\begin{aligned}
& (b_3 \cos(\theta) \cos(s) - b_3 \sin(\theta) \sin(s) + b_4 \sin(\theta) \cos(s) \\
& + b_4 \cos(\theta) \sin(s)) \phi(r \cos(\theta)) + a_{44} \rho \\
& - a_{34} \rho \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) + a_{31} r \cos(\theta)^2 \cos(s) \\
& + a_{33} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 + a_{33} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + a_{42} r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(s) + a_{41} r \cos(\theta)^2 \sin(s) \\
& + a_{42} r \sin(\theta)^2 \cos(s) + 2 a_{44} \rho \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) \\
& - a_{31} r \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(s) - a_{32} r \sin(\theta)^2 \sin(s) \\
& - a_{34} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) - a_{44} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - a_{44} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 + a_{34} \rho \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) \\
& + a_{32} r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(s) + a_{34} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& + a_{41} r \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(s) - a_{43} \rho \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{43} \rho \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) + a_{43} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& - a_{43} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) \\
& - 2 a_{33} \rho \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s)
\end{aligned}$$

> **%-(b[3]*cos(theta)*cos(s)+b[4]*sin(theta)*cos(s)+b[4]*cos(theta)*sin(s)-b[3]*sin(theta)*sin(s))*phi(r*cos(theta));**

$$\begin{aligned}
& a_{44} \rho - a_{34} \rho \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) + a_{31} r \cos(\theta)^2 \cos(s) \\
& + a_{33} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 + a_{33} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + a_{42} r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(s) + a_{41} r \cos(\theta)^2 \sin(s) \\
& + a_{42} r \sin(\theta)^2 \cos(s) + 2 a_{44} \rho \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) \\
& - a_{31} r \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(s) - a_{32} r \sin(\theta)^2 \sin(s) \\
& - a_{34} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) - a_{44} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - a_{44} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 + a_{34} \rho \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) \\
& + a_{32} r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(s) + a_{34} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& + a_{41} r \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(s) - a_{43} \rho \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) \\
& + a_{43} \rho \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) + a_{43} \rho \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& - a_{43} \rho \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) \\
& - 2 a_{33} \rho \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s)
\end{aligned}$$

> **simplify(int(%,theta=0..2*Pi));**

$$\begin{aligned}
& -\pi (-a_{31} r \cos(s) - a_{41} r \sin(s) - a_{42} r \cos(s) + a_{32} r \sin(s) \\
& - a_{44} \rho - a_{33} \rho)
\end{aligned}$$

> **collect(expand(F3),phi);**

$$\begin{aligned}
& a_{12} - a_{34} + \frac{\rho \sin(\theta)^2 a_{14} \cos(s)}{r} - \frac{\rho \cos(\theta)^2 a_{24} \sin(s)}{r} \\
& - \frac{\rho \cos(\theta)^2 a_{23} \cos(s)}{r} + \frac{r a_{41} \cos(\theta)^2 \cos(s)}{\rho} \\
& - \cos(\theta) a_{22} \sin(\theta) + \sin(\theta) a_{11} \cos(\theta) \\
& - \frac{\rho \sin(\theta)^2 a_{13} \sin(s)}{r} + \frac{\rho \cos(\theta) a_{23} \sin(\theta) \sin(s)}{r} \\
& - \frac{\rho \cos(\theta) a_{24} \sin(\theta) \cos(s)}{r} + a_{43} \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 a_{43} \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) + a_{43} \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + a_{44} \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) + a_{44} \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& - a_{44} \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) - a_{44} \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) \\
& + \frac{r a_{42} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(s)}{\rho} - \frac{r a_{31} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(s)}{\rho} \\
& - \frac{r a_{32} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(s)}{\rho} - a_{33} \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) \\
& - a_{33} \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) + a_{33} \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) \\
& + a_{33} \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) + a_{34} \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 a_{34} \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) + a_{34} \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + \frac{\rho \sin(\theta) a_{13} \cos(\theta) \cos(s)}{r} + \frac{\rho \sin(\theta) a_{14} \cos(\theta) \sin(s)}{r} \\
& - \frac{r a_{41} \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(s)}{\rho} - \frac{r a_{42} \sin(\theta)^2 \sin(s)}{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{r a_{31} \cos(\theta)^2 \sin(s)}{\rho} - \frac{r a_{32} \sin(\theta)^2 \cos(s)}{\rho} + \left(\right. \\
& - \frac{b_4 \sin(\theta) \sin(s)}{\rho} + \frac{\sin(\theta) b_1}{r} - \frac{\cos(\theta) b_2}{r} \\
& \left. - \frac{b_3 \cos(\theta) \sin(s)}{\rho} - \frac{b_3 \sin(\theta) \cos(s)}{\rho} + \frac{b_4 \cos(\theta) \cos(s)}{\rho} \right)
\end{aligned}$$

$$\phi(r \cos(\theta)) - a_{21} \cos(\theta)^2 - a_{12} \cos(\theta)^2$$

> **%- (-1/r*cos(theta)*b[2]-1/rho*b[4]*sin(theta)*sin(s)-1/rho*b[3]*sin(theta)*cos(s)+1/r*sin(theta)*b[1]+1/rho*b[4]*cos(theta)*cos(s)-1/rho*b[3]*cos(theta)*sin(s))*phi(r*cos(theta));**

$$\begin{aligned}
a_{12} - a_{34} + & \frac{\rho \sin(\theta)^2 a_{14} \cos(s)}{r} - \frac{\rho \cos(\theta)^2 a_{24} \sin(s)}{r} \\
& - \frac{\rho \cos(\theta)^2 a_{23} \cos(s)}{r} + \frac{r a_{41} \cos(\theta)^2 \cos(s)}{\rho} \\
& - \cos(\theta) a_{22} \sin(\theta) + \sin(\theta) a_{11} \cos(\theta) \\
& - \frac{\rho \sin(\theta)^2 a_{13} \sin(s)}{r} + \frac{\rho \cos(\theta) a_{23} \sin(\theta) \sin(s)}{r} \\
& - \frac{\rho \cos(\theta) a_{24} \sin(\theta) \cos(s)}{r} + a_{43} \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 a_{43} \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) + a_{43} \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + a_{44} \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) + a_{44} \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) \\
& - a_{44} \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) - a_{44} \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r a_{42} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(s)}{\rho} - \frac{r a_{31} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(s)}{\rho} \\
& - \frac{r a_{32} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(s)}{\rho} - a_{33} \cos(\theta) \cos(s)^2 \sin(\theta) \\
& - a_{33} \cos(\theta)^2 \cos(s) \sin(s) + a_{33} \sin(\theta)^2 \sin(s) \cos(s) \\
& + a_{33} \sin(\theta) \sin(s)^2 \cos(\theta) + a_{34} \cos(\theta)^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 a_{34} \cos(\theta) \cos(s) \sin(\theta) \sin(s) + a_{34} \sin(\theta)^2 \sin(s)^2 \\
& + \frac{\rho \sin(\theta) a_{13} \cos(\theta) \cos(s)}{r} + \frac{\rho \sin(\theta) a_{14} \cos(\theta) \sin(s)}{r} \\
& - \frac{r a_{41} \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(s)}{\rho} - \frac{r a_{42} \sin(\theta)^2 \sin(s)}{\rho} \\
& - \frac{r a_{31} \cos(\theta)^2 \sin(s)}{\rho} - \frac{r a_{32} \sin(\theta)^2 \cos(s)}{\rho} - a_{21} \cos(\theta)^2 \\
& - a_{12} \cos(\theta)^2
\end{aligned}$$

> **simplify(int(% , theta=0..2*Pi));**

$$\begin{aligned}
& - \pi (r^2 a_{31} \sin(s) + r^2 a_{42} \sin(s) + \rho^2 a_{24} \sin(s) + \rho^2 a_{13} \sin(s) \\
& - a_{43} r \rho + r a_{34} \rho - \rho a_{12} r + r^2 a_{32} \cos(s) - r^2 a_{41} \cos(s) \\
& + \rho^2 a_{23} \cos(s) - \rho^2 a_{14} \cos(s) + a_{21} r \rho) / (r \rho)
\end{aligned}$$

> **restart;**

> **h1:=b[1]*I[1](r)+Pi*(c[1]*r+c[2]*rho*cos(s)+c[3]*rho*sin(s));**

$$h1 := b_1 I_1(r) + \pi (c_1 r + c_2 \rho \cos(s) + c_3 \rho \sin(s))$$

> **h2:=I[1](r)*(b[3]*cos(s)+b[4]*sin(s))+Pi*(c[4]*rho+c[5]*r*cos(s)+c[6]*r*sin(s));**

$$h2 := I_1(r) (b_3 \cos(s) + b_4 \sin(s))$$

$$+ \pi (c_4 \rho + c_5 r \cos(s) + c_6 r \sin(s))$$

> **h3:=I[1](r)*(-b[2]*rho+b[4]*r*cos(s)-b[3]*r*sin(s))+Pi*(c[7]*r*rho+c[6]*r^2*cos(s)+c[5]*r^2*sin(s)+c[3]*rho^2*cos(s)-c[2]*rho^2*sin(s));**

$$h3 := I_1(r) (-b_2 \rho + b_4 r \cos(s) - b_3 r \sin(s)) + \pi ($$

$$c_7 r \rho + c_6 r^2 \cos(s) + c_5 r^2 \sin(s) + c_3 \rho^2 \cos(s) - c_2 \rho^2 \sin(s))$$

> **solve(h1,I[1](r));**

$$- \frac{\pi (c_1 r + c_2 \rho \cos(s) + c_3 \rho \sin(s))}{b_1}$$

> **subs(I[1](r)=%,h2);**

$$- \frac{\pi (c_1 r + c_2 \rho \cos(s) + c_3 \rho \sin(s)) (b_3 \cos(s) + b_4 \sin(s))}{b_1}$$

$$+ \pi (c_4 \rho + c_5 r \cos(s) + c_6 r \sin(s))$$

> **solve(%,rho);**

$$r (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s))$$

$$/ (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s)$$

$$+ c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4)$$

> **subs(rho=%, -Pi*(c[1]*r+c[2]*rho*cos(s)+c[3]*rho*sin(s))/b[1]);**

$$- \pi (c_1 r + c_2 r$$

$$(-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s))$$

$$\cos(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s)$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4) + c_3 r \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)) \\
& \sin(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4)) / b_1
\end{aligned}$$

> **collect(% , r);**

$$\begin{aligned}
& - \pi (c_1 + c_2 \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)) \\
& \cos(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4) + c_3 \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)) \\
& \sin(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4)) r / b_1
\end{aligned}$$

> **normal(%);**

$$\begin{aligned}
& - \pi (-c_1 c_4 + c_2 \cos(s)^2 c_5 + c_2 \cos(s) c_6 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) c_5 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 c_6) r / (c_2 \cos(s)^2 b_3 \\
& + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 \\
& - b_1 c_4)
\end{aligned}$$

> **subs(I[1](r)=%, rho=r*(-c[1]*b[3]*cos(s)-c[1]*b[4]*sin(s)+b[1]*c[5]*cos(s)+b[1]*c[6]*sin(s))/(c[2]*cos(s)^2*b[3]+c[2]*cos(s)*b[4]*sin(s)+c[3]*sin(s)*b[3]*cos(s)+c[3]*sin(s)^2*b[4]-b[1]*c[4]), h3);**

$$- \pi (-c_1 c_4 + c_2 \cos(s)^2 c_5 + c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \sin(s) c_5 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 c_6) r (-b_2 r \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)) / (\\
& c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) \\
& + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4) + b_4 r \cos(s) - b_3 r \sin(s)) / (\\
& c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) \\
& + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4) + \pi (c_7 r^2 \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)) / (\\
& c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) \\
& + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4) + c_6 r^2 \cos(s) + c_5 r^2 \sin(s) + c_3 r^2 \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s))^2 \\
& \cos(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4)^2 - c_2 r^2 \\
& (-c_1 b_3 \cos(s) - c_1 b_4 \sin(s) + b_1 c_5 \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s))^2 \\
& \sin(s) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) \\
& + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 - b_1 c_4)^2)
\end{aligned}$$

> **normal (%) ;**

$$\begin{aligned}
& \pi r^2 (c_7 c_1 b_3 \cos(s) b_1 c_4 - c_7 b_1^2 c_5 \cos(s) c_4 \\
& - c_2 \sin(s)^3 b_1^2 c_6^2 - c_2 \sin(s)^3 c_1^2 b_4^2 + c_3 \cos(s)^3 b_1^2 c_5^2 \\
& + c_3 \cos(s)^3 c_1^2 b_3^2 + c_5 \sin(s) b_1^2 c_4^2 + c_5 \sin(s)^5 c_3^2 b_4^2 \\
& + c_6 \cos(s) b_1^2 c_4^2 + c_6 \cos(s)^5 c_2^2 b_3^2 - c_7 c_1 b_3^2 \cos(s)^3 c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 c_7 c_1 b_3 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) - c_7 c_1 b_3^2 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) \\
& - 2 c_7 c_1 b_3 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 - c_7 c_1 b_4^2 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) \\
& - c_7 c_1 b_4^2 \sin(s)^3 c_3 + c_7 c_1 b_4 \sin(s) b_1 c_4 \\
& + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^3 c_2 b_3 + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) \\
& + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 + c_7 b_1 c_5 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^2 c_3 b_3 \cos(s) + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^3 c_3 b_4 \\
& - c_7 b_1^2 c_6 \sin(s) c_4 + c_6 \cos(s)^3 c_3^2 \sin(s)^2 b_3^2 \\
& + c_6 \cos(s)^4 c_2^2 b_3 b_4 \sin(s) + 2 c_6 \cos(s)^4 c_2 b_3^2 c_3 \sin(s) \\
& + 2 c_6 \cos(s)^3 c_2 b_3 c_3 \sin(s)^2 b_4 - 2 c_6 \cos(s)^3 c_2 b_3 b_1 c_4 \\
& - c_6 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) b_1 c_4 + c_6 \cos(s)^2 c_3^2 \sin(s)^3 b_3 b_4 \\
& - 2 c_6 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 b_1 c_4 - c_6 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 b_1 c_4 \\
& + 2 c_5 \sin(s) c_2^2 \cos(s)^4 b_3^2 + c_5 \sin(s)^3 c_2^2 \cos(s)^2 b_4^2 \\
& + 2 c_5 \sin(s)^3 c_3^2 b_3^2 \cos(s)^2 + 3 c_5 \sin(s)^2 c_2^2 \cos(s)^3 b_3 b_4 \\
& + 4 c_5 \sin(s)^2 c_2 \cos(s)^3 b_3^2 c_3 \\
& + 6 c_5 \sin(s)^3 c_2 \cos(s)^2 b_3 c_3 b_4 \\
& - 3 c_5 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 b_3 b_1 c_4 + 2 c_5 \sin(s)^4 c_2 \cos(s) b_4^2 c_3 \\
& - 2 c_5 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 b_1 c_4 + 3 c_5 \sin(s)^4 c_3^2 b_3 \cos(s) b_4 \\
& - 3 c_5 \sin(s)^2 c_3 b_3 \cos(s) b_1 c_4 - 2 c_5 \sin(s)^3 c_3 b_4 b_1 c_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \cos(s) c_1^2 b_4^2 \sin(s)^2 + 2 c_3 \cos(s)^2 c_1^2 b_3 b_4 \sin(s) \\
& - 2 c_3 \cos(s)^3 c_1 b_3 b_1 c_5 - 2 c_3 \cos(s)^2 c_1 b_3 b_1 c_6 \sin(s) \\
& - 2 c_3 \cos(s)^2 c_1 b_4 \sin(s) b_1 c_5 \\
& - 2 c_3 \cos(s) c_1 b_4 \sin(s)^2 b_1 c_6 + 2 c_3 \cos(s)^2 b_1^2 c_5 c_6 \sin(s) \\
& + c_3 \cos(s) b_1^2 c_6^2 \sin(s)^2 - c_2 \sin(s) c_1^2 b_3^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 c_2 \sin(s)^2 c_1^2 b_3 \cos(s) b_4 + 2 c_2 \sin(s) c_1 b_3 \cos(s)^2 b_1 c_5 \\
& + 2 c_2 \sin(s)^2 c_1 b_3 \cos(s) b_1 c_6 \\
& + 2 c_2 \sin(s)^2 c_1 b_4 b_1 c_5 \cos(s) + 2 c_2 \sin(s)^3 c_1 b_4 b_1 c_6 \\
& - c_2 \sin(s) b_1^2 c_5^2 \cos(s)^2 - 2 c_2 \sin(s)^2 b_1^2 c_5 \cos(s) c_6 \\
& + c_1^2 c_4 b_2 b_3 \cos(s) + c_1^2 c_4 b_2 b_4 \sin(s) - c_1 c_4 b_2 b_1 c_5 \cos(s) \\
& - c_1 c_4 b_2 b_1 c_6 \sin(s) + c_1 c_4 b_4 \cos(s)^3 c_2 b_3 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 \cos(s)^2 c_2 \sin(s) + c_1 c_4 b_4 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 - c_1 c_4^2 b_4 \cos(s) b_1 \\
& - c_1 c_4 b_3^2 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 - c_1 c_4 b_3 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 \\
& - c_1 c_4 b_3^2 \sin(s)^2 c_3 \cos(s) - c_1 c_4 b_3 \sin(s)^3 c_3 b_4 \\
& + c_1 c_4^2 b_3 \sin(s) b_1 - c_2 \cos(s)^3 c_5 b_2 c_1 b_3 \\
& - c_2 \cos(s)^2 c_5 b_2 c_1 b_4 \sin(s) + c_2 \cos(s)^3 c_5^2 b_2 b_1 \\
& + 2 c_2 \cos(s)^2 c_5 b_2 b_1 c_6 \sin(s) - c_2^2 \cos(s)^5 c_5 b_4 b_3 \\
& - c_2^2 \cos(s)^4 c_5 b_4^2 \sin(s) - 2 c_2 \cos(s)^4 c_5 b_4 c_3 \sin(s) b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 c_2 \cos(s)^3 c_5 b_4^2 c_3 \sin(s)^2 + c_2 \cos(s)^3 c_5 b_4 b_1 c_4 \\
& - c_2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s) b_2 c_1 b_3 - c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^2 b_2 c_1 b_4 \\
& + c_2 \cos(s) c_6^2 \sin(s)^2 b_2 b_1 + c_2^2 \cos(s)^3 c_6 \sin(s)^2 b_3^2 \\
& + c_2^2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s)^3 b_3 b_4 + 2 c_2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s)^3 b_3^2 c_3 \\
& + 2 c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^4 b_3 c_3 b_4 - c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^2 b_3 b_1 c_4 \\
& - c_3 \sin(s) c_5 \cos(s)^2 b_2 c_1 b_3 - c_3 \sin(s)^2 c_5 \cos(s) b_2 c_1 b_4 \\
& + c_3 \sin(s) c_5^2 \cos(s)^2 b_2 b_1 + 2 c_3 \sin(s)^2 c_5 \cos(s) b_2 b_1 c_6 \\
& - c_3^2 \sin(s)^2 c_5 \cos(s)^3 b_4 b_3 - c_3^2 \sin(s)^3 c_5 \cos(s)^2 b_4^2 \\
& + c_3 \sin(s) c_5 \cos(s)^2 b_4 b_1 c_4 - c_3 \sin(s)^2 c_6 b_2 c_1 b_3 \cos(s) \\
& - c_3 \sin(s)^3 c_6 b_2 c_1 b_4 + c_3 \sin(s)^3 c_6^2 b_2 b_1 \\
& + c_3^2 \sin(s)^4 c_6 b_3^2 \cos(s) + c_3^2 \sin(s)^5 c_6 b_3 b_4 \\
& - c_3 \sin(s)^3 c_6 b_3 b_1 c_4) / (c_2 \cos(s)^2 b_3 \\
& + c_2 \cos(s) b_4 \sin(s) + c_3 \sin(s) b_3 \cos(s) + c_3 \sin(s)^2 b_4 \\
& - b_1 c_4)^2
\end{aligned}$$

> **f(s) := numer(%);**

$$\begin{aligned}
f(s) := \pi r^2 (c_7 c_1 b_3 \cos(s) b_1 c_4 - c_7 b_1^2 c_5 \cos(s) c_4 \\
- c_2 \sin(s)^3 b_1^2 c_6^2 - c_2 \sin(s)^3 c_1^2 b_4^2 + c_3 \cos(s)^3 b_1^2 c_5^2 \\
+ c_3 \cos(s)^3 c_1^2 b_3^2 + c_5 \sin(s) b_1^2 c_4^2 + c_5 \sin(s)^5 c_3^2 b_4^2 \\
+ c_6 \cos(s) b_1^2 c_4^2 + c_6 \cos(s)^5 c_2^2 b_3^2 - c_7 c_1 b_3^2 \cos(s)^3 c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 c_7 c_1 b_3 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) - c_7 c_1 b_3^2 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) \\
& - 2 c_7 c_1 b_3 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 - c_7 c_1 b_4^2 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) \\
& - c_7 c_1 b_4^2 \sin(s)^3 c_3 + c_7 c_1 b_4 \sin(s) b_1 c_4 \\
& + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^3 c_2 b_3 + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) \\
& + c_7 b_1 c_5 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 + c_7 b_1 c_5 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 b_3 + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^2 c_3 b_3 \cos(s) + c_7 b_1 c_6 \sin(s)^3 c_3 b_4 \\
& - c_7 b_1^2 c_6 \sin(s) c_4 + c_6 \cos(s)^3 c_3^2 \sin(s)^2 b_3^2 \\
& + c_6 \cos(s)^4 c_2^2 b_3 b_4 \sin(s) + 2 c_6 \cos(s)^4 c_2 b_3^2 c_3 \sin(s) \\
& + 2 c_6 \cos(s)^3 c_2 b_3 c_3 \sin(s)^2 b_4 - 2 c_6 \cos(s)^3 c_2 b_3 b_1 c_4 \\
& - c_6 \cos(s)^2 c_2 b_4 \sin(s) b_1 c_4 + c_6 \cos(s)^2 c_3^2 \sin(s)^3 b_3 b_4 \\
& - 2 c_6 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 b_1 c_4 - c_6 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 b_4 b_1 c_4 \\
& + 2 c_5 \sin(s) c_2^2 \cos(s)^4 b_3^2 + c_5 \sin(s)^3 c_2^2 \cos(s)^2 b_4^2 \\
& + 2 c_5 \sin(s)^3 c_3^2 b_3^2 \cos(s)^2 + 3 c_5 \sin(s)^2 c_2^2 \cos(s)^3 b_3 b_4 \\
& + 4 c_5 \sin(s)^2 c_2 \cos(s)^3 b_3^2 c_3 \\
& + 6 c_5 \sin(s)^3 c_2 \cos(s)^2 b_3 c_3 b_4 \\
& - 3 c_5 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 b_3 b_1 c_4 + 2 c_5 \sin(s)^4 c_2 \cos(s) b_4^2 c_3 \\
& - 2 c_5 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 b_1 c_4 + 3 c_5 \sin(s)^4 c_3^2 b_3 \cos(s) b_4 \\
& - 3 c_5 \sin(s)^2 c_3 b_3 \cos(s) b_1 c_4 - 2 c_5 \sin(s)^3 c_3 b_4 b_1 c_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \cos(s) c_1^2 b_4^2 \sin(s)^2 + 2 c_3 \cos(s)^2 c_1^2 b_3 b_4 \sin(s) \\
& - 2 c_3 \cos(s)^3 c_1 b_3 b_1 c_5 - 2 c_3 \cos(s)^2 c_1 b_3 b_1 c_6 \sin(s) \\
& - 2 c_3 \cos(s)^2 c_1 b_4 \sin(s) b_1 c_5 \\
& - 2 c_3 \cos(s) c_1 b_4 \sin(s)^2 b_1 c_6 + 2 c_3 \cos(s)^2 b_1^2 c_5 c_6 \sin(s) \\
& + c_3 \cos(s) b_1^2 c_6^2 \sin(s)^2 - c_2 \sin(s) c_1^2 b_3^2 \cos(s)^2 \\
& - 2 c_2 \sin(s)^2 c_1^2 b_3 \cos(s) b_4 + 2 c_2 \sin(s) c_1 b_3 \cos(s)^2 b_1 c_5 \\
& + 2 c_2 \sin(s)^2 c_1 b_3 \cos(s) b_1 c_6 \\
& + 2 c_2 \sin(s)^2 c_1 b_4 b_1 c_5 \cos(s) + 2 c_2 \sin(s)^3 c_1 b_4 b_1 c_6 \\
& - c_2 \sin(s) b_1^2 c_5^2 \cos(s)^2 - 2 c_2 \sin(s)^2 b_1^2 c_5 \cos(s) c_6 \\
& + c_1^2 c_4 b_2 b_3 \cos(s) + c_1^2 c_4 b_2 b_4 \sin(s) - c_1 c_4 b_2 b_1 c_5 \cos(s) \\
& - c_1 c_4 b_2 b_1 c_6 \sin(s) + c_1 c_4 b_4 \cos(s)^3 c_2 b_3 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 \cos(s)^2 c_2 \sin(s) + c_1 c_4 b_4 \cos(s)^2 c_3 \sin(s) b_3 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 \cos(s) c_3 \sin(s)^2 - c_1 c_4^2 b_4 \cos(s) b_1 \\
& - c_1 c_4 b_3^2 \sin(s) c_2 \cos(s)^2 - c_1 c_4 b_3 \sin(s)^2 c_2 \cos(s) b_4 \\
& - c_1 c_4 b_3^2 \sin(s)^2 c_3 \cos(s) - c_1 c_4 b_3 \sin(s)^3 c_3 b_4 \\
& + c_1 c_4^2 b_3 \sin(s) b_1 - c_2 \cos(s)^3 c_5 b_2 c_1 b_3 \\
& - c_2 \cos(s)^2 c_5 b_2 c_1 b_4 \sin(s) + c_2 \cos(s)^3 c_5^2 b_2 b_1 \\
& + 2 c_2 \cos(s)^2 c_5 b_2 b_1 c_6 \sin(s) - c_2^2 \cos(s)^5 c_5 b_4 b_3 \\
& - c_2^2 \cos(s)^4 c_5 b_4^2 \sin(s) - 2 c_2 \cos(s)^4 c_5 b_4 c_3 \sin(s) b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 c_2 \cos(s)^3 c_5 b_4^2 c_3 \sin(s)^2 + c_2 \cos(s)^3 c_5 b_4 b_1 c_4 \\
& - c_2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s) b_2 c_1 b_3 - c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^2 b_2 c_1 b_4 \\
& + c_2 \cos(s) c_6^2 \sin(s)^2 b_2 b_1 + c_2^2 \cos(s)^3 c_6 \sin(s)^2 b_3^2 \\
& + c_2^2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s)^3 b_3 b_4 + 2 c_2 \cos(s)^2 c_6 \sin(s)^3 b_3^2 c_3 \\
& + 2 c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^4 b_3 c_3 b_4 - c_2 \cos(s) c_6 \sin(s)^2 b_3 b_1 c_4 \\
& - c_3 \sin(s) c_5 \cos(s)^2 b_2 c_1 b_3 - c_3 \sin(s)^2 c_5 \cos(s) b_2 c_1 b_4 \\
& + c_3 \sin(s) c_5^2 \cos(s)^2 b_2 b_1 + 2 c_3 \sin(s)^2 c_5 \cos(s) b_2 b_1 c_6 \\
& - c_3^2 \sin(s)^2 c_5 \cos(s)^3 b_4 b_3 - c_3^2 \sin(s)^3 c_5 \cos(s)^2 b_4^2 \\
& + c_3 \sin(s) c_5 \cos(s)^2 b_4 b_1 c_4 - c_3 \sin(s)^2 c_6 b_2 c_1 b_3 \cos(s) \\
& - c_3 \sin(s)^3 c_6 b_2 c_1 b_4 + c_3 \sin(s)^3 c_6^2 b_2 b_1 \\
& + c_3^2 \sin(s)^4 c_6 b_3^2 \cos(s) + c_3^2 \sin(s)^5 c_6 b_3 b_4 \\
& - c_3 \sin(s)^3 c_6 b_3 b_1 c_4)
\end{aligned}$$

> **simplify(subs(cos(s)=x,sin(s)=sqrt(1-x^2), %));**

$$\begin{aligned}
& (c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 - 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_3^2 x^4 + c_3 x^3 b_1^2 c_5^2 \\
& + c_3 x^3 c_1^2 b_3^2 + c_6 x b_1^2 c_4^2 + c_5 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_4^2 - c_7 b_1^2 c_5 x c_4 \\
& + c_7 c_1 b_3 x b_1 c_4 - c_7 c_1 b_3^2 x^3 c_2 + c_7 b_1 c_5 x^3 c_2 b_3 \\
& - c_6 x^3 c_2 b_3 b_1 c_4 - 2 c_3 x^3 c_1 b_3 b_1 c_5 + c_1^2 c_4 b_2 b_3 x \\
& - c_1 c_4 b_2 b_1 c_5 x + 2 c_1 c_4 b_4 x^3 c_2 b_3 - c_1 c_4^2 b_4 x b_1 \\
& - c_2 x^3 c_5 b_2 c_1 b_3 + c_2 x^3 c_5^2 b_2 b_1 - 4 c_2^2 x^5 c_5 b_4 b_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 c_2 x^3 c_5 b_4 b_1 c_4 + c_7 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_4 \\
& - c_7 b_1^2 c_6 \sqrt{1-x^2} c_4 + c_1^2 c_4 b_2 b_4 \sqrt{1-x^2} \\
& - c_1 c_4 b_2 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} + c_1 c_4^2 b_3 \sqrt{1-x^2} b_1 \\
& - 2 c_7 c_1 b_3 x^2 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} - c_7 c_1 b_3^2 x^2 c_3 \sqrt{1-x^2} \\
& + c_7 b_1 c_5 x^2 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} + c_7 b_1 c_5 x^2 c_3 \sqrt{1-x^2} b_3 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_2 x^2 b_3 - c_6 x^2 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_4 \\
& - c_6 x^2 c_3 \sqrt{1-x^2} b_3 b_1 c_4 + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2^2 x^4 b_3^2 \\
& - 3 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2 x^2 b_3 b_1 c_4 + 2 c_3 x^2 c_1^2 b_3 b_4 \sqrt{1-x^2} \\
& - 2 c_3 x^2 c_1 b_3 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} - 2 c_3 x^2 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_5 \\
& + 2 c_3 x^2 b_1^2 c_5 c_6 \sqrt{1-x^2} - c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_3^2 x^2 \\
& + 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_3 x^2 b_1 c_5 - c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_5^2 x^2 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 x^2 c_2 \sqrt{1-x^2} + 2 c_1 c_4 b_4 x^2 c_3 \sqrt{1-x^2} b_3 \\
& - c_1 c_4 b_3^2 \sqrt{1-x^2} c_2 x^2 - c_2 x^2 c_5 b_2 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} \\
& + 2 c_2 x^2 c_5 b_2 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} - 2 c_2^2 x^4 c_5 b_4^2 \sqrt{1-x^2} \\
& - 8 c_2 x^4 c_5 b_4 c_3 \sqrt{1-x^2} b_3 - c_2 x^2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_2 c_1 b_3 \\
& - c_3 \sqrt{1-x^2} c_5 x^2 b_2 c_1 b_3 + c_3 \sqrt{1-x^2} c_5^2 x^2 b_2 b_1 \\
& + 3 c_3 \sqrt{1-x^2} c_5 x^2 b_4 b_1 c_4 - c_3 x^3 c_1^2 b_4^2 - c_3 x^3 b_1^2 c_6^2 \\
& - 2 c_7 c_1 b_3 x c_3 b_4 + 2 c_7 c_1 b_3 x^3 c_3 b_4 - c_7 c_1 b_4^2 c_2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_7 c_1 b_4^2 c_2 x^3 + c_7 b_1 c_5 x c_3 b_4 - c_7 b_1 c_5 x^3 c_3 b_4 \\
& + c_7 b_1 c_6 c_2 x b_4 - c_7 b_1 c_6 c_2 x^3 b_4 + c_7 b_1 c_6 c_3 b_3 x \\
& - c_7 b_1 c_6 c_3 b_3 x^3 - c_6 x^3 c_3^2 b_3^2 - 2 c_6 x^3 c_2 b_3 c_3 b_4 \\
& - c_6 x c_3 b_4 b_1 c_4 + c_6 x^3 c_3 b_4 b_1 c_4 + 3 c_5 c_2^2 x^3 b_3 b_4 \\
& + 4 c_5 c_2 x^3 b_3^2 c_3 - 4 c_5 c_2 x^5 b_3^2 c_3 + 2 c_5 c_2 x b_4^2 c_3 \\
& - 6 c_5 c_2 x^3 b_4^2 c_3 + 4 c_5 c_2 x^5 b_4^2 c_3 - 2 c_5 c_2 x b_4 b_1 c_4 \\
& + 3 c_5 c_3^2 b_3 x b_4 - 7 c_5 c_3^2 b_3 x^3 b_4 + 4 c_5 c_3^2 b_3 x^5 b_4 \\
& - 3 c_5 c_3 b_3 x b_1 c_4 + 3 c_5 c_3 b_3 x^3 b_1 c_4 + c_3 x c_1^2 b_4^2 \\
& - 2 c_3 x c_1 b_4 b_1 c_6 + 2 c_3 x^3 c_1 b_4 b_1 c_6 + c_3 x b_1^2 c_6^2 \\
& - 2 c_2 c_1^2 b_3 x b_4 + 2 c_2 c_1^2 b_3 x^3 b_4 + 2 c_2 c_1 b_3 x b_1 c_6 \\
& - 2 c_2 c_1 b_3 x^3 b_1 c_6 + 2 c_2 c_1 b_4 b_1 c_5 x - 2 c_2 c_1 b_4 b_1 c_5 x^3 \\
& - 2 c_2 b_1^2 c_5 x c_6 + 2 c_2 b_1^2 c_5 x^3 c_6 + c_1 c_4 b_4^2 x c_3 \\
& - c_1 c_4 b_4^2 x^3 c_3 - c_1 c_4 b_3 c_2 x b_4 - c_1 c_4 b_3^2 c_3 x \\
& + c_1 c_4 b_3^2 c_3 x^3 - c_2 x c_6 b_2 c_1 b_4 + c_2 x^3 c_6 b_2 c_1 b_4 \\
& + c_2 x c_6^2 b_2 b_1 - c_2 x^3 c_6^2 b_2 b_1 + c_2^2 x^3 c_6 b_3^2 \\
& + 2 c_2 x c_6 b_3 c_3 b_4 - c_2 x c_6 b_3 b_1 c_4 - c_3 c_5 x b_2 c_1 b_4 \\
& + c_3 c_5 x^3 b_2 c_1 b_4 + 2 c_3 c_5 x b_2 b_1 c_6 - 2 c_3 c_5 x^3 b_2 b_1 c_6 \\
& - c_3 c_6 b_2 c_1 b_3 x + c_3 c_6 b_2 c_1 b_3 x^3 + c_3^2 c_6 b_3^2 x \\
& - c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_4^2 - c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_6^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_6^2 x^2 + c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_4^2 x^2 \\
& - 3 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 x^2 + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 x^4 \\
& - c_7 c_1 b_4^2 \sqrt{1-x^2} c_3 + c_7 c_1 b_4^2 \sqrt{1-x^2} c_3 x^2 \\
& + c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 - c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 x^2 \\
& - 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 b_1 c_4 + 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_4 b_1 c_6 \\
& - 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_4 b_1 c_6 x^2 - c_1 c_4 b_3 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 \\
& - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_2 c_1 b_4 + c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_2 c_1 b_4 x^2 \\
& + c_3 \sqrt{1-x^2} c_6^2 b_2 b_1 - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6^2 b_2 b_1 x^2 \\
& + c_3^2 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_4 - c_3^2 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_4 x^2 \\
& - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_1 c_4 + c_5 \sqrt{1-x^2} c_2^2 x^2 b_4^2 \\
& + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_3^2 x^2 + 6 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2 x^2 b_3 c_3 b_4 \\
& + c_2^2 x^2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_3 b_4 + 2 c_2 x^2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_3^2 c_3) \pi r^2
\end{aligned}$$

> **collect(%,x);**

$$\begin{aligned}
& (4 c_5 c_3^2 b_3 b_4 - 4 c_5 c_2 b_3^2 c_3 - 4 c_5 c_2^2 b_3 b_4 + 4 c_5 c_2 b_4^2 c_3) \pi \\
& r^2 x^5 + (-2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_3^2 + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2^2 b_3^2 \\
& - 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2^2 b_4^2 + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 \\
& - 8 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2 b_3 c_3 b_4) \pi r^2 x^4 + (-c_7 c_1 b_3^2 c_2 + c_2 c_5^2 b_2 b_1 \\
& + c_7 c_1 b_4^2 c_2 + 3 c_5 c_2^2 b_3 b_4 + 4 c_5 c_2 b_3^2 c_3 - 6 c_5 c_2 b_4^2 c_3 \\
& - 7 c_5 c_3^2 b_3 b_4 + 2 c_2 c_1^2 b_3 b_4 + 2 c_2 b_1^2 c_5 c_6 - c_1 c_4 b_4^2 c_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 c_4 b_3^2 c_3 - c_2 c_6^2 b_2 b_1 + c_3 b_1^2 c_5^2 + c_3 c_1^2 b_3^2 - c_3 c_1^2 b_4^2 \\
& - c_3 b_1^2 c_6^2 + c_2^2 c_6 b_3^2 - c_3^2 c_6 b_3^2 + c_7 b_1 c_5 c_2 b_3 \\
& - c_2 c_5 b_2 c_1 b_3 - 2 c_3 c_1 b_3 b_1 c_5 + 2 c_7 c_1 b_3 c_3 b_4 \\
& - c_7 b_1 c_5 c_3 b_4 + c_6 c_3 b_4 b_1 c_4 + 3 c_5 c_2 b_4 b_1 c_4 \\
& + 3 c_5 c_3 b_3 b_1 c_4 + 2 c_3 c_1 b_4 b_1 c_6 - c_7 b_1 c_6 c_2 b_4 \\
& - c_7 b_1 c_6 c_3 b_3 - 2 c_2 c_1 b_3 b_1 c_6 - 2 c_2 c_1 b_4 b_1 c_5 \\
& + 2 c_1 c_4 b_3 c_2 b_4 + c_2 c_6 b_2 c_1 b_4 - 2 c_2 c_6 b_3 c_3 b_4 \\
& - c_2 c_6 b_3 b_1 c_4 + c_3 c_5 b_2 c_1 b_4 - 2 c_3 c_5 b_2 b_1 c_6 + c_3 c_6 b_2 c_1 b_3 \\
&) \pi r^2 x^3 + (-3 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 + c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_4^2 \\
& + c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_6^2 + c_7 c_1 b_4^2 \sqrt{1-x^2} c_3 \\
& - c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 + 3 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 b_1 c_4 \\
& - 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_4 b_1 c_6 + 2 c_1 c_4 b_3 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 \\
& + c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_2 c_1 b_4 - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6^2 b_2 b_1 \\
& - c_3^2 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_4 - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_1 c_4 \\
& + c_5 \sqrt{1-x^2} c_2^2 b_4^2 + 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_3^2 - c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_3^2 \\
& - c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_5^2 + 6 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2 b_3 c_3 b_4 \\
& + c_7 b_1 c_5 c_3 \sqrt{1-x^2} b_3 - 2 c_7 c_1 b_3 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} \\
& - c_6 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_4 - 3 c_5 \sqrt{1-x^2} c_2 b_3 b_1 c_4 \\
& + c_7 b_1 c_5 c_2 b_4 \sqrt{1-x^2} + 2 c_2 c_5 b_2 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} \\
& - c_7 c_1 b_3^2 c_3 \sqrt{1-x^2} - c_3 \sqrt{1-x^2} c_5 b_2 c_1 b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_1 c_4 b_3^2 \sqrt{1-x^2} c_2 - 2 c_3 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_5 \\
& -c_2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_2 c_1 b_3 + c_3 \sqrt{1-x^2} c_5^2 b_2 b_1 \\
& -c_2 c_5 b_2 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} + 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_3 b_1 c_5 \\
& + c_1 c_4 b_4^2 c_2 \sqrt{1-x^2} + 2 c_2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_3^2 c_3 \\
& + 2 c_3 b_1^2 c_5 c_6 \sqrt{1-x^2} + c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_2 b_3 \\
& + 2 c_3 c_1^2 b_3 b_4 \sqrt{1-x^2} - 2 c_3 c_1 b_3 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} \\
& + c_2^2 c_6 \sqrt{1-x^2} b_3 b_4) \pi r^2 x^2 + (-c_7 b_1^2 c_5 c_4 + c_1^2 c_4 b_2 b_3 \\
& - c_1 c_4^2 b_4 b_1 - c_7 c_1 b_4^2 c_2 + 2 c_5 c_2 b_4^2 c_3 + 3 c_5 c_3^2 b_3 b_4 \\
& - 2 c_2 c_1^2 b_3 b_4 - 2 c_2 b_1^2 c_5 c_6 + c_1 c_4 b_4^2 c_3 - c_1 c_4 b_3^2 c_3 \\
& + c_2 c_6^2 b_2 b_1 + c_6 b_1^2 c_4^2 + c_3 c_1^2 b_4^2 + c_3 b_1^2 c_6^2 + c_3^2 c_6 b_3^2 \\
& + c_7 c_1 b_3 b_1 c_4 - c_1 c_4 b_2 b_1 c_5 - 2 c_7 c_1 b_3 c_3 b_4 + c_7 b_1 c_5 c_3 b_4 \\
& - c_6 c_3 b_4 b_1 c_4 - 2 c_5 c_2 b_4 b_1 c_4 - 3 c_5 c_3 b_3 b_1 c_4 \\
& - 2 c_3 c_1 b_4 b_1 c_6 + c_7 b_1 c_6 c_2 b_4 + c_7 b_1 c_6 c_3 b_3 \\
& + 2 c_2 c_1 b_3 b_1 c_6 + 2 c_2 c_1 b_4 b_1 c_5 - c_1 c_4 b_3 c_2 b_4 \\
& - c_2 c_6 b_2 c_1 b_4 + 2 c_2 c_6 b_3 c_3 b_4 - c_2 c_6 b_3 b_1 c_4 - c_3 c_5 b_2 c_1 b_4 \\
& + 2 c_3 c_5 b_2 b_1 c_6 - c_3 c_6 b_2 c_1 b_3) \pi r^2 x + (\\
& -c_1 c_4 b_3 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 - c_7 b_1^2 c_6 \sqrt{1-x^2} c_4 \\
& - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_2 c_1 b_4 - c_1 c_4 b_2 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} \\
& + c_3 \sqrt{1-x^2} c_6^2 b_2 b_1 - c_2 \sqrt{1-x^2} c_1^2 b_4^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 c_4^2 b_3 \sqrt{1-x^2} b_1 + c_3^2 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_4 \\
& - c_3 \sqrt{1-x^2} c_6 b_3 b_1 c_4 + c_7 c_1 b_4 \sqrt{1-x^2} b_1 c_4 \\
& + c_5 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_4^2 + c_7 b_1 c_6 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 \\
& - c_2 \sqrt{1-x^2} b_1^2 c_6^2 - c_7 c_1 b_4^2 \sqrt{1-x^2} c_3 \\
& + c_1^2 c_4 b_2 b_4 \sqrt{1-x^2} + c_5 \sqrt{1-x^2} c_3^2 b_4^2 \\
& - 2 c_5 \sqrt{1-x^2} c_3 b_4 b_1 c_4 + 2 c_2 \sqrt{1-x^2} c_1 b_4 b_1 c_6) \pi r^2
\end{aligned}$$

> **subs(b[1]=1,b[2]=0,b[3]=0,b[4]=0,%);**

$$\begin{aligned}
& (c_3 c_5^2 - c_3 c_6^2 + 2 c_2 c_5 c_6) \pi r^2 x^3 \\
& + (c_2 \sqrt{1-x^2} c_6^2 - c_2 \sqrt{1-x^2} c_5^2 + 2 c_3 c_5 c_6 \sqrt{1-x^2}) \pi r^2 x^2 \\
& + (c_3 c_6^2 + c_6 c_4^2 - 2 c_2 c_5 c_6 - c_7 c_5 c_4) \pi r^2 x \\
& + (-c_7 c_6 \sqrt{1-x^2} c_4 + c_5 \sqrt{1-x^2} c_4^2 - c_2 \sqrt{1-x^2} c_6^2) \pi r^2
\end{aligned}$$

Chapitre 03 :

```

> restart;
> with(linalg):
> eqd1:=D(X)(t) = Y(t);
                                eqd1 := D(X)(t) = Y(t)
> eqd2:=D(Y)(t) = -3*X(t);
                                eqd2 := D(Y)(t) = -3 X(t)
> eqd3:=D(Z)(t) = W(t);
                                eqd3 := D(Z)(t) = W(t)
> eqd4:=D(W)(t) = -4*Z(t);
                                eqd4 := D(W)(t) = -4 Z(t)
> eqns:= { eqd1, eqd2, eqd3, eqd4,X(0)=X[0], Y(0)=Y[0],
           Z(0)=Z[0],W(0)=W[0]};
eqns := { W(0) = W0, X(0) = X0, Y(0) = Y0, Z(0) = Z0, D(W)(t) = -4 Z(t),
          D(X)(t) = Y(t), D(Y)(t) = -3 X(t), D(Z)(t) = W(t) }
> dsolve( eqns, {X(t), Y(t), Z(t),W(t)});
{ W(t) = -2 Z0 sin(2 t) + W0 cos(2 t), X(t) = - $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  (-X0  $\sqrt{3}$  cos( $\sqrt{3}$  t) - Y0 sin( $\sqrt{3}$  t)),
  Y(t) = -X0  $\sqrt{3}$  sin( $\sqrt{3}$  t) + Y0 cos( $\sqrt{3}$  t), Z(t) = Z0 cos(2 t) +  $\frac{1}{2}$  W0 sin(2 t) }
> with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix(4,4,[cos(sqrt(3)*t),(1/sqrt(3)*sin(sqrt(3)*t),0,0,-sqrt(3)*sin(sqrt(3)*t),cos(sqrt(3)*t),0,0,0,0,cos(2*t),1/2*sin(2*t),0,0,-2*sin(2*t),cos(2*t)]);
M := 
$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3} t) & \frac{1}{3} \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} & \cos(\sqrt{3} t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2 t) & \frac{1}{2} \sin(2 t) \\ 0 & 0 & -2 \sin(2 t) & \cos(2 t) \end{bmatrix}$$

> M^(-1);

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\sqrt{3} t)}{\cos(\sqrt{3} t)^2 + \sin(\sqrt{3} t)^2}, -\frac{1}{3} \frac{\sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3}}{\cos(\sqrt{3} t)^2 + \sin(\sqrt{3} t)^2}, 0, 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3}}{\cos(\sqrt{3} t)^2 + \sin(\sqrt{3} t)^2}, \frac{\cos(\sqrt{3} t)}{\cos(\sqrt{3} t)^2 + \sin(\sqrt{3} t)^2}, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{\cos(2 t)}{\cos(2 t)^2 + \sin(2 t)^2}, -\frac{1}{2} \frac{\sin(2 t)}{\cos(2 t)^2 + \sin(2 t)^2} \\ 0, 0, \frac{2 \sin(2 t)}{\cos(2 t)^2 + \sin(2 t)^2}, \frac{\cos(2 t)}{\cos(2 t)^2 + \sin(2 t)^2} \end{bmatrix}$$

> M0:=subs(t=0,%);

```

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `subs(t=(p*2*Pi)/(sqrt(3)),%%);`

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(2 p \pi)}{\cos(2 p \pi)^2 + \sin(2 p \pi)^2}, & \frac{\frac{1}{3} \sin(2 p \pi) \sqrt{3}}{\cos(2 p \pi)^2 + \sin(2 p \pi)^2}, & 0, & 0 \\ \frac{\sin(2 p \pi) \sqrt{3}}{\cos(2 p \pi)^2 + \sin(2 p \pi)^2}, & \frac{\cos(2 p \pi)}{\cos(2 p \pi)^2 + \sin(2 p \pi)^2}, & 0, & 0 \\ 0, 0, & \frac{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2}, & \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ 0, 0, & \frac{2 \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2}, & \frac{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2} \end{bmatrix}$$

> `simplify(%%);`

$$\begin{bmatrix} \cos(2 p \pi) & -\frac{1}{3} \sin(2 p \pi) \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sin(2 p \pi) \sqrt{3} & \cos(2 p \pi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \\ 0 & 0 & 2 \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \end{bmatrix}$$

> `M1:=subs(cos(2*p*Pi)=1,sin(2*p*Pi)=0,%%);`

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \\ 0 & 0 & 2 \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \end{bmatrix}$$

> `M0-M1;`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \\ 0 & 0 & -2 \sin\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) & 1 - \cos\left(\frac{4 p \pi \sqrt{3}}{3}\right) \end{bmatrix}$$

> **M3:=Matrix(2,2,[1-cos((4*P*Pi*sqrt(3))/3),(1/2)*sin((4*P*Pi*sqrt(3))/3),-2*sin((4*P*Pi*sqrt(3))/3),1-cos((4*P*Pi*sqrt(3))/3)]);**

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 - \cos\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right) \\ -2 \sin\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right) & 1 - \cos\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right) \end{bmatrix}$$

> **Determinant(M3);**

$$1 - 2 \cos\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right) + \cos\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right)^2$$

> **simplify(%);**

$$2 - 2 \cos\left(\frac{4 P \pi \sqrt{3}}{3}\right)$$

> **M4:=simplify(M^(-1));**

$$M4 := \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3} t) & -\frac{1}{3} \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} & \cos(\sqrt{3} t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2 t) & -\frac{1}{2} \sin(2 t) \\ 0 & 0 & 2 \sin(2 t) & \cos(2 t) \end{bmatrix}$$

> **M4.<0,F[1],0,F[2]>;**

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} F_1 \\ \cos(\sqrt{3} t) F_1 \\ -\frac{1}{2} \sin(2 t) F_2 \\ \cos(2 t) F_2 \end{bmatrix}$$

> **L1:=op(2,%);**

L1 :=

$$\{(1) = -\frac{1}{3} \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} F_1, (2) = \cos(\sqrt{3} t) F_1, (3) = -\frac{1}{2} \sin(2 t) F_2, (4) = \cos(2 t) F_2\}$$

> **F[11]:=(1/(p*T[1]))*Int(-1/3*3^(1/2)*sin(3^(1/2)*t)*F[1],t=0..p*T[1]);**

$$F_{11} := \frac{1}{p T_1} \int_0^{p T_1} -\frac{1}{3} \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3} F_1 dt$$

> **F[22]:=(1/(p*T[1]))*Int(cos(3^(1/2)*t)*F[1],t=0..p*T[1]);**

$$F_{22} := \frac{1}{p T_1} \int_0^{p T_1} \cos(\sqrt{3} t) F_1 dt$$

> H1:=Y[0]*(3*(X[0])^2+Y[0]^2)/48;

$$H1 := \frac{1}{48} Y_0 \left(3 X_0^2 + Y_0^2 \right)$$

> H2:=1/24*(3*(sqrt(3)-3*X[0])*X[0]^2-(sqrt(3)+3*X[0])*Y[0]^2);

$$H2 := \frac{1}{8} (\sqrt{3} - 3 X_0) X_0^2 - \frac{1}{24} (\sqrt{3} + 3 X_0) Y_0^2$$

> solve({H1,H2},{X[0],Y[0]});

$$\{X_0=0, Y_0=0\}, \{X_0=\frac{\sqrt{3}}{3}, Y_0=0\}$$

> with(VectorCalculus):

> (J,d):=Jacobian([H1,H2],[X[0],Y[0]],'determinant');

$$J, d := \begin{bmatrix} \frac{1}{8} Y_0 X_0 & \frac{1}{16} X_0^2 + \frac{1}{16} Y_0^2 \\ -\frac{3}{8} X_0^2 + \frac{1}{4} (\sqrt{3} - 3 X_0) X_0 - \frac{1}{8} Y_0^2 & -\frac{1}{12} (\sqrt{3} + 3 X_0) Y_0 \\ -\frac{5}{192} Y_0^2 X_0 \sqrt{3} + \frac{3}{64} Y_0^2 X_0^2 + \frac{9}{128} X_0^4 - \frac{1}{64} X_0^3 \sqrt{3} + \frac{1}{128} Y_0^4 & \end{bmatrix}$$

> simplify(subs(X[0] = sqrt(3)/3, Y[0] = 0, d));

$$\frac{1}{384}$$

> z[0]*cos(2*t)+1/2*w[0]*sin(2*t)+sin(2*t)*(z[0]*cos(2*t)+(w[0]/2)*sin(2*t))*(1-w[0]*cos(2*t)+2*z[0]*sin(2*t))*(w[0]*cos(2*t)-2*z[0]*sin(2*t));

$$z_0 \cos(2t) + \frac{1}{2} w_0 \sin(2t) + \sin(2t) \left(z_0 \cos(2t) + \frac{1}{2} w_0 \sin(2t) \right) (1 - w_0 \cos(2t) + 2 z_0 \sin(2t)) (w_0 \cos(2t) - 2 z_0 \sin(2t))$$

> expand((%*sin(2*t))/(-2*Pi));

$$\frac{8 \sin(t)^3 \cos(t)^7 w_0^3}{\pi} + \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^4 z_0 w_0}{\pi} + \frac{12 \sin(t)^2 \cos(t)^4 z_0 w_0^2}{\pi} + \frac{64 \sin(t)^3 \cos(t)^5 z_0^2 w_0}{\pi} - \frac{32 \sin(t)^4 \cos(t)^6 w_0^2 z_0}{\pi} + \frac{16 \sin(t)^4 \cos(t)^4 w_0^2 z_0}{\pi} - \frac{2 \sin(t)^2 \cos(t)^2 z_0 w_0^2}{\pi} - \frac{2 \sin(t) \cos(t)^3 z_0}{\pi} + \frac{2 \sin(t)^3 \cos(t)^3 w_0^2}{\pi} - \frac{\sin(t)^2 \cos(t)^2 w_0}{\pi} - \frac{4 \sin(t)^3 \cos(t)^5 w_0^2}{\pi} - \frac{8 \sin(t)^3 \cos(t)^5 w_0^3}{\pi} - \frac{8 \sin(t)^3 \cos(t)^3 z_0^2}{\pi} + \frac{64 \sin(t)^4 \cos(t)^6 z_0^3}{\pi} - \frac{32 \sin(t)^4 \cos(t)^4 z_0^3}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \sin(t)^3 \cos(t)^3 w_0^3}{\pi} + \frac{\sin(t) \cos(t) z_0}{\pi} + \frac{16 \sin(t)^3 \cos(t)^5 z_0^2}{\pi} \\
& + \frac{16 \sin(t)^2 \cos(t)^8 z_0 w_0^2}{\pi} - \frac{2 \sin(t)^2 \cos(t)^2 z_0 w_0}{\pi} - \frac{24 \sin(t)^2 \cos(t)^6 z_0 w_0^2}{\pi} \\
& + \frac{32 \sin(t)^5 \cos(t)^5 w_0 z_0^2}{\pi} - \frac{64 \sin(t)^3 \cos(t)^7 z_0^2 w_0}{\pi} - \frac{16 \sin(t)^3 \cos(t)^3 z_0^2 w_0}{\pi} \\
& + \frac{8 \sin(t)^4 \cos(t)^4 w_0 z_0}{\pi} - \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^6 z_0 w_0}{\pi}
\end{aligned}$$

> **G1:=int(%,t=0..Pi);**

$$G1 := \frac{1}{8} w_0 (z_0 - 1)$$

> **z[0]*cos(2*t)+1/2*w[0]*sin(2*t)-sin(2*t)*(z[0]*cos(2*t)+(w[0]/2)*sin(2*t))*(w[0]*cos(2*t)-2*z[0]*sin(2*t))-(z[0]*cos(2*t)+1/2*w[0]*sin(2*t))*((w[0]*cos(2*t)-2*z[0]*sin(2*t))^2);**

$$z_0 \cos(2t) + \frac{1}{2} w_0 \sin(2t)$$

$$- \sin(2t) \left(z_0 \cos(2t) + \frac{1}{2} w_0 \sin(2t) \right) (w_0 \cos(2t) - 2 z_0 \sin(2t))$$

$$- \left(z_0 \cos(2t) + \frac{1}{2} w_0 \sin(2t) \right) (w_0 \cos(2t) - 2 z_0 \sin(2t))^2$$

> **expand((%*cos(2*t))/(Pi));**

$$\begin{aligned}
& - \frac{32 \sin(t)^2 \cos(t)^4 z_0 w_0^2}{\pi} - \frac{32 \sin(t)^3 \cos(t)^5 z_0^2 w_0}{\pi} + \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^2 z_0 w_0^2}{\pi} + \frac{z_0}{\pi} \\
& - \frac{w_0^2 z_0}{\pi} + \frac{4 z_0 \cos(t)^4}{\pi} - \frac{4 z_0 \cos(t)^2}{\pi} + \frac{12 w_0^3 \sin(t) \cos(t)^5}{\pi} - \frac{64 z_0^3 \cos(t)^6 \sin(t)^2}{\pi} \\
& - \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^6 w_0^2}{\pi} + \frac{w_0^3 \sin(t) \cos(t)}{\pi} - \frac{6 w_0^3 \sin(t) \cos(t)^3}{\pi} \\
& + \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^4 w_0^2}{\pi} + \frac{64 z_0^2 \cos(t)^7 \sin(t) w_0}{\pi} - \frac{32 \sin(t)^2 \cos(t)^4 z_0^2}{\pi} \\
& - \frac{96 z_0^2 \cos(t)^5 \sin(t) w_0}{\pi} + \frac{48 z_0^2 \cos(t)^3 \sin(t) w_0}{\pi} - \frac{8 \sin(t) \cos(t) z_0^2 w_0}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{16 \sin(t) \cos(t)^7 z_0 w_0}{\pi} + \frac{64 z_0^3 \cos(t)^4 \sin(t)^2}{\pi} + \frac{2 w_0 \sin(t) \cos(t)^3}{\pi} \\
& + \frac{16 \sin(t)^3 \cos(t)^5 w_0 z_0}{\pi} - \frac{16 z_0 \cos(t)^8 w_0^2}{\pi} - \frac{8 w_0^3 \sin(t) \cos(t)^7}{\pi} \\
& - \frac{2 \sin(t)^2 \cos(t)^2 w_0^2}{\pi} + \frac{8 \sin(t)^2 \cos(t)^2 z_0^2}{\pi} - \frac{16 \sin(t)^2 \cos(t)^2 z_0^3}{\pi} \\
& - \frac{w_0 \sin(t) \cos(t)}{\pi} - \frac{24 z_0 \cos(t)^4 w_0^2}{\pi} + \frac{8 z_0 \cos(t)^2 w_0^2}{\pi} + \frac{24 \sin(t) \cos(t)^5 z_0 w_0}{\pi} \\
& - \frac{12 \sin(t) \cos(t)^3 z_0 w_0}{\pi} + \frac{2 \sin(t) \cos(t) z_0 w_0}{\pi} - \frac{8 \sin(t)^3 \cos(t)^3 w_0 z_0}{\pi} \\
& + \frac{32 z_0 \cos(t)^6 w_0^2}{\pi} + \frac{32 \sin(t)^2 \cos(t)^6 z_0^2}{\pi} + \frac{32 \sin(t)^2 \cos(t)^6 z_0 w_0^2}{\pi} \\
& + \frac{16 \sin(t)^3 \cos(t)^3 z_0^2 w_0}{\pi}
\end{aligned}$$

> `int(%,t=0..Pi);`

$$-\frac{1}{8} w_0^2 z_0^2 + \frac{1}{4} z_0^2 - \frac{1}{16} w_0^2 + \frac{1}{2} z_0 - \frac{1}{2} z_0^3$$

> `G2:=collect(%,w[0]);`

$$G2 := \left(-\frac{1}{8} z_0 - \frac{1}{16} \right) w_0^2 - \frac{1}{2} z_0^3 + \frac{1}{4} z_0^2 + \frac{1}{2} z_0$$

> `subs(w[0]=0,%);`

$$-\frac{1}{2} z_0^3 + \frac{1}{4} z_0^2 + \frac{1}{2} z_0$$

> `solve(%,z[0]);`

$$0, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$$

> `subs(z[0]=1,G2);`

$$-\frac{3}{16} w_0^2 + \frac{1}{4}$$

> `solve(%,w[0]);`

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

> `with(VectorCalculus):`

> `(J,d):=Jacobian([G1,G2], [z[0],w[0]], 'determinant');`


```

J, d := [
    [
        1/8*w0, 1/8*z0 - 1/8,
        -1/8*w0^2 - 3/2*z0^2 + 1/2*z0 + 1/2, 2*(-1/8*z0 - 1/16)*w0,
        -1/64*w0^2*z0 - 1/32*w0^2 + 3/16*z0^3 - 1/4*z0^2 + 1/16
    ],
    > simplify(subs(z[0] = 1, w[0] = 2*sqrt(3)/3, d));
        -1/16
    > simplify(subs(z[0] = 1, w[0] = -2*sqrt(3)/3, d));
        -1/16
    > simplify(subs(z[0] = 1/4 - 1/4*17^(1/2), w[0] = 0, d));
        -17/256 - 7*sqrt(17)/256
    > simplify(subs(z[0] = 1/4 + 1/4*17^(1/2), w[0] = 0, d));
        -17/256 + 7*sqrt(17)/256
]

```