Théorèmes du point fixe commun dans les espaces b-métriques

Bouhamla Amira et Khemaissia Nassima
Mémoire de master en mathématiques
Université de Tébessa

16 juin 2019

Table des matières

Introduction générale

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents.

Le développement de la théorie de point fixe qui est la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné un grand effet sur l'avancement de l'analyse non linéaire. L'analyse non linéaire comme une branche autonome des mathématiques a été développée dans les années 1950 par des mathématiciens comme Browder, comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse variationnelle.

Cependant, les premier résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, les résultats non linéaires sont applicables à un large éventail domaines. Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie conduisent à des modèles non linéaires. Les équations différentielles non linéaires et intégrales, les inégalités variationnelles et plus de problèmes d'optimisation générale, sont quelques uns des sujets importants dans l'analyse non linéaire.

Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application. Une solution d'une equation $Tx = x$ est appelée un point fixe de T. L'original de la théorie du point fixe une branche importante de l'analyse fonctionnelle non linéaire, qui remonte à la dernière partie du XIXe siècle, le reste dans l'utilisation d'approximation successives de l'existence et l'unicité de la solution. Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy[15], Liouville[27], Lipschitz[26], Peano[29], Picard[31]. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématicien polonais Stefan Banach[4][5], qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite.

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamentale de la complétude métrique : une propriété partagée par l'ensemble de l'espace couramment exploitées dans l'analyse. Pendant de nombreuses années, l'activité dans la théorie du point fixe a été limitée à miroir extensions de principe de contraction de Banach et ses applications multiples. La théorie acquise impute en grande partie à de nouveaux résultat d'un travail de pionnier de Browder dans le milieu des années Soixante.

La qualité ainsi que le montant de la recherche de la théorie des points fixes dans l'espace métrique a grandement augmenté dans les années 1970. Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorèmes du point fixe en utilisant des applications contractive plus généralisée que les applications contractive précédentes.

Parmi les nombreuses généralisations du principe de contraction de Banach qui ont été données dans différents types d'espaces métriques, nous rappelons l'espace métrique généralisé donné par Perov[30] en 1964. C'était le point tournant de l'arène des points fixes et donnait une nouvelle dimension.

L'idée de l'espace b-métrique a été initiée à partir du travail de Bakhtin

[3] en 1989. Après, Czerwik [20] a donné un axiome qui était plus faible que l'inégalité triangulaire et formellement défini un espace b-métrique en vue de généraliser le théorème de la contraction de Banach. La théorie du point fixe dans l'espace b-métrique est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique. Par la suite, de nombreux chercheurs ont prouvé que la notion d'applications contractives définie précédemment dans l'espace métrique ordinaire, peut s'étendre à l'espace b-métrique.

L'un des aspects importants à étudier, concernant le théorème de point fixe commun dans l'espace b-métrique est d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes impliquant l'existence d'un point fixe commun.

Dans ce travail, nous présenterons les faits historiques, des définitions bien connues, et les théorèmes importants qui sont des théorèmes du point fixe dans l'espace métrique.

Nous parlons sur l'espace métrique généralisé dans le deuxième chapiter qui contient : des définition, des résulats principaux, l'application du théorème de Perov, l'application du théorème de Schauder et une comparaison entre la norme vectorielle et la norme scalaire.

Dans le troisième chapitre, nous allons démontrer des théorèmes de point fixe pour des applications contractantes dans l'espace b-métrique et l'espace b-métrique généralisé. L'originalité de ce travail est l'utilisation de la contraction dans un espace b-métrique généralisé pour démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe commun sans l'utilisation de la condition de la continuité dans un premier plan, et dans deuxième plan voir si le problème est bien posé avec une application pour un système d'équations d'opérateurs sur ce théorème.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base nécessaires pour la suite de cette étude. On présente aussi le principe de contraction de Banach. Plusieurs généralisations de ce théorème sont présentées dans ce chapitre.

1.1 Notions de base

Définition 1.1.1 *(**Espace métrique**) Un espace métrique (X, d) est un ensemble non vide X muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\forall x, y \in X \, : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*,*

ii) $\forall x, y \in X \, : d(x, y) = d(y, x)$ *(la symétrie),*

iii) $\forall x, y, z \in X \, : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1 *.*

1. *Dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la distance d suivante dite distance usuelle :*

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. *Dans $\mathbb{R}^n$, on peut considérer les distances suivantes :*

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i-y_i|\} \\ d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad pour\ p\geq 1. \end{aligned}$$

3. *On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque X, posant pour $x,y\in X$:*

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & si\ x=y \\ 1 & si\ x\neq y, \end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète.

Définition 1.1.2 ***(Suite de Cauchy)*** *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X,d) est dite de Cauchy si :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq n(\varepsilon)\ : d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

c'est à dire :

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n,x_m)=0.$$

Exemple 1.1.2 *Soit dans $(\mathbb{R},|.|)$ une suite $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$U_n=\frac{1}{n}.$$

Soit $n,m\in\mathbb{N}, n>m$:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \\ &= \left|\frac{n-m}{nm}\right| \\ &\leq \frac{n}{nm} \\ &\leq \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m} = 0$, *donc* $\{U_n\}$ *est une suite de Cauchy.*

Définition 1.1.3 *(**Suite convergente**) Soit* (X, d) *un espace métrique alors* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* X *est appelée suite convergente si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

on note alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.1.1 *Toute suite convergente est de Cauchy, l'inverse est généralement faux.*

Exemple 1.1.3 *Soit la suite* $\{x_n\}$ *dans l'espace métrique* $(\mathbb{R} - \{1\}, |.|)$*, tel que* $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. *On a* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$*, donc la suite* $\{x_n\}$ *diverge.*
Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ *:*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| \\ &= \left|\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right| \\ &\leq \frac{n}{n(m+1)} \\ &\leq \frac{1}{m+1}, \end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m+1} = 0$. *D'ou* $\lim\limits_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0$*, donc la suite* $\{x_n\}$ *est de Cauchy.*

Définition 1.1.4 *(**Application continue**) Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $T : X \to Y$ *une application et* $a \in X$*, on dit que* T *est continue au point* a *si :*

$$\lim_{x\to a} T(x) = T(a),$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x,a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(T(x),T(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 *(**Espace métrique complet**) Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Définition 1.1.6 *(**Espace métrique compact**) Un espace métrique (X,d) est dit compact si toute suite d'éléments de (X,d) admet une suite extraite convergeant vers un point de X. Une partie A de X est dite compacte si le sous-espace métrique (A,d) est compact.*

1.2 Les applications contractantes

Définition 1.2.1 *(**Application Lipschitzienne**) Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $T : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que T est Lipschitzienne ou k-Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que :*

$$\forall x,y \in X,\ d_Y(Tx,Ty) \leq k d_X(x,y). \tag{1.1}$$

- *Le plus petit réel k qui vérifie (1.1) est appelé constante de Lipschitz.*
- *Si $k \in [0,1[$, l'application T est dite contractante.*
- *Si $k = 1$, l'application T est dite non-expansive.*

Définition 1.2.2 *(**Application contractive**) Soit (X,d) un espace métrique, l'application $T : X \longrightarrow X$ est dite contractive si :*

$$d(Tx,Ty) < d(x,y),\ \forall x,y \in X \text{ avec } x \neq y.$$

Notons que contraction $\Rightarrow$ contractive $\Rightarrow$ non-expansive $\Rightarrow$ Lipschitzienne, et que toute ces applications sont continues.

Définition 1.2.3 *Soit (X,d) un espace métrique et $T : X \longrightarrow X$ une application, on dit qu'un point $x \in X$ est un point fixe de T si et seulement si $T(x) = x$.*

1.3 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837) et développée par la suite par Picard (en 1890). A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

Théorème 1.3.1 *[5] **(Principe de contraction de Banach)** Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante de constante de contraction k. Alors T a un point fixe unique dans X.*

Preuve. ***(1) Existence :*** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Tx_n, \ \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Soient* $m, n \in \mathbb{N}$ *avec* $m \leq n$ *:*

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^m d(x_0, x_1) + k^{m+1} d(x_0, x_1) + \ldots + k^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \left(k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Mais

$$\left(k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}\right) = k^m \left(\frac{1 - k^{n-m}}{1-k}\right) = \frac{k^m}{1-k}(1 - k^{n-m}).$$

D'où

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k}(1 - k^{n-m}) d(x_0, x_1).$$

On a

$$1 - k^{n-m} < 1,$$

donc

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Supposons que $d(x_0, x_1) \neq 0$*, pour que* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$*, il suffit que :*

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1) < \varepsilon.$$

Alors $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* X *et comme* (X, d) *est complet, donc la suite* $(x_n)_n$ *est convergente dans* X*.*

Soit $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$*,* $\alpha \in X$*. Montrons que* α *est un point fixe de* T*.*
D'après la continuité de T*, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = T x_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} Tx_n$$
$$\Rightarrow \alpha = T(\lim_{n\to+\infty} x_n) = T(\alpha).$$

Donc $\alpha = T\alpha$, d'où α est un point fixe de T.

2) L'unicité :

Supposons qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in X$ tel que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, avec $\alpha_1 = T\alpha_1$ et $\alpha_2 = T\alpha_2$.

On a

$$\begin{aligned} d(T\alpha_1, T\alpha_2) &\leq kd(\alpha_1, \alpha_2) \\ d(\alpha_1, \alpha_2) &\leq kd(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, $d(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ ce qui entraîne $\alpha_1 = \alpha_2$.

Remarque 1.3.1 *Les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont réellement nécessaire si nous en négligeons seulement une, alors il se peut que le point fixe n'existe pas.*

1.4 Quelques types de contractions

Il existe diverses versions modifiées (extensions) du théorème de contraction de Banach dans la littérature. Généralement, si l'une des hypothèses est affaiblie les autres doivent être renforcées. La complétude de l'espace est généralement indispensable. Dans ce qui suit, on présente quelques variantes du principe de contraction de Banach.

1.4.1 Contraction de Rakotch

Après les travaux de Banach, il y a eu de nombreux essais pour améliorer et généraliser le problème d'existence et d'unicité, l'un de ces travaux fut celui de Rakotch [33], où il a remplacé la constante de la contraction par une fonction positive, décroissante à image dans l'intervalle [0,1[.

Théorème 1.4.1 *[33] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant :*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \text{ pour chaque } x, y \in X,$$

où $\alpha : \mathbb{R}^+ \to [0, 1)$ est une fonction décroissante. Alors T admet un point fixe unique dans X.

1.4.2 Contraction de Kannan

N'importe quelle contraction est continue sur X. Il est normal de poser la question s'il existe des conditions contractive, qui n'impliquent pas la continuité de T. Cette question a été répondu d'une manière affirmative par R. Kannan [25] en 1968.

Définition 1.4.1 *[25] Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$. On dit que T est une application de Kannan s'il existe $h \in [0, \frac{1}{2}[$, tel que :*

$$d(Tx, Ty) \leq h[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Théorème 1.4.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application de Kannan. Alors T admet un point fixe unique dans X.*

1.4.3 Contraction de Reich

Théorème 1.4.3 *[35] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

s'il existe des nombres positifs a, b, c avec $a + b + c < 1$, tels que, pour tous $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

1.4.4 Contraction de Hardy et Rogers

Théorème 1.4.4 *[22] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*
s'il existe des nombres positifs a_i avec $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$, tels que, pour tous $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Tx) + a_3 d(y, Ty) + a_4 d(x, Ty) + a_5 d(y, Tx).$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Chapitre 2

Espace métrique généralisé

Dans ce chapitre, on introduit la notion d'espace métrique généralisé, en définissant ce qu'on appelle une métrique à valeurs vectorielles. Dans ce contexte on présente l'un des outils de la théorie du point fixe appelé le théorème de Perov [30]. Ce théorème est considéré comme un principe de contraction généralisé. Pour monter l'utilité de l'espace métrique généralisé, on présente une comparaison entre la norme vectorielle et la norme scalaire.

2.1 Définitions de base résultats auxiliaires

Définition 2.1.1 *[30] Un espace métrique généralisé* (X, d) *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n_+$ *appelée distance ou métrique généralisé, qui satisfait les propriétés suivantes :*

i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Remarque 2.1.1 *Ici, l'inégalité entre deux éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est définie com-*

posante par composante.

Définition 2.1.2 *[40] Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ où $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des matrices carrées à termes non négatifs. On dit que la matrice A converge vers zéro si et seulement si $A^k \to 0$, quand $k \to \infty$ ($A^k \to 0$: zéro matrice).*

Définition 2.1.3 *[30] Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Un opérateur $f : X \to X$ est dit A-contraction si et seulement si :*

1. *La matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ converge vers zéro.*
2. *$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y), \quad$ pour tout $x, y \in X$.*

Définition 2.1.4 *[36] Soit (X, d) un espace métrique généralisé. On dit que $f : X \to X$ est un opérateur de Picard si :*

i) *$Fix(f) = x^*$.*

ii) *Pour tout $x_0 \in X$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers le point fixe de f.*

2.2 Résultats principaux

2.2.1 Théorie du point fixe de Perov

Théorème 2.2.1 *(**Théorème de Perov** [30]) : Soit (E, d) un espace métrique généralisé complet avec $d : E\times E \to \mathbb{R}^n$ et soit l'application $N : E \to E$, tel que*

$$d(N(u), N(v)) \leq Md(u, v), \quad \forall u, v \in E,$$

où M est un matrice carrée de composantes non négatives. Si la matrice M converge vers zéro, alors :

1. N admet un point fixe unique u.

2. $d(N^k(v), u) \leq M^k(I - M)^{-1} d(N(v), v), \quad$ pour tout $v \in E$ et $k \geq 1$.

Lemme 2.2.1 *([32],[37]) Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. M est une matrice convergente vers zéro.

2. $(I - M)$ est une matrice non-singulier (inversible) et

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$$

3. Les valeurs propres de M sont dans le disque ouvert, c'est-à-dire $\mid \lambda \mid < 1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $det(M - \lambda I) = 0$.

4. La matrice $(I - M)$ est non-singulier et $(I - M)^{-1}$ a des éléments non négatifs.

Nous concluons cette partie par un autre résultat abstrait bien connu dans l'analyse fonctionnelle non linéaire.

Théorème 2.2.2 ***(Schauder)*** *Soit E un espace de Banach, D une partie fermé, borné et convexe dans E. Alors toute application continue $N : D \to D$ possède au moins un point fixe.*

Dans la suite, nous intéressons à la solvabilité du système d'opérateur semi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} N_1(u_1, u_2) = u_1 \\ N_2(u_1, u_2) = u_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

dans un espace de Banach X avec la norme $|.|$. Soit $N_i : X^2 \to X (i = 1, 2)$ des opérateurs non linéaires.

Il est clair que le système (2.1) peut être présenté comme un problème du point fixe :

$$N(u) = u \tag{2.2}$$

dans l'espace X^2, où $u = (u_1, u_2)$ et $N = (N_1, N_2)$. Le but de cette partie est de montrer qu'on peut obtenir des résultats amélioré pour le système (2.1), si dans X^2 on considère la norme vectorielle

$$\|u\| = \begin{pmatrix} |u_1| \\ |u_2| \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

pour $u = (u_1, u_2) \in X^2$, au lieu de la norme scalaire habituelle :

$$\begin{aligned} |u|_l &= |u_1| + |u_2|, \\ |u|_m &= \max\{|u_1|, |u_2|\}, ou \\ |u|_e &= \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}. \end{aligned}$$

2.3 Application du théorème de Perov

Au début, nous présentons une application du théorème de Perov pour le système (2.1).

Théorème 2.3.1 *Supposons que pour chaque $i \in \{1, 2\}$, il existe des nombres non négatifs a_i et b_i tel que :*

$$| N_i(u_1, u_2) - N_i(v_1, v_2) | \leq a_i \mid u_1 - v_1 \mid + b_i \mid u_2 - v_2 \mid \tag{2.4}$$

pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in X$. De plus, nous supposons que

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ est une matrice convergente vers zéro.} \tag{2.5}$$

Alors (2.1) admet une solution unique $u = (u_1, u_2)$ dans X^2 et $N_i^k(v) \to u_i$, quand $k \to \infty$, pour chaque $v \in X^2$ et $i = 1, 2$.

Preuve. *La condition* (2.4) *peut être réécrit comme suit :*

$$\| N(u) - N(v) \| \leq M \| u - v \|.$$

Ainsi, le théorème du point fixe de Perov est applicable avec $E = X^2$ *et* $d(u,v) = \| u - v \|$.

2.4 Application du théorème de Schauder

Théorème 2.4.1 *Supposons que pour chaque* $i \in \{1,2\}$*, l'opérateur* N_i *est continue et qu'il existe des nombres non négatifs* a_i, b_i *et* c_i*, tel que :*

$$|N_i(u_1,u_2)| \leq a_i|u_1| + b_i|u_2| + c_i \tag{2.6}$$

pour tout $u_1, u_2 \in X$. *De plus, supposons que la condition* (2.5) *est satisfaite. Alors* (2.1) *admet au moins une solution* $u = (u_1, u_2)$ *avec*

$$\begin{bmatrix} |u_1| \\ |u_2| \end{bmatrix} \leq (I - M)^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Preuve. *On peut écrire* (2.6) *sous forme de matrice comme suit :*

$$\begin{bmatrix} |N_1(u)| \\ |N_2(u)| \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} |u_1| \\ |u_2| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

On applique le théorème de Schauder pour une restriction de N *à un sous ensemble de* X^2 *de la forme :*

$$D = \{u = (u_1,u_2) \in X^2 : |u_1| \leq R_1 \text{ et } |u_2| \leq R_2\}.$$

Ainsi, le problème d'existence se réduit à la condition d'invariance $N(D) \subset D$. *Par conséquent, il faut trouver deux nombres non négatifs* R_1, R_2 *tel que :*

$$|u_1| \leq R_1,\ |u_2| \leq R_2 \text{ implique } |N_1(u)| \leq R_1,\ |N_2(u)| \leq R_2.$$

D'après (2.7)*, si* $|u_i| \le R_i$ *pour* $i = 1, 2$*, alors*

$$\begin{bmatrix} |N_1(u)| \\ |N_2(u)| \end{bmatrix} \le M \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, il suffirait que

$$M \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

qu'est

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

L'équation (2.8) *nous donne des constantes non négatives* R_1, R_2*, puisque* $c_1, c_2 \ge 0$ *et* $(I - M)^{-1}$ *a des éléments non négatifs d'après le lemme* (2.2.1)*(4).*

2.5 Comparaison entre la norme vectorielle et la norme scalaire

Le but de cette partie est de montrer que les résultats de la section (2.3.1), obtenu en utilisant la norme vectorielle (2.3) sont meilleurs que les résultats où on utilise la norme scalaires dans X^2.

1. D'abord, on considère la norme scalaire $|u|_l = |u_1| + |u_2|$. Alors, si N_1, N_2 vérifiant les conditions de lipschitz (2.4), on obtient :

$$|N(u) - N(v)|_l \le \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|u - v|_l \tag{2.9}$$

pour tout $u, v \in X^2$. De la même manière , si N_1, N_2 satisfaisant (2.6), alors

$$|N(u)|_l \le \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|u|_l + c_1 + c_2. \tag{2.10}$$

Enfin, si N_1, N_2 sont comme dans le théorème (2.4.1), et u est une solution quelconque de :

$$\begin{cases} \lambda N_1(u_1, u_2) = u_1 \\ \lambda N_2(u_1, u_2) = u_2 \end{cases}$$

Alors

$$|u|_l \leq \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|u|_l + c_1 + c_2. \quad (2.11)$$

Ainsi, le principe de contraction de Banach et le théorème de Schauder peut être appliquer à condition que

$$\alpha = \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} < 1. \quad (2.12)$$

2. Si dans X^2, on considère la norme scalaire $|u|_m = max\{|u_1|, |u_2|\}$, alors les formules correspondantes pour (2.9)-(2.11) sont respectivement :

$$\begin{aligned} |N(u) - N(v)|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|u - v|_m \\ |N(u)|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|u|_m + \max\{c_1 + c_2\} \\ |u|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|u|_m + \max\{c_1 + c_2\}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec ce choix de la norme scalaire dans X^2, les trois résultats précédents de l'analyse fonctionnelle non linéaire s'appliquent à condition que

$$\beta = \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} < 1.$$

3. De la même manière, si dans X^2 on considère la norme euclidienne $|u|_e = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}$, alors les formules correspondantes pour (2.9)-

(2.11) sont respectivement :

$$\begin{aligned}|N(u)-N(v)|_e &\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2}|u-v|_e\\ |N(u)|_e &\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2}|u|_e+\sqrt{c_1^2+c_2^2}\\ |u|_e &\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2}|u|_e+\sqrt{c_1^2+c_2^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, la condition d'applicabilité des résultats abstraits ci-dessus est l'inégalité suivante :

$$\gamma = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2 < 1. \tag{2.13}$$

Les exemples suivants montrent qu'en général la condition que M est une matrice convergente vers zéro et plus faible que les conditions (2.12)-(2.13)

Exemple 2.5.1 *Soit* $M=\begin{bmatrix} a & a \\ b & b\end{bmatrix}$*, les valeurs propres de* M *sont :* $\lambda_1=0$, $\lambda_2=a+b$. *Par conséquent,* M *converge vers zéro si et seulement si* $a+b<1$. *D'autre part :*

$$\alpha=a+b, \qquad \beta=\max\{2a,2b\}, \qquad \gamma=2(a^2+b^2).$$

Ainsi, chacune de ces condition $\beta<1$ *et* $\gamma<1$ *sont plus restrictive que la condition* M *converge vers zéro.*

Exemple 2.5.2 *Soit* $M=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b\end{bmatrix}$*, les valeurs propres de* M *sont :* $\lambda_1=0$, $\lambda_2=a+b$. *Alors* M *converge vers zéro si et seulement si* $a+b<1$. *Maintenant :*

$$\alpha=max\{2a,2b\}, \qquad \beta=a+b, \qquad \gamma=2(a^2+b^2).$$

Ainsi, chacune de ces condition $\alpha<1$ *et* $\gamma<1$ *sont plus restrictive que la condition* M *converge vers zéro.*

Exemple 2.5.3 *Soit* $M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$*, les valeurs propres de* M *sont :* $\lambda_1 = a, \lambda_2 = c$*. Alors* M *converge vers zéro si et seulement si* $\max\{a, c\} < 1$*. Par conséquent :*

$$\alpha = max\{a, b + c\}, \qquad \beta = \max\{a + b, c\}, \qquad \gamma = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ainsi, chacune de ces condition $\alpha < 1, \beta < 1$ *et* $\gamma < 1$ *sont plus restrictive que la condition* M *converge vers zéro.*

Chapitre 3

Théorème du point fixe dans un espace b-métrique et espace b-métrique généralisé

3.1 Théorème du point fixe dans un espace b-métrique

La notion d'espace b-métrique a été introduite par Bakhtin dans [3] où il a généralisé la notion d'espace métrique. Par la suite, cette notion a été utilisé par Czerwik dans [19] où il a donné une caractérisation du célèbre théorème du point fixe de Banach dans le contexte d'espace b-métrique complet. Après Czerwik plusieurs auteurs sont intéressés a l'existence et l'unicité du point fixe dans le cadre d'espaces b-métrique voir ([2], [20], [19], [23], [28], [34], [1], [9],[11], [12]).

Dans de ce chapitre, on va présenter une étude qui améliore et généralise des résultats obtenue par M. Boriceanu dans [7] en utilisant une hypothèse plus faible que la condition de la continuité qui a été utilisée par M. Boriceanu. De plus, l'étude du problème bien posé est aussi discutée.

Définition 3.1.1 *[21] Soit X un ensemble non vide et $s \geq 1$ un nombre réel donné. L'application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est appelée b-métrique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\forall x, y \in X$: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, y \in X$: $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $\forall x, y, z \in X$: $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Le couple (X, d) est un espace b-métrique.

Notant que l'espace métrique (habituel) est évidemment un espace b-métrique. Cependant, Czerwik dans [21] montre qu'une b-métrique sur X n'est pas nécessairement une métrique sur X (voir aussi [8], [13]). Les exemples suivants montrent qu'une b-métrique sur X n'est pas nécessairement une métrique sur X.

Exemple 3.1.1 *Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ tel que :*
$d(x_1, x_2) = a \geq 2,\ d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3) = 1,\ d(x_n, x_n) = 0$ et $d(x_n, x_k) = d(x_k, x_n)$, pour $n, k = 1, 2, 3$. Alors

$$d(x_n, x_k) \leq \frac{a}{2}[d(x_n, x_i) + d(x_i, x_k)],\ \text{pour } n, k, i = 1, 2, 3.$$

Donc (X, d) est un espace b-métrique. Si $a > 2$ l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée, alors (X, d) n'est pas un espace métrique.

Exemple 3.1.2 *Soit (X, d) un espace métrique et $\rho(x, y) = [d(x, y)]^p$, où $p > 1$ est un nombre réel. Nous montrons que ρ est une b-métrique avec $s = 2^{p-1}$.*

Évidemment, les conditions (1) et (2) de la définition (3.1.1) *sont satisfaites. Si* $1 < p < \infty$ *alors la convexité de la fonction* $f(x) = x^p (x > 0)$ *implique que :*

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right),$$

c'est-à-dire que $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ *est vérifiée.*
Ainsi, pour chaque $x, y, z \in X$*, on a :*

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= (d(x,y))^p \\ &\leq (d(x,z) + d(z,y))^p \\ &\leq 2^{p-1}((d(x,z))^p + (d(z,y))^p) \\ &= 2^{p-1}(\rho(x,z) + \rho(z,y)). \end{aligned}$$

Donc, la condition (3) de la définition (3.1.1) *est vérifiée et* ρ *est une b-métrique. Notant que* (X, ρ) *n'est pas nécessairement un espace métrique.*

Par exemple, si $X = \mathbb{R}$ *est l'ensemble des nombres réels et* $d(x,y) = |x-y|$ *une distance usuelle, alors* $\rho(x,y) = (x-y)^2$ *est une b-métrique sur* $\mathbb{R}$ *avec* $s = 2$*, mais n'est pas une métrique sur* $\mathbb{R}$*, car l'inégalité triangulaire d'une métrique n'est pas vérifiée.*

Maintenant, nous présentons les notions de convergence, compacité, fermé et complet dans un espace b-métrique.

Définition 3.1.2 *[10] Soit* (X, d) *un espace b-métrique alors la suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *est convergente si et seulement s'il existe* $x \in X$ *tel que* $d(x_n, x) \to 0$*, quand* $n \to +\infty$*. Dans ce cas, on écrit* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$*.*

Définition 3.1.3 *[10] Une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans un espace b-métrique* (X, d) *est dite de Cauchy si et seulement si* $d(x_n, x_m) \to 0$*, quand* $n, m \to +\infty$*.*

Proposition 3.1.1 *[10] Dans un espace b-métrique (X, d), les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *une suite convergente a une limite unique,*
2. *chaque suite convergente est de Cauchy,*
3. *en général, la distance b-métrique n'est pas continue.*

Exemple 3.1.3 *Soit $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et soit $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est définie par*

$$d(m,n) = \begin{cases} 0, & si\ n = m, \\ \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right|, & si\ l'un\ de\ n, m\ est\ pair\ et\ l'autre\ est\ pair\ ou\ \infty, \\ 5, & si\ n, m\ sont\ impair\ et\ m \neq n, \\ 2, & sinon. \end{cases}$$

Ensuit, en considérant tous les cas possibles, on peut vérifier que (X, d) est un espace b-métrique avec $s = \dfrac{5}{2}$. Cependant, soit $x_n = 2n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$d(2n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0 \ quand\ n \to +\infty.$$

C'est à dire, $x_n \to +\infty$, mais $d(x_{2n}, 1) = 2 \nrightarrow 5 = d(+\infty, 1)$ quand $n \to +\infty$.

Définition 3.1.4 *[10] Soit (X, d) un espace b-métrique. Si Y est un sous ensemble non vide de X, alors la fermeture $\overline{Y}$ de Y est l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans Y, c'est-à-dire :*
$\overline{Y} = \{x \in X$ *: il existe une suite* $\{x_n\}$ *dans* Y *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x\}$.

Définition 3.1.5 *Soit (X, d) un espace b-métrique. Alors un sous ensemble $Y \subset X$ est appelé compact si et seulement si toute suite de Y admet une sous suite convergente dans Y.*

Définition 3.1.6 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique et* Y *une partie de* X*. On dit que* Y *est fermé si et seulement si toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* Y *converge vers un élément de* Y*.*

Définition 3.1.7 *[10] L'espace b-métrique* (X, d) *est complet si chaque suite de Cauchy dans* X *converge.*

3.2 Théorème du point fixe dans un espace b-métrique généralisé

Définition 3.2.1 *Soit* X *un ensemble non vide et* $s \geq 1$ *un nombre réel donné. L'application* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n_+$ *est appelée b-métrique généralisé à condition que :*

i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Le couple (X, d) *est un espace b-métrique généralisé.*

Remarque 3.2.1 *Dans la définition précédente, si* $n = 1$ *alors nous obtenons le concept d'espace b-métrique introduit par Bakhtin.*

L'avantage d'utiliser une b-métrique est d'obtenir des résultats concrets, non seulement en ce qui concerne l'existence du point fixe, mais aussi en ce qui concerne la convergence d'une suite d'approximation successive et l'étude de problème du point fixe bien posé.

Remarque 3.2.2 *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ *avec* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *et* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *et* $c \in \mathbb{R}$, *alors* $\alpha \leq \beta$ *veut dire* $\alpha_i \leq \beta_i$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$ *et par* $\alpha \leq c$ *veut dire* $\alpha_i \leq c$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$.

Maintenant, nous présentons les notions de convergence, compacité, fermé et complet dans un espace b-métrique généralisé.

Définition 3.2.2 *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans un espace b-métrique généralisé* (X, d) *est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n(\varepsilon);\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Définition 3.2.3 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique généralisé alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* X *est appelée suite convergente si et seulement s'il existe* $x \in X$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n(\varepsilon)$ *on a* $d(x_n, x) < \varepsilon$. *Dans ce cas, on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Remarque 3.2.3 *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $x \in X$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.

Définition 3.2.4 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique généralisé. Alors un sous ensemble* $Y \subset X$ *est appelé compact si et seulement si toute suite de* Y *admet une sous suite convergente dans* Y.

Définition 3.2.5 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique généralisé et* Y *une partie de* X. *On dit que* Y *est fermé si et seulement si toute suite* (x_n) *de* Y *converge vers un élément de* Y.

Définition 3.2.6 *L'espace b-métrique généralisé* (X, d) *est complet si chaque suite de Cauchy de* X *converge.*

Définition 3.2.7 *Une matrice* $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *est dite convergente vers zéro si et seulement si*

$$C^k \to 0, \qquad \text{quand } k \to \infty.$$

Pour d'autres exemples sur les matrices convergeant vers zéro, voir Turinici [39].

Notant que, pour prouver les résultats principaux, nous avons besoin du théorème suivant, dont une partie est un résultat classique en analyse matricielle, voir [32].

Théorème 3.2.1 *[32] Soit* $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) C *est une matrice convergente vers zéro.*

(ii) *Les valeurs propres de* C *sont dans le disque ouvert, c'est-à-dire* $\mid \lambda \mid < 1$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $det(C - \lambda I) = 0$.

(iii) $(I - C)$ *est une matrice inversible et*

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + ... + C^n + \dots$$

(iv) *La matrice* $(I-C)$ *est inversible et* $(I-C)^{-1}$ *a des éléments non négatifs.*

(v) $C^n q \to 0$ *et* $qC^n \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour chaque* $q \in \mathbb{R}^n$.

La notion de bien posé a été traitée dans de nombreux articles, par exemple l'article de M. Boriceanu [8].

Définition 3.2.8 *Soit* (X, d) *un espace b-métrique généralisé et* $f, g : (X, d) \to (X, d)$ *deux application. On dit que le problème du point fixe de* f *et* g *est bien posé si :*

i) *f et g admet un point fixe commun unique $z \in X$.*

ii) *Pour toute suite $\{x_n\} \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f(x_n), x_n) = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} d(g(x_n), x_n) = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z) = 0$.*

Le premier résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit (X, d) un espace b-métrique généralisé complet, supposons qui les opérateurs $f, g : X \to X$ satisfaisant les conditions suivantes : il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :*

(i) *$(I-N-Ps)$ est inversible $(I-N-Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ et $(I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*

(ii) *sC converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$,*

(iii) *$d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, g(y))] + P[d(x, g(y)) + d(y, f(x))]$, pour tout $x, y \in X$.*

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun z dans X.*
2. *Si, de plus $(I-M-2P)$ est inversible et $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors z est unique.*
3. *Si $(I-s(M+P)-s^2P)$ est inversible et $(I - s(M + P) - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.*

Preuve. *1. Soit x_0 un point de X, on considère la suite d'approximations successives $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour f et g, définie par :*

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= f(x_{2n}), \qquad n = 0, 1, \dots \\ x_{2n+2} &= g(x_{2n+1}), \qquad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(g(x_{2n-1}), f(x_{2n})) \\ &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, f(x_{2n})) + d(x_{2n-1}, g(x_{2n-1}))] \\ &\quad +P[d(x_{2n}, g(x_{2n-1})) + d(x_{2n-1}, f(x_{2n}))] \\ &= Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})] \\ &\quad +Pd(x_{2n-1}, x_{2n+1}) \\ &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})] \\ &\quad +Ps[d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})]. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq (I{-}N{-}Ps)^{-1}(M{+}N{+}Ps)d(x_{2n-1}, x_{2n}) = Cd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

De manière similaire, on a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(f(x_{2n}), g(x_{2n+1})) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, f(x_{2n})) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))] \\ &\quad +P[d(x_{2n}, g(x_{2n-1})) + d(x_{2n+1}, f(x_{2n}))] \\ &= Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\quad +Pd(x_{2n}, x_{2n+2}) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\quad +Ps[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq (I{-}N{-}Ps)^{-1}(M{+}N{+}Ps)d(x_{2n}, x_{2n+1}) = Cd(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

On obtient :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq C^n d(x_0, x_1), \qquad \textit{pour chaque } n \in \mathbb{N}.$$

Pour prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy, nous estimons* $d(x_n, x_{n+p})$ *en utilisant l'inégalité triangulaire :*

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + s^{p-2} d(x_{n+p-3}, x_{n+p-2}) \\
&\quad + s^{p-1} d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^{p-1} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1) + s^2 C^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + s^{p-2} C^{n+p-3} d(x_0, x_1) \\
&\quad + s^{p-1} C^{n+p-2} d(x_0, x_1) + s^{p-1} C^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\
&= sC^n d(x_0, x_1)[I + sC + \ldots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-2} C^{p-1}] \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1)[I + sC + \ldots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-1} C^{p-1}] \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1} \\
&\leq (sC)^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1}.
\end{aligned}$$

Notez que $(I - sC)$ *est inversible puisque* sC *converge vers zéro. Cela implique que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que* (X, d) *est complet, nous obtenons que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* X. *Ainsi, il existe* $z \in X$ *tel que* $d(x_n, z) \to 0$, *quand* $n \to \infty$.

Maintenant, nous montrons que z *est un point fixe pour* f *en estimant* $d(f(z), z)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
d(f(z), z) &\leq sd(f(z), g(x_{2n+1})) + sd(x_{2n+2}, z) \\
d(f(z), z) - sd(x_{2n+2}, z) &\leq sd(f(z), g(x_{2n+1}))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(f(z), g(x_{2n+1})) &\leq Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))] \\
&\quad +P[d(z, g(x_{2n+1})) + d(x_{2n+1}, f(z))] \\
&= Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\
&\quad +P[d(z, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, f(z))].
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
d(f(z), z) - sd(x_{2n+2}, z) &\leq sMd(z, x_{2n+1}) + sN[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\
&\quad +sP[d(z, x_{2n+2}) + s(d(x_{2n+1}, z) + d(z, f(z)))].
\end{aligned}$$

Passant à la limite et comme $(I - sN - s^2P)$ *est inversible et* $(I - sN - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$*, donc* z *est un point fixe pour* f*.*

Pour montrer que $g(z) = z$ *en utilisant la condition (iii), on trouve :*

$$\begin{aligned}
d(z, g(z)) &= d(f(z), g(z)) \\
&\leq Md(z, z) + N[d(z, f(z)) + d(z, g(z))] + P[d(z, g(z)) + d(z, f(z))].
\end{aligned}$$

On obtient :

$$(I - N - P)d(z, g(z)) \leq 0.$$

Notant que $(I - N - P)$ *est inversible et* $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$*,*
alors $z = g(z)$*, donc* z *est un point fixe commun pour* f *et* g*.*

2. *Maintenant, nous montrons que* f *et* g *ont un point fixe commun unique. Nous supposons qu'il existe un autre point fixe* w *pour* f*, en utilisant*

la condition (iii), on aura :

$$\begin{aligned} d(w,z) &= d(f(w),g(z)) \\ &\leq Md(w,z)+N[d(w,f(w))+d(z,g(z))]+P[d(w,g(z))+d(z,f(w))] \\ &\leq (M+2P)d(w,z). \end{aligned}$$

On obtient :

$$(I-M-2P)d(w,z) \leq 0.$$

Comme $(I-M-2P)$ *est inversible et* $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, *donc* z *est un point fixe commun unique pour* f *et* g.

3. *D'aprés les résultats précédents, nous savons que* f *et* g *ont un unique point fixe commun* z *dans* X. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite du point dans* X *tel que* $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_n),x_n)=0$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty} d(g(x_n),x_n)=0$, *on a :*

$$d(x_n,z) \leq s(d(x_n,g(x_n))+d(g(x_n),f(z)))$$

et

$$\begin{aligned} d(g(x_n),f(z)) &\leq Md(x_n,z)+N[d(x_n,g(x_n))+d(z,f(z))] \\ &\quad +P[d(x_n,f(z))+d(z,g(x_n))] \\ &\leq Md(x_n,z)+Nd(x_n,g(x_n))+Pd(x_n,z)+ \\ &\quad Ps[d(z,x_n)+d(x_n,g(x_n))] \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n,z) &\leq sd(x_n,g(x_n))+s[Md(x_n,z)+Nd(x_n,g(x_n))+Pd(x_n,z) \\ &\quad +Ps(d(z,x_n)+d(x_n,g(x_n)))]. \end{aligned}$$

Alors :

$$(I - s(M+P) - s^2P)d(z, x_n) \leq (sI + sN + s^2P)d(x_n, g(x_n)).$$

Passant à la limite et comme $(I - s(M+P) - s^2P)$ *est inversible et* $(I-s(M+P)-s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *donc* $d(z, x_n) \to 0$*, quand* $n \to \infty$.

Dans le théorème précédent si $s = 1$, nous obtenons le concept d'espace métrique généralisé, dans ce cas on a :

Corollaire 3.2.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique généralisé complet, supposons que les opérateurs* $f, g : X \to X$ *satisfaisant les conditions suivantes : il existe des matrices* $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *avec :*

(i) $(I - N - P)$ *est inversible et* $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,

(ii) C *est une matrice convergente vers zéro, où* $C = (I - N - P)^{-1}(M + N + P)$,

(iii) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, g(y))] + P[d(x, g(y)) + d(y, f(x))]$*, pour tout* $x, y \in X$.

Alors :

1. f *et* g *admet un point fixe commun* z *dans* X.
2. *Si de plus,* $(I - M - 2P)$ *est inversible et* $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *alors :*

   - z *est unique.*
   - *Le problème du point fixe (de* f *et* g*) est bien posé.*

Preuve. *On suit les mêmes étapes de la preuve du théorème* (3.2.2), *on obtient :*

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq C^n d(x_0, x_1)(I - C)^{-1}.$$

Puisque C converge vers zéro alors $(I - C)$ est inversible. Cela implique que la suite$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. D'autre part (X, d) est complet alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans X. Donc il existe $z \in X$ tel que $d(x_n, z) \to 0$, quand $z \to \infty$.

Maintenant, nous montrons que z est un point fixe pour f, pour tout entier positif n, en utilisant la condition (iii), on a :

$$\begin{aligned} d(f(z), x_{2n+2}) &= d(f(z), g(x_{2n+1})) \\ &\leq Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))] \\ &\quad +P[d(z, g(x_{2n+1})) + d(x_{2n+1}, f(z))] \\ &= Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\quad +P[d(z, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, f(z))]. \end{aligned}$$

Passant à la limite et comme dans l'espace métrique généralisé d est continue, alors $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Cela implique que $z = f(z)$ donc z est un point fixe pour f. Le reste de la preuve se fait comme dans la preuve du théorème (3.2.2).

Si $n = 1$ dans le théorème précédent, on obtient le concept d'espace b-métrique introduit par Bakhtin, dans ce cas on a :

Corollaire 3.2.2 *Soit (X, d) un espace b-métrique complet. Supposons que les opérateurs $f, g : X \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :*
Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

(i) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x,y) + N[d(x,f(x)) + d(y,g(y))] + P[d(x,g(y)) + d(y,f(x))]$, *pour tout* $x, y \in X$,

(ii) $sC < 1$ *avec* $C = \dfrac{M+N+Ps}{1-N-Ps}$, $sN + s^2P < 1$ *et* $N + Ps < 1$.

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun z dans X.*
2. *Si $M + 2P < 1$ alors z est unique.*
3. *Si $(s(M+P) + s^2P) < 1$, alors le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.*

Ensuite, nous donnons la définition d'un espace vectoriel b-normé.

Définition 3.2.9 *Soit X un espace vectoriel. Une b-norme sur X est une fonction :*

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in X;$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|^s \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $s \geq 1;$
3. $\|x+y\| \leq s(\|x\| + \|y\|), \quad \forall x, y \in X, s \geq 1.$

Un espace vectoriel muni d'une b-norme est appelé un espace vectoriel b-normé.

En tant qu'application du théorème (3.2.2), nous présentons ce théorème pour un système d'équations d'opérateurs.

Théorème 3.2.3 *Soit $(X, |.|)$ un espace vectoriel b-normé complet et soit $f, g : X \times X \to X$ deux opérateurs. Supposons qu'il existe $m_{ij}, n_{ij}, p_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $i, j \in \{1, 2\}$ tel que ,*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

pour chaque $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X \times X$, on a :

(1) $|f_1(x_1, x_2) - g_1(y_1, y_2)| \leq m_{11}|x_1 - y_1| + m_{12}|x_2 - y_2| + n_{11}(|x_1 - f_1(x_1, x_2)| + |y_1 - g_1(y_1, y_2)|) + n_{12}(|x_2 - f_2(x_1, x_2)| + |y_2 - g_2(y_1, y_2)|) + p_{11}(|x_1 - g_1(y_1, y_2)| + |y_1 - f_1(x_1, x_2)|) + p_{12}(|x_2 - g_2(y_1, y_2)| + |y_2 - f_2(x_1, x_2)|)$;

(2) $|f_2(x_1, x_2) - g_(y_1, y_2)| \leq m_{21}|x_1 - y_1| + m_{22}|x_2 - y_2| + n_{21}(|x_1 - f_1(x_1, x_2)| + |y_1 - g_1(y_1, y_2)|) + n_{22}(|x_2 - f_2(x_1, x_2)| + |y_2 - g_2(y_1, y_2)|) + p_{21}(|x_1 - g_1(y_1, y_2)| + |y_1 - f_1(x_1, x_2)|) + p_{22}(|x_2 - g_2(y_1, y_2)| + |y_2 - f_2(x_1, x_2)|)$.

De plus, nous supposons que la matrice $(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+), (I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ et sC converge vers zéro. Alors, le système :

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(u_1, u_2) = g_1(u_1, u_2), \\ u_2 &= f_2(u_1, u_2) = g_2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

a au moins une solution $z \in X \times X$. De plus, si la matrice $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$, alors la solution ci-dessus est unique.

Preuve. *Considérons $E = X \times X$ et les opérateurs f, g donnés par :*

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

$$g(y_1, y_2) = (g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)).$$

Notre système est maintenant représenté comme une équation du point fixe de la forme : $w = f(w) = g(w), w \in E$. *Notons également que les conditions* $(1) + (2)$ *peuvent être représentées comme suit :*

$$\begin{aligned}\|f(x) - g(y)\| &\leq M\|x-y\| + N(\|x - f(x)\| + \|y - g(y)\|) \\ &+P(\|x - g(y)\| + \|y - f(x)\|),\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in X \times X$. *Par conséquent, on applique le théorème* (3.2.2) *dans* (E, d) *avec* $d(u, v) = \|u - v\| = \begin{pmatrix} |u_1 - v_1| \\ |u_2 - v_2| \end{pmatrix}$.

3.2.1 Théorème du point fixe pour deux opérateurs sur un espace b-métrique généralisé avec deux b-métriques

Dans cette partie, nous présentons un autre résultat dans le cas d'espace b-métrique généralisé mais avec deux b-métrique.

Théorème 3.2.4 *Soit* (X, δ) *un espace b-métrique généralisé complet et d une autre b-métrique à valeur vectorielle sur* X. *Supposons que les opérateurs* $f, g : X \to X$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) *Il existe une matrice* $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *tel que* $\delta(x, y) \leq U.d(x, y)$, *pour tous* $x, y \in X$,

(b) f *est* (δ, δ)*-continue*

(c) *Il existe des matrices* $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *avec :*

  i) $(I - N - Ps)$ *est inversible et* $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$;

  ii) sC *converge vers zéro, avec* $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$;

  iii) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, g(y))] + P[d(x, g(y)) + d(y, f(x))]$, *pour tous* $x, y \in X$.

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun $z \in X$.*
2. *Si $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors z est un point fixe commun unique de f, g.*
3. *Si $(I-s(M+P)-s^2P)$ est inversible et $(I - s(M + P) - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.*

Preuve. *Comme dans la preuve du théorème*(3.2.2)*, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d-Cauchy. D'après la condition (a) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-Cauchy. Puisque (X, δ) est un espace b-métrique généralisé complet, il existe $z \in X$ tel que $\delta(x_{2n+1}, z) \to 0$, quand $n \to \infty$.*

Par (b), on a que $\delta(f(x_{2n}), f(z)) \to 0$, quand $n \to \infty$. Mais $\delta(f(x_{2n}), f(z)) = \delta(x_{2n+1}, f(z))$. Alors,on a $z = f(z)$. Donc z est un point fixe pour f et

$$\delta(f^n(x_0), z) \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Le reste de la preuve ce fait comme dans le théorème(3.2.2).

Maintenant, nous présentons le théorème précédent dans le cas d'espace métrique généralisé.

Corollaire 3.2.3 *Soit (X, δ) un espace métrique généralisé complet et d une autre métrique à valeur vectorielle sur X. Supposons que les opérateurs $f, g : X \to X$ vérifiant les conditions suivantes :*

a) *Il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ tel que, $\delta(x, y) \leq U.d(x, y)$, pour tous $x, y \in X$;*

b) *f est (δ, δ)-continue ;*

c) *Il existe des matrices* $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *avec :*

- **i)** $(I-N-P)$ *est inversible et* $(I-N-P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$;
- **ii)** C *converge vers zéro, avec* $C = (I-N-P)^{-1}(M+N+P)$;
- **iii)** $d(f(x), g(y)) \leq Md(x,y) + N[d(x,f(x)) + d(y,g(y))] + P[d(x,g(y)) + d(y,f(x))]$, *pour tout* $x, y \in X$.

Alors :

1. z *est un point fixe commun pour* f, g.
2. *Si* $(I-M-2P)$ *est inversible et* $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, *alors*
   - z *est un point fixe commun unique de* f, g.
   - *Le problème du point fixe (de* f *et* g*) est bien posé.*

Bibliographie

[1] H. Aydi, M-F. Bota, E. Karapinar, S. Moradi, A common fixed point for weak-ϕ-contraction on b-metric spaces,Fixed Point Theory. 13 (2) (2012), 337-346.

[2] A. Azam, N. Mehmood, J. Ahmed, S. Radenović, Multivalued fixed point theorems in conne b-metric spaces, J. Inequal. Appl. 2003 (2013), 1-9.

[3] I. A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasimetric spaces, Funct. Anal, Unianowsk Gos. Ped. Inst. 30 (1989), 26-37.

[4] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraies et leurs applications, Fund. Math. Monthly. 3 (1922), 133-181.

[5] S. Banach, Theorie des poetations lineaires, Monograph, PWN, Warszawa, (1932).

[6] L. M. Blumenthal, Theory and Applications of Distance Geometry, Oxford, 1953.

[7] M. Boriceanu, Fixed point theory on spaces with vector-valued b-metrics, Demonstratio Math, 4(2009), 831-841.

[8] M. Boriceanu, Fixed Point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics, studia Univ Babes, Bolya. Math. LIV (3)(2009), 1-14.

[9] M. Boriceanu, Strict fixed point theorems for multivaluded operators in b-metric spaces, Int. J. Mod. Math. 4 (2)(2009), 285-301.

[10] M. Boriceanu, M.Bota and A. Petrusel, Multivalued fractals in b-metric spaces, Cent. Eur. J. Math, 8(2) (2010), 367-377.

[11] M. Bota, E. Karapinar, O. Mlesnite, Ulam-Hyers, stability results for fixed point problems via alph-psi-contractive mapping in b-metric spaces, Abstr. Appl. Anal. 2013 (2013), 1-6.

[12] M. Bota, E. Karapinar, A note on Some results on multivalued weakly Jungck mappings in b-metric space, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), 1711-1712.

[13] M. Bota, A. Molnar, C. Varga, On Ekeland's variational principle in b-metric spaces, Fixed Point Theory. 12(2)(2011), 21-28.

[14] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying the inwardness condition, Mner. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

[15] A. L. Cauchy, Lesons sur les calculs differential et integral, Vols. Paris. 1 and 2 (1884).

[16] S. K.Chatterjea, Fixed-point theorems, C. R. Acad. Bulgare. Sci. 25 (1972), 727-730.

[17] L. B. Ciric, Generalization contractions and fixed point theorems, Publ. Math. Beograd. 12(1971), 19-26.

[18] L. B. Ciric, On common fixed points in uniform spaces, Publ. Inst. Math. 24(1978), 39-43.

[19] S. Czerwik, K. Dlutek, SL. Singh, Round-off stability of iteration procedures for operators in b-metric spaces, J. Natur. Phys. Sci. 11(1997), 87-94.

[20] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 46 (1998), 263-276.

[21] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Informe. Univ. Ostrav. 1(1993), 5-11.

[22] G. E. Hardy and T. D. Rogers, A generalization of a fixed point theorems of Reich, Canad. Math. Bull. 16(1973), 201-206.

[23] N. Hussain, MH. Shah, KKM mappings in cone b-metric spaces, Comput. Math. Appl. 62 (4)(2011), 1677-1684.

[24] L. F. Guseman, Fixed point theorems for mapping with a contractive iterate at a point, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 61-618.

[25] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta. Math. Soc. 60 (1968), 71-76.

[26] R. Lipschitz, Lehrbuch der Analyse, Bonn (1877).

[27] L. Liouville, Sur la théorie des équations différentielles linéaires sur le dévelopement des functions en series, J. Math. Pure. Appl. 1 (1836), 561-614.

[28] S.Nadler, Multi-valuded contraction mappings, Pac. J. Math. Soc. 20 (1969), 475-488.

[29] G. Peano, Demonstration de l'integrabilité des équations différentielles primo ordine, Math. Ann. 37 (1890), 182-228.

[30] A. I. Perov, On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn. 2 (1964), 115-134.

[31] E. Picard, Mémoire sur la théorie des équations aux derivées partielles et la méthode des approximations succesive, J. Math. Pure. Appl. 6 (1890), 657-663.

[32] R. Precup, The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, Math. Comput. Modelling, Vol. 49, No. 3-4 (2009), 703-708.

[33] E. Rakotch, A note on contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459-465.

[34] S. Reich, Fixed points of contractive functions, Boll. Unione Mat. Ital. 5 (1972), 26-42.

[35] S. Reich, A comparison of various definitions, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257-290.

[36] I. A. Rus, Generalized contractions and applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001

[37] I. A. Rus, Principles and applications of the fixed point theory, Dacia, Cluj, 1979.

[38] V. M. Sehgal, On fixed and periodic points for a class of mappings, J. London Math. Soc. 5 (1972), 571-576.

[39] M. Turinici, Finite-dimensional vector contractions and their fixed points, Studia Universitatis Babeş-Bolyai.Mathematica, 35, no. 1 (1990), 30-42.

[40] R. S. Varga, Matrix iterative analysis, Vol. 27, Springer, Berlin, 2000.