République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : E.D.P et Applications

Thème

Control moyen pour quelques systèmes Dépendant d'un paramètre

Présenté Par :
DJEBRI Hadia
MESLOUB Iméne

Devant le jury :

Mr	HAOUAM Kamel	Pr	Univérsité Larbi Tébessa	Président
Mr	REBEÏ Belgacem	Pr	Univérsité Larbi Tébessa	Examinateur
Mr	HAFDALLAH Abdelhak	M.C.B	Univérsité Larbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 16/06/2019

Table des matières

Notations et abréviations

$\mathbb{R}$	Ensemble des reéles.
$\\|.\\|_H$	La norme dans l'espace H.
$(.,.)_H$	Le produit scalaire dans l'espace H.
$\langle .,. \rangle_{H',H}$	Le produit de dualité entre H et $H^{'}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	L'espace des matrices carées d'ordre n dans $\mathbb{R}$
C^2	La classe des fonctions de dérivées premiére et deuxième continus.
$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \nabla y.\nu$	La dérivée conormal.
$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	Le laplacien.
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$	Le gradient.
div	Divergence.
$\mathcal{A}^*$	L'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$.
$\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$	L'espace de l'opérateur linéaire borné de $\mathcal{Y}$ vers $\mathcal{Z}$.
$\mathcal{D}(Q)$	L'espace de fonctions dans C^∞ avec un support compact dans Q.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	L'espace des matrices de n lignes et de p colonnes dans $\mathbb{R}$
$L^2(0,T;E)$	Espace des fonctions de norme carrée sommable.
EDP	Equation aux dérivées partielles.
t.q.	tels que.
ssi	si et seulement si.
p.p.	presque partout.
c.à.d.	c'est à dire.

الملخص

الغرض من هذه المذكرة هي التحكم في بعض الأنظمة المتعلقة بوسيط, الوسيلة الأساسية لفعل ذلك هي مفهوم التحكم المتوسط الذي أنشأه زوازوا, أولا نعتبر مسائل قابلية التحكم للأنظمة الخطية منتهية البعد و نعرض أن شرط الرتبة المتوسطة كافي و لازم للتحكم المتوسط. ثانيا نقدم قابلية التحكم المتوسط في الأنظمة لا نهائية البعد و نعطي عدة تعاريف و تشخيصات لها. أخيرا ندرس مسألة التحكم الأمثل لبعض الأمثلة المتعلقة بوسيط لأنواع مختلفة من الوسائل التطورية (مكافئة, زائدية, موضوعة جيدا بمعنى بيتروفسكي).

الكلمات المفتاحية : التحكم المتوسط, أنظمة متعلقة بوسيط, الملاحظة المتوسطة, التحكم الأمثل المتوسط.

Abstract

The purpose of this memory is to control some systems depending on an parameter, the main used tool to do that is the notion of averaged control which was introduced by E. Zuazua. First, we consider the problems of controllability for linear finite dimensional systems and we show that the averaged rank condition is a necessary and sufficient condition for averaged controllability. Second, we present the averaged controllability for the infinite dimensional systems and we give many definitions and characterizations for her. Finally, we study the optimal control problem for some parameter dependent systems and we characterize the averaged optimal control for various kinds of evolution problems (parabolic, hyperbolic, well posed in Petrowsky sense).

Keywords : averaged control, parametre depending system, averaged observabilite, averaged optimal control.

Resumé

Le but de cette mémoire est de contrôler certains systèmes en fonction d'un paramètre inconnu. Pour ce faire, l'outil principal utilisé est la notion de contrôl moyen qui a été introduite par E. Zuazua. Premièrement, nous considérons les problèmes de contrôlabilité pour les systèmes de dimension finie linéaires et nous montrons que la condition de rang moyen est une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité moyenne. Deuxièmement, nous présentons la contrôlabilité moyenne pour les systèmes à dimension infinie et nous lui donnons de nombreuses définitions et caractérisations. Enfin, nous étudions le problème de contrôle optimal pour certains systèmes dépendants d'un paramètre et nous caractérisons le contrôle optimal moyen pour divers types de problèmes d'évolution (parabolique, hyperbolique, bien posé au sens de Petrowsky).

Mots clés : contrôl moyen, système dépend d'un paramètre, observabilité moyenne, contrôl optimal moyen.

Acknowledgment On tient tout d'abord à remercier DIEU le tout puissant, de nous avoir donné le courage et la force de mener à terme ce memoire.On tient remercier vivement notre encadreur Dr. HAFDALLAH Abdelhak pour le soutien et l'aide qu'elle n'a jamais manqué de nous apporter, aussi pour ses conseils et ses orientations durant l'élaboration de ce mémoire.Nous remerciements vont aussi au membres de jury Pr. HAOUAM Kamel et Pr. REBEÏ Belgacem pour avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et le juger.Nous remercier la doctorante LOUAFI Meriem pour ses conseils et ses aides.Enfin un grand merci à tous les membres de notre familles, et notre amis.

Dédicace 1 : (**Djebri Hadia**)

Je tien à dédier ce travail ma chère maman pour son amour infini, pour son soutien incorporable, pour sa commréhension qui n'a pas d'équivalent, avec mes sentiments d'amour et de respect les plus chaleureux, à mon père, à qui je dois tant et tout , symbole du courage et du sacrifice, sa patience et son aide qui m'ont toujours encouragée et soutenue au cours de la période de mes étude, je remercie ma soeur Samia de m'avoir soutenue tout les temps , aussi je remercie mes frères (Oussama, Abd Allah, Mohamed Ali) Iméne je remercie mon binom Iméne et tout la famille **Djebri** .

Dédicace 2 : (Mesloub Iméne)

The first person who worth a grateful thanks and a real appreciation is my dear father A. Mesloub who taught me that the best kind of knowledge to have is that which is learned for its own sake. Also, I'm thankful to the greatest woman in my life, my mother, who taught me that even the largest task can be accomplished if it is done one step at a time, a special thankful to my brother Ali and my sister Rihab.

Besides my family, I would like to thank my binomial Hadia and my friends Dounia, Chadia, Nada, Boutheina, Kouther, Wafa for supporting me all time.

Introduction

Un système de contrôle est un système dynamique, modélisé par des équations différentielles ordinaires ou partielles (EDO ou EPD), sur lequel on peut agir à l'aide de contrôles.
La contrôlabilité et l'observabilité sont les principaux problèmes dans l'analyse des systèmes, avant de décider la meilleure stratégie de contôle à appliquer, ou s'il est possible de contrôler et stabiliser le système.
La contrôlabilité est reliée à la possibilité de transférer certain système d' un état particulier vers un état désiré en utilisant un signal de contôle approprié. L'observabilité est quand à elle reliée à la possibilité d'observer à travers des mesures de l'état d'un système, c-à-d, de permetre de construire l'état initial à partir de ces mésures.
En particulier, ce mémoire se concentrera sur ce que l'on appelle *les systèmes de contrôle dépendants des paramètres*. Un système de contrôle dépendant de paramètres est un système dont la dynamique est régie par des opérateurs dépendant de paramètres. Chaque valeur de paramètre unique correspond à une réalisation spécifique du système. En raison des incertitudes et de la complexité inhérentes, il est difficile de modéliser parfaitement les processus physiques ; il devient donc naturel de les modéliser en fonction du paramètre coefficients. En particulier, les équations dont les paramètres sont aléatoires peuvent être utilisées pour modéliser de nombreux processus physiques incertains.
La *contrôlabilité moyenne* est nouvelle notion de la théorie des systèmes qui a été introduite par E.Zuazua [5] pour contrôler certains systèmes qui depend d'un paramètre $\sigma \in (0,1)$. L'idéé c'est, au lieu de contrôler l'état lui-même, on control le moyen de l'état par rapport à ce paramétre, où on cherche de construire un contrôl indépendant à ce paramètre. Notons que cette notion est plus faible que la notion classique [9].
Ce memoire est composé en trois chapitres :
Dans le première chapitre nous étudions la contrôlabilité et l'observabilité moyennes des systèmes localisés dependant d'un paramétre inconnu c.à.d les systèmes qui sont modélisées par des équations differentielles ordinaire (EDO). Nous donnons quelques (définitions, théorèmes, corollaires, exemples...) de la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne. Le résultat principal donnée dans ce chapitre est la condition de controlabilité moyenne de Kalman.
Dans le deuxième chapitre nous étudions la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne des systèmes distribués dependant d'un paramètre inconnu $\sigma \in (0,1)$ en dimension infini c.a.d les systèmes qui sont modélisées par des équations differentielles paretielle (EDP), Nous donnons des différentes notions de contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne (exacte, approché (faible), nulle) avec ces caractérisations.

Dans le troisième chapitre on étudie la notion de contrôl optimal moyen, nous donnons la caractérisation de contrôl optimal moyen par un système d'optimalité, alors pour résoudre les problèmes d'optimisation on utilise la fonction de cout pour miniminser les cas (linéaire , nonlinéaire .... etc).
Contrôl optimal moyen est introduit par E.Zuazua dans [5] on traite le problème de contrôl moyen pour un modèle elliptique dépandant d'un paramètre inconnu.
On général le théorème classique de contrôl optimal prend en considération l'état lui-même le problème de ce chapitre est l'état dépend d'un paramètre $\sigma \in (0,1)$ et on essayer de contrôle ce paramètre.

Chapitre 1

Contrôlabilité moyenne en dimension finie

1.1 Contrôlabilité moyenne

Dans ce chapitre nous étudierons la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne des systèmes localisés c-à-d les systèmes gouvernés par des équations differentielle ordinaire (EDO), cette systèmes dependant d'un paramètre inconnu $\sigma \in (0,1)$, dans ce cas l'espace d'état est de dimension fini.
Considérons le système linéaire qui s'écrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t) + B(\sigma)v(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Où, σ est un paramètre inconnu dans l'intervalle $(0,1)$.
$A(\sigma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continu par rapport à σ.
$B(\sigma) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'opérateur de contrôl v dépenedant continûment à σ.
$Y = \mathbb{R}^n$ est l'espace d'état, $U = \mathbb{R}^p$ est l'espace de contrôl.
$v(t) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^p)$ est le contrôl de ce système indépendant de σ.
$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial indépendant de σ.
D'après la méthode de variation des constantes on a :

$$y(t,\sigma) = e^{A(\sigma)t}y_0 + \int_0^t e^{A(\sigma)(t-s)}B(\sigma)v(s)ds. \tag{1.2}$$

Définition 1.1 *Nous dirons que le système* (1.1) *est moyennement contrôlable si pour tout deux états* $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$*et* $T > 0$, *il existe un contrôl* $v \in L^1(0,T;\mathbb{R}^p)$ *qui ramène le système* (1.1) *de* y_0 *vers* y_d *c-à-d :*

$$\int_0^1 y(T,\sigma)d\sigma = y_d. \tag{1.3}$$

En d'autres termes et d'après (1.3), *on a :*

$$\int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 d\sigma + \int_0^1 \int_0^T e^{A(\sigma)(T-t)} B(\sigma) v(t) dt d\sigma = y_d.$$

On appel $\mathcal{C}$ l'espace de contrôlabilité moyenne (ou espace atteignable), l'ensemble des éléments qui peuvent être atteignable moyennement depuis l'état y_0 c-à-d :

$$\mathcal{C} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : v \in L^1(0,T;\mathbb{R}^p) \text{ réalisant } \int_0^1 y(T,\sigma) d\sigma = y_d \right\}.$$

Lemme 1.1 *L'ensembele $\mathcal{C}$ des états atteints est un sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. *On suppose que $y_0 = 0$, notons y_1 et y_2 les états associés à v_1 et v_2 respectivement. Soit*

$$v_1 \in L^1(0,T_1;\mathbb{R}^p), v_2 \in L^1(0,T_2;\mathbb{R}^p) : \int_0^1 y_1(T_1,\sigma) d\sigma = y_d, \int_0^1 y_2(T_2,\sigma) d\sigma = y_d.$$

On va démontrer que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_0^1 y\left(T,\sigma\right) d\sigma = \alpha \int_0^1 y_1(T_1,\sigma) d\sigma + \beta \int_0^1 y_2(T_2,\sigma) d\sigma \in \mathcal{C},$$

soit

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq T_2 - T_1 \\ v_1(t - T_2 + T_1), & T_2 - T_1 \leq t \leq T_2 \end{cases}.$$

maintenant

$$\int_0^1 y(T,\sigma) d\sigma = \alpha \int_0^1 y_1(T_1,\sigma) d\sigma + \beta \int_0^1 y_2(T_2,\sigma) d\sigma$$

est atteignable par $v = \alpha \overline{v} + \beta v_2$ à l'instant T_2

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(T_2,\sigma) d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma)(\alpha \overline{v} + \beta v_2) dt d\sigma, \\
&= \alpha \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) \overline{v}(t) dt d\sigma + \beta \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_2(t) dt d\sigma, \\
&= \alpha \int_0^1 \int_{T_2-T_1}^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_1(t - T_2 + T_1) dt d\sigma + \beta \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_2(t) dt d\sigma, \\
&= \alpha \int_0^1 \int_{T_2-T_1}^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_1(t - T_2 + T_1) dt d\sigma + \beta \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_2(t) dt d\sigma.
\end{aligned}$$

On pose $s = t - T_2 + T_1$ donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(T_2,\sigma) d\sigma &= \alpha \int_0^1 \int_0^{T_1} e^{(T_1-s)A(\sigma)} B(\sigma) v_1(s) ds d\sigma + \beta \int_0^1 \int_0^{T_2} e^{(T_2-t)A(\sigma)} B(\sigma) v_2(t) dt d\sigma, \\
&= \alpha \int_0^1 y_1(T_1,\sigma) d\sigma + \beta \int_0^1 y_2(T_2,\sigma) d\sigma \in \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$. ■

1.2 Condition de contrôlabilité moyenne de Kalman

Ici nous donnons les conditions de contrôlabilité moyennes, cette condition est basé sur le rang d'une matrice par bloc formé de $A(\sigma)$ et $B(\sigma)$ comme suite :

Théorème 1.1 (Condition de Kalman) *Le système linéaire* (1.1) *est contrôlable moyenne si seulement si*

$$\text{rang}\left[\int_0^1 B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 A(\sigma)B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 [A(\sigma)]^2 B(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [A(\sigma)]^{n-1} B(\sigma)d\sigma\right] = n. \qquad (1.4)$$

La matrice

$$K = \left[\int_0^1 B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 A(\sigma)B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 [A(\sigma)]^2 B(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [A(\sigma)]^{n-1} B(\sigma)d\sigma\right]$$

est appelée *matrice de contrôlabilité moyenne de Kalman*.

Preuve. D'après le théorème de Cayley- Hamilton (voir Annex, théorème 3.8), pour tout $k \geq n, [A(\sigma)]^k$ on peut écrit $I, A(\sigma), ..., A^{n-1}(\sigma)$ comme une combinaison linéaire. Soit F l'espace engendré par les colonnes de K. D'aprés le définition de la matrice exponentielle et le fait que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, nous conclusons que l'image de $e^{-sA(\sigma)}B(\sigma)$ doit être inclu dans F pour tout s, autrement dit :

$$e^{-sA(\sigma)}B(\sigma) = \left[a_0(s)I + a_1(s)A(\sigma) + a_2(s)A^2(\sigma) + ... + a_{n-1}(s)A^{n-1}(\sigma)\right]B(\sigma).$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \int_0^T e^{A(\sigma)(T-t)}B(\sigma)v(t)dtd\sigma \\ =& \int_0^1 \int_0^T \left[a_0(t)I + a_1(t)A(\sigma) + a_2(t)A^2(\sigma) + ... + a_{n-1}(t)A^{n-1}(\sigma)\right]B(\sigma)v(t)dtd\sigma.\end{aligned}$$

D'après théorème de Fubini (voir annex, théorème 3.12) :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \int_0^T e^{A(\sigma)(T-t)}B(\sigma)v(t)dtd\sigma \\ =& \int_0^1 \int_0^T \left[a_0(t)I + a_1(t)A(\sigma) + a_2(t)A^2(\sigma) + ... + a_{n-1}(t)A^{n-1}(\sigma)\right]B(\sigma)v(t)dtd\sigma, \\ =& \left[\int_0^1 B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 A(\sigma)B(\sigma)d\sigma \ \int_0^1 [A(\sigma)]^2 B(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [A(\sigma)]^{n-1} B(\sigma)d\sigma\right] \begin{bmatrix} \int_0^T a_0(t)v(t)dt \\ \int_0^T a_1(t)v(t)dt \\ \int_0^T a_2(t)v(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T a_{n-1}(t)v(t)dt \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 \int_0^T e^{A(\sigma)(T-t)} B(\sigma) v(t) dt d\sigma \in F.$$

Prenons $y_0 = 0$ dans (1.2),alors l'état qui sont atteints à l'origine dans un temps finie par des contrôls v soit tout dans F.

Donc, si la condition (1.3) n'est pas vérifié, alors le système (1.1) n'est pas moyennement contrôlable.

Il existe des états qui ne sont pas atteints de y_0 pour l'application inverse.

Supposons que (1.3) est vérifie ; considérons la matrice suivante :

$$G = \int_0^T \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)} B(\sigma) d\sigma\right) \left(\int_0^1 B^\top(\sigma) e^{(T-t)A^\top(\sigma)} y d\sigma\right) dt$$

qui s'appelle le Gramien de contrôlabilité moyenne ; il est régulier (Voir Proposition 1.1).

Maintenant prennons deux points $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$ et introduisons un contrôl comme suite :

$$v(t) = \int_0^1 B^\top(\sigma) e^{(T-t)A^\top(\sigma)} y d\sigma, t \in [0, T].$$

Il faut choisi y, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(T,\sigma) d\sigma &= \int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 d\sigma + \int_0^1 \int_0^T e^{A(\sigma)(T-t)} B(\sigma) v(t) dt d\sigma, \\
&= \int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 + \int_0^T \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)} B(\sigma) d\sigma\right) v(t) dt, \\
&= \int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 + \int_0^T \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)} B(\sigma) d\sigma\right) \left(\int_0^1 B^\top(\sigma) e^{(T-t)A^\top(\sigma)} y d\sigma\right) dt, \\
&= \int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 d\sigma + G(t,\sigma) y = y_d,
\end{aligned}$$

$$y = G^{-1}(t,\sigma)(y_d - \int_0^1 e^{A(\sigma)T} y_0 d\sigma).$$

Donc quelque soit le point de déparet y_0 on peut trouver un contrôl v,qui ramène y_0 à y_d en temps T. ∎

Remarque 1.1 *Si* $A(\sigma) = \alpha(\sigma) A$ *et* $B(\sigma) = \beta(\sigma) B$*, où* α *et* β *sont des fonctions intégrables, donc* *la matrice de kalman s'écrit sous la forme :*

$$\begin{aligned} K &= \left[\int_0^1 B(\sigma)d\sigma \int_0^1 A(\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 [A(\sigma)]^2 B(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [A(\sigma)]^{n-1} B(\sigma)d\sigma\right], \\ &= \left[\int_0^1 \beta(\sigma)Bd\sigma \int_0^1 \alpha(\sigma)\beta(\sigma)ABd\sigma \int_0^1 [\alpha(\sigma)]^2 \beta(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [\alpha(\sigma)]^{n-1} \beta(\sigma)d\sigma A^{n-1}B\right], \\ &= \left[B\ AB\ A^2B...A^{n-1}B\right] \begin{bmatrix} \int_0^1 \beta(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 \alpha(\sigma)\beta(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 [\alpha(\sigma)]^2 \beta(\sigma)d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 [\alpha(\sigma)]^{n-1} \beta(\sigma)d\sigma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alors la contrôlabilité moyenne est équivalente à la contrôlabilité classique, tel que :

$$\int_0^1 [\alpha(\sigma)]^k \beta(\sigma)d\sigma \neq 0, k = 1, ..., n-1.$$

Corollaire 1.1 *Pour $p = 1$, le système (1.1) est moyennement contrôlable si la matrice carrée*

$$K = \left[\int_0^1 B(\sigma)d\sigma \int_0^1 A(\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 [A(\sigma)]^2 B(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 [A(\sigma)]^{n-1} B(\sigma)d\sigma\right]$$

d'ordre n est régulière c-à-d :

$$\det K \neq 0.$$

Proposition 1.1 *Si le système (1.1) est moyennement contrôlable, alors la matrice suivante :*

$$G = \int_0^T \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)d\sigma\right)\left(\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right)dt \tag{1.5}$$

est définie positive, de plus il existe un contrôl moyen v qui transfére l'état y_0 à l'origine, ce contrôl moyen est donné par :

$$v(t) = -\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{-tA^\top(\sigma)}G^{-1}y_0 d\sigma.$$

Preuve. Montrons que G est définie positive

$$\begin{aligned}
\langle y, Gy\rangle &= \left\langle y, \int_0^T \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)d\sigma\right)\left(\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right)dt\right\rangle,\\
&= \int_0^T \left\langle y, \left(\int_0^1 e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)d\sigma\right)\left(\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right)\right\rangle dt,\\
&= \int_0^1\int_0^T \left\langle y, e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)\left(\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right)\right\rangle dtd\sigma,\\
&= \int_0^1\int_0^T \left\langle B(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}y, B(\sigma)\left(\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right)\right\rangle dtd\sigma,\\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma, \int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right\rangle dt,\\
&= \int_0^T \left\|\int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right\|^2 dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Si :

$$\langle y, Gy\rangle = \int_0^T \left\|\int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma\right\|^2 dt = 0.$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma = 0,$$

Et donc pour tout v, on a :

$$\int_0^T \left\langle \int_0^1 B^\top(\sigma)\, e^{(T-t)A^\top(\sigma)}yd\sigma, v(t)\right\rangle dt = 0.$$

Finalement

$$\left\langle y, \int_0^1\int_0^T e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)v(t)\, d\sigma dt\right\rangle = 0.$$

Donc

$$y = 0 \text{ car } \int_0^1\int_0^T e^{(T-t)A(\sigma)}B(\sigma)v(t)dtd\sigma \in \mathcal{C},$$

comme

$$\dim \mathcal{C} = n \iff \mathcal{C}^\perp = \{0\},$$

alors

$$v(t) = -\int_0^1 B^\top(\sigma)e^{(T-t)A^\top(\sigma)}G^{-1}y_0 d\sigma.$$

■

Remarque 1.2 *La notion de la contôlabilité moyenne est plus faible que la notion de la contrôlabilité classique.*

Exemple 1.1 *Considérons le système :*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

$$V = \mathbb{R}^2, n = 2; K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \implies \operatorname{rang} K = 2.$$

Donc ce système est moyennement contôlable.

Exemple 1.2 *Considérons le système :*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v(t)$$

$$V = \mathbb{R}^2, n = 2; K = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \operatorname{rang} K = 1 < 2.$$

Donc le système n'est pas moyennement contrôlable.

1.3 Observabilité moyenne des systèmes localisé dépendant d'un paramétre inconnu

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t) + B(\sigma)v(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1), \\ z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Où $A(\sigma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B(\sigma) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), v(t) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $C(\sigma) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Définition 1.2 *Le système* (1.6) *est dite moyennement observable si*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : y_1 \neq y_2 \implies \exists v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p) : z_v(., y_1) \neq z_v(., y_2).$$

On dit que y_1, y_2 sont distinguables. Autrement dit, y_1, y_2 sont distinguables s'il existe un contrôl v telque les trajectoires obsérvés sont différents. De manière équivalente

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : \exists v \in L^2(0, T, \mathbb{R}^p) : z_v(., y_1) = z_v(., y_2) \implies y_1 = y_2;$$

c-à-d que la connaissance de la trajectoire observé déterminer d'une manière unique l'état initiale. Cette définition revient évidemment à l'injectivité de l'application :

$$y_0 \to z = \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_0 d\sigma,$$

dans ce cas on a $v = 0$.

Le concept de l'observabilité consiste à savoir s'il est possible de reconstruire l'état initiale à partir de la connaissance de la dynamique du système et d'une fonction de sortie (fournissant des mesures de l'état du système).
L'intérêt de la notion d'observabilité est le suivant : si on considère le système comme une boîte noire à laquelle on applique une entrée (contrôl, input) $v(t)$, et laquelle donne une sortie (observabilité, output) $z(t)$, la propriété d'être distinguable singnifie la possibilité de différencier par des expériences de type entrées-sorties.

Lemme 1.2 *Le système* (1.6) *est moyennement observable si seulement si le système suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1), \\ z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

vérifie la propriété :

$$y_0 \neq 0 \implies z \neq 0 \text{ sur } \left]0, T\right[.$$

Preuve. Le système (1.6) est moyennement observable si seulement si :

$$\begin{aligned} (\forall y_1, y_2 \quad &\in \quad \mathbb{R}^n : y_1 \neq y_2 \iff \exists v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^p) : z_v(.,y_1) \neq z_v(.,y_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : y_1 \neq y_2 \implies \begin{pmatrix} \exists v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^p) : \\ \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_1 d\sigma + \int_0^1\int_0^T C(\sigma)e^{A(\sigma)(T-t)}B(\sigma)v(t)dtd\sigma \\ \neq \\ \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_2 d\sigma + \int_0^1\int_0^T C(\sigma)e^{A(\sigma)(T-t)}B(\sigma)v(t)dtd\sigma \end{pmatrix} \\ &\iff \quad (\forall y_0 = y_1 - y_2 : y_0 \neq 0 \implies \exists t \in [0,T] : \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_0 d\sigma \neq 0) \\ &\iff \quad (\forall y_0 \in \mathbb{R}^n : y_0 \neq 0 \implies z(t) \neq 0 \text{ sur } \left]0, T\right[\text{ où } z \text{ est la solution de } (1.7)). \end{aligned}$$

■

Théorème 1.2 *Le système* (1.7) *est moyennement observable si seulement si :*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \int_0^1 C(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} d\sigma \end{bmatrix} = n.$$

Preuve. Si le système (1.6) n'est pas moyennement observable en temps T alors :

$$\exists y_0 \neq 0, \forall t \in [0,T] : z(t) = 0,$$

c-à-d

$$z(t) = \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_0 d\sigma = 0.$$

D'où par dérivations successives.

En posont : $t = 0$

$$\int_0^1 C(\sigma)y_0 d\sigma = \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)y_0 d\sigma = \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 y_0 d\sigma = ... = \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} y_0 d\sigma = 0,$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 C(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} d\sigma \end{bmatrix} y_0 = 0 \implies \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \int_0^1 C(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} d\sigma \end{bmatrix} < n,$$

Réciproquement si

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \int_0^1 C(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} d\sigma \end{bmatrix} < n,$$

alors,

$$\exists y_0 \neq 0 : \int_0^1 C(\sigma)y_0 d\sigma = \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)y_0 d\sigma = \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 y_0 d\sigma = ... = \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} y_0 d\sigma = 0.$$

Et d'après le théorème de Cayley-Hamiltan

$$\forall t \in [0,T] : \int_0^1 C(\sigma)e^{A(\sigma)t}y_0 d\sigma = 0,$$

et (1.6) n'est pas moyennement observable. ■

Remarque 1.3 *On a*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \int_0^1 C(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)A(\sigma)d\sigma \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^1 C(\sigma)\left[A(\sigma)\right]^{n-1} d\sigma \end{bmatrix} = n$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rang}\left[\int_0^1 C^\top(\sigma)d\sigma, \int_0^1 A^\top(\sigma)C^\top(\sigma)d\sigma, \int_0^1 \left[A^\top(\sigma)\right]^2 C^\top(\sigma)d\sigma ... \int_0^1 \left[A^\top(\sigma)\right]^{n-1} C^\top(\sigma)d\sigma\right] = n.$$

et par conséquent, le système

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1), \\ z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est moyennement observable si seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A^T(\sigma)y(t) + C^T(\sigma)v(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1); \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est moyennement contrôlable.

Exemple 1.3 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 2\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t), \\ V &= \mathbb{R}^2, n = 2, \; z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma, \\ z(t) &= 2y_1 + 2y_2 = (2\ 2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, C = (2\ 2) \\ K &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang} K = 2. \end{aligned}$$

Donc le système est moyennement observable.

Exemple 1.4 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\
V &= \mathbb{R}^2, n = 2, z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma, \\
z(t) &= y_1 + y_2 = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, C = (1\; 1) \\
K &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang} K < 1.
\end{aligned}$$

Donc le système n'est pas moyennement observable.

Chapitre 2

Contrôlabilité moyenne en dimension infini

2.1 Contrôlabilité moyenne

Dans ce chapitre nous étudierons la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne des systèmes distribués c-à-d. les systèmes gouvernés par des équations differentielle partielle (EDP), Ces systèmes contient un paramètre inconnu $\sigma \in (0,1)$, dans ce cas l'espace d'état est de dimension infini c'est la différence principal avec les systémes localisés.
Considérons le système s'écrit par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t) + B(\sigma)v(t), t \in \left]0, T\right[, \sigma \in (0,1); \\ y(0) = y_0 \in D(A(\sigma)) \subset Y; \end{cases} \tag{2.1}$$

Y est l'espace d'état est un espace de Hilbert, il est séparable de dimension infini.
U est l'espace de contrôl qui est un Hilbert séparable.
$A(\sigma)$ est opérateur en général non borné et dépend à le paramètre σ, alors $A(\sigma)$ est engendre un C_0-semi-groupe $\{S(t,\sigma)\}_{t\geq 0}$sur l'espace d'état Y.
$B(\sigma)$ est l'opérateur de contrôl de $\mathcal{L}(U,Y)$, dépend à le paramètre σ.
$v(t)$ le conrôl de système indépendent à le paramètre σ.
$y(0) = y_0$ le condition initial independant à σ.
$y(t,\sigma)$ est l'état, dépendant du paramètre σ.
D'après la méthode de variation des constantes, on peut s'écrire $y\left(t,\sigma\right)$ sous la forme suivante :

$$y\left(t,\sigma\right) = S\left(t,\sigma\right)y_0 + \int_0^t S\left(t-s,\sigma\right)B\left(\sigma\right)v\left(s\right)ds\,;\sigma \in \left[0,1\right], t \geq 0. \tag{2.2}$$

2.2 Différentes notions de contrôlabilité moyenne

Dans la suite nous présentons quelsque définitions sur la contrôlabilité moyenne.

Définition 2.1 *Le système* (2.1) *où la paire* $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est dite exactement moyennement contrôlable dans* Y*, si pour tout* $y_0 \in Y$*, et pour tout état désiré* y_d*; il existe un contrôl* $v \in L^2(0, T; U)$ *telque*

$$\int_0^1 y(T, \sigma) \, d\sigma = y_d. \tag{2.3}$$

Définition 2.2 *Le système* (2.1) *où la paire* $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est dit approximativement (faiblement) moyennement contrôlable dans* Y *sur* $[0, T]$*, si pour tout* $\varepsilon > 0, y_0 \in Y$*,et pour tout état désiré* y_d*, il existe un contrôl* $v \in L^2(0, T; U)$ *telque*

$$\left\| \int_0^1 y(T, \sigma) \, d\sigma - y_d \right\|_Y < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Définition 2.3 *Le système* (2.1) *où la paire* $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est dit nulle moyennement contrôlable si pour tout* $y_0 \in Y$*,et pour tout état désiré* y_d*; il existe un contrôle* $v \in L^2(0, T; U)$ *telque*

$$\int_0^1 y(T, \sigma) \, d\sigma = 0. \tag{2.5}$$

2.3 Caractérisations

Nous avons que :

$$y(T, \sigma) = S(T, \sigma) y_0 + \int_0^T S(T - t, \sigma) B(\sigma) v(t) \, dt.$$

On introduit l'opérateur :

$$\begin{cases} L_T : L^2(0, T; U) \longrightarrow Y \\ v \longrightarrow \int_0^1 \int_0^T S(T - t, \sigma) B(\sigma) v(t) \, dt d\sigma \end{cases} \tag{2.6}$$

On remarque que L_T peut être défini comme suite :

$$L_T v = \int_0^1 y(T, \sigma, 0) d\sigma.$$

C-à-d la solution du système à l'instant T, on a les caractérisations suivantes :

Proposition 2.1 *Considérons le système* (2.1) *alors :*
i) $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est exactement moyennement contrôlable si seulement si* L_T *est surjectif c-à-d.* $\operatorname{Im} L_T = Y$.
ii) $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable si seulement si l'image de* L_T *est dense c-à-d* $\overline{\operatorname{Im} L_T} = Y$.

Preuve. i) $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est exactement moyennement contrôlable*

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in Y, \exists v \in L^2(0,T;U): \\ y_d \quad &= \quad \int_0^1 y(T,\sigma)\,d\sigma = \int_0^1 S(T,\sigma)\,y_0 d\sigma + \int_0^1 \int_0^T S(T-t,\sigma)\,B(\sigma)\,v(t)\,dtd\sigma. \end{aligned}$$

Sans parte de généralité, prennons $y_0 = 0$,

$$\begin{aligned} y_d \quad &= \quad \int_0^1 y(T,\sigma)\,d\sigma = \int_0^1 \int_0^T S(T-t,\sigma)\,B(\sigma)\,v(t)\,dtd\sigma = L_T v \\ &\Longleftrightarrow \quad L_T \text{ est surjectif.} \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} L_T = Y. \end{aligned}$$

ii) $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est approximativement moyennement contrôlable*

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \forall y_0, y_d \in Y, \exists v \in L^2(0,T;U): \left\| \int_0^1 y(T,\sigma)\,d\sigma - y_d \right\|_Y < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall y_d \in Y, \exists v \in L^2(0,T;U): \left\| L_T v - (\int_0^1 S(T,\sigma)\,y_0 d\sigma + y_d) \right\|_Y < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} L_T \text{ est dense dans} Y. \end{aligned}$$

Proposition 2.2 *Le système* (2.1) *est exactement moyennement contrôlable dans un temps* T *si seulement si*

$$\exists \gamma > 0, \forall y \in Y: \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T-t,\sigma)\,y d\sigma \right\|_U^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2. \tag{2.7}$$

Cette dernière inégalité est appelée "inegalité d'observabilité moyenne ".

Preuve. *D'après la proposition* (2.1) *la contrôlabilité moyenne exacte équivalente à* $\operatorname{Im} L_T = Y$.
$L_T^* : Y \longrightarrow L^2(0,T;U)$ *est continûement inversible c-à-d :*

$$\exists \gamma > 0, \forall y \in Y: \int_0^T \|L_T^* y\|_U^2 \,dt > \gamma \|y\|_Y^2.$$

Et d'après théorème 3.9 dans l'annex , alors il reste déterminer L_T^* :

$$\begin{aligned} \langle L_T v, y \rangle_Y &= \left\langle \int_0^1 \int_0^T S(T-t,\sigma)\,B(\sigma)\,v(t)\,dtd\sigma, y \right\rangle_Y, \\ &= \int_0^1 \left\langle \int_0^T S(T-t,\sigma)\,B(\sigma)\,v(t)\,dt, y \right\rangle_Y d\sigma, \\ &= \int_0^1 \int_0^T \langle S(T-t,\sigma)\,B(\sigma)\,v(t), y \rangle_Y \,dtd\sigma, \\ &= \int_0^1 \int_0^T \langle v(t), B^*(\sigma)\,S^*(T-t,\sigma)\,y \rangle_U \,dtd\sigma, \\ &= \int_0^T \left\langle v(t), \int_0^1 B^*(\sigma)\,S^*(T-t,\sigma)\,y d\sigma \right\rangle_U dt, \\ &= \left\langle v(t), \int_0^1 B^*(\sigma)\,S^*(T-t,\sigma)\,y d\sigma \right\rangle_{L^2(0,T;U)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$L_T^* y = \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T-t,\sigma) y d\sigma.$$

■

■

Théorème 2.1 *La paire* $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est exactement moyennement contrôlable sur* $[0,T]$ *si seulement si* $\ker L_T^* = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im} L_T^*$ *est fermé.*

Preuve. *D'aprés théorème 3.9 dans l'annex et d'après la proposition* (2.1) *la contrôlabilité moyenne exacte équivalente à* $\operatorname{Im} L_T = Y$.

Donc, la paire $(A(\sigma), B(\sigma))$ *est exactement moyennement contrôlable sur* $[0,T]$ *si seulement si* $\ker L_T^* = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im} L_T^*$ *est férmè.*

Théorème 2.2 *Considérons le système* (2.1), *puis on définit le Gramien de contrôlabilité moyenne par :*

$$Q_T = L_T L_T^*. \tag{2.8}$$

Nous avons les conditions suivantes pour la contrôlabilité moyenne exacte et approchée (faible) :

$a)$ (2.1) *est exactement moyennement contrôlable si seulement si une des conditions suivantes est vérifié :*

i) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y, \langle Q_T y, y\rangle_Y \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

ii) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y, \|L_T^* y\|_{L^2(0,T,U)}^2 = \int_0^T \|L_T^* y\|_U^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

iii) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T-t,\sigma) y d\sigma \right\|_U^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

iv) $\ker L_T^* = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im} L_T^*$ *est fermè.*

$b)$ (2.1) *est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable si seulement si une des conditions suivantes est verifié :*

i) Q_T *est un opérateur positif.*

ii) $\ker L_T^* = \{0\}$.

iii) $\int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T-t,\sigma) y d\sigma = 0$ *sur* $[0,T] \implies y = 0$.

■

Preuve. *L'équivalence de* i) *et* iii) *suit de proposition* (2.2) *et théorème* (2.1), *comme* $Q_T = L_T L_T^*$ *on a :*

$$\langle Q_T y, y\rangle_Y = \|L_T^* y\|_{L^2(0,T;U)}^2. \tag{2.9}$$

Ce qui donne l'équivalence entre i) *et* ii).

Il rest l'équivalence avec iv).

Remarquons que ii) *implique que* L_T^* *est injectif, pour prouver que* $(L_T^* y_n)$ *est une suite de Cauchy dans* $L^2(0,T;U)$.
Alors d'après ii), (y_n) *est une suite de Cauchy dans* Y *(complet) qui converge vers* y*, et comme* L_T^* *est borné* $L_T^* y_n \longrightarrow L_T^* y$ *et donc* $\operatorname{Im} L_T^*$ *est férmè.*
Inversment
iv) *implique que* L_T^* *un inverse algébrique de domaine* $\operatorname{Im} L_T^*$ *et comme* $\operatorname{Im} L_T^*$ *est férmèe, elle est un espace de Hilbert pour la norme de* $L^2(0,T;U)$

$$\|u\|_{\operatorname{Im} L_T^*} = \|u\|_{L^2(0,T;U)}\,, u \in \operatorname{Im} L_T^*,$$

alors d'aprés théorème 3.9 dans l'annex, $(L_T^*)^{-1}$ *est borné sur cette image c-à-d :*

$$\exists \gamma > 0, \forall u \in \operatorname{Im} L_T^* : \left\|(L_T^*)^{-1} u\right\|_Y^2 \leq \gamma \|u\|_{L^2(0,T;U)}^2$$

prenons $u = L_T^* y$ *pour avoir ii).*
Prouvons maintenant que i) *implique la contrôlabilité moyenne exacte de* (2.1).
Supposons que i) *est vérifié, c'est claire que* Q_T *est injectif donc il possède un inverse algébrique sur* $\operatorname{Im} Q_T$ *et nous n'oublions pas que* Q_T *est borné donc,*

$$\begin{aligned}
\exists \alpha \quad &> \quad 0, \forall y \in \operatorname{Im} Q_T : \left\|Q_T^{-1} y\right\|_Y^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left\langle Q_T Q_T^{-1} y, Q_T^{-1} y\right\rangle_Y \leq \frac{1}{\alpha} \|y\| \left\|Q_T^{-1} y\right\|, \\
&\Longrightarrow \quad \exists \alpha > 0, \forall y \in \operatorname{Im} Q_T : \left\|Q_T^{-1} y\right\|_Y^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|_Y\,, \\
&\Longrightarrow \quad Q_T^{-1} \text{ est borné sur } \operatorname{Im} Q_T \text{ et } \overline{\operatorname{Im} Q_T} = \{\ker Q_T\}^{\perp} = \{0\}^{\perp} = Y.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im} Q_T = D(Q_T^{-1})$ *est dense, alors* $D(Q_T^{-1}) = Y$ *(puisque* Q_T^{-1}*est borné) on utilisons* (2.8) *pour avoir que*

$$\operatorname{Im} Q_T \subset \operatorname{Im} L_T \implies \operatorname{Im} L_T = Y,$$

ce qui implique la contrôlabilité moyenne exacte de (2.1).
Pour l'inverse voir la Proposition (2.2).
b) *D'après la Proposition* (2.2) *on a* ii) *équivaut à* iii) *et* (2.9) *donne l'équivalence de* i) *et* ii).
Finalement, comme

$$\{\ker L_T^*\}^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} L_T},$$

On a l'équivalence de ii) *avec la contrôlabilité moyenne approchée (faible) de* (2.1). ■

Maintenant, nous donnons une caractérisation de la contrôlabilité moyenne nulle.

Proposition 2.3 (Contrôlabilité moyenne nulle) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) *La paire* $(A(\sigma), B(\sigma))$*est moyennement nulle contrôlable.*
ii)
$$\exists\gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t,\sigma) y d\sigma \right\|_U^2 dt \geq \gamma \left\| \int_0^1 S^*(T,\sigma) y d\sigma \right\|_Y^2 . \tag{2.10}$$
iii)
$$\operatorname{Im} \int_0^1 S(T,\sigma) d\sigma \subset \operatorname{Im} L_T. \tag{2.11}$$

Preuve. i) $\implies$ iii)
Supposons que $(A(\sigma), B(\sigma))$ est nulle moyennement contrôlable alors

$$\forall y_0 \in Y, \exists v \in L^2(0,T;U) : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_0 d\sigma + L_T v = 0.$$

Soit $z \in \operatorname{Im} \int_0^1 S(T,\sigma) d\sigma$, alors

$$\exists y_1 \in Y : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_1 d\sigma = z.$$

Donc

$$\begin{aligned} \exists v_1 &\in L^2(0,T;U) : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_1 d\sigma + L_T v_1 = 0, \\ &\implies \exists v_2 = -v_1 \in L^2(0,T;U) : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_1 d\sigma = L_T v_2, \\ \forall z &\in \operatorname{Im} \int_0^1 S(T,\sigma) d\sigma, \exists v \in L^2(0,T;U) : z = L_T v. \end{aligned}$$

et $z \in \operatorname{Im} L_T$ donc

$$\operatorname{Im} \int_0^1 S(T,\sigma) d\sigma \subset \operatorname{Im} L_T.$$

iii) $\implies$ i)
Supposons que (2.11) est vérifié, soit

$$\begin{aligned} \text{soit } y_0 &\in Y, \exists v \in L^2(0,T;U) : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_0 d\sigma = L_T v, \\ &\implies \exists v \in L^2(0,T;U) : \int_0^1 S\left(T,\sigma\right) y_0 d\sigma + L_T v = 0, \end{aligned}$$

alors $(A(\sigma), B(\sigma))$ est nulle moyennement contrôlable.
Pour l'équivalence entre ii) et iii), nous appliquons la proposition 3.1 (voir Annex)

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 S(T,\sigma) d\sigma, \\ G &= L_T. \end{aligned}$$

Pour avoir que iii) est équivalente à

$$\exists \frac{1}{\gamma} \quad > \quad 0 : \left\| \int_0^1 S^* \left(T, \sigma \right) y d\sigma \right\|_Y^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left\| L_T^* y \right\|_{L_T}^2 ,$$
$$\iff \quad \exists \gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 B(\sigma) S^* \left(T, \sigma \right) y d\sigma \right\|_U^2 dt \geq \gamma \left\| \int_0^1 S^* \left(T, \sigma \right) y d\sigma \right\|_Y^2 .$$

Corollaire 2.1 *Si la paire $(A(\sigma), B(\sigma))$ est exactement, approximativement ou nulle contrôlable moyenne alors la paire $(A(\sigma) - \lambda I, B(\sigma))$ est exactement, approximativement ou nulle contrôlable moyenne, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

■

Preuve. Premièrement : Supposons que $(A(\sigma), B(\sigma))$ est exactement moyennement contrôlable, d'après (2.7) on a :

$$\exists \gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^* \left(T - t, \sigma \right) y d\sigma \right\|_U^2 dt > \gamma \left\| y \right\|_Y^2 .$$

L'opérateur $A(\sigma) - \lambda I$ engendre un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t>0}$ avec

$$T(t, \sigma) = e^{-\lambda t} S(t, \sigma) y, \forall y \in Y, \ \forall t \in [0, T] .$$

On a

$*$ Pour $\lambda > 0, e^{-\lambda t} \geq 1$:

$$t \in [0, T] : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) T^* \left(t, \sigma \right) y d\sigma \right\|_U^2 dt = \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^* \left(t, \sigma \right) e^{-\lambda t} y d\sigma \right\|_U^2 dt > \gamma \left\| y \right\|_Y^2 .$$

$*$ Pour $\lambda > 0, e^{-\lambda t} > e^{-\lambda T}$:

$$t \in [0, T] : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) T^* \left(t, \sigma \right) y d\sigma \right\|_U^2 dt = \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^* \left(t, \sigma \right) e^{-\lambda t} y d\sigma \right\|_U^2 dt > \gamma e^{-\lambda T} \left\| y \right\|_Y^2 .$$

Deuxiément : Supposons que $(A(\sigma), B(\sigma))$ est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable, d'après le théorème (2.2)

$b)$ iii) on a

$$\forall y \in Y : \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T - t, \sigma) y d\sigma = 0 \text{ sur } (0, T) \implies y = 0.$$

Donc

$$\forall y \in Y : \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(T - t, \sigma) e^{-\lambda t} y d\sigma = 0 \implies e^{-\lambda t} y = 0 \text{ sur } (0, T) \implies y = 0.$$

Troixièment : Supposons que $(A(\sigma), B(\sigma))$ est nulle moyennement contrôlable moyenne, d'après (2.10) on a :

$$\forall \gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t,\sigma) y d\sigma \right\|_U^2 dt \geq \gamma \left\| \int_0^1 S^*(T,\sigma) y d\sigma \right\|_Y^2,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) T^*(t,\sigma) y d\sigma \right\|_U^2 dt &= \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t,\sigma) e^{-\lambda t} y d\sigma \right\|_U^2 dt, \\
&= \int_0^T e^{-2\lambda t} \left\| \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t,\sigma) y d\sigma \right\|_U^2 dt, \\
&\geq e^{-2\lambda t} \gamma \left\| \int_0^1 S^*(T,\sigma) y d\sigma \right\|_Y^2, \\
&\geq e^{-\lambda t} \gamma \left\| \int_0^1 T^*(T,\sigma) y d\sigma \right\|_Y^2.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4 *Le système* (2.1) *est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable si seulement si :*

$$\overline{\cup_{t \geq 0} \operatorname{Im}(\int_0^1 S(t,\sigma) B(\sigma) d\sigma)} = Y. \tag{2.12}$$

Preuve. Supposons que (2.1) est non approximativement (faiblement) moyennement contrôlable, alors $\cup_{t\geq 0} \operatorname{Im} L_T$ est non par tout dense dans Y, donc

$$\exists y \in Y : y \neq 0, \text{tq } y \in (\operatorname{Im} L_t)^\perp$$

ce qui est équivalente à

$$\langle L_t v, y \rangle_Y = 0, \forall v \in L^2(0,T;U).$$

Où

$$\begin{aligned}
\langle L_t v, y \rangle_Y &= \left\langle \int_0^t \int_0^1 S(t-s,\sigma) B(\sigma) v(s) d\sigma ds, y \right\rangle_Y \\
&= \int_0^t \left\langle v(s), \int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t-s,\sigma) y d\sigma \right\rangle_U ds \\
&= 0, \forall v \in L^2(0,T;U).
\end{aligned}$$

Et comme $\int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t-s,\sigma) y d\sigma$ est défini sur $[0,T]$ et appartient à U, en doit avoir

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t-s,\sigma) y d\sigma = 0, \\
&\forall s \in [0,t] \iff \left\langle \textstyle\int_0^1 B^*(\sigma) S^*(t-s,\sigma) y d\sigma, v(s) \right\rangle_U = 0, \forall v \in L^2(0,T;U), \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

C-à-d :

$$\left\langle y, \int_0^1 S(t-s,\sigma)B(\sigma)v(s)d\sigma \right\rangle_Y = 0, \forall y \in Y, \forall t \geq 0.$$

C-à-d :

$$Y \perp \mathrm{Im}(\int_0^1 S(t,\sigma)B(\sigma)d\sigma), \forall t \geq 0 \iff Y \perp \cup_{t\geq 0} \mathrm{Im}(\int_0^1 S(t,\sigma)B(\sigma)d\sigma), \forall t \geq 0.$$

Ce qui montre que Y est orthogonal à $\cup_{t\geq 0} \mathrm{Im}(\int_0^1 S(t,\sigma)B(\sigma)d\sigma)$ est non par tout dense dans Y.

■

2.4 Formule explicite de contrôle réalisant la contrôlabilité moyenne

Pour avoir une formule explicite de la fonction contrôle qui réalise la controlabilité moyenne de v, rappelons que le gramien de la contrôlabilité moyenne est défini par :

$$\begin{aligned} Q_T y &= L_T L_T^* y = \int_0^1 \left(\int_0^T S(T-t,\sigma)B(\sigma)dt \right) \left(\int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)yd\sigma \right) d\sigma, \quad (2.13) \\ &= \int_0^T \int_0^1 S(T-t,\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)yd\sigma dt \ , \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Et comme $\{S(t,\sigma)\}_{t\geq 0}$ et $B(\sigma)$ sont supposée continues $\forall \sigma \in (0,1)$, alors,

$$\exists c > 0 : \|Q_T y\|_Y^2 \leq \int_0^T \left\| \int_0^1 S(T-t,\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)yd\sigma \right\|_Y^2 dt \ \leq c\,\|y\|_Y^2 \,, \forall y \in Y. \quad (2.14)$$

Il est aussi auto-adjoint et non négatif puisque

$$\langle Q_T y, y\rangle_Y = \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)yd\sigma \right\|_Y^2 dt \geq 0 \ , \forall y \in Y. \quad (2.15)$$

ce qui implique l'existence d'un opérateur $\sqrt{Q_T}$ auto-adjoint et non-négatif aussi dont le carré égale à Q_T.

Théorème 2.3 i) *Il existe un contrôl $u \in L^2(0,T;U)$ qui transfère y_0 à y_d en temps T si seulement si :*

$$\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma - y_d \in \mathrm{Im}\sqrt{Q_T}. \quad (2.16)$$

ii) *La contrôlabilité moyenne approchée (faible) de (2.1) est équivalente à*

$$Q_T y = 0, \forall t \geq 0, \implies y = 0.$$

iii) *Parmi les contrôles qui transfèrent* y_0 *à* y_d *en temps* T*, il existe un seul contrôl* $\hat{u}$ *qui minimise la fonctionnelle*

$$J(v) = \int_0^T \|v(t)\|_U^2 \, dt.$$

D'ailleurs

$$J(\hat{u}) = \left\| \left(\sqrt{Q_T}\right)^{-1} \left(\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma - y_d\right) \right\|^2. \tag{2.17}$$

iv) *Si* $\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma - y_d \in \operatorname{Im}\sqrt{Q_T}$*, alors* $\hat{u}$ *est donné par*

$$\hat{u} = -\int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)Q_T^{-1}\left(\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma - y_d\right) d\sigma, \forall t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Preuve. i) Remarquons que $v \in L^2(0,T;U)$ transfère y_0 à y_d en temps T si seulement si

$$\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma \in y_d + \operatorname{Im} L_T,$$

donc il suffit de prouver que $\operatorname{Im}\sqrt{Q_T} = \operatorname{Im} L_T$.
Soit $y \in Y$, on a $L_T^* y = \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)y d\sigma$ et comme

$$\begin{aligned} \|L_T^* y\|^2_{L^2(0,T;U)} &= \int_0^T \left\| \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)y d\sigma \right\|_Y^2 dt = \langle Q_T y, y\rangle_Y \\ &= \left\|\sqrt{Q_T y}\right\|_Y^2, \forall y \in Y. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Et la partie i) suit immédiatement de la Proposition 3.1 (voir Annex).
ii) Supposons que

$$\int_0^t \int_0^1 S(t-s,\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(t-s,\sigma)y d\sigma ds = 0 \text{ et } y \neq 0$$

alors

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t \int_0^1 S(t-s,\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(t-s,\sigma)y d\sigma ds, y \right\rangle_Y &= \int_0^t \left\| \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(t-s,\sigma)y d\sigma \right\|_Y^2 ds = 0, \\ \forall t &\geq 0. \end{aligned}$$

donc

$$\forall s \in [0,t] : \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(s,\sigma)y d\sigma = 0 \Longrightarrow \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(t-s,\sigma)y d\sigma = 0, 0 \leq s \leq t.$$

c-à-d :

$$\int_0^t \left\langle v(t), \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(t-s,\sigma)y d\sigma \right\rangle_U ds = \int_0^t \left\langle \int_0^1 S(t-s,\sigma)B(\sigma)v(s)d\sigma, y \right\rangle_Y ds.$$

Cette dernière égalité signifie que y est orthogonal à $\operatorname{Im} L_t$, pour tout $t \geq 0$, alors $\cup_{t\geq 0} \operatorname{Im} L_t$ est non partout dense dans Yet le système (2.1) est non approximativement (faiblement) moyennement contrôlable.Maintenant supposons que (2.1) est non approximativement (faiblement) moyennement contrôlable, alors il existe $y \neq 0, Y \perp \operatorname{Im} L_t$,pour tout $t \geq 0$ c-à-d :

$$\forall s > 0, \forall y \in Y : \left\langle z, \int_0^1 S(s,\sigma)B(\sigma)yd\sigma \right\rangle_Y = \left\langle \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(s,\sigma)zd\sigma, y \right\rangle_Y = 0.$$

Ce qui implique que

$$\int_0^1 B^*(\sigma)S^*(s,\sigma)zd\sigma = 0,$$

et

$$\int_0^t \int_0^1 S(s,\sigma)B(\sigma)d\sigma \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(s,\sigma)zd\sigma ds = 0.$$

Contradiction .iii) Le contrôl optimal moyen unique est de la forme

$$L_T^{-1}(-\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma + y_d).$$

La formule (2.17) est une conséquence de la proposition 3.1 (voir Annex), nous remarquons que pour tout $x \in Y$ on a

$$Q_T x = L_T L_T^* x$$

Fixons $z \in \operatorname{Im} Q_T$ et soit

$$\hat{v} = L_T^{-1}z, y = Q_T^{-\frac{1}{2}}z, Q_T^{-\frac{1}{2}}y = Q_T^{-1}z.$$

Il suit de (2.13) que

$$L_T L_T^* x = Q_T^{-\frac{1}{2}}y = Q_T^{\frac{1}{2}}y = z. \tag{2.20}$$

Si $L_T v = 0$, alors

$$\left\langle L_T Q_T^{-\frac{1}{2}}y, v \right\rangle = \left\langle Q_T^{-\frac{1}{2}}y, L_T v \right\rangle = 0.$$

Tenant compte la définition de L_T^{-1}et (2.20), nous obtenons que :

$$\hat{v} = L_T^* Q_T^{-\frac{1}{2}}y,$$

et comme

$$L_T^* y = \int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)yd\sigma;$$

alors

$$\hat{v} = -\int_0^1 B^*(\sigma)S^*(T-t,\sigma)Q_T^{-1}\left(\int_0^1 S(T,\sigma)y_0 d\sigma - y_d\right)d\sigma = L_T^* Q_T^{-\frac{1}{2}}y.$$

Prenons $y = \int_0^1 S(T)y_0 - y_d$ pour arriver à (2.18). ■

2.5 Observabilités moyenne des systèmes distribués linéaires

Soient Y et Z deux espaces de Hilbert, considérons le système dépendant d'un paramètre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(\sigma)y(t), t \in]0,T[\,, \sigma \in (0,1), \\ z(t) = \int_0^1 C(\sigma)y(t)d\sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.21}$$

Où $A(\sigma)$ est un opérateur en général non borné dépend de σ, engendre un C_0-semi-groupe $\{S(t,\sigma)\}_{t\geq 0}$ sur Y et $C(\sigma) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ est l'opérateur d'observation, Z est l'espace d'observation, z est appelée la sortie du système.
La solution du système peut s'écrit sous la forme :

$$z(t) = \int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)y_0 d\sigma = Ky_0. \tag{2.22}$$

Définition 2.4 *La paire $(A(\sigma), C(\sigma))$ est dite exactement moyennement observable sur $[0,T]$si z_0 peut être déterminer d'une façon unique et continue de la connaissance de la sortie $z \in L^2(0,T;Z)$ c-à-d l'opérateur*

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad Y \rightarrow L^2(0,T;Z) \\ y_0 \quad &\rightarrow \quad Ky_0 = \int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)y_0 d\sigma \end{aligned}$$

est injectif et son inverse est borné sur $\operatorname{Im} K$.

Définition 2.5 *La paire $(A(\sigma), C(\sigma))$ est dite approximativement (faiblement) moyennement observable sur $[0,T]$ si z_0 peut être déterminer d'une façon unique de la connaissance de la sortie $z \in L^2(0,T;Z)$, c-à-d*

$$Ky = 0, \forall t \in [0,T] \implies y = 0.$$

Comme nous avons vu le cas des systèmes localisés, il existe une dualité formelle entre les concepts de la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne, cette dualité nous donne :

Théorème 2.4 i) $(A(\sigma), C(\sigma))$ *est exactement moyennement observable sur $[0,T]$ si seulement si $(A^*(\sigma), C^*($ exactement moyennement contrôlable sur $[0,T]$.*
ii) $(A(\sigma), C(\sigma))$*est approximativement (faiblement) moyennement observable sur $[0,T]$ si seulement si $(A^*(\sigma), C^*(\sigma))$ est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable sur $[0,T]$.*

Preuve. $A(\sigma)$ génère un C_0-semi-groupe $\{S(t,\sigma)\}_{t\geq 0}$ sur Y, alors $A^*(\sigma)$ engendre un C_0-semi-groupe $\{S^*(t,\sigma)\}_{t\geq 0}$ sur Y. On a

$$K : Y \to L^2(0,T;Z).$$

Et pour tout $z \in L^2(0,T;Z)$ et $y \in Y$:

$$\begin{aligned}
\langle z, Ky\rangle_{L^2(0;T;Z)} &= \left\langle z, \int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)yd\sigma\right\rangle_{L^2(0;T;Z)}, \\
&= \int_0^T \left\langle z(t), \int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)yd\sigma\right\rangle_Z dt, \\
&= \int_0^1\int_0^T \langle z(t), C(\sigma)S(t,\sigma)y\rangle_Z \, dtd\sigma, \\
&= \int_0^1\int_0^T \langle S^*(t,\sigma)C^*(\sigma)z(t), y\rangle_Z \, dtd\sigma, \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^1 S^*(t,\sigma)C^*(\sigma)z(t)d\sigma, y\right\rangle_Z dt, \\
&= \left\langle \int_0^T\int_0^1 S^*(t,\sigma)C^*(\sigma)z(t)d\sigma dt, y\right\rangle_Z, \\
&= \langle K^*z, y\rangle_Z,
\end{aligned}$$

donc l'image de K est identique à celle de l'opérateur de contrôlabilité pour la paire $(A^*(\sigma), C^*(\sigma))$, c-à-d $K = L_T^*$, on en déduit que $K^* = L_T$. Alors :

i) $(A(\sigma), C(\sigma))$ est exactement moyennement observable sur $[0,T]$ si seulement si $\ker K = \{0\}$ et K^{-1} est borné sur $\operatorname{Im} K$. Ainsi

$K^{-1}(Kx) = x$ pour $x \in Y$ et

$$\left\|K^{-1}y\right\| \leq \gamma \left\|y\right\|, \forall y \in \operatorname{Im} K.$$

D'où

$$\left\|x\right\| = \left\|K^{-1}(Kx)\right\| \leq \gamma \left\|Kx\right\| = \gamma \left\|L_T^*x\right\|, \forall x \in Y.$$

Et d'après le Théorème (2.2) $a)$ ii) $(A^*(\sigma), C^*(\sigma))$ est exactement moyennement contrôlable sur $[0,T]$.

ii) $(A(\sigma), C(\sigma))$ est approximativement (faiblement) moyennement observable sur $[0,T]$ si seulement si $\ker K = \ker L_T^* = \{0\}$ ce qui est équivalent à $(A^*(\sigma), C^*(\sigma))$ est faiblement contrôlable moyenne sur $[0,T]$

d'aprés le Théorème (2.2) $b)$ ii) $(A(\sigma), C(\sigma))$ est approximativement (faiblement) moyennement contrôlable sur $[0,T]$. ■

On donne aussi quelques caractérisation de l'observabilité moyenne exacte et approximative.

Corollaire 2.2 *Pour le système* (2.18)*, on a les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité moyenne, exacte et approximative. Définissons l'opérateur* $N = K^*K$*, alors :*

$a)$ $(A(\sigma), C(\sigma))$*est exactement moyennement observable si seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :*

i) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y : \langle Ny, y\rangle_Y \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

ii) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y : \|Ky\|^2_{L^2(0,T;Z)} = \int_0^T \|(Ky)(t)\|_Z^2 \, dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

iii) $\exists\gamma > 0, \forall y \in Y : \int_0^T \left\| \int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)y d\sigma \right\|_Y^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$.

iv) $\ker K = \{0\}$ *est* $\operatorname{Im} K$ *est fermé.*

$b)$ $(A(\sigma), C(\sigma))$ *est approximativement (faiblement) moyennement observable sur* $[0, T]$ *si seulement si une des conditions suivantes est vérifié :*

i) N *est un opérateur positif .*

ii) $\ker K = \{0\}$.

iii) $\int_0^1 C(\sigma)S(t,\sigma)y d\sigma = 0$ *sur* $[0, T] \implies y = 0$.

Preuve. Utilisons la dualité formelle entre la contrôlabilité moyenne et l'observabilité moyenne (voir Théorème (2.4)) et le Théorème (2.2) pour prouver ce corollaire (remarque ; $K = L_T^*$). ■

Chapitre 3

Contrôl optimal moyen des systèmes distribués

Ce chapitre est consacré à l'étude des problèmes distribués c-à-d ; des EDP dépendant d'un paramètre inconnu associé à des contraintes c'est un problème d'optimisation avec contrainte.
Considérons le problème de contrôl optimal moyen en dimension infinie qui s'écrit sous la forme abstraite suivante :

$$\inf_{v \in U_{ad}} J(v), \tag{3.1}$$

avec des contraintes :

$$A(x,\sigma)y = f + B(\sigma)v, \tag{3.2}$$

où : $v \in U_{ad} \subset U, U_{ad}$ est l'ensemble des contrôls moyens admissibles, non-vide, convexe, et fermé de l'espace des contrôls moyen U.
Les deux espaces Y et U sont des espaces d'états et de contrôl (resp).
$A(x,\sigma)$ est un opérateur différentiel partiel dépendant d'un paramètre σ.
$B(\sigma)$ l'opérateur de contrôl v dépendant continûment à σ.
J est une fonction de coût de $Y \times U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Z est l'espace d'observation moyen et $C(\sigma)$ est l'opérateur d'observation.
Considérons la fonction de coût quadratique suivante :

$$J(v) = \left\| \int_0^1 C(\sigma)\, y(x,t,\sigma) d\sigma - y_d \right\|_Z^2 + N \|v\|_U^2 \tag{3.3}$$

où y_d est un observation donnée dans Z et $N > 0$.
Alors, notre problème de contrôl optimal consiste à déterminer ou bien caractériser le contrôl u

qui minimise J sur U_{ad} c-à-d.

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u\in U_{ad} \text{ tq} \\ J\left(u,y\left(u\right)\right)=\inf J\left(v,y\right);v\in U_{ad}, \\ A(x,\sigma)y=f+B(\sigma)v. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

La paire $(u, y(u))$ qui vérifie (3.4) est appelée la paire optimale.

Théorème 3.1 *Si la fonction de coût J définit par (3.3) est Gâteaux différentielle (voirAnnex Définition 3.4), alors le contrôl optimal $u \in U_{ad}$ est unique et il est caractérisé par :*

$$\left\{\begin{array}{l} J'\left(u\right)\left(\delta v\right)=\left(\left(\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(u,\sigma\right)d\sigma-y_d,\ \int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(v-u,\sigma\right)d\sigma\right)_Z+N\left(u,\delta v\right)_U\right)\geq 0, \\ A(x,\sigma)y=f+B(\sigma)v. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Preuve. J est strictement convexe ce qui imlique que l'unicité d'un optimum, coercive puisque

$$J\left(v\right)\longrightarrow\infty \text{ quand } \left\|v\right\|_U\longrightarrow\infty, v\in U_{ad}$$

ce qui imlique l'existence d'un optimum, qui est caractérisé par l'inégalité variationnelle suivante :

$$J'\left(u\right)\left(\delta v\right)\geq 0,\ \forall v\in U_{ad},\ \text{avec } \delta v=v-u.$$

D'aprés définition 3.4 dans l'annex :

$$J'\left(u\right)\left(\delta v\right)=\lim_{t\to 0}\frac{J\left(u+t\left(\delta v\right)\right)-J\left(u\right)}{t},$$

telque :

$$\begin{aligned} J\left(u+t\left(\delta v\right)\right) &= \left\|\left(\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(u+t\left(\delta v\right)\right),\sigma\right)d\sigma-y_d\right\|_Z^2+N\left\|u+t\left(\delta v\right)\right\|_U^2, \\ &= \left\|\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(u,\sigma\right)d\sigma-y_d\right\|_Z^2+t^2\left\|\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(\delta v,\sigma\right)d\sigma\right\|_Z^2 \\ & +2\left(\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(u,\sigma\right)d\sigma-y_d,\int_0^1 C\left(\sigma\right)ty\left(\delta v,\sigma\right)d\sigma\right)_Z \\ & +N\left(u,u\right)_U+N\left(u,t\left(\delta v\right)\right)_U+N\left(t\left(\delta v\right),u\right)_U+N\left(t^2\left(\delta v\right),\left(\delta v\right)\right)_U. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \frac{J\left(u+t\left(\delta v\right)\right)-J\left(u\right)}{t} &= t\left\|\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(\delta v,\sigma\right)d\sigma\right\|_Z^2 \\ & +2\left(\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(u,\sigma\right)d\sigma-y_d,\int_0^1 C\left(\sigma\right)y\left(\delta v,\sigma\right)d\sigma\right)_Z \\ & +2N\left(u,\left(\delta v\right)\right)_U+Nt\left(\left(\delta v\right),\left(\delta v\right)\right)_U. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{J(u+t(\delta v))-J(u)}{t} &= 2\left(\int_0^1 C(\sigma)\,y(u,\sigma)\,d\sigma-y_d,\int_0^1 C(\sigma)\,y(\delta v,\sigma)\,d\sigma\right)_Z,\\ +2N(u,(\delta v))_U &\geq 0,\ \forall v\in U_{ad}.\end{aligned}$$

■

3.1 Contrôl optimal moyen distribué d'un équation parabolique dépendant d'un paramètre

3.1.1 Contrôl optimal moyen distribué d'un équation parabolique dépendant d'un paramètre

Considérons la forme générale de l'équation parabolique abstraite de deuxième ordre :

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+A(x,\sigma)y=f+B(\sigma)v(t)\text{ dans }Q,\\ y(x,0)=y_0(x)\text{ dans }\Omega.\end{cases}\tag{3.6}$$

Où A est un opérateur elliptique de deuxième ordre, $U\subset Y$ sont des espaces de Hilbert, $f\in L^2(0,T;U')$, $v\in U_{ad}\subset L^2(0,T;U)$ un ensemble convexe des contrôls admissibles, $B(\sigma)\in\mathcal{L}(U_{ad},L^2(0,T;U'))$ l'opérateur de contrôl en fonction de σ, $y_0\in Y$; alors (3.6) admet une solution unique $y\in L^2(0,T;U)$.[9]
Soit $\int_0^1 y(x,t,\sigma)d\sigma\in L^2(0,T;U)$ le moyen par apport à σ, $y_d\in L^2(0,T;U)$ est l'état désiré. Nous sommes intéressés d'un problème de contrôl optimal :

$$\inf_{v\in U_{ad}} J(v)\text{ avec }J(v)=\left\|\int_0^1 y(x,t,\sigma)d\sigma-y_d\right\|^2_{L^2(0,T;U)}+N\|v\|^2_{L^2(0,T;U)},N>0.\tag{3.7}$$

Nous avons caractérisé le contrôl optimal moyen u.

Théorème 3.2 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de (3.6) et (3.7) il est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+A(x,\sigma)\,y=f+B(\sigma)\,u\textit{ dans }Q,\\ -\dfrac{d\varphi}{dt}+A^*(x,\sigma)\,\varphi=\int_0^1 y(x,t,\sigma)d\sigma-y_d\textit{ dans }Q,\\ y(x,0)=y_0(x)\ ,\ \varphi(x,T)=0\textit{ dans }\Omega,\end{cases}\tag{3.8}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\int_0^T \int_0^1 (B^* (\sigma) \varphi + Nu, \delta v)_U \, d\sigma dt \geq 0, \ \forall v \in U_{ad}. \tag{3.9}$$

Preuve. La fanction $J : U_{ad} \to \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue, inférieure strictement, convexe et coercive, donc il existe une solution unique de (3.6) et (3.7) .[6]

Écrivons la condition du premier ordre d'Euler comme suite :

$$J' (u) \delta v = \int_0^T \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma) d\sigma - y_d \, , \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma) d\sigma \right)_U dt + N \int_0^1 (u, \delta v)_U \, dt \ \geq 0, \forall v \in U_{ad}, \tag{3.10}$$

Telque :

$$\int_0^1 \delta y(x,t,\sigma) d\sigma$$

est la solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta y}{dt} + A(x,\sigma) \delta y = B(\sigma) \delta v \text{ dans } Q, \\ \delta y(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit φ l'état adjoint donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{-d\varphi}{dt} + A^* (x,\sigma) \varphi = \int_0^1 y(u,t,\sigma) d\sigma - y_d \text{ dans } Q, \\ \varphi(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où $A^* (x,\sigma)$ est l'opérateur adjoint de $A(x,\sigma)$, $\varphi \in L^2(0,T;U)$.[9]

Alors, la formule (3.10) s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma) d\sigma - y_d, \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma) d\sigma \right)_U dt &= \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{-d\varphi}{dt} + A^* (x,\sigma) \varphi, \delta y \right)_U d\sigma dt, \\ &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi, \frac{d\delta y}{dt} + A(x,\sigma) \delta y)_U d\sigma dt, \\ &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi, B(\sigma) \delta v)_U d\sigma dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^T \int_0^1 (B^* (\sigma) \varphi + Nu, \delta v)_U \, d\sigma dt \geq 0, \forall v \in U_{ad}.$$

■

3.1.2 Contrôl optimal moyen de Newman d'une équation parabolique

Considérons l'équation parabolique avec le contrôl de Neumann :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A\left(x,\sigma\right)y = f \text{ dans } Q, \\ \dfrac{dy}{d\nu} = v \text{ sur } \Sigma, \\ y\left(x,0\right) = y_0\left(x\right) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

Où $v \in U_{ad} \subset L^2\left(\Sigma\right)$ est l'ensemble des contrôles admissibles, $f \in L^2\left(Q\right)$ et $y_0 \in L^2\left(\Omega\right)$, alors il existe une solution unique $y \in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$ de $\left(3.11\right)$.[9]
$\int_0^1 y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma \in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$ est l'état moyenne et $y_d \in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$ un état désiré. Nous sommes intéressés d'un problème de contrôl optimal :

$$\inf_{v\in U_{ad}} J\left(v\right) \text{ avec } J\left(v\right) = \left\|\int_0^1 y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma - y_d\right\|^2_{L^2(Q)} + N\left\|v\right\|^2_{L^2(\Sigma)} \tag{3.12}$$

Théorème 3.3 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de $\left(3.11\right)$ et $\left(3.12\right)$, qui est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A\left(x,\sigma\right)y = f, \\ \dfrac{-d\varphi}{dt} + A^*\left(x,\sigma\right)\varphi = \int_0^1 y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma - y_d \textit{ dans } Q, \\ \dfrac{dy}{d\sigma} = u, \dfrac{d\varphi}{d\sigma} = 0 \textit{ sur } \Sigma, \\ y\left(x,0\right) = y_0\left(x\right) \text{ , } \varphi\left(x,T\right) = 0 \textit{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\left(\int_0^1 \varphi\left(x,t,\sigma\right)d\sigma + Nu, \delta v\right)_{L^2(\Sigma)} \geq 0, \ \forall v \in U_{ad}. \tag{3.14}$$

Preuve. La condition d'Euler de premier ordre pour $\left(3.11\right), \left(3.12\right)$ nous donne :

$$J'\left(u\right)\delta v = \left(\int_0^1 y\left(u,t,\sigma\right)d\sigma - y_d, \ \int_0^1 \delta y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma\right)_{L^2(Q)} + N\left(u,\delta v\right)_{L^2(\Sigma)} \geq 0, \ \forall v \in U_{ad}, \tag{3.15}$$

où :

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta y}{dt} + A\left(x,\sigma\right)\delta y = 0 \text{ dans } Q, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\delta y\right) = \delta v \text{ sur } \Sigma, \\ \delta y\left(x,0\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

avec l'état adjoint :

$$\begin{cases} \dfrac{-d\varphi}{dt} + A^{*}(x,\sigma)\varphi = \int_0^1 y(u,t,\sigma)\,d\sigma - y_d \text{ dans } Q, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = 0 \text{ dans } Q, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)\,d\sigma - y_d, \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)\,d\sigma\right)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \left(\frac{-d\varphi}{dt} + A^{*}(x,\sigma)\varphi, \int_0^1 \delta y\,d\sigma\right)_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \int_0^T \int_0^1 \left(\varphi, \frac{d\delta y}{dt} + A(x,\sigma)\,\delta y\right)_{L^2(\Omega)} d\sigma dt \\ + \left(\int_0^1 \varphi(x,t,\sigma)\,d\sigma, \delta v\right)_{L^2(\Sigma)}, \forall v &\in U_{ad}. \end{aligned}$$

Avec

$$\left(\int_0^1 \varphi(x,t,\sigma)\,d\sigma + Nu, \delta v\right)_{L^2(\Sigma)} \geq 0, \forall v \in U_{ad}.$$

■

3.1.3 Contrôl optimal moyen distribué d'une équation parabolique d'ordre supérieur

Considérons un problème d'ordre supérieur, c'est une équation parabolique de quatrième ordre avec un contrôl distribué s'écrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \Delta\left(b(x,t,\sigma)\Delta y\right) = f + v \text{ dans } Q, \\ y = 0 \;\; \frac{dy}{dt} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

avec $b \in L^{\infty}(Q), 0 \leq \alpha \leq b$ presque partout, pour tout $f, v \in L^2(Q)$, il existe une solution unique $y \in L^2(0,T; H_0^2(\Omega))$ de (3.16).**[?]**

L'idée principale est de recevoir une caractérisation de solution u de :

$$\inf_{v \in U_{ad}} J(v) \text{ avec } J(v) = \left\| \int_0^1 y(x,t,\sigma)\,d\sigma - y_d \right\|_{L^2(Q)}^2 + N\|v\|_{L^2(Q)}^2. \tag{3.17}$$

Théorème 3.4 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de $(3.16), (3.17)$ qui est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta y\right) = f + u, \\ \dfrac{-d\varphi}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\varphi\right) = \int_0^1 y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma - y_d \textit{ dans } Q, \\ y = \varphi = 0, \dfrac{\partial y}{\partial\sigma} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 0 \textit{ sur } \Sigma, \\ y\left(x,0\right) = y_0\left(x\right),\ \varphi\left(x,T\right) = 0 \textit{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\left(\int_0^1 \varphi\left(x,t,\sigma\right)d\sigma + Nu, \delta v\right)_{L^2(Q)} \geq 0, \forall v \in U_{ad}. \tag{3.19}$$

Preuve. De la même méthode, il existe

$$J'\left(u\right)\delta v = \left(\int_0^1 y\left(u,t,\sigma\right)d\sigma - y_d, \int_0^1 \delta y\left(x,t,\sigma\right)d\sigma\right)_{L^2(Q)} + N\left(u,\delta v\right)_{L^2(Q)} \geq 0, \forall v \in U_{ad}$$

telque

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta y}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\delta y\right) = \delta v \text{ dans } Q, \\ \delta y = 0, \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\delta y\right) = 0 \ \text{ sur } \Sigma, \\ \delta y\left(x,0\right) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

introduisons l'état :

$$\begin{cases} \dfrac{-d\varphi}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\varphi\right) = \int_0^1 y\left(u,t,\sigma\right)d\sigma - y_d \text{ dans } Q, \\ \varphi = 0, \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi\left(x,T\right) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On utilisons la formule de Green (voir Annex, Théorème 3.11) pour avoir que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma - y_d, \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)d\sigma\right)_{L^2(Q)} dt &= \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{-d\varphi}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\varphi\right), \delta y\right)_{L^2(Q)} d\sigma dt, \\ &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi, \frac{d\delta y}{dt} + \Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\delta y\right)_{L^2(Q)} d\sigma dt. \end{aligned}$$

■

3.2 Contrôl optimal moyen dans le sens de Petrowsky d'une équation hyperbolique et des équations bien posées

3.2.1 Contrôl optimal moyen distribué un équations hyperboliques

Considérons le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + A(x,\sigma)\, y = f + B(\sigma)\, v \text{ dans } Q, \\ y(x,0) = y_0(x)\,,\ \frac{dy}{dt}(x,0) = y_1(x) \ \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Telsque U et Y sont des espaces de Hilbert, U est séparable et dense dans $Y, f \in L^2(0,T;Y)\,, y_0 \in U, y_1 \in Y, B(\sigma) \in L(U_{ad}, 0,T;Y)$ et $U_{ad} \subset L^2(0,T;Y)\,,$ alors le problème (3.20) a une solution unique dans $L^2(0,T;U)\,.$[9]

Nous intéressons au problème du contrôl optimal $(3.12)-(3.20)$.

Théorème 3.5 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de $(3.12)-(3.20)$ qui est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + A(x,\sigma)\, y = f + B(\sigma)\, u, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A^*(x,\sigma)\,\varphi = \int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma - y_d \textit{ dans } Q, \\ y(x,0) = y_0(x)\,,\ \frac{dy}{dt}(x,0) = y_1(x)\,, \varphi(x,T) = 0,\ \frac{d\varphi}{dt}(x,T) = 0 \textit{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\int_0^T \int_0^1 \left(B^*(\sigma)\,\varphi + Nu, \delta v\ \right) d\sigma dt \geq 0,\ \forall v \in U_{ad}. \tag{3.22}$$

Preuve. Une condition de premier order s'écrit comme suit :

$$J'(u)\,\delta v = \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)\, d\sigma - y_d,\ \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)\, d\sigma\right)_U + N(u,\delta v)_U \geq 0,\ \forall v \in U_{ad}$$

Telque :

$$\int_0^1 \delta y(x,t,\sigma) d\sigma$$

est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{d^2\delta y}{dt^2} + A(x,\sigma)\,\delta y = B(\sigma)\,\delta v \quad \text{dans } Q, \\ \delta y(x,0) = 0,\ \frac{d\delta y}{dt}(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Soit φ l'état adjoint donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + A^*(x,\sigma)\,\varphi = \int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma - y_d \text{ dans } Q, \\ \varphi(x,T) = 0,\ \frac{d\varphi}{dt}(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

On écrit La condition d'Euler de premier order

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma - y_d, \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)d\sigma\right)_U dt &= \int_0^T\int_0^1\left(\frac{d^2\varphi^*}{dt^2}+A^*\left(x,\sigma\right)\varphi^*,\delta y\right)_U d\sigma dt \\ &= \int_0^T\int_0^1\left(\varphi^*,B\left(\sigma\right)\delta v\right)_U d\sigma dt\end{aligned}$$

alors nous obtenons l'inégalité (3.17) . ■

3.2.2 Contrôle optimal moyen d'une équation hyperbolique avec condition de Newman

Nous voyons le cas d'un contrôl limite pour le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dt^2}+A\left(x,\sigma\right)y=f \text{ dans } Q,\\ \frac{\partial y}{\partial\sigma_A}\left(x,t\right)=v \text{ sur } \Sigma,\\ y\left(x,0\right)=y_0\left(x\right),\ \frac{dy}{dt}\left(x,0\right)=y_1\left(x\right) \text{ dans } \Omega.\end{cases}\tag{3.23}$$

Avec $U_{ad}=L^2\left(\Sigma\right)$, le problème précédent a une solution unique dans le sens de transposition , i.e. tel que :

$$\begin{aligned}\exists y &\in L^2\left(Q\right);\int_Q y\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}+A^*\left(x,\sigma\right)\varphi\right)dxdt=\int_Q f\varphi dxdt-\int_\Omega y_0\left(x\right)\frac{d\varphi}{dt}\left(x,0\right)dx \\ &+\int_\Omega y_1\left(x\right)\varphi\left(x,0\right)dx+\int_\Sigma v\varphi d\Sigma\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$X\left\{\begin{array}{l}\varphi:\varphi\in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right),\frac{d\varphi}{dt}\in L^2\left(Q\right),\frac{d^2\varphi}{dt^2}+A\left(x,\sigma\right)\varphi\in L^2\left(Q\right),\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{A^*}}=0 \text{ sur } \Sigma,\varphi\left(x,T\right)=0,\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,T\right)=0 \text{ dans } \Omega\end{array}\right\}\ [9]$$

associé à la fonction défini dans (3.12)

Théorème 3.6 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de $(3.11),(3.12)$ qui est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dt^2}+A\left(x,\sigma\right)y=f,\\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}+A^*\left(x,\sigma\right)\varphi=\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma-y_d \textit{ dans } Q,\\ \frac{\partial y}{\partial\sigma_A}\left(x,t\right)=u,\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{A^*}}=0 \textit{ sur } \Sigma,\\ y\left(x,0\right)=y_0\left(x\right),\frac{dy}{dt}\left(x,0\right)=y_1\left(x\right),\varphi\left(x,T\right)=0,\ \frac{d\varphi}{dt}\left(x,T\right)=0 \textit{ dans } \Omega,\end{cases}\tag{3.25}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\left(\int_0^1\varphi\left(x,t,\sigma\right)d\sigma+Nu,\delta v\right)_{L^2\left(\Sigma\right)}\geq 0,\forall v\in U_{ad}.\tag{3.26}$$

Preuve. On a :

$$J'(u)\,\delta v = \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)\,d\sigma - y_d,\ \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)\,d\sigma\right)_{L^2(Q)} + N(u,\delta v)_{L^2(\Sigma)} \geq 0, \forall v \in U_{ad}$$

où :

$$\begin{cases} \frac{d^2\delta y}{dt} + A(x,\sigma)\,\delta y = 0 \text{ dans } Q, \\ \frac{\partial \delta y}{\partial \sigma_A} = \delta v \text{ sur } \Sigma, \\ \delta y(x,0) = 0,\ \frac{d\delta y}{dt}(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

avec l'état d'adjoint

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A^*(x,\sigma)\,\varphi = \int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma - y_d \text{ dans } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_A} = \delta v \ \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = 0,\ \frac{d\varphi}{dt}(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans (3.19) on prend $u = v$, on obtient

$$\int_Q \delta y \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} + A^*(x,\sigma)\,\varphi\right) dx dt = \int_\Sigma \delta v \varphi d\Sigma,$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)\,d\sigma - y_d,\ \int_0^1 \delta y(x,t,\sigma)\,d\sigma\right)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} + A^*(x,\sigma)\,\varphi,\ \int_0^1 \delta y d\sigma\right)_{L^2(\Omega)} dt, \\ &= \left(\int_0^1 \varphi(x,t,\sigma)\,d\sigma, \delta v\right)_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

■

3.2.3 Contrôl optimal moyen distribué d'une équation bien posée au sense de Petrowsky

On suppose que l'équation est bien posée au sense de Petrowsky [7] suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + \Delta\left(b(x,t,\sigma)\,\Delta y\right) = f + v \text{ dans } Q, \\ \Delta y = 0,\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \Delta y(x,0) = y_0(x)\,,\ \frac{dy}{dt}(x,0) = y_1(x)\ \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.27}$$

avec $b \in C^1(]0,T[\,, L^\infty(\Omega))$ et $y_0 \in U = \{\psi : \psi, \Delta\psi \in L^2(\Omega)\}$; alors il existe une solution unique $y \in L^2(Q)$ de (3.24) [9].

L'opérateur $\psi \longrightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \Delta\left(b(x,t,\sigma)\,\Delta\psi\right)$ est bien posée dans le sens de Petrowsky.

Théorème 3.7 *Le contrôl optimal moyen u est une solution unique de $(3.27)-(3.17)$ qui est caractérisé par le systéme d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}+\Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta y\right)=f+u, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta \varphi\right)=\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma-y_d \text{ dans } Q, \\ \Delta y=0,\ \frac{\partial\Delta y}{\partial\sigma}=0,\ \Delta\varphi=0,\ \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\sigma}=0 \text{ sur } \Sigma, \\ \Delta y\left(x,0\right)=y_0\left(x\right),\ \frac{dy}{dt}\left(x,0\right)=y_1\left(x\right),\ \Delta\varphi\left(x,T\right)=0,\ \frac{d\varphi}{dt}\left(x,T\right)=0 \ \text{ dans}\Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

avec l'inégalité variationnelle suivante :

$$\left(\int_0^1 \varphi\left(x,t,\sigma\right)d\sigma+Nu,\delta v\right)_{L^2(Q)}\geq 0, \forall v\in U_{ad}. \tag{3.29}$$

Preuve. Le résultat est le même, premier ordre condition pour (3.17) :

$$\begin{cases} \frac{d^2\delta y}{dt^2}+\Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\delta y\right)=\delta v \text{ dans } Q, \\ \Delta\delta y=0,\frac{\partial\Delta\delta y}{\partial\sigma}=0 \text{ sur } \Sigma, \\ \Delta\delta y\left(x,0\right)=0,\frac{d\delta y}{dt}\left(x,0\right)=0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Introduisons l'état d'adjoint

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\varphi\right)=\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma-y_d \text{ dans } Q, \\ \Delta\varphi=0,\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\sigma}=0 \text{ sur } \Sigma, \\ \Delta\varphi\left(x,T\right)=0,\frac{d\varphi}{dt}\left(x,T\right)=0\ \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^T\left(\int_0^1 y(u,t,\sigma)d\sigma-y_d,\int_0^1\delta y(x,t,\sigma)d\sigma\right)_U dt &= \int_0^T\int_0^1\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Delta\left(b\left(x,t,\sigma\right)\Delta\varphi\right),\delta v\right)_U d\sigma dt, \\ &= \int_0^T\left(\int_0^1\varphi\left(x,t,\sigma\right)d\sigma,\delta v\right)_U d\sigma dt\ . \end{aligned}$$

■

Appendices

Définition 3.1 ***(Exponentielle d'une matrice)*** *La série de matrices de terme général* $\frac{A^k}{k!}$*converge normalement sur toute partie bornée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On appelle alors exponentielle l'application*

$$\begin{array}{rcl} \exp & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \to & \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{array}$$

Théorème 3.8 ***(Cayley-Hamilton)*** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *et soit* $P(\lambda)$ *sa polynôme caractéristique tel que :*

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$$

Alors le polynôme caractéristique de A *est nulle*

$$P(A) = 0.$$

Théorème 3.9 ***[8]*** *Soit* E *et* F *deux espaces de Banach* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur non bornée de domaine dense et fermé alors :*

1) A *est surjectif*

2) $\exists\, \gamma > 0 : \|v\|_F \leq \gamma \|A^* v\|_E, \forall\, v \in D(A^*)$.

3) $\ker(A^*) = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im}(A^*)$ *est fermé.*

Proposition 3.1 *Soient* X, Y *et* Z *trois espaces de Banach et* $F \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et* $G \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *alors*

$$\operatorname{Im} F \subset \operatorname{Im} G \iff \exists \gamma > 0, \forall z \in Z : \|G^* z\|_{X^*} \geq \gamma \|F^* z\|_{Y^*}.$$

Proposition 3.2 *Si* $F \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et* $G \in \mathcal{L}(X, Y)$*, où* X, Y *et* Z *sont des espaces de Hilbert séparable t.q.* $\|F^* f\| = \|G^* f\|$ *pour tout* $f \in Z$*.Alors :*

$$\operatorname{Im} F \subset \operatorname{Im} G \text{ et } \left\|F^{-1} f\right\| = \left\|G^{-1} f\right\| \text{ pour tout } f \in Z.$$

Définition 3.2 *On appelle* C_0-*semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur* $\underline{E}$ *une famille* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset L(E)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

a) $T(0) = I$.

b) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

c) $\lim_{t\longrightarrow 0^+} T(t)x = x, \forall x \in E$.

Définition 3.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0-*semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *,un opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$
\begin{aligned}
D(A) &= \left\{ x \in E \diagdown \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \textit{existe} \right\} \\
Ax &= \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).
\end{aligned}
$$

Définition 3.4 *Soient $J : U \subset X \to Y$ un opérateur, X et Y deux espaces de Banach et $U \neq 0$un ouvert. Jest dit directionellement differentiable $x \in U$ si la limite*

$$
dJ(x,h) = \lim_{t \to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t} \in Y
$$

existe pour tout $h \in X$.
J appellé Gâteau differentiable en $x \in U$ si J est directionellement differentiable en x et sa dérivée directionelle est $J'(x) : h \in X \to dJ(x,h) \in Y$ est linéaire et borné c.à.d $J(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Théorème 3.10 *Soit E un espace de Banach et $U \subset E$ un convex non vide. De plus, soit $J : U \to R$ définie sur a voisinage ouvert de U. Soit u une solution locale de*

$$
\inf_{v \in U} J(v),
$$

où J est Gâteaux-dérivable. Alors la condition d'optimalité suivante est vérifié :

$$
\langle J'(u), v - u \rangle_{E',E} \geq 0, \forall v \in U.
$$

Si j est convex sur U cette condition est nécessaire et suffisante pour l'optimalité globale.

Théorème 3.11 ***(Formule de Green)*** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné et régulière, et le vecteur normal unité vers l'extérieur sur $\Gamma = \partial\Omega$.Alors on a*
Pour $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$ on a :
Le premier formule de Green

$$
\int_{\Omega} u \Delta v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma.
$$

Pour $u, v \in H^2(\Omega)$ on a :

$$
\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta v) dx = -\int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma.
$$

Théorème 3.12 ***(Fubini)*** *Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ à valeurs dans C. Alors*

$$
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy
$$

Théorème 3.13 *Soit $U \in \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convex sur U si*

$$f(ty + (1-t)x) < tf(y) + (1-t)f(x) \ \forall x, y \in U, \forall t \in [0,1]$$

Bibliographie

[1] A.El Jai, 2006. Éléments de contrôlabilité.Presses universitaires de Perpignan.

[2] A.Hafdallah and A. Ayadi, Averaged optimal control for some evolution problems with missing parameter. DOI : 10.13140/RG.2.1.3002.8563, 2016.

[3] A.Hafdallah, Introduction à La théorie de control des sysémes (TCS 33).

[4] E. Zuazua and J.Lohéc, From averaged to simultaneous controlability of parameter depedent finite-dimentional systems. June 2015.

[5] E. Zuazua, Averaged control. AUTOMATICA,2014.

[6] H.Brezis, (2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.Universitext. Springer, NewYork.

[7] J.L. Lions ., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et application volume II. Dunod, Paris (1968) .

[8] J.L. Lions, 1971. Optimal control of systems governed by partial differential equations problèmes aux limites.

[9] J.L. Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, 1968.

[10] J.P. Raymond., 2013. Optimal control of partial differential equations. Université Paul Sabatier.

[11] J.Zabczyk, 2009. Mathematical control theory , an introduction. Springer Science & Busine.

[12] R.F. Curtain and Pritchard, A.J., 1978. Infinite dimensional linear systems theory . Springer-Verlag.

[13] R.F.Curtain and Zwart, H., 2012. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory(Vol. 21). Springer Science and Business Media.

[14] R.L. Williams, and Lawrence, D.A., 2007. Linear state-space control systems. John Wiley and Sons.