République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : EDP et Appliquée

Thème

les q-fonctions et les équations aux q-différences

Présenté Par :

Mezhoud Bilal

Devant le jury :

Mr. BEN ZAHI Mourad	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr. DGAICHI Noar	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr. SAIB Abdessadek	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19 / 06 / 2019

Résumé

Le but de ce mémoire est de chercher des fonctions q–analogues (qui converge vers le cas standard quand q tends vers 1) aux fonctions spéciales usuelles, à partir des équations aux q–differences. Le q–symbole de Pochhammer et le cœfficient q–binomial jouent un rôle très important dans cette étude. Lopérateur et la q–intégrale de Jackson sont aussi présent.

Abstract

The main object of this dissertation is to construct functions q–analogues (which converge to the standard case as q gœs to 1) of usual special functions as solutions of some q–difference equations. The q–Pochhammer sympbol as well as the q–binomial cœfficient have a pivotal role in this study. The Jackson's q–operator and q–integral are present as well.

Table des matières

Résumé **i**

1 Préliminaires **1**

1.1 Une extension de la factorielle 2
1.2 L'opérateur de Jackson 7
1.3 L'intégrale de Jackson 13

2 Fonctions q-analoques élémentaires **17**

2.1 Les fonctions q-exponentielles 18
2.2 Les fonctions q-trigonométriques 20
2.3 Les fonctions q-Gamma et q-Beta 22

3 La q-transformée de Laplace **26**

3.1 La q-transformée de Laplace. 27
3.2 La q-transformée de Laplace et l'opérateur de Jackson 29
3.3 Application à la résolution des équations aux q-différences 30

Introduction

L'opéteur D_q a trouvé son importance depuis la publication du papier de F. H. Jackson au Transaction Royal Society of Edinburg en 1908. L'auteur propose notamment des équations aux q-différence dont les solutions constituent des fonctions q-analogues élémentaires comme l'exponentielle et les fonctions trigonométriques. Il construit entre autre une q-intégrale comme étant l'inverse à gauche de son opérateur. Ainsi, ce paper à permet au gens par la suit de voir les choses autrement. Quelques années plus tard, Hahn propose une généralisation de l'opérateur de Jackson en combinant ce dernier avec l'opérateur de différence Lambda, i.e. l'opérateur de hahn est le suivant

$$D_{q,\omega} f(x) = \frac{f(qx+\omega) - f(x)}{(qx+\omega) - x}.$$

C'est ici où Hahn a réussi sa construction des familles de polynômes orthogonaux basic (q-analogues) toujours comme solution des équations aux q-différences linéaires. Le papier de Hahn est de très grande importance dont les résultats sont de grande valeurs et très significatifs. Hahn propose également deux définitions q-analogues à la transformée de Laplace à l'aide de la q-intégrale de Jackson. On y trouve aussi d'autre définitons dans la litérature.
Le coefficient q-binomial et les fonctions q-exponentielles apparaît notamment dans les recherches d'Euler [8]. Le coefficient du développement de la fonction $E_q(x)$ en termes de x^n a été déterminé par Euler d'une manière remarquable et très simple. En effet, cette idée est toujours la clef dans les démonstarations dans la théorie des q-nombres.

L'objet de ce mémoire est de présenter la richèsse du q-calcul d'une manière simple en construisant des fonctions q-analogues à partir des équations aux q-différences, et montrons qu'on a en plus des propriétés cachées qui se voit uniquement dans le q-analogue, afin de convincre les gens, en particuler les physiciens, d'utiliser le q-calcul.

Ce mémoire comprend trois chapitres, dans le premier chapitre, on a essayé d'expliquer le lien et la correspondance existant entre le cas standard et son q-analogue d'une manière ou d'une autre. Ce chapitre fournit évidemment un aperçu sur chaque idée introduite. Plusieurs propriétés intéréssantes concernant le coefficient q-binomial, l'opérateur de q-différences et la q-intégrale de Jackson sont clairement démontrées.
Le deuxième chapitre est aussi un aperçu sur l'idée de construction des fonctions q-analogues à partir des équations aux q-différences. Les fonctions exponentielles, trigonométriques et les fonctions Gamma et Beta sont introduitent de différentes

manières selon l'intérêt de l'auteur. Ainsi, les normalisations utilisées dans la litérature dépent de leurs fonctions et leurs rôles.
Dans le troisième chapitre, est consacré à l'étude de la q-transformée de Laplace et ces propriétés en regardant sa correspondance usuelle. Malheureusement, le calcul de son inverse provoque beucoups de questions, dont la solution est toujours possible dépendant de la nature et le lieu de la solution cherchée.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce premier chapitre est une introduction constructive du coefficient q-binomial ainsi que l'opérateur de Jackson et son inverse à droite. En s'intéresse en premier lieu à donner un certain nombre de formules concernant le coefficient q-binomial, la q-factorielle, le q-polynôme, etc. On y présente ainsi une richèsse des identités très intéréssantes non seulement parcequ'elles sont très jolie, mais notamment aussi lorsqu'elles présentent un modèle combinatoire en démonstartions. Nous mentionnons, entre autres, l'histoire de son développement et son apparence dans d'autres domaines. On s'intéresse par la suite à l'opérateur de Jackson et ces proriétés élémentaires avec parfois une démonstration succincte. Enfin, un aperçu sur la construction d'une version q-analogue pour l'intégralle définie et impropre est présenté. En conclusion, toutes les notions et les formules semblent assez naturels.

1.1 Une extension de la factorielle

Dans ce mémoire la lettre q désigne un nombre $0 < q < 1$.
Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons adapter une notation mathématique que nous devrons utiliser à plusieurs reprises. Pour commencer, rappelons que le symbole de Pochhammer ou la factorielle généralisée, est utilisé pour représenter la factorielle croissante

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \qquad\qquad n = 1,2,\dots$$

alors que le symbol $\langle a\rangle_n$ est utilisé pour représenter la factorielle décroissante, i.e.

$$\langle a\rangle_n := (a-n+1)_n = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1), \qquad\qquad n = 1,2,\dots$$

La notation précédente a été utilisée par Crelle, mais c'était Appell qui a attribué le nom Pochhammer pour ce symbole à cause de sa large utilisation par Leo Pochhammer. Il est usuellement utilisé dans les fonctions hypergéométriques et en combinatoire. Les fonctions introduites plus haut, disposent de nombreuses propriétés, elles sont liées, en particulier, au coefficients binomiaux par les relations particulières suivantes

$$\frac{(a)_n}{n!} = \binom{a+n-1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\langle a\rangle_n}{n!} = \binom{a}{n}.$$

En outre, une contribution très importante dans le développement de l'analyse combinatoire est due à Euler qui a introduit la fonction gamma comme extension naturelle de la factorielle, i.e. $n! = \Gamma(n+1)$. En effet, les symboles de Pochhammer peuvent s'écrire à l'aide de la propriété $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ de la fonction Γ d'Euler, sous les formes suivantes

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad \text{et} \quad \langle a\rangle_n = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}.$$

Dans l'histoire de la factorielle et du binomial, il semble que le point décisif qui a motivé Heine d'introduire les foctions hypergéométriques q-analogues (dite aussi basique) en 1848, n'était aucun des travaux de Gauss ni ceux de Jacobi, mais plutôt les techniques utilisées par Euler qui a su le faire en introduisant un paramètre supplémentaire pour comparer deux quantités en x et qx. Pour mettre les points sur les i, donnons d'abord une définition

Définition 1.1 *Pour tout entier positif n et tout complexe a, le q-factoriel (ou le q-symbole de Pochhammer) est définit par le produit suivant*

$$(a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-aq^i\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\dots\left(1-aq^{n-1}\right), \quad n \geq 1, \tag{1.1}$$

avec $(a;q)_0 = 1$.

En revanche, le quotient

$$[n] := [n]_q = \frac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, \tag{1.2}$$

est appelé le q-nombre (ou le q-analogue du nombre n) à cause de la limite suivante

$$\lim_{q \to 1} [n]_q = n.$$

Remarque 1.1 *Le symbole de Pochhammer et son q-analogue, peuvent s'etendre à l'infini comme pour les entiers à signe négatif à l'aide des formules suivantes [3, 12]*

$$(a;q)_{-n} = \frac{1}{\left(1-aq^{-1}\right)\left(1-aq^{-2}\right)\ldots\left(1-aq^{-n}\right)} = \frac{1}{\left(aq^{-n};q\right)_n} = \frac{\left(-\frac{q}{a}\right)^n q^{\binom{n}{2}}}{\left(\frac{q}{a};q\right)_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - aq^k\right), \quad |q| < 1.$$

Nous profitons ainsi de cette introdution pour mentionner une motivation pour les q-analogue d'un point de vue combinatoire. Sachant que le $n!$ est le nombre de permutations de longueur n, sont q-analogue compte les permutations de longueur n en gardant trace du nombre d'inversions. En d'autre termes, si l'on note $inv(w)$ le nombre d'inversions de la permutation w et que S_n est l'ensemble des permutations de longueur n, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{w \in \mathrm{S}_n} q^{inv(w)} &= 1.(1+q).(1+q+q^2)\ldots(1+q+\cdots+q^{n-2}).(1+q+\cdots+q^{n-1}) \\ &= [1]_q[2]_q \ldots [n]_q.\end{aligned}$$

Définition 1.2 *Le q-analgoue de la factorielle, connu aussi sous le nom "q-factorielle", d'un entier positif n est définit par*

$$[n]! := [n]_q! = [1]_q[2]_q \ldots [n]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}. \tag{1.3}$$

Ainsi, le coefficient binomial est définit par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}. \tag{1.4}$$

Rappelons quelques propriétés élémentaires de la q-factorielle qui seront utilisées par la suite.

Proposition 1.1 *Le coefficient q-binomial vérifie les récurrences suivantes*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \tag{1.5}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q . \tag{1.6}$$

Preuve. La première identité est triviale. Pour démontrer la deuxième identitié, il suffit de remarque qu'on peut écrire, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} [n] &= \left(1+q+\cdots+q^{k-1}\right) + q^k \left(1+q+\cdots+q^{n-k-1}\right) \\ &= [k] + q^k [n-k] . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n-1]!\,[n]}{[k]!\,[n-k]!} = \frac{[n-1]!\,[k]}{[k]!\,[n-k]!} + \frac{[n-1]!q^k\,[n-k]}{[k]!\,[n-k]!}$$

ce qui prouve la première égalité à gauche de (1.6). Pour l'égalité à droite, il suffit d'appliquer la première égalité à gauche de (1.6) à l'identité (1.5). ∎

Il existe notamment des démonstartions purement combinatoire des identités (1.5) et (1.6). Actuellement, le coefficient q-binomial et ces identités attirent beaucoup plus, l'attention des combinatoriciens. En effet, la plupart des identités q-binomiales ont été découvert à partir d'un problème purement combinatoire, et ainsi de la théorie des nombres, ou-bien d'un modèle combinatoire (codage) pour certain objet mathématique (comme l'exemple de la q-factorielle mentionner plus haut). L'usage d'une preuve combinatoire permet, entre autres, de résoudre un modèle convenable de deux côtés (ou de deux manières) et comparer ensuite les deux formules.

Parmi les sommes des fonctions hypergéométriques, le théorème du binôme fournit sans doute la formule la plus importante, donnée ici en terme du symbole de Pochhammer par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = (1-z)^{-a}, \quad |z| < 1.$$

Nous allons démontrer que son q-analogue est la formule suivante

Théorème 1.1 *On a la somme suivante*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}, \quad |z| < 1, \quad |q| < 1. \tag{1.7}$$

Preuve. Notons le membre à gauche de (1.7) par $f_a(z)$. Calculons d'abord la différence

$$f_a(z)-f_{aq}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_n-(aq;q)_n}{(q;q)_n}z^n=-a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)(aq;q)_{n-1}}{(q;q)_n}z^n$$
$$=-a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}}z^n=-azf_{aq}(z). \tag{1.8}$$

D'autre part, on a

$$f_a(z)-f_a(qz)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}(z^n-q^nz^n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-1}}z^n$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_{n+1}}{(q;q)_n}z^{n+1}=(1-az)\,f_{aq}(z). \tag{1.9}$$

Eliminons $f_{aq}(z)$ entre (1.8) et (1.9) on obtient

$$f_a(z)=\frac{1-az}{1-z}f(qz). \tag{1.10}$$

En itérant ce processus $n-1$ fois en faisant $n\to\infty$, on en déduit

$$f_a(z)=\frac{(az;q)_n}{(z;q)_n}f(q^nz)=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}f(0)=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \tag{1.11}$$

puisque $q^n\to 0$ lorsque $n\to\infty$ et que $f(0)=1$ d'après sa définition (1.7). ■
Intuitivement, la technique utilisée dans la preuve précédente est très efficace notamment dans la résolution des équations aux q-différences comme nous allons voir par la suite.
En attendant, il intéréssant de mentionner deux formules très importantes de (1.7). D'abord, en posant $a=0$ dans (1.7), on en déduit aisément

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(z;q)_\infty},\quad |z|<1. \tag{1.12}$$

Par ailleurs, nous allons utiliser la méthode d'Euler [8, Chapiter 16], en développant le produit

$$\mathrm{P}:=(1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)\ldots=1+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2+\mathrm{A}_3x^3+\ldots \tag{1.13}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{P}}{1+xq}=(1+xq^2)(1+xq^3)\cdots=(1+(xq)q)(1+(xq)q^2)(1+(xq)q^3)\ldots$$
$$=1+\mathrm{A}_1(xq)+\mathrm{A}_2(xq)^2+\mathrm{A}_3(xq)^3+\ldots$$

Il s'ensuit, après multiplication des deux membres de la dernière égalité par $1+qx$, en tenant compte de (1.13), que

$$\begin{aligned}\mathrm{P} = 1 + \mathrm{A}_1(xq) + \mathrm{A}_2(xq)^2 + \mathrm{A}_3(xq)^3 + \dots \\ + (xq) + \mathrm{A}_1(xq)^2 + \mathrm{A}_2(xq)^3 + \mathrm{A}_3(xq)^4 + \dots\end{aligned}$$

Par conséquent, en comparant le coefficient de x^k de la dernière égalité avec (1.13), on en déduit que

$$\mathrm{A}_k = \frac{q^k}{1-q^k}\mathrm{A}_{k-1} = \dots = \frac{q^k}{1-q^k}.\frac{q^{k-1}}{1-q^{k-1}}\dots\frac{q}{1-q}\mathrm{A}_0, \quad k \geq 1 \tag{1.14}$$

et $\mathrm{A}_0 = 1$. Nous avons démontrer ainsi l'identité suivante

$$(z;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} z^n. \tag{1.15}$$

Nous terminons cette section en donnant deux dernières remarques assez importantes.

Remarque 1.2 *Sachant que, d'après l'identité (1.12)*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z;q^{-1})_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q^{-1})_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\dots(1-q^{-n})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{q^{-1}(q-1).q^{-2}(q^2-1)\dots q^{-n}(q^n-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} z^n \\ &= (-z;q)_\infty.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Remarque 1.3 *Il est recommandé lorsque $|q|>1$, d'effectuer une inversion par rapport à la base $p = q^{-1}$, i.e. $|p|<1$, et utiliser ensuite l'identité suivante*

$$(a;q)_n = (a^{-1};p)_n (-a)^n p^{-\binom{n}{2}}.$$

En effet, d'après ce qui précède, on peut écrire

$$\begin{aligned}(a;q)_n = (a;p^{-1})_n &= (1-a)(1-ap^{-1})(1-ap^{-2})\dots(1-ap^{-n+1}) \\ &= a\left(\frac{1}{a}-1\right).ap^{-1}\left(\frac{p}{a}-1\right).ap^{-2}\left(\frac{p^2}{a}-1\right)\dots ap^{-n+1}\left(\frac{p^{n-1}}{a}-1\right) \\ &= (-a)^n p^{-\binom{n}{2}}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{p}{a}\right)\left(1-\frac{p^2}{a}\right)\dots\left(1-\frac{p^{n-1}}{a}\right).\end{aligned}$$

1.2 L'opérateur de Jackson

L'importance de l'opérateur de différence, usuellement noté Δ_w, réside dans les modèles discrets, i.e. les équations aux différences indispensables notamment en modélisation (pour décrire l'evolution d'une population) ainsi que dans la résolution numérique et la simulation. Un autre opérateur qui est aussi de très grande importance, en particulier en quantique, est l'opérateur de Jackson noté D_q dont il fournit une autre généralisation de l'opérateur de dérivation usuelle. Le but majeur de ce mémoire est de construire des fonctions q-analogues à partir des équations aux q-différences bien choisis. Pour cela, nous rappelons l'opérateur de Jackson ainsi que certaines des ces propriétés élémentaires

Définition 1.3 *Soient* $\mathrm{D}q$ *et* σ_q *les opérateurs aux* q*-différences définis, respectivement, par*

$$\mathrm{D}_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}, \qquad \sigma_q f(x) = f(qx). \tag{1.17}$$

Pour toute fonction arbitraire f, soit $(q-1)x = h$ dans la définition précédente, on obtient

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{D}_q f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Le théorème suivant présente les règles de calcul de l'opérateur D_q

Théorème 1.2 *L'opérateur de Jackson vérifie les propriétés suivantes*

(a) $\mathrm{D}_q(af + bg)(x) = a\mathrm{D}_q f(x) + b\mathrm{D}_q g(x)$, *pour tout* $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) $\mathrm{D}_q(fg)(x) = f(x)\mathrm{D}_q g(x) + g(qx)\mathrm{D}_q f(x) = g(x)\mathrm{D}_q f(x) + f(qx)\mathrm{D}_q g(x)$.

(c) Si $g(x) \neq g(qx) \neq 0$, *alors* $\mathrm{D}_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{g(qx)\mathrm{D}_q f(x) - f(qx)\mathrm{D}_q g(x)}{g(qx)g(x)}$,

En particulier, lorsque $f \equiv 1$, *on en déduit* $\mathrm{D}_q\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\dfrac{\mathrm{D}_q g(x)}{g(qx)g(x)}$.

Preuve. (a) On peut aisément vérifier la linéarité en utilisant uniquement la définition

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q(af + bg)(x) &= \frac{(af + bg)(qx) - (af + bg)(x)}{(q-1)x} \\
&= a\frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} + b\frac{g(qx) - g(x)}{(q-1)x} \\
&= a\mathrm{D}_q f(x) + b\mathrm{D}_q g(x).
\end{aligned}$$

(b) Il suffit de démontrer la première égalité. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q(fg)(x) &= \frac{f(qx)g(qx)-f(x)g(x)}{(q-1)x}\\
&= \frac{f(qx)g(qx)-f(qx)g(x)+f(qx)g(x)-f(x)g(x)}{(q-1)x}\\
&= f(qx)\frac{g(qx)-g(x)}{(q-1)x}+f(qx)\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}\\
&= f(qx)\mathrm{D}_q g(x)+g(x)\mathrm{D}_q f(x),
\end{aligned}$$

(c) Lorsque $g\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\dfrac{f(qx)g(x)-f(x)g(qx)}{g(qx)g(x)}}{(q-1)x}\\
&= \frac{f(qx)g(x)-f(qx)g(qx)+f(qx)g(qx)-f(x)g(qx)}{(q-1)xg(qx)g(x)}\\
&= \frac{f(qx)\dfrac{g(x)-g(qx)}{(q-1)x}+g(qx)\dfrac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}}{g(qx)g(x)}\\
&= \frac{-f(qx)\mathrm{D}_q g(x)+g(qx)\mathrm{D}_q f(x)}{g(qx)g(x)}.
\end{aligned}$$

Le cas particulier $f\equiv 1$ est trivial. ■

Il est intéréssant de noter que le (b) du Théorème précédent peut s'écrire autrement en gardant la symétrie comme suit

$$\mathrm{D}_q(fg)(x) = f(x)\mathrm{D}_q g(x)+g(x)\mathrm{D}_q f(x)+x(q-1)\mathrm{D}_q g(x)\mathrm{D}_q f(x). \tag{1.18}$$

Exemple 1.1 *Lorsque la fonction $f>0$, alors*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\sqrt{f(x)} &= \frac{\sqrt{f(qx)}-\sqrt{f(x)}}{(q-1)x} = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x\sqrt{f(qx)}+\sqrt{f(x)}}\\
&= \frac{\mathrm{D}_q f(x)}{\sqrt{f(qx)}+\sqrt{f(x)}}.
\end{aligned}$$

La première chose qui saute aux yeux lorsque l'on rencontre les règles de calcul précédent est de penser à l'application de l'opérateur de Jackson à une composition de deux fonction. Cependant, ceci n'est plus vrais dans ce contexte! Un contre exemple est le suivant

Exemple 1.2 *Soient f et g deux fonction réelles définis par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 5x$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q f(x).\mathrm{D}_q g(x) &= 5x(q+1),\\
\mathrm{D}_q(g \circ f)(x) &= 5x(q+1),\\
\mathrm{D}_q(f \circ g)(x) &= 25x(q+1),
\end{aligned}$$

ce qui justifie le commentaire plus haut.

Par ailleurs, et en exception, la règle précédente est valide dans le cas du théorème suivant

Théorème 1.3 *Lorsqu'une fonction réelle est de la forme $g(x) = ax^{\alpha}$, alors la règle suivante est valide*

$$\mathrm{D}_q(f \circ g)(x) = \mathrm{D}_q g(x).\mathrm{D}_q f(g(x)).$$

Preuve. *En effet, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q(f \circ g)(x) &= \frac{f(aqx^{\alpha}) - f(ax^{\alpha})}{(q-1)x}.\frac{aqx^{\alpha} - ax^{\alpha}}{aqx^{\alpha} - ax^{\alpha}}\\
&= \frac{aqx^{\alpha} - ax^{\alpha}}{(q-1)x}.\frac{f(aqx^{\alpha}) - f(ax^{\alpha})}{aqx^{\alpha} - ax^{\alpha}}\\
&= \mathrm{D}_q g(t).\mathrm{D}_q f(g(t)).
\end{aligned}$$

Ainsi la règle est correcte. ■

Intuitivement, on peut appliquer l'opérateur de Jackson successivement n fois et avoir des formules intéréssantes, en d'autre termes, le q-analogue de la n$^{\text{ième}}$ dérivée. En effet, le résultat suivant peut se vérifier par récurrence en utilisant la propriété du coefficient q-binomial (1.6) en quelque lignes [19] (voir la preuve du Théorème 1.5).

Théorème 1.4 *On a la formule suivante*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q^n f(x) &= (-1)^n \left(1-q\right)^{-n} x^{-n} q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} f(xq^{n-k}) && (1.19)\\
&= \left(1-q\right)^{-n} x^{-n} \sum_{k=0}^{n} q^k \frac{\left(q^{-n};q\right)_k}{\left(q;q\right)_k} f(xq^k), && (1.20)
\end{aligned}$$

à savoir $\mathrm{D}_q^n f(x) = \mathrm{D}_q\left(\mathrm{D}_q^{n-1} f(x)\right)$, $n \geq 1$ avec $\mathrm{D}_q^0 f(x) = f(x)$.

Il est intéressant de noter que la formule précédente admet l'inversion suivante, qui se démontre d'une manière analogue à la précédente [19]

Proposition 1.2 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$f(xq^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (1-q)^k x^k q^{\binom{k}{2}} \mathrm{D}_q^k f(x). \tag{1.21}$$

Plus généralement, nous allons démontrer un q-analogue de la règle de Leibniz.

Théorème 1.5 *Pour tout $n \geq 0$, on a la formule suivante*

$$\mathrm{D}_q^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right). \tag{1.22}$$

Preuve. Nous allons vérifier l'identité de q-Leibniz par récurrence. En effet, l'identité est vraie pour $n = 1$ d'après le point (b) du Théorème 1.2. Supposons que (1.22) est vraie jusqu'à l'ordre n. Ainsi, d'après la règle du produit on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q^{n+1}(fg)(x) &= \mathrm{D}_q\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(q^k \mathrm{D}_q^{n+1-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n-k} f(q^{k+1} x)\right)\left(\mathrm{D}_q^{k+1} g(x)\right).
\end{aligned}$$

Soit en faisant un changement d'indice dans la deuxième somme $k+1 \to k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q^{n+1}(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{n} q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n+1-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n+1-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right).
\end{aligned}$$

Utilisons ensuite la formule du coefficient q-binomial (1.6), on en déduit

$$\mathrm{D}_q^{n+1}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\mathrm{D}_q^{n+1-k} f(q^k x)\right)\left(\mathrm{D}_q^k g(x)\right).$$

Ainsi, l'identité (1.22) est vraie pour tout entier positif n. ■

A titre d'exemple, pour tout réel x et tout entier positif n, on a

$$\mathrm{D}_q(x^n) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n]_q x^{n-1}.$$

Il est intéréssant de noter que l'action de l'opérateur D_q à un monôme de degré strictement supérieur à un, ne se simplifit pas en général au cas standard. En effet, lorsqu'on fait agir D_q à $(x-a)^2$, on ne trouve pas $2(x-a)$. Ainsi, il faut définir ces polynômes autrement.

Définition 1.4 *Le q-analogue de $(x-a)^n$ est le polynôme définit comme suit*

$$(x-a)_q^n = (x-a)\left(x-qa\right)\cdots\left(x-q^{n-1}a\right), \quad n \geq 1, \tag{1.23}$$

avec $(x-a)_q^0 = 1$.

Dans ce cas, en remarquant que

$$(x-a)_q^{n+1} = (x-a)_q^n\left(x-q^n a\right), \tag{1.24}$$

on peut démontrer le résultat suivant

Proposition 1.3 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\mathrm{D}_q\,(x-a)_q^n = [n]\,(x-a)_q^{n-1}.$$

Preuve. Nous allons vérifier l'identité par récurrence. En effet, en appliquant la règle du produit à la formule (1.24) et tenant compte du fait que $\mathrm{D}_q\,(x-a)_q = 1$, on en déduit,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\,(x-a)_q^{n+1} &= (x-a)_q^n + \left(qx-q^n a\right)_q \mathrm{D}_q\left(x-q^n a\right)_q^n \\
&= (x-a)_q^n + q[n]\left(x-q^{n-1}a\right)_q\left(x-q^n a\right)_q^{n-1} \\
&= \left(1+q[n]\right)(x-a)_q^n.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat puisque $1+q[n] = [n+1]$. ■
Il existe d'autres propriétés similaires à celle mentionner dans la dernière Propsosition mais on a pas d'ambition de faire une référence complète de ces identités. Cependant, il est temps de signaler une remarque très importante et très utile dans cette direction.

Proposition 1.4 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left(x-q^{-n+1}a\right)_q^n. \tag{1.25}$$

Preuve. En effet, par définition du q-polynôme, on a

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)\left(a-qx\right)\left(a-q^2x\right)\ldots\left(a-q^{n-1}x\right) \\
&= (a-x)\,.q\left(q^{-1}a-x\right).q^2\left(q^{-2}a-x\right)\ldots q^{n-1}\left(q^{-n+1}a-x\right) \\
&= (-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left(x-q^{-n+1}a\right)\ldots\left(x-q^{-2}a\right)\left(x-q^{-1}a\right)(x-a)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

Le dernier résultat (1.25) combiné avec la Remarque 1.1, nous permet d'appliquer aisément l'opérateur de Jackson sur les q-fonctions suivantes

$$\mathrm{D}_q\left(\frac{1}{(a-x)_q^n}\right)=\frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}},\qquad \mathrm{D}_q\left(\frac{1}{(x-a)_q^n}\right)=[-n]\left(a-q^n x\right)_q^{-n-1},$$
$$\mathrm{D}_q\left((a-x)_q^n\right)=[-n]\left(a-qx\right)_q^{n-1}.$$

Remarquons en plus, que le coefficient q-binomial (1.4) ainsi que le q-polynôme donné par (1.23) peuvent s'écrire après simplification, respectivement, sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}=\frac{\left(q^{n-k+1};q\right)_k}{(q;q)_k},$$
$$(x-a)_q^n=(x-a)\left(x-qa\right)\cdots\left(x-q^{n-1}a\right)=\frac{\left((x/a);q\right)_\infty}{\left(q^n(x/a);q\right)_\infty}x^n,\quad x\neq 0.$$

Les deux dernières expressions permet d'étendre la définition du coefficient q-binomail ainsi que le q-polynôme (1.23) au cas non entier, à savoir

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{\left(q^{\alpha-k+1};q\right)_k}{(q;q)_k},$$
$$(x-a)_q^\alpha=\frac{\left((x/a);q\right)_\infty}{\left(q^\alpha(x/a);q\right)_\infty}x^\alpha,\quad \text{pour}\quad |a/x|<q^{-\alpha}.$$

Les deux dernières remarques fournissent une idée générale sur la définition du q-analogue de la dérivée fractionnaire de Rieman-Liouville, en remplaçant le facteur $(x-a)^\alpha$ par le q-polynôme $(x-a)_q^\alpha$. Plus précisément, on a

$$\mathrm{D}_{q,x}^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x\left(x-qt\right)_q^{\alpha-1}f(t)d_qt,\quad \text{avec}\quad \Re\{\alpha\}>0.$$

Voir la section suivante pour plus de détail sur la q-intégrale est le deuxième chapitre pour la fonction q-Gamma.

Avant de clôturer cette section, nous voullons profiter de la formule de définition du q-polynôme (1.23) pour mentionner un q-analogue du polynôme de Taylor.

Théorème 1.6 *Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c\in\,]a,b[$, nous avons la formule q-analogue de la série de Taylor suivante*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)_q^n}{[n]!}\left(\mathrm{D}_q^n f\right)(c),\qquad x\in\,]a,b[. \tag{1.26}$$

La méthode d'Euler ou celle utilisée dans la page 4, sont aussi applicable ici au q-Taylor.

1.3 L'intégrale de Jackson

L'intégrale de Jackson ou-bien la q-intégrale, a été introduite par Jackson comme étant l'inverse à droite de son opérateur D_q. En effet, pour une fonction arbitraire f, Jackson a construit un inverse à droite de l'opérateur D_q en cherchant une nouvelle fonction F vérifiant

$$\frac{1}{(q-1)x}\left(\sigma_q - 1\right)F(x) = \frac{F(qx)-F(x)}{qx-x} = f(x). \tag{1.27}$$

Formellement, nous pouvons écrire l'équation précédente sous la forme suvante

$$F(x) = \frac{1}{1-\sigma_q}\left((1-q)xf(x)\right) = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_q^k\left(xf(x)\right).$$

Ainsi, en utilisant les séries géométriques, Jackson avait déduit que

Définition 1.5 *La q-intégrale de Jackson de la fonction f est donnée par*

$$\int f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}q^n f(q^n x). \tag{1.28}$$

La q-intégrale est obtenue formellement et il reste à vérifier sous quelles conditions elle existe. La réponse est donnée par le Théorème suivant

Théorème 1.7 *[18, p. 68] Si $\left|x^{\alpha}f(x)\right|$ est bornée sur l'intervalle $]0,a]$ pour $0 \le \alpha < 1$, alors la q-intégrale de Jackson (1.28) converge vers $F(x)$ sur $]0,a]$ vérifiant (1.27).*

Preuve. Sachant que la série est bornée, alors sa convergence est garantie. Nous allons vérifier que sa limite est nécéssairement une solution de (1.27).

$$\begin{aligned} D_qF(x) &= \frac{1}{(q-1)x}\left((1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}q^n f(q^n x) - (1-q)qx\sum_{n=0}^{\infty}q^n f(q^{n+1}x)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}q^n f(q^n x) - \sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1}f(q^{n+1}x) = \sum_{n=0}^{\infty}q^n f(q^n x) - \sum_{n=1}^{\infty}q^n f(q^n x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Il résulte du fait $0 < q < 1$, que lorsque $x \in]0,a]$, alors $qx \in]0,a]$, ainsi l'égalité est valide. ■
Une conséquence directe du Théorème précédent est l'unicité de la solution puisque F est continue en zéro et vérifie $F(0) = 0$. La même formule (1.28) permet à Jackson de définir la q-intégrale définie sur un intervalle $[a,b]$ comme suit

Définition 1.6 *Soient* $0 < a < b$. *La* q-*intégrale définie de Jackson est définie par*

$$\int_0^b f(x)d_q x = (1-q)\, b \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k b) \tag{1.29}$$

et

$$\int_a^b f(x)d_q x = \int_0^b f(x)d_q x - \int_0^a f(x)d_q x. \tag{1.30}$$

Nous pouvons tirer des formules plus générales des deux définitions précédentes à savoir

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{D}_q g(x)d_q x &= (1-q)\, x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)\mathrm{D}_q g(q^k x)\\ &= (1-q)\, x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)\frac{g(q^k x)-g(q^{k+1}x)}{(1-q)q^k x}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)\left(g(q^k x)-g(q^{k+1}x)\right).\end{aligned}$$

De la même façon on a aussi

$$\int_0^b f(x)\mathrm{D}_q g(x)d_q x = \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k b)\left(g(q^k b)-g(q^{k+1}b)\right).$$

Par ailleurs, on peut pas avoir une bonne définition de la q-intégrale impropre en faisant tendre b vers l'infini. Cependant, sachant que

$$\begin{aligned}\int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x)d_q x &= \int_0^{q^i} f(x)d_q x - \int_0^{q^{i+1}} f(x)d_q x\\ &= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+i} f(q^{k+i}) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+i+1} f(q^{k+i+1}),\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x)d_q x = (1-q)\, q^i f(q^i).$$

Ainsi, il est naturel de définir la q-intégrale impropre comme suit

Définition 1.7 *La* q-*intégrale impropre d'une fonction* f *sur* $[0,+\infty[$ *est définie par*

$$\int_0^{\infty} f(x)d_q x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x)d_q x. \tag{1.31}$$

La q-intégrale impropre converge sous les mêmes conditions du Théorème 1.7 [18, p. 71]. Dans la suite nous allons présenter quelques propriétés similaires au cas usuel. Ainsi, nous allons donner une formule pour le changement de variable en premier lieu.

Théorème 1.8 *Soient f et F vérifiant (1.27) et u une autre fonction donnée par $u(x) = ax^{\alpha}$. Alors on a*

$$\int_a^b f(u(x))d_{q^{1/\alpha}}u(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_q u. \tag{1.32}$$

Preuve. D'après la définiton, on a

$$\begin{aligned}
\int f(u(x))d_{q^{1/\alpha}}u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(u\left(q^{k/\alpha}x\right)\right)\left(u\left(q^{k/\alpha}x\right) - u\left(q^{(k+1)/\alpha}x\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(aq^k x^{\alpha}\right)\left(aq^k x^{\alpha} - aq^{k+1}x^{\alpha}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(q^k u\right)\left(q^k u - q^{k+1}u\right) \\
&= \left(1-q\right)u\sum_{k=0}^{\infty} q^k f\left(q^k u\right) = \int f(u)d_q u.
\end{aligned}$$

En remplaçant, par la suite, x par a et b dans la dernière formule, on en déduit (1.32). ■

La deuxième propriété que nous allons énoncer est la q-intégration par partie dont la preuve est basée sur la règle de calcul de l'opérateur D_q sur le produit de deux fonctions arbitraires.

Proposition 1.5 *On a la formule suivante*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{D}_q g(x)d_q x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(qx)\mathrm{D}_q f(x)d_q x. \tag{1.33}$$

Nous avons mentionner au début de cette section que nous cherchons un inverse à droit de l'opérateur de Jackson D_q. En plus, on a la propriété suivante

Corollaire 1.1 *Toute fonction f vérifiant $\lim_{n\to\infty} f(xq^n) = f(0)$ sur un ensemble A, vérifie aussi la propriété suivante*

$$\int_a^b \mathrm{D}_q f(x)d_q x = f(b) - f(a)$$

pour tout $a, b \in \mathrm{A}$.

Pour la preuve, il suffit de prendre $f \equiv 1$ dans la Proposition précédente.

Exemple 1.3 *(1) Soit la fonction $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int_0^x f(t)d_q t = x(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i q^{in} x^n = x^{n+1}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^{i(n+1)}$$
$$= \frac{1-q}{1-q^2}x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{[n+1]}.$$

(2) La q-intégrale de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$, est donnée par

$$\int_0^x g(t)d_q t = x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(xq^n) = x^{3/2}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{3n/2}$$
$$= x^{3/2}(1-q)\frac{1}{1-q^{3/2}} = x^{3/2}\frac{(1-\sqrt{q})(1+\sqrt{q})}{(1-\sqrt{q})(1+\sqrt{q}+q)}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{q})}{(1+\sqrt{q}+q)}x^{3/2}.$$

(3) Soit maintenant la fonction $h(x) = \log(x)$, on a

$$\int_0^x h(t)d_q t = x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(xq^n) = x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \log(xq^n)$$
$$= x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \log(x) + x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \log(q^n)$$
$$= x(1-q)\log(x)\sum_{n=0}^{\infty} q^n + x(1-q)\log(q)\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$$
$$= (1-q)x\log(x)\frac{1}{1-q} + (1-q)xq\log(q)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)'$$
$$= x\log(x) + (1-q)xq\log q\left(\frac{1}{1-q}\right)'$$
$$= x\log(x) + (1-q)xq\log(q)\frac{1}{(1-q)^2}$$
$$= x\log(x) + x\frac{q\log(q)}{1-q}.$$

Lorsque $q \to 1$, nous remarquons que nous avons bien

$$\int_0^x f(t)d_q t \to \frac{x^2}{2}, \qquad \int_0^x g(t)d_q t \to \frac{2}{3}x^{3/2}, \qquad \int_0^x h(t)d_q t \to x\log(x) - x.$$

Chapitre 2

Fonctions q-analoques élémentaires

Dans ce chapitre nous allons montrer comment des fonctions q-analogues, en particulier des fonctions spéciales, s'obtiennent en général. Ainsi, le but essentiel est de donner des expressions q-analogues à condition qu'elles se réduisent au cas usuel lorsque le nombre q tendant vers un. Généralement, nous poursuivons deux approches : soit à partir des équations aux q-différences convenables, soit en donnant des définitions en remplaçant des termes standard par leurs q-analogues. La deuxième idée est utilisée notamment dans le cas où les expressions des fonctions sont explicites.

Pour commencer, regardons à titre d'exemple la solution de l'équation

$$\mathrm{D}_q f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Cela veut dire que pour tout x on a $f(x) = f(qx)$. Ainsi, par récurrence nous remarquons que $f(x) = f(q^n x)$. En supposant la continuité de f en zéro, on en déduit que la fonction f est nécéssairement constante.
Considérons mantenant l'équation

$$\mathrm{D}_q f(x) = a.$$

Il en résulte par définition que $f(x) = f(qx) + \left(1-q\right) ax$. Répétons le processus nous obtenons aisément

$$f(x) = f(q^n x) + \left(1-q\right) ax \left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right).$$

Soit, avec la continuité de f en zéro, $f(x) = ax + b$.
Cette approche simple offre, entre autres, des informations permettant à prédire la solution. Passons maintenant à des choses plus intéréssantes.

2.1 Les fonctions q-exponentielles

Plusieurs approches ont été proposées pour la construction des fonctions q-analogues à la fonction exponentielle. Nous allons présenter une construction à partir des équations aux q-différences. Ainsi, considérons maintenant les deux équations aux q-différences suivantes

$$\mathrm{D}_q y(x) = y(x), \tag{2.2}$$
$$\mathrm{D}_q y(x) = y(qx) \tag{2.3}$$

avec la même condition initiale $y(0) = 1$. On en déduit le résultat suivant

Théorème 2.1 *Les solutions des deux équations aux q-différences (2.2) et (2.3) sont données, respectivement, par*

$$\frac{1}{\left(\left(1-q\right)x;q\right)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}, \tag{2.4}$$
$$\left(\left(q-1\right)x;q\right)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!}. \tag{2.5}$$

Preuve. La définition de l'opérateur D_q, permet d'écrire les deux équations (2.2) et (2.3), respectivement, à la façon suivante

$$y(x) = \frac{1}{1-(1-q)\,x}\,y\left(qx\right),$$
$$y(x) = \left(1+\left(1-q\right)x\right)y\left(qx\right).$$

Répétons le processus n fois on en déduit que

$$y(x) = \frac{1}{\left(1-\left(1-q\right)x\right)\left(1-\left(1-q\right)qx\right)\left(1-\left(1-q\right)q^2x\right)\ldots\left(1-\left(1-q\right)q^{n-1}x\right)}\,y\left(q^n x\right),$$
$$y(x) = \left(1+\left(1-q\right)x\right)\left(1+\left(1-q\right)qx\right)\left(1+\left(1-q\right)q^2x\right)\ldots\left(1+\left(1-q\right)q^{n-1}x\right)y\left(q^n x\right).$$

Par conséquent, en faisant tendre $n\to\infty$ en tenant compte de la condition intitiale, les deux membres à gauche (2.4) et (2.5) sont obtenus, respectivement.
Cherchons ensuite, les solutions des deux équations (2.2) et (2.3) sous la forme d'une série entière. Autrement dit, supposons que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad\qquad z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

sont solutions des deux équations (2.2) et (2.3), respectivement. Soit, en remplaçant

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{D}_q x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathrm{D}_q x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n q^n x^n.$$

Sachant que $\mathrm{D}_q x^n = [n]_q x^{n-1}$, $n\geq 1$, alors on en déduit des deux égaliés précédentes que

$$c_{n+1} = \frac{1}{[n+1]}c_n = \cdots = \frac{1}{[n+1]!}c_0,$$
$$d_{n+1} = \frac{q^n}{[n+1]}d_n = \cdots = \frac{q^n}{[n+1]}.\frac{q^{n-1}}{[n]}\ldots\frac{q^0}{[1]}d_0,$$

ce qui prouve le memebre à droite des deux formules du Théorème 2.1.
Reste à vérifier l'égalité entre les deux membres. Pour cela nous allons vérifier l'unicité de solution uniquement pour la première équation, la vérification de la deuxième équation est similaire. En effet, soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions de (2.2), d'après la règle (c) du Théorème 1.2, on a

$$\mathrm{D}_q\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) = \frac{y_2(x)\mathrm{D}_q y_1(x) - y_1(x)\mathrm{D}_q y_2(x)}{y_2(x)y_2(qx)} = \frac{xy_1(x)y_2(x) - xy_1(x)y_2(x)}{y_2(x)y_2(qx)} = 0.$$

Il s'ensuit d'après le premier exemple (2.1) que la solution est une constante, c'est-à-dire, $y_1(x) = cy_2(x)$. Par conséquent, la condition initiale affirme le résultat. ■
En guise de conclusion, en remarquant que les deux identités (2.4) et (2.5) convergent vers la fonction exponentielle, lorsque $q \to 1$, à savoir

$$\lim_{q\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{n!} = e(x).$$

Par ailleurs, pour calculer la limite de la deuxième identité, il suffit d'utiliser le lien (1.16). Alors ces deux identités fournissent deux q-analogues pour la fonction exponentielle.

Définition 2.1 *La fonction exponentielle dispose de deux q-analogue donnés par*

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} = \frac{1}{\big((1-q)x;q\big)_\infty}, \quad |x| < 1, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{E}_q(x) = \frac{1}{e_q(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{[n]!} x^n = \big((q-1)x;q\big)_\infty. \tag{2.7}$$

Il est intéréssant de noter que d'autre auteurs préfèrent remplacer le le facteur $[n]!$ dans le dénominateur de la définition des q-analogues de l'exponentielle par le facteur $(q;q)_n$, i.e.

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x| < 1,$$

$$\mathrm{E}_q(x) = \frac{1}{e_q(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} x^n = (-x;q)_\infty.$$

Dans ce cas, en utilisant le fait que $\binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n}{2}$, il est clair que

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1} e_q\big((1-q)x\big) &= \lim_{q\to 1} \mathrm{E}_q\big((q-1)x\big) = e(x), \\ e_q(x)\mathrm{E}_q(-x) &= 1, \\ \mathrm{D}_q e_q(x) &= \frac{e_q(x)}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_q\mathrm{E}_q(x) = \frac{\mathrm{E}_q(qx)}{1-q}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Les fonctions q-trigonométriques

Dans cette section nous allons proposer des fonctions trigonométriques q-analogues à partir des expressions des fonctions trigonométriques usuelles en remplaçant chaque terme par un terme q-analogue. Ainsi, sachant que les fonctions “sinus ”et “cosinus”sont définis en terme de la fonction exponentielle, alors il existe deux q-analogues pour chaque fonction. Posons donc

Définition 2.2 *[13] Les fonctions q-trigonométriques sont définis comme suit*

$$\cos_q(x) = \frac{e_q(ix) + e_q(-ix)}{2}, \qquad \mathrm{Cos}_q(x) = \frac{\mathrm{E}_q(ix) + \mathrm{E}_q(-ix)}{2}, \tag{2.9}$$

$$\sin_q(x) = \frac{e_q(ix) - e_q(-ix)}{2i}, \qquad \mathrm{Sin}_q(x) = \frac{\mathrm{E}_q(ix) - \mathrm{E}_q(-ix)}{2i}. \tag{2.10}$$

Il est intéréssant de noter que d'après (1.16), on a aisément $\mathrm{Cos}_q(x) = \cos_{1/q}(x)$ et aussi $\mathrm{Sin}_q(x) = \sin_{1/q}(x)$. Il s'ensuit ainsi que les tangentes coincident, i.e. $\mathrm{Tan}_q(x) = \tan_q(x)$.
D'autres expressions équivalentes pour les fonctions q-trigonométriques existent dans la littérature notamment en transformations intégrales, i.e. Fourier, Mellin, Hankel, ... etc.
Autrement dit, dans les relations q-trigonométriques non-linéaire, des puissances du nombre q interviennent, i.e. en passant de la base q à une autre base q^i, $i \geq 2$. Par exemple, notons par $\cos_q(x, q)$ la définition de la fonction q-cosinus dans la base q, i.e. en terme de $\left(x, q\right)_n$. Alors, on peut vérifier aisément que

$$\cos_q(2x, q) = \cos_q^2(x, q^2) - \sin_q^2(x, q^2).$$

Voir aussi [12, eq. (6.4)] pour le cas des q-exponentielles.
C'est la raison pourquoi dans la littérature les fonctions q-trigonométriques sont données dans une base de puissance de q. Plus précisément, sachant que les q-cosinus et q-sinus sont des fonctions paires et impaires, respectivement, alors leurs q-séries de Taylor se réduisent aux termes pairs impairs, respectivement, et on obtient [12]

$$\cos_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n]!} x^{2n}, \qquad \sin_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n+1]!} x^{2n+1}, \qquad |x| < 1,$$

$$\mathrm{Cos}_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{2n}{2}}}{[2n]!} x^{2n}, \qquad \mathrm{Sin}_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{2n+1}{2}}}{[2n+1]!} x^{2n+1}.$$

Par conséquent, l'identité (2.8) montre qu'on a la formule q-analogue suivante

$$\cos_q(x)\,\mathrm{Cos}_q(x) + \sin_q(x)\,\mathrm{Sin}_q(x) = 1,$$
$$\sin_q(x)\,\mathrm{Cos}_q(x) - \mathrm{Sin}_q(x)\cos_q(x) = 0.$$

En plus, les identités suivantes découle directement de la définition

$$\cos_q(x) + i\sin_q(x) = e_q(ix), \qquad \sin_q(x)\,\mathrm{Cos}_q(x) = \cos_q(x)\,\mathrm{Sin}_q(x),$$
$$\cos_q^2(x) + \sin_q^2(x) = e_q(ix)e_q(-ix), \qquad \mathrm{Cos}_q^2(x) + \mathrm{Sin}_q^2(x) = \mathrm{E}_q(ix)\mathrm{E}_q(-ix)$$

on a également

$$\mathrm{D}_q \cos_q(x) = -\sin_q(x), \qquad \mathrm{D}_q \sin_q(x) = \cos_q(x),$$
$$\mathrm{D}_q \mathrm{Cos}_q(x) = -\mathrm{Sin}_q(qx), \qquad \mathrm{D}_q \mathrm{Sin}_q(x) = \mathrm{Cos}_q(qx).$$

Un bonus de la définition des fonctions q-trigonométriques, c'est qu'on peut obtenir des identités nouvelles. A titre d'exemple, on peut vrifier aisément à partir des séries de q-Taylor de ces dernières fonctions en tenant compte de (2.8) que [12]

$$\mathrm{Cos}_q(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^2 q^{2n}\right) \cos_q(x),$$
$$\mathrm{Sin}_q(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^2 q^{2n}\right) \sin_q(x).$$

Les fonctions q-trigonométriques attirent l'attentions aussi des combinatoriciens à cause de leurs connections avec les fractions continues et la théories des nombres. Par exemple, les q-nombres d'Euler notés $\mathrm{E}_n(q)$, $n \geq 0$, sont définis par

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_n(q) \frac{x^n}{[n]!} = \tan_q(x) + \frac{1}{\cos_q(x)}.$$

Par ailleurs, d'après les remarques précédentes, nous pouvons conclure que les fonctions q-analogues trigonométriques données par la définition 2.2, vérifient des équations aux q-différences linéaires du second ordre. Plus précisément, si nous appliquons une deuxième fois l'opérateur D_q aux q-fonctions trigonométriques données plus haut, nous obtenons le résultat suivant

Proposition 2.1 *Les q-fonctions trigonométriques petites et grandes vérifient, respectivement, l'équation aux q-différences du seconde ordre suivante*

$$\left(1-q\right)^2 \mathrm{D}_q^2 y(x) + y(x) = 0, \qquad |x| < 1,$$
$$\left(1-q\right)^2 \mathrm{D}_q^2 y(x) + q y(q^2 x) = 0.$$

Cependant si nous utilisons les deux premières expressions de la définition 2.1, i.e. les formules (2.6)-(2.7), le facteur $\left(1-q\right)^2$ disparaît.

2.3 Les fonctions q-Gamma et q-Beta

Intuitivement, les fonctions spéciales les plus célèbres et les plus populaires sont la fonction Gamma et la fonctionn Beta. Nous avons déjà entendu parlé dans le Chapitre 1,

au cours de l'extension du coefficient binomial vers le cas non entier à l'aide de la fonction Gamma d'Euler. Nous avons également utilisé une version q-analogue discrètement dans l'extension du symbole de q-Pochhammer. Maintenant, il est temps de mettre les points sur les i et donner une définition convenable.
Toujours Jackson avait définit un q-analogue de la fonction Gamma d'Euler par comparaison de la définition de cette dernière et ces propriétés. En effet, pour tout complexe $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, la fonction $\Gamma(x)$ est définit à l'aide de [1, p.3]

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^{x-1}}{(x)_k}. \tag{2.11}$$

Il en résulte de cette définition que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \text{avec} \quad \Gamma(1) = 1. \tag{2.12}$$

Il s'ensuit de (2.12) que $\Gamma(n+1) = [n]!$ si $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, les identités (2.12) caractérisent en fait la fonction Gamma d'Euler. Cette caracterisation s'appelle le théorème de Bohr et Mollerup. Nous allons discuter un q-analogue par la suite.

Définition 2.3 *La fonction q-Gamma de Jackson est définit pour tout $x \in \mathbb{C}$ par*

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}. \tag{2.13}$$

Lorsque $q > 1$, en utilisant l'inversion de la Remarque 1.3, on obtient

$$\Gamma_q(x) = q^{\binom{x}{2}}\Gamma_{1/q}(x) = \frac{(q^{-1};q^{-1})_\infty}{(q^{-x};q^{-1})_\infty}(q-1)^{1-x}q^{\binom{x}{2}}, \qquad (\text{si} \quad q>1). \tag{2.14}$$

Sachant que $(1-q^x)(q^{x+1};q)_\infty = (q^x;q)_\infty$, il s'ensuit alors que la fonction q-Gamma satisfait l'équation suivante

$$\Gamma_q(x+1) = [x]\Gamma_q(x) \qquad \text{et} \qquad \Gamma_q(1) = 1.$$

Réciproquement, en 1981, Askey donne une version q-analogue du théorème de Bohr-Mollerup qui caractérise la fonction Gamma d'Euler par la représentation intégrale célèbre

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx. \tag{2.15}$$

En effet, Askey [3] a démonté le résultat suivant

Théorème 2.2 *Soit f une fonction satisfaisant l'équation*

$$f(x+1) = [x] f(x), \qquad \textit{pour} \quad 0 < q < 1 \qquad \textit{avec} \quad f(1) = 1 \tag{2.16}$$

et $\log\left(f(x)\right)$ *est convexe pour $x > 0$. Alors, f est donnée par (2.13), i.e. $f(x) = \Gamma_q(x)$.*

Bien que la littérature sur la fonction q-Gamma et ces applications est assez exhaustive, la première représentation q-intégrale correcte a été découverte par Askey en 1981 [3] (voir aussi [20]). En effet, en remarquant d'après la somme suivante

$$(1-q)^{1-b} \sum_{k=0}^{\infty} q^{kb} \left(q^{k+1}; q\right)_{\infty} = \frac{(q;q)_{\infty}}{\left(q^b;q\right)_{\infty} (1-q)^{b-1}}$$

que le côté gauche est la q-intégrale de Jackson

$$(1-q)^{1-b} \sum_{k=0}^{\infty} q^{kb} \left(q^{k+1}; q\right)_{\infty} = \int_0^{(1-q)^{-1}} t^{b-1} \left((1-q)\, qt; q\right)_{\infty} d_q t, \qquad \Re(b) > 0.$$

Alors, on a démontré le résultat suivante

Théorème 2.3 *La fonction q-gamma admet la représentation q-intégrale*

$$\begin{aligned} \Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_{\infty}}{\left(q^x;q\right)_{\infty} (1-q)^{x-1}} &= \int_0^{(1-q)^{-1}} t^{x-1} \left((1-q)\, qt; q\right)_{\infty} d_q t, \qquad \Re(x) > 0, \\ &= \int_0^{(1-q)^{-1}} t^{x-1} \mathrm{E}_q\left(-qt\right) d_q t, \qquad \Re(x) > 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

A l'aide de ce dernier résultat, la fonction q-beta peut aussi donner en terme d'une q-intégrale comme suit. Sachant qu'on peut écrire le membre gauche de la somme suivante

$$(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{kb} \frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{\left(q^{k+a};q\right)_{\infty}} = (1-q) \frac{\left(q, q^{a+b};q\right)_{\infty}}{\left(q^a, q^b;q\right)_{\infty}} = \frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(b)}{\Gamma_q(a+b)}$$

en terme d'une q-intégrale de Jackson à savoir

$$(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{kb} \frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{\left(q^{k+a};q\right)_{\infty}} = \int_0^1 t^{b-1} \frac{(qt;q)_{\infty}}{\left(q^a t;q\right)_{\infty}} d_q t, \quad \Re(b), \Re(a) > 0.$$

Alors, nous avons [20, 9]

Définition 2.4 *La fonction q-beta est définit à l'aide de*

$$\beta_q(a,b) := \frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(b)}{\Gamma_q(a+b)} = (1-q) \frac{\left(q, q^{a+b};q\right)_{\infty}}{\left(q^a, q^b;q\right)_{\infty}} = \int_0^1 t^{a-1} \frac{(qt;q)_{\infty}}{\left(q^b t;q\right)_{\infty}} d_q t. \tag{2.18}$$

En outre, il est intéréssant de signaler d'autres q-fonctions liées à la fonction q-gamma notamment les q-gamma et q-beta de deuxième espèce. Tout d'abors, la fonction q-gamma réciproque est donnée par

$$\frac{1}{\Gamma_q(x)} := \frac{(q^x;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(1-q)^{x-1}. \tag{2.19}$$

Maintenant, si nous utilisons les expressions des deux q-fonctions exponentielles, nous déduisons [3]

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(1-q)^{x-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{nx}}{(q;q)_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\Gamma_q(x)} = \frac{(1-q)^{x-1}}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} q^{nx}}{(q;q)_n}. \tag{2.20}$$

Remarquons en plus, d'après la Définition 1.4 qu'on peut écrire

$$(x;q)_a = \frac{(x;q)_\infty}{(q^a x;q)_\infty} = (1-x)_q^a$$

$$\beta_q(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-qx)_q^{b-1} d_q x.$$

La première remarque est de faire tendre la constante $b \to \infty$, on en déduit

$$\beta_q(a,\infty) = \int_0^1 x^{a-1}(qx;q)_\infty d_q x.$$

Maintenant faisant le changement de variable $x = (1-q)\,y$, on en déduit

$$\beta_q(a,\infty) = (1-q)^a \int_0^{(1-q)^{-1}} y^{a-1}((1-q)\,qy;q)_\infty d_q y = (1-q)^a \Gamma_q(a).$$

La deuxième des choses, c'est qu'on peut définir deux nouvelles fonctions q-analgoues à Gamma et Beta ditent de deuxième espèce, en remplaçant $E_q(-qt)$ par $e_q(t)$ et le q-polynôme $(1-qx)_q^{b-1}$ par $\left((1+qx)_q^{a+b}\right)^{-1}$, respectivement [6].

Définition 2.5 *Le fonction q-gamma de deuxième espèce notée γ_q est définit à l'aide de*

$$\gamma_q(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{((q-1)\,t;q)_\infty} d_q t = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e_q(-t)\, d_q t. \tag{2.21}$$

Les propriétés suivantes sont aisément vérifiés [6]

Proposition 2.2 *Pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\Re(x) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\gamma_q(x+1) = [x]q^{-x}\gamma_q(x), \qquad \gamma_q(n+1) = q^{-\binom{n+1}{2}}[n]!, \qquad \gamma_q(1) = 1. \tag{2.22}$$

Preuve. Sachant que $D_q e_q(at) = ae_q(at)$, une q-intégration par partie nous donne

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e_q(-t)\, d_q t = [x]\int_0^{+\infty} t^{x-1} e_q(-qt)\, d_q t.$$

Ainsi, le changement de variable $qt \to t$ donne le résultat. ■

Chapitre 3

La q-transformée de Laplace

L'objet de ce chapitre est de chercher une version q-analogue à la transformée de Laplace. En fait, sachant qu'on a deux fonctions q-exponentielles, alors il existe deux q-analogues à la transformée de Laplace. Nous allons démonter plusieurs versions q-analogues aux propriétés vérifiées par la transformée de Laplace usuelle. Entre temps, nous allons utiliser cette q-transformée pour résoudre des équations aux q-différences.

Parmi les transformations q-analgoues les plus utilisées, notamment en théorie des opérateurs et les équations intégrales, sont les q-transformations de Bessel, de Laplace, de Hankel, de Fourier, de Mellin, etc. Nous intéréssons dans ce chapitre à étudier des tranformées q-analogue à celle de Laplace.

3.1 La q-transformée de Laplace.

Sachant que nous avons deux q-fonctions exponentielles, alors nous pouvons définir deux q-analogues de la transformée de Laplace. En plus, comme l'une est la réciproque de l'autre, nous allons se concentrer à une seule transformée et mentionner comment passer d'une transformée à une autre.

Définition 3.1 *La q-transformée de laplace notée $\mathscr{L}_q$ d'une fonction f est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ par*

$$\mathrm{F}(p) := \mathscr{L}_q\left(f(t)\right)(p) = \int_0^\infty e_q(-pt) f(t) d_q t, \qquad \textit{avec} \qquad \Re(x) > 0. \tag{3.1}$$

Exemple 3.1 *(1) Soit la fontion $f(x) = 1$. Alors, d'après le corollaire 1.1, on a*

$$\mathscr{L}_q(1)(p) = \int_0^\infty e_q(-pt) 1 d_q t = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \mathrm{D}_q e_q(-pt) d_q t = -\frac{1}{p}\left[e_q(-pt)\right]_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

(2) Maintenant pour la fonction $g(x) = x$, on trouve après une intégration par partie

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_q(t)(p) &= \int_0^\infty e_q(-pt) t d_q t = -\frac{1}{p}\int_0^\infty t\mathrm{D}_q e_q(-pt) d_q t \\ &= -\frac{1}{p}\left\{\left[te_q(-pt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty e_q(-pt) d_q t\right\} = \frac{1}{p}\left\{\mathscr{L}_q(1)(p)\right\} = \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

(3) Soit la fonction $h(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > -1$. Alors, avec le changement de variable $pt = y$

$$\mathscr{L}_q\left(t^\alpha\right)(p) = \int_0^\infty e_q(-pt) t^\alpha d_q t = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty e_q(-y) y^\alpha d_q y = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma_q(\alpha+1).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant

Proposition 3.1 *On a les q-transformée de Laplace des q-fonctions élémentaires suivantes*

$$\mathscr{L}_q\left(e_q(at)\right)(p) = \sum_{i=0}^\infty \frac{a^n}{p^{n+1}} q^{-\binom{n+1}{2}}, \tag{3.2}$$

$$\mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(at)\right)(p) = \frac{q}{qp-a}. \tag{3.3}$$

Preuve. (1) Pour la fonction $f(t) = e_q(at)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_q\left(e_q(at)\right)(p) &= \int_0^{\infty} e_q(-pt)e_q(at)d_qt = \int_0^{\infty} e_q(-pt)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^nt^n}{[n]!}d_qt\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{[n]_q!}\int_0^{\infty} e_q(-pt)t^nd_qt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{[n]!}\mathscr{L}_q\left(t^n\right)(p)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{[n]!}\frac{\Upsilon_q(n+1)}{p^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{p^{n+1}}q^{-\binom{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

(2) Pour la fonction $f(t) = \mathrm{E}_q(at)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(at)\right)(p) &= \int_0^{\infty} e_q(-pt)\mathrm{E}_q(at)d_qt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{[n]!}q^{\binom{n}{2}}\int_0^{\infty} e_q(-pt)t^nd_qt\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^nq^{\binom{n}{2}}}{[n]!}\mathscr{L}_q\left(t^n\right)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^nq^{\binom{n}{2}}}{[n]!}\frac{q^{-\binom{n+1}{2}}}{p^{n+1}}[n]!\\
&= \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{qp}\right)^n = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{a}{qp}} = \frac{q}{qp-a}
\end{aligned}$$

■

Pour les fonctions q-trigonométriques, il suffit d'utiliser la proposition précédente avec la défition 2.2. En effet, on a le résultat suivant

Proposition 3.2 *On a les q-transformées de Laplace des q-fonctions trigonométriques suivantes*

$$\mathscr{L}_q\left(\cos_q(at)\right)(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{-\binom{2n+1}{2}}\left(\frac{a}{p}\right)^{2n}, \tag{3.4}$$

$$\mathscr{L}_q\left(\sin_q(at)\right)(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{-\binom{2n+2}{2}}\left(\frac{a}{p}\right)^{2n+1}, \tag{3.5}$$

$$\mathscr{L}_q\left(\mathrm{Cos}_q(at)\right)(p) = \frac{q^2p}{q^2p^2+a^2} \qquad et \qquad \mathscr{L}_q\left(\mathrm{Sin}_q(at)\right)(p) = \frac{aq}{q^2p^2+a^2}. \tag{3.6}$$

Preuve. (1) Pour la fonction $f(t) = \cos_q(at)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_q\left(\cos_q(t)\right)(p) &= \frac{1}{2}\left\{\mathscr{L}_q(e_q(it))(p) + \mathscr{L}_q(e_q(-it))(p)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{-\binom{n+1}{2}}}{p^{n+1}}\left\{(ia)^n + (-ia)^n\right\}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{-\binom{2n+1}{2}}}{p^{2n+1}}(-1)^n a^{2n}.
\end{aligned}$$

(3) Pour la fonction $f(t) = \mathrm{Cos}_q(at)$, on a d'après la proposition précédente

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_q\left(\mathrm{Cos}_q(at)\right)(p) &= \frac{1}{2}\left\{\mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(iat)\right)(p) + \mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(-iat)\right)(p)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{pq-ia} + \frac{q}{pq+ia}\right) = \frac{q^2p}{q^2p^2+a^2}\end{aligned}$$

On fait la même chose pour les deux fonctions $\sin_q(at)$ et $\mathrm{Sin}_q(at)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_q\left(\mathrm{Sin}_q(at)\right)(p) &= \frac{1}{2i}\left\{\mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(iat)\right)(p) - \mathscr{L}_q\left(\mathrm{E}_q(-iat)\right)(p)\right\}\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{q}{pq-ia} - \frac{q}{pq+ia}\right) = \frac{aq}{q^2p^2+a^2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

3.2 La q-transformée de Laplace et l'opérateur de Jackson

Nous allons maintenant voir comment se comporte la q-transformée de Laplace lorsqu'elle agit sur l'opérateur de Jackson D_q. On a le premier résultat suivant

Proposition 3.3 *Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}^+$ et supposons que la q-transformée de Laplace de $\mathrm{D}_q f$ existe. Alors*

$$\mathscr{L}_q\left(\mathrm{D}_q f(t)\right)(p) = -f(0) + \frac{p}{q}\mathscr{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right). \tag{3.7}$$

Preuve. Par définition, on a la q-transformée de Laplace suivante

$$\mathscr{L}_q\left(\mathrm{D}_q f(t)\right)(p) = \int_0^\infty e_q(-pt)\left(\mathrm{D}_q f(t)\right) d_q t.$$

Il s'ensuit après une q-intégration par partie que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_q(\mathrm{D}_q f(t))(p) &= -f(0) - \int_0^\infty f(qt)\mathrm{D}_q e_q(-pt) d_q t\\ &= -f(0) + p\int_0^\infty f(qt)e_q(-pt)d_q t\\ &= -f(0) + \frac{p}{q}\int_0^\infty f(y)e_q\left(-\frac{p}{q}y\right)d_q y\\ &= -f(0) + \frac{p}{q}\mathscr{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q}\right).\end{aligned}$$

■

Plus généralement, on peut appliquer la q-transformée de Laplace sur $\mathrm{D}_q^n f(x)$ pour avoir un q-analogue de la tarnsforlée de la dérivée n$^{\text{ième}}$ d'une fonction dérivable. Plus précisément nous allons démontrer le résultat suivant

Proposition 3.4 *Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}^+$ et supposons que la q-transformée de Laplace de $D_q^n f$ existe. Alors*

$$\mathscr{L}_q\left(D_q^n f(t)\right)(p) = p^n q^{-\binom{n+1}{2}} \mathscr{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} q^{-\binom{n-i}{2}} D_q^i f(0). \tag{3.8}$$

Preuve. La preuve se fait par réccurence. D'après la proposition précédente la récurrence est valide pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n. Alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_q\left(D_q^{n+1} f(t)\right)(p) &= \mathscr{L}_q\left(D_q^n \left(D_q f(t)\right)\right)(p) \\
&= p^n q^{-\binom{n+1}{2}} \mathscr{L}_q\left(D_q f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} q^{-\binom{n-i}{2}} D_q^i \left(D_q f\right)(0) \\
&= p^n q^{-\binom{n+1}{2}} \mathscr{L}_q\left(D_q f(t)\right)\left(\frac{p}{q^n}\right) - \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} q^{-\binom{n+1-i}{2}} D_q^i \left(f\right)(0).
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant (3.7), on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_q\left(D_q^{n+1} f(t)\right)(p) &= p^n q^{-\binom{n+1}{2}} \left\{-f(0) + \frac{p}{q^{n+1}} \mathscr{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right)\right\} - \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} q^{-\binom{n+1-i}{2}} D_q^i \left(f\right)(0) \\
&= p^{n+1} q^{-\binom{n+2}{2}} \mathscr{L}_q\left(f(t)\right)\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right) - \sum_{i=0}^{n} p^{n-i} q^{-\binom{n+1-i}{2}} D_q^i \left(f\right)(0).
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$. ∎

3.3 Application à la résolution des équations aux q-différences

Exemple 3.2 *Considéros le probleme suivant*

$$\begin{cases} D_q y(t) = a y(t) + t, \qquad t > 0, \qquad a \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit en appliquant la q-transformée de Laplace à l'équation aux q-différences plus haut, i.e.

$$L_q(D_q y(t))(p) = L_q\left(a y(t) + t\right)(p),$$

on en déduit, d'après (3.7)

$$p Y_q(p) - y(0) = a Y_q(p) + \frac{1}{p^2},$$

avec

$$Y_q(p) = L_q\left(y(t)\right)(p).$$

Il s'ensuit après simplification, que

$$Y_q(p) = \frac{e(at)}{a^2(p-a)} - \frac{1}{a^2} - \frac{t}{a}.$$

Exemple 3.3 *Considérons par la suite l'équation aux q-différences d'ordre 2 suivante*

$$\begin{cases} D_q^2 y(t) - 2D_q y(t) - 3y(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ y(0) = b, \qquad D_q y(0) = a. \end{cases} \tag{3.10}$$

Il résulte d'après (3.7), en appliquant la q-transformée de Laplace, que

$$p^2 Y_q(p) - p y(0) - D_q y(0) - 2pY_q(p) + 2y(0) - 3Y_q(p) = 0,$$

en d'autre termes,

$$Y_q(p) = \frac{(p-2)b + a}{(p+1)(p-3)} = \left(\frac{3b+a}{4}\right)\frac{1}{p+1} + \left(\frac{b+a}{4}\right)\frac{1}{p-3}$$

d'où finalement

$$y(t) = \left(\frac{3b+a_q}{4}\right) e_q(-t) + \left(\frac{b+a_q}{4}\right) e_q(3t).$$

Il existe notamment des méthodes de réduction d'ordre dans le cas de deux varibales ou plus. L'idée est de généraliser la méthode de sépartion de variables en se basant sur le q-polynômes de Taylor et les fonctions q-exponentielles.

Bibliographie

[1] G. E. Andrews, R. A. Askey, R. Roy, Special Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[2] M. H. Annaby, A. E. Hamza and K. A. Aldwoah, Hahn Difference Operator and Associated Jackson-Nörlund Integrals, J. Optim. Theory Appl. 154 (2012), pp 133-153.

[3] R. Askey, The q-Gamma and q-Beta Functions, Appl. Anal. 8 (1978), 125-141.

[4] M. Bohnera, G. Sh. Guseinov, The h-Laplace and q-Laplace transforms, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010), 75-92.

[5] W. S. Chung, T. Kim and H. I. Kwon, On the q-analog of the Laplace transform, Russ. J. Math. Phys. 21 (2014), 156-168.

[6] A. de Sole, V. G. Kac, On integral representations of q-gamma and q-beta functions, Rend. Mat. Acc. Lincei s. 9, 16 (2005), 11-29.

[7] T. Ernst, A Comprehensive Treatment of q-Calculus, Springer Basel, 2012.

[8] L. Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748.

[9] G. Gasper, Lecture notes for an introductory minicourse on q-series, arXiv :9509223.

[10] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[11] I. M. Gessel, A q-analog of the exponential formula, Discrete Math. 40 (1982), 69-80.

[12] W. Hahn, Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen, die 24 Integrale der hypergeometrischen q-diferenzengleichung, das q-analog on der Laplace transformation, Math. Nachr. 2 (1949), 340-379.

[13] F. H. Jackson, A basic-sine and cosine with symbolical solution of certain differential equations, Proc. Edinb. Math. Soc. 22 (1903), 28-39.

[14] F. H. Jackson, The basic gamma-function and the elliptic functions, Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 76 (1905), 127-144.

[15] F. H. Jackson, On q-functions and a certain difference operator, Trans. Roy. Soc. Edin. 46(1908), 253-281.

[16] F. H. Jackson, On q-definite integral, Quart. J. Math. (Ser.) (2) 2 (1951), 1-16.

[17] F. H. Jackson, Basic integration, Quart. J. Math. (Ser.) (2) 2 (1951), 1-16.

[18] V. Kac and P. Cheung, Quantum Calculus, Springer-Verlag, New York, 2002.

[19] W. Koepf, P. M. Rajković and S. D. Marinković, Properties of q-holonomic functions, J. Difference Equ. Appl. 13 (7) (2007), 621-638.

[20] T. H. Koornwinder, Compact quantum groups and q-special functions, in : Representations of Lie groups and quantum groups, V. Baldoni and M.A. Picardello (eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series 311, Longman Scientific & Technical, 1994, pp. 46-128

[21] T. H. Koornwinder, R. F. Swarttouw, On q-analogues of the Fourier and Hankel transforms, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992), 445-461.

[22] D. Larsson and S. Silvestrov, Burchnall-Chaundy theory for q-difference operators and q-deformed Heisenberg algebras, J. Nonlinear Math. Phys.10 (suppl. 2) (2003), 95–106.

[23] M. S. Rahmat, The (q, h)-Laplace transformon discrete time scales, Comput. Math. Appl. 62 (2011), 272-281.

[24] H. Tahara, q-Analogues of Laplace and Borel transforms by means of q-exponentials, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 67 (5) (2017), 1865-1903.

[25] C. Zhang, Sur la fonction q-Gamma de Jackson, Aequationes Math. 62 (2001), 60-78.