République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partieles et Applications

Thème

Théorème de point fixe commun sous la contraction de Pata dans un espace b-métrique rectangulaire

Présenté Par :
Sahoui Mohammed
Aouine Souhail

Devant le jury :

Mr Merghadi Faicel	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mm Bazine Safia	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr Berrah Khaled	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2019

Remerciments

Nous remercions en premier lieu **ALLAH**, Le Tout Puissant qui nous a guidé par sa grandeur et fait en sorte que nos promesses deviennent une réalité par ce modeste travail.
Au terme de cette recherche nous somme très heureux de pouvoir remercier tous ceux et celles qui notre accompagné et soutenu tout le long de cette aventure.

Nous voudrions tout d’abord remercier très vivement et sincèrement notre encadreur Monsieur le Professeur **BERRAH KHALED** de nous avoir confié ce sujet de thèse et qui nous avons honoré d’avoir accepté de diriger ce travail, pour l’aide compétente qu’il nous apporté, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer, et son soutien qui nous avons permis d'achever ce travail.

Nos respect et nos vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur **Merghadi Faicel** et le Professeur **Bazine Safia** d’avoir accepté de juger ce travail et pour l’intérêt qu’ils
ont porté à notre thèse, leurs présence dans ce Jury nous fait un grand honneur.

Nous remercions tout spécialement nos chers parents pour
ses prières, ses recommandations, et pour nous avoir activement apporté un soutien inconditionnel tout au long de nos études.
Enfin, a tout qui nous aide de réaliser notre propre travail.

Résumé

Dans ce travail, nous étudierons la théorie du point fixe de type "**Pata**" dans un espace métrique, un espace b-métrique et un espace métrique b-rectangulaire. La preuve des théorèmes des points fixes communs de type "**Pata**" dans les mêmes espaces est établie par la suite. Nous avons donné également quelques nations essentielles et des exemples soutenant les résultats obtenus.

Mots clés :

Espace métrique, Espace b-métrique, Espace b-rectangulaire, Point fixe commun, Faiblement compatible, Contraction de Pata type.

Abstract

In this work, we study the theory of fixed point "type of Pata" in a metric space, b-metric space and b-rectangular metric space. After that, we prove common fixed point theorem Pata’s type in the same spaces. We also gave some essential nations and some examples supporting these results.

Keywords :

Metric space, b-metric space, b-rectangular space, Common fixed point, Weakly compatible, Cantraction Pata-type.

ملخص

قمنا في هذا العمل المتمثل في مذكرة تخرج ماستر رياضيات بدراسة نظرية النقطة الصامدة لنوع **باتا** في فضاء متري،فضاء بي–متري وفضاء متري–بي مستطيلي ثم قمنا بإثبات نظرية النقطة الصامدة المشتركة نوع باتا في نفس الفضاءات سابقة الذكر.

سبق هذا تقديمنا لبعض المفاهيم الضرورية والأمثلة لتوضيح التعاريف ودعم النتائج.

الكلمات المفتاحية

فضاء متري، فضاء بي–متري، فضاء متري–بي، مستطيلي، النقطة الصامدة المشتركة، توافق ضعيف، تقلص نوع **باتا**.

.

Table des matières

Introduction générale

Comme il est bien connu, la contraction de **Banach** (1922) [1] est un résultat indispensable du théorème du point fixe. Cependant, la contraction de **Pata** (2011) qui est récente et très puissante par rapport à la contraction de **Banach** représente actuellement des outils mathématiques de base qui montrent l'existence de solutions pour divers types d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire en fournissant les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence pour de considérables problèmes non-linéaires différent.

La capacité de recherche de la théorie des points fixes dans l'espace métrique a énormément augmenté dans les années 1970. Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorèmes du point fixe en utilisant des applications contractions plus généralisée que les applications contractantes précédentes conçues par **Bianchini** et **Carist**. Dans les années 1980 **Sessa** et **Jungck**, développait la notion de la commutativité faible et les applications compatibles. Par la suite, un théorème du point fixe commun a été introduit par **Sessa**, **Jungck**. Ce sont des types importants d'applications car ils ont fourni l'existence d'un point fixe pour les applications non continues pour la première fois dans la littérature. En outre, il existe d'importantes généralisations d'espaces métriques comme l'espace b-métrique, l'espace rectangulaire, l'espaces b-rectangulaire [9, 10, 19].

Le concept d'espace b-métrique [3] a été introduit par **Czerwik** sous forme de confirmation d'un espace métrique tel que l'inégalité triangulaire est remplacée par $d(x, y) \leq s[d(x, z)+d(z, y)]$ avec $(s \geq 1)$, pour tous $x, y, z \in X$. D'autre part, le concept d'un espace métrique rectangulaire (généralisé) introduit par **Brianciari** [6], tel que l'inégalité rectangulaire est remplacée par une modification ou l'inégalité triangulaire. Récemment, en combinant un espace b-métrique et un espace métrique rectangulaire, Roshan et al [17] ont introduit le concept d'espace métrique b-rectangulaire pour obtenir d'autres résultats dans cet espace.

La contraction de **Pata** qui est un nouveau résultat dans la théorie du point fixe. **Pata** prouvait un résultat qui semblé être plus fort que celui du principe de contraction de **Banach** et **boyd**. Plus tard plusieurs travaux assurerait l'existence et l'unicité du point fixe et le point fixe commun avec des conditions plus faibles à la contraction et les applications de type **Kannan** et de type **Chatterjea** qui ont été introduits [5].

L'un des aspects importants à étudier, concernent le théorème du point fixe commun dans l'espace b-rectangulaire est celui d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes impliquant l'existence et l'unicité d'un point fixe commun.

L'objectif de ce travail est l'étude de quelques théorèmes du point fixe de type **Pata** dans des espaces métrique, b-métrique et b-rectangulaire.

Dans ce cadre en plus d'une introduction générale, notre travail comporte trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré à quelques définitions et quelques notions de bases nécessaire pour la compréhension du reste de notre travail.

Dans le deuxième chapitre nous allons prouver une généralisation du théorème du point fixe de **Chaterjea** en se basant sur les résultats de **Pata**. En plus nous mettrons des résultats du point fixe commun de type Pata pour deux applications dans l'espace métrique et l'espace b-métrique.

Dans le dernier chapitre nous allons démontrer le point fixe commun dans l'espace métrique b-rectangulaire sous la contraction de **Pata.**

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons d'bord présenté quelques définitions des espaces sur lesquels nous allons travailler, espace metique, b-metrique, b-rectangulaire, avec quelques exemples à expliquer, puis nous avons présenté quelques théories qui nous aideront à travailler dans d'autres chapitres, ainsi que des exemples et les remarques importants et les lemmes que nous avons utilisés dans les preuves.

1.1 Notions de base

Définition 1.1 [3] ***"Espace métrique"*** *un espace métrique* (X, d) *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$*, appelèe distance ou métrique, qui satisfait les proprietés suivantes :*

a. $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$, et $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

b. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique),

c. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité traingulaire).

Exemple 1.1 *Notons* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *L'application* $d : \Bbbk \times \Bbbk \to \mathbb{R}_+$ *dèfinie par*

$d(x, y) = |x - y|$, *est un distence.*

Exemple 1.2 *les distances usuelle sur* $\mathbb{R}^n$ *on peut considérer comme suit :*

a. $d_\infty(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$,

b. $d_1(x,y) = \max\{x_i - y_i\}$.

Définition 1.2 [2] *Soit* X *un ensemble non vide, (avec* $s \geq 1$*). Soit* $d : X \times X \to [0,+\infty)$ *un application. Alors, on dit que* (X,d) *est un espace b-métrique si pour tous* $x,y,z \in X$*, les conditions suivantes sont vérifiées :*

a. $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

b. $d(x,y) = d(y,x)$ *(symmétrie),*

c. $d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)]$ *(inégalité b-traingulaire).*

Exemple 1.3 [4] *Soit* l_p $(0 < p < 1)$ *toutes les fonctions réelles* $x(t)$, $t \in [0,1]$ *tel que :*

$\int_0^1 |x(t)|^p \, dx < \infty$

on prend

$d(x,y) = \left[\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}$,

pour chaque $x, y \in l_p$.

Alors (l_p, d) *est un espace b-métrique.*

Exemple 1.4 *Soit* $X = [0,1]$ *définiié* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *par* $d(x,y) = |x-y|^2$*. On a Alors* (X,d) *est un espace b-métrique avec constante* s.

Exemple 1.5 [8] *Soit* $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et soit* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *définie comme suit :*

$$d(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{si } m = n, \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, & \text{si l'un de } m,\, n \text{ est pair et l'autre est pair ou } \infty, \\ 5, \text{ si l'un de } m,n \text{ est impair et l'autre est impair } (\text{et } m \neq n) \text{ ou } \infty, & \\ 2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

On peut vèrifer que (X,d) *est un espace b-mérique avec* $s = 5/2$ *cependant, soit* $x_n = 2n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

alors $d(2n, \infty) = \frac{1}{2}n \to 0$ quand $n \to \infty$,

c'est $x_n \to \infty$, mais $d(x_n, 1) = 2 \nrightarrow 5 = d(\infty, 1)$ quand $n \to \infty$.

Remarque 1.1 *Il est clair que la dèfinition de l'espace métrique est un cas partu-clier dans l'espace b-métrique.*

Définition 1.3 [3] *Soit X un ensemle non vide, et $d : X \times X \to [0, +\infty)$ est une application, tel que pour tout $x, y \in X$ et tous les points distincts $u, v \in X$, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

a. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

b $d(x, y) = d(y, x)$,

c. $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$ *("inégalité rectangulaire").*

Alors d est métrique rectangulaire et (X, d) est appelé un espace métrique rectangulaire.

Exemple 1.6 [12] *Soit $A = \{0, 2\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ et $X = A \cup B$. Définie $d : X \times X \to [0, +\infty)$ comme suit :*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, \; x \neq y \text{ et } \{x,y\} \subset A \text{ ou } \{x,y\} \subset B, & \\ y, & x \in A, \; y \in B, \\ x, & x \in B, \; y \in A. \end{cases}$$

Alors (X, d) est un espace mértique rectangulaire complet.

Comme combainaison d'espace b-métrique et rectangulaire, espace métrique b-rectangulaire a introduit $[7, 17]$.

Définition 1.4 $[7, 17]$ *Soit X un ensemble non vide,.Et $(s \geq 1)$. Soit $d : X \times X \to [0, +\infty)$ une application, tel que pour tout $x, y \in X$ et tous distincts $u, v \in X$,*

a. $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$,

b. $d(x, y) = d(y, x)$,

c. $d(x, y) \leq s[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$ ("inégalité b-rectangulaire").

Alors (X, d) est appelé un espace métrique b-rectangulaire ou b-généralisé.

Exemple 1.7 [17] *Soit* (X, ρ) *un espace métrique rectangulaire.*
Alors pour $p \geq 1$ $d(x, y) = [\rho(x, y)]^p$ *définie une métrique b-rectangulaire sur* X *avec le paramétre* $s \leq 4^{p-1}$.

Puisque
on a $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right),$

donc

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= [\rho(x, y)]^p, \\
&\leq [\rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y)]^p, \\
&\leq 2^{p-1}\left[[\rho(x, u)]^p + [\rho(u, v) + \rho(v, y)]^p\right], \\
&\leq 2^{p-1}\left[[\rho(x, u)]^p + 2^{p-1}[\rho(u, v) + \rho(v, y)]^p\right], \\
&= 2^{p-1}[\rho(x, u)]^p + 4^{p-1}[\rho(u, v) + \rho(v, y)]^p, \\
&\leq \max\left\{2^{p-1}, 4^{p-1}\right\}[\rho(x, u)^p + \rho(u, v)^p + \rho(v, y)^p],
\end{aligned}$$

donc

$$d(x, y) \leq 4^{p-1}[\rho(x, u)^p + \rho(u, v)^p + \rho(v, y)^p].$$

Alors $s \leq 4^{p-1}$.

Remarque 1.2 *Il est clair que la dèfinition de l'espace b-métrique est un cas partu-clier dans l'espace métrique b-rectangulaire.*

Exemple 1.8 [12] *Soit* (X,ρ) *un espace b-métrique avec le paramétre* s'*, alors c'est aussi un espace b-rectangulaire avec le paramétre* $s^2 \leq s'$*.*

Puisque

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq s\left[d(x,z)+d(z,y)\right], \\ &\leq s\left[s\left[d(x,t)+d(t,z)\right]+d(z,y)\right], \\ &\leq s^2\left[d(x,t)+d(t,z)\right]+sd(z,y), \\ &\leq \max\left\{s^2,s\right\}\left[d(x,t)+d(t,z)+d(z,y)\right], \end{aligned}$$

donc $s' \geq s^2$.

Définition 1.5 [1] *" **Suite de Cauchy**" Une suite* $\{x_n\}_{n\in N}$ *dans un espace métrique* (X,d) *est dite de **Cauchy** si :*

$$\varepsilon>0,\ \exists n\in N,\ \forall p,q\geq n,\ d(x_p,x_q)<\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$lim_{p,q\to\infty}d(x_p,x_q)=0.$$

Exemple 1.9 *Dans* $(\mathbb{R},|.|)$ *la suite définie par :*

$$u_n=\frac{5}{n},\ \textit{est un suite de } \boldsymbol{Cauchy}$$

Soit $p,\ q\in N^*,\ p>q$

$$\begin{aligned} d(x_p,x_q) &= \left|\frac{5}{p}-\frac{5}{q}\right|, \\ &= \left|\frac{5(q-p)}{pq}\right|, \\ &\leq \frac{5p}{pq}\leq\frac{5}{q}, \\ &\leq \lim_{q\to\infty}\frac{5}{q}=0. \end{aligned}$$

Définition 1.6 [1]*"**Suite convergente**" Soit* (X,d) *un espace mertique, alors* $\{x_n\}_{n\in N}$ *une suite dans* X *est appelée suite convergente si et seulement si :*

$$\varepsilon > 0,\ \exists n(\varepsilon) \in N,\ \forall n \geq n(\varepsilon),\ d(x_n, x) < \varepsilon,$$

on note que

$$lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.1 *Toute suite convergente est de* ***Cauchy****. L'inverse est généralement faux.*

Définition 1.7 *"**Continuité**" Soient (X,d) et (X,d') deux espaces métrique et $T:(X,d) \longrightarrow (X,d')$ une application dite séquentiellement continue a $x_0 \in X$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x,x_0) \leq \delta \Longrightarrow d'(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

Définition 1.8 [1] *"**Espace métrique complet**" Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de* ***Cauchy*** *de X converge dans X*

Définition 1.9 *Soit f et g deux applications sur un ensemble non vide X. Si $fx = gx$, pour certains x de X, x est appelé le point de coincidence de f et g.*

1.2 Applications

En 1986, **Jungck** introduit le concept de la notion plus généralisée de la commutativité, dite compatibilité, qui est plus générale que celle de faible commutativité. En utilisant des applications compatibles au lieu d'utiliser les applications faiblement comutatives, les mathématiciens ont utilisé ces théorèmes pour prouver l'éxistence d'un point fixe commun, nous allons voir dans ce qui suit les concepts.

1.2.1 Applications commutatives

Définition 1.10 [10] *Soit S, T deux applications d'un espace métrique (X,d) dans lui même. S et T sont commutatives si $STx = TSx$, pour tout $x \in X$.*

Définition 1.11 [19] *Soit S et T deux applications d'un espace métrique(X,d) dans lui même. S et T sont dits faiblement commutatives si et seulement si :*

$$d(STx, TSx) \leq d(Tx, Sx) \text{ pour tout } x \in X.$$

Remarque 1.3 *De toute évidence, les applications commutatives sont dites faiblement commutatives, mais l'inverse est pas nécessairement vrai.*

1.2.2 Applications compatibles

Définition 1.12 [9] *Soit f et g deux applications définies sur un espace métrique (X,d) dans lui même. Alors, on dit que f et g sont des applications compatibles sur X si :*

$$\lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0.$$

Quand $\{x_n\}$ est une suite en X telle que

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t,$$

pour un certains points $t \in X$.

Remarque 1.4 *De toute évidence, les applications faiblement commutatives sont dites compatibles, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.*

Exemple 1.10 *Soit $X = (-\infty, \infty)$ avec la métrique euclidienne d. On définie les applications $f, g : X \to X$ par :*

$$fx = x^3, \; gx = 2 - x \text{ pour tout } x \in X.$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = 1,$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} fgx_n = \lim_{n\to\infty} f(2-x_n) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} gfx_n = \lim_{n\to\infty} g(x_n^3) = 1.$$

Donc la paire (f, g) est compatible.

Lemme 1.1 [19] *Soit* $\{y_n\}$ *une suite dans un espace métrique* (X, d) *satisfaisant*

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda d(y_n, y_{n+1}),$$

pour $n = 1, 2, ...,$ *où* $0 < \lambda < 1$. *Alors* $\{y_n\}$ *est un suite de* ***Cauchy*** *dans* X.

1.2.3 Applications faiblement compatibles

Définition 1.13 [11] *Soit* f *et* g *deux applications définies sur un ensemble* X. *Alors* f *et* g *sont dites faiblement compatibles s'ils commutent oux points de coincidence.*

$(i.e)$, *si* $fu = gu$, *pour tout* $u \in X$, *alors* $fgu = gfu$.

Exemple 1.11 *Soit* $X = [0, 1]$ *muni de la métrique euclidienne* d. *On définie les applications* f, g *par :*

$$fx = \frac{1}{2}x, \; gx = \frac{x}{2+x}, \; \textit{pour tout } x \in X.$$

Le point 0 satisfaisant $f(0) = g(0) = 0$ et $fg(0) = gf(0) = 0$, alors la paire (f, g) est faiblement compatible.

1.3 Application contractante

Définition 1.14 *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *une application dite :*

1. *Lipschitzienne s'il existe une constante* $k \geq 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y). \tag{1.1}$$

2. Contractante s'il existe $k \in [0,1[$, tel que pour tout $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y). \tag{1.2}$$

3. Contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$, et $x \neq y$ on a :

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Exemple 1.12 *Soit $X = \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par*

$$Tx = \frac{1}{2}x + 1, \ x \in \mathbb{R},$$

alors T est une application contractante.

Remarque 1.5 *Notons que contraction $\Longrightarrow$ contractive $\Longrightarrow$ lipchtisienne et que tout les applocations sont uniformement continues.*

Définition 1.15 *Soit (X, d) un espace métrique, et $T : X \to X$ une application, on dit qu'un point $x \in X$ est un point fixe de T si et seulement si $T(x) = x$.*

1.4 Théorème de point fixe

Le principe de lacontraction de Banach est un des résultat central de l'analyse, et est largement considéré comme la source de la théorie de points fixes métriques, son importance résidant dans son applicabilité étendue dans un certain nombre de disciplines des mathématique.

Théorème 1.1 [1] *Soit (X, d) un espace métrique compléte et $T : X \longrightarrow X$ une contraction, c-à-d, il existe $\lambda \in [0, 1)$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \ \text{pour tous} \ x, y \in X.$$

Alors T admet un point fixe unique dans X, c-à-d $\exists! u \in X$ tel que $Tu = u$.

Et aussi ce point peut étre obtenu comme limite de la suite engendrée par l'itération

$x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$ avec x_0 un élément arbitraire dans X, et

$$d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Preuve a. Existence :

Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans X définie comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= Tx_{n-1}, \\ &= T^n x_0; \; n = 1, 2, 3... \end{aligned} \tag{1.3}$$

Par (1.2) et (1.3), on trouve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n), \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n), \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Continuant ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Puis, il faut prouver que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de **Cauchy** dans X.

Soient $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m), \\ &= d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + ... + d(x_{n+m-1}, x_m), \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + ... + k^{n+m-1} d(x_1, x_0), \\ &\leq k^n d(x_1, x_0)[1 + k + k^2 + ... + k^{m-1}], \\ &\leq k^n d(x_1, x_0)[\frac{1 - k^{m-n+1}}{1-k}], \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1; x_0), \end{aligned}$$

on prend $m,\ n \longrightarrow \infty$

$$lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de **Cauchy** dans X alors $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$.

b. Unicité :

Supposons qu'il existe $x,\ y \in X$ tel que $x = T(x)$ et $y = T(y)$, alors

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq d(x, y) \Longrightarrow d(x; y) \leq d(x; y).$$

Par conséquent, $d(x, y) = 0$ ce qui entraine $x = y$. ■

Théorème 1.2 *Soit (X, d) un espace b-métrique complet et l'application T une contraction. Alors il existe $x \in X$ un point fixe de T selon le contraction de **Banach.***

Preuve Soit $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans X définie comme suit

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0,\ n = 1, 2, 3... \tag{1.4}$$

Par (1.2) et(1.4), on trouve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n), \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n), \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{aligned}$$

continuer ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

Puis, il faut prouver que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de **Cauchy** dans X.

Soient $m, n > 0$ avec $m > n$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq s\left[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)\right], \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + ... + s^m d(x_{n+m-1}, x_m), \\
&\leq sk^n d(x_1, x_0) + s^2 k^{n+1} d(x_1, x_0) + ... + s^m k^{n+m-1} d(x_1, x_0), \\
&\leq (sk^n)\, d(x_1, x_0)[1 + sk + (sk)^2 + ... + (sk)^{m-1}], \\
&\leq sk^n d(x_1, x_0)[\frac{1 - (sk)^{m-n+1}}{1 - sk}], \\
&\leq \frac{sk^n}{1 - sk} d(x_1, x_0),\ sk < 1,
\end{aligned}$$

on prend $m, n \longrightarrow \infty$

$$lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Par conséquent $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de **Cauchy** dans X alors $\{x_n\}$ converge vers $x \in X$.

Passant à montrer que x et un point fixe de T :

$$\begin{aligned}
d(x^*, Tx^*) &\leq s\left[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)\right], \\
&\leq sd(x^*, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, Tx^*), \\
&\leq sd(x^*, x_{n+1}) + sd(Tx_n, Tx^*), \\
&\Longrightarrow d(x^*, Tx^*) \leq sd(x^*, x_{n+1}) + skd(x_n, x^*).
\end{aligned}$$

Alors, on trouve $d(x^*, Tx^*) \leq 0$, lorsque $n \to \infty$,

ce qui donne $Tx^* = x^*$.

En suite, on prouve que x est le point fixe unique de T,

supposons que x' est un autre point fixe de T, alors on a

$Tx' = x'$ et $d(x^*, x') = d(Tx^*, Tx') \leq d(x^*, x')$,

ce qui donne $(1 - k)d(x^*, x\prime) \leq 0$,

donc $d(x^*, x') \leq 0$,

ce qui contredit la définition de la distance. Donc

$d(x^*, x') = 0.$

Alors $x^* = x'$, Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1. ■

1.5 Quelques théorèmes de point fixe

1.5.1 Théorème de Banach

Théorème 1.3 [1]*(**Banach** 1922) soit (X, d) est un espace métrique complet. et Soit $T : X \to X$ est un contraction, c-à-d, il existe $\lambda \in [0, 1)$ tel que*

$$d\left(Tx, Ty\right) \leq \lambda d\left(x, y\right) \text{ pour tous } x, y \in X.$$

Alors T a un point fixe unique.

1.5.2 Théorème de Boyd-Wong

Théorème 1.4 [16] *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$*

pour tout $t > 0$ et vérifiant :

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$, alors T admet un point fixe unique x^*. En outre, pour tout $x \in X$, on a

$$lim_{n\to\infty} T^n x = x^*.$$

Dans ce cas, T est dite contraction ou contraction non linéaire.

1.5.3 Théorème de Meir-Keeler

Théorème 1.5 [21] *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application, valable pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \delta \textit{ implique } d(Tx, Ty) \leq \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X.

De plus, pour tout $x \in X$, on $lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$

1.5.4 Théorème de Geraghty

Définition 1.16 [13] *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite contraction de **Geraghty** si et seulement si il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \to [0; 1)$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1$ implique $t_n \to 0$ et pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)).$$

Théorème 1.6 [13] *Toute contraction de **Geraghty** dans un espace métrique complet sup admet un point fixe unique.*

1.5.5 Théorème de Matkowski

Définition 1.17 [20] *Une application $T : X \to X$ d'un espace métrique (X, d) est dite contraction de **Matkowski** (ou φ-contraction) si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante vérifiant :*

$$lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \textit{ pour tous } t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Théorème 1.7 [20] *Toute φ-contraction T d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même admet un point fixe unique x^*.*

De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a $lim_{n \to \infty} T^n x = x^*$.

1.5.6 Théorème de Caristi

Théorème 1.8 *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}_+$ semi-continue inférieurement telle que :*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx), \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors T admet un point.

1.5.7 Théorème de Branciari

Théorème 1.9 [8] *Soit T une application d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 \leq k \leq 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de ***Lebesgue*** *vérifiant :*

$$\int_0^t \varphi(t)dt > 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Alors T a un point fixe unique x^*.

De plus, pour tout $x \in X$, on a : $lim_{n \to \infty} T^n x = x^*$.

1.5.8 Théorème de Pata

Théorème 1.10 [15] *Soit (X, d) un espace métrique, $f : X \to X$, soit $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes fixe, et soit $\Psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ une fonction croissante, qui disparait* *avec la continuité à* 0*. Si l'inégalité*

$$d(fx,fy) \leq (1-\varepsilon)d(x,y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel]^{\beta}.$$

Est satisfaite pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ *et tout* $x,y \in X$*, alors* f *a un point fixe unique* $z \in X$*, ici,* $\parallel x \parallel = d(x_0,x)$ *pour un point choisir* $x_0 \in X$*.*

Ce le théorème est une réelle généralisation du résultat de ***Banach****.*

*Plus de résultats de ce type ont été obtenus par la suite par divers auteurs dans l'espace b-métriques (****I. A. Bakhtin*** *et* ***S. Czerwik****).*

Chapitre 2

Théorème de point fixe commun dans l'éspace b-métrique utilisant la contraction de Pata

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous prouvons une généralisation du théorème des points fixes de **Chaterjea**, basé sur un résultat récent de **Pata**.

Nous établissons des résultats de point fixe commun de type **Pata** pour deux applications dans les espaces metrique et b-metrique.

Lemme 2.1 [12] *Soit (X, d) un espace métrique, et $\{y_n\}$ une suite de X, tel que $d(y_{n+1}, y_n)$ est décroissante et que*

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, y_n) = 0. \tag{2.1}$$

*Si $\{y_{2n}\}$ n'est pas une suite de **Cauchy**, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et deux suites $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ d'entieres positifs tels que les quatre suites suivants ont tendance à ε lorsque $k \to \infty$:*

$$d(y_{2m_k}, y_{2n_k}), d\left(y_{2m_k}, y_{2n_{k+1}}\right), d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k}), d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k+1}). \tag{2.2}$$

Preuve Si $\{y_{2n}\}$ n'est pas une suite de **Cauchy**, alors il existe $\varepsilon > 0$ et les suites $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ d'entiers positifs tels que $n_k > m_k > k$,

$$d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k-2}\right) < \varepsilon,\ d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right) \geq \varepsilon,$$

pour tous les entiers positifs k, ensuite

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right) \leq \left(y_{2m_k}, y_{2n_k-2}\right) + d\left(y_{2n_k-2}, y_{2n_k-1}\right) + d\left(y_{2n_k-1}, y_{2n_k}\right), \\ &< \varepsilon + d\left(y_{2n_k-2}, y_{2n_k-1}\right) + d\left(y_{2n_k-1}, y_{2n_k}\right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.1) nous concluons que

$$\lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right) = \varepsilon, \tag{2.3}$$

plus loin

$$d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right) \leq d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}\right) + d\left(y_{2n_k+1}, y_{2n_k}\right),$$

et

$$d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}\right) \leq d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k}\right) + d\left(y_{2n_k}, y_{2n_k+1}\right).$$

En passant à la limite quand $k \to \infty$ et en utilisant (2.1) et (2.3), on obtient cette

$$\lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}\right) = \varepsilon.$$

De la méme maniére, on peut prouver que les deux suites restantes de (2.2) ont tendance à ε de même. ■

2.2 Théorème de point fixe de type Chaterjea

On notera $\|x\| = d\left(x, x_0\right)$, pour $x \in X$. De plus, $\Psi : [0,1] \to [0,\infty)$ sera toujours une fonction croissante,qui disparait avec la continuité à 0, avec $\Psi\left(0\right) = 0$.

Théorème 2.1 [24] *Soit* $f : X \to X$ *et soit* $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ *et* $\beta \in [0, \alpha]$ *sont des constantes fixes, si l'inégalité :*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{(1-\varepsilon)}{2}(d(x, fy) + d(y, fx)) \\ +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ &\parallel x \parallel + \parallel y \parallel + \parallel fx \parallel + \parallel fy \parallel]^{\beta}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

est valable pour chaque $\varepsilon \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in X$, alors f a un point fixe unique $z \in X$.

Preuve 1.Unicité :

Si $u, v \in X$ sont deux points fixes on peut écrire (2.4) dans la forme

$$d(fu, fv) \leq \frac{(1-\varepsilon)}{2} d(u, fv) + d(v, fu) + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),\ K > 0.$$

Si $fu = u$ et $fv = v$ alors

$$d(u, v) \leq K\varepsilon^{\alpha-1}\Psi(\varepsilon),$$

on pose

$$K = \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel + \parallel fx \parallel + \parallel fy \parallel]^{\beta},$$

pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, ce qui implique que $d(u, v) = 0$.

2. Existence de z :

A partir de x_0, nous construisons la suite suivante :

$x_n = fx_{n-1} = f^n x_0$. Notons que $c_n = \|x_n\|$.

2.1. Nous avons la suite est décroissante

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_1, x_0), \tag{2.5}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, on pose $\varepsilon = 0$, $x = x_n$, $y = x_{n-1}$ dans (2.4), on obtient (2.5)

2.2

$$c_n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0)$$

$$\leq d(x_{n+1}, x_1) + 2c_1 = d(fx_n, fx_0) + 2c_1,$$

par conséquent, nous déduisons de (2.4) que

$$\begin{aligned} c_n \quad &\leq \quad \frac{(1-\varepsilon)}{2}\left[d(x_n, x_1) + d(x_{n+1}, x_0)\right], \\ +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + \|x_n\| + \quad &\| \quad x_{n+1} \| + \| \ x_1 \ \|]^{\beta} + 2c_1. \end{aligned}$$

En utilisant

$$d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1), d(x_{n+1}, x_0) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_0),$$

et (2.2), comme $\beta \leq \alpha$, l'inégalité précédente implique que :

$$c_n \leq (1-\varepsilon)\left(c_n + c_1\right) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + 2c_n + c_1]^{\alpha} + 2c_1.$$

Maintenant

$$[1 + 2c_n + c_1]^{\alpha} \leq (1 - 2c_n)^{\alpha}(1 + 2c_1)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}c_n^{\alpha}(1 + 2c_1)^{\alpha},$$

ce qui implique que

$$c_n \leq (1-\varepsilon)\, c_n + a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon) c_n^{\alpha} + b,$$

pour certains $b > 0$,

$$\varepsilon c_n \leq a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon) c_n^{\alpha} + b.$$

2.3 $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et pour $x = x_n$, $y = x_{n-1}$ on a

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n+1}, x_n) & = & d(fx_n, fx_{n-1}), \\ & \leq & \dfrac{(1-\varepsilon)}{2}\left(d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})\right), \\ +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+2 & \| & x_n \| + \| x_{n-1} \| + \| x_{n+1} \|]^{\beta}, \\ & \leq & \dfrac{(1-\varepsilon)}{2}\left(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})\right) \\ +K\varepsilon\Psi(\varepsilon),\ K & > & 0. \end{array} \tag{2.6}$$

Si $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = d^* > 0$. Il en résulte de (2.6) que $d^* \leq K\Psi(\varepsilon)$ (une contradiction)

alors $d^* = 0$.

2.4 La suite $\{x_n\}_{n\in N}$ est une suite de **Cauchy**.

Si ce n'est pas le cas, choisissons $\{x_n\}_{n\in N}$ comme dans lemme 2.1.

Lorsque'on met cette suit dans (2.4), nous allons obtenir :

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) \leq \frac{(1-\varepsilon)}{2}\left(d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}) + d(x_{2m_k}, x_{2n_k})\right) + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon), \tag{2.7}$$

où $d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) \to \delta$, $d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}) \to \delta$ et $d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \to \delta$.

Passans par la limite $(k \to \infty)$ dans (2.7), on obtient de $\delta \leq K\Psi(\varepsilon)$, une contradiction, alors $\delta = 0$, depuis la propriété de fonction Ψ.

Prenons en compte la complétude de (X, d), nous pouvons maintenant garantir l'existence de $z \in X$ avec (x_n) convergeante.

Enfin, tout ce qui reste à montrer est :

2.5 z est un point fixe pour f.

On observe pour cela que, pour tout $n \in N$ et pour $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} d(fz, z) &\leq d(fz, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, z), \\ &= d(fz, fx_n) + d(fx_n, z), \\ &\leq \frac{1}{2}d(z, x_{n+1}) + d(fz, x_n) + d(x_n, z). \end{aligned}$$

Par conséquent, $d(fz, z) \leq \frac{1}{2}d(fz, z)$, c'est-à-dire $fz = z$, qui est le résultat requis.

Le résultat classique de **Chatterjea** [5] est une conséquence de théorème 2.1, depuis la condition

$$d(fx, fy) \leq \frac{\lambda}{2}\left(d(x, fy) + d(y, fx)\right),$$

pour tous $x, y \in X$, implique la condition (2.4).

Ceci peut être prouvé de la même maniére. ■

2.3 Résultat commun aux point fixe

Soit f et g deux applications dans l'espace métrique (X, d) donné tel que $fX \subset gX$, et au moins un de ces sous-espaces de X complet.

Choisissons $x_0 \in X$ arbitraire et notez $y_0 = fx_0$, cette fois, pour $x \in X$, notons. $\|x\| = d\left(x, x_0\right)$. De plus, $\Psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ sera toujours une fonction croissante, qui disparait avec la continuité à 0, avec $\Psi\left(0\right) = 0$.

Théorème 2.2 [8] *Soit $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ sont des constantes fixes, tel que l'inégalité*

$$d(fx, fy) \leq (1-\varepsilon)\, d(gx, gy) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1+ \parallel gx \parallel + \parallel gy \parallel]^{\beta}, \tag{2.8}$$

est valable pour chaque $\varepsilon \in [0,1]$ et pour tous $x, y \in X$, alors la paire (f, g) a un point de coincidence unique.

Si, de plus, la paire (f, g) est faiblement compatible alors f et g ont un point fixe commun unique $z \in X$.

Preuve : Tout d'abord, notons que k peut étre supposé étre positif, si non nous avons le résultat classique de **Jungck**.

Partant du point x_0 donné, et utilisant ce $fX \subseteq gX$, pour construire une suite de **Jungck** $\{y_n\}$ habituelle par $y_n = fx_n = gx_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Nous procédons en prouvant les étape suivantes :

1. Si la pair (f, g) a un point de coincidence w alors il est unique.

En effet, prenons $w_1 = fu_1 = gu_1$ et $w_2 = fu_2 = gu_2$ et soit $\varepsilon \geq 0$ arbitraire, alors

$$\begin{aligned} d(w_1, w_2) &= d(fu_1, fu_2), \\ &\leq (1-\varepsilon)\, d(gu_1, gu_2) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1+ \parallel gu_1 \parallel + \parallel gu_2 \parallel]^{\beta}, \\ &= (1-\varepsilon)\, d(w_1, w_2) + K \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon), \end{aligned}$$

où

$$k = \Lambda[1+ \parallel gu_1 \parallel + \parallel gu_2 \parallel]^{\beta} > 0,$$

donc

$$d(w_1, w_2) \leq (1-\varepsilon)\, d(w_1, w_2) + K \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon),$$

alors

$$d(w_1, w_2) - (1-\varepsilon)\, d(w_1, w_2) \leq K \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon).$$

Donc

$$\varepsilon d(w_1, w_2) \leq K \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon).$$

Alors

$$d(w_1, w_2) \leq K\varepsilon^{\alpha-1}\Psi(\varepsilon).$$

En utilisant les propriétés de la fonction Ψ il s'ensuite que $w_1 = w_2$.

2. $d(y_{n+1}, y_n) \downarrow \delta \geq 0$.

Ceci est obtenu on posant $\varepsilon = 0$, $x = x_{n+1}$, $y = x_n$ dans (2.8) . Donc

$$d\left(fx_{n+1}, fx_n\right) \leq d\left(gx_{n+1}, gx_n\right),$$

en passant à la limite, nous obtenons

$$d\left(fx_{n+1}, fx_n\right) \leq \delta,$$

donc

$d(y_{n+1}, y_n) \leq \delta$.

3. Prouvons que $c_n = d\left(y_n, y_0\right)$ est bornée, on a ;

$$\begin{aligned}
c_n &= d(y_n, y_0) \leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_1) + d(y_1, y_0),\\
&= d(y_n, y_{n+1}) + d(fx_{n+1}, fx_1) + d(y_1, y_0),\\
&\leq 2c_1 + (1-\varepsilon)\, d(gx_{n+1}, gx_1) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ \parallel gx_{n+1} \parallel + \parallel gx_1 \parallel]^{\beta},\\
&= 2c_1 + (1-\varepsilon)\, d(y_n, y_0) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ \parallel gx_{n+1} \parallel + \parallel gx_1 \parallel]^{\beta},\\
&\leq 2c_1 + (1-\varepsilon)\, c_n + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + c_n]^{\beta},\\
&\leq (1-\varepsilon)\, c_n + a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + c_n]^{\beta} + b\ , a > 0,\ b > 0,
\end{aligned}$$

(ie).

$$\varepsilon c_n \leq a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + c_n]^{\beta} + b.$$

Si nous supposons que $\{c_n\}$ n'est pas borné, nous obtenons une contradiction, comme dans [1]

4. $\delta = 0$.

tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_n) &= d(fx_{n+1}, fx_n), \\ &\leq (1-\varepsilon)\, d(gx_{n+1}, gx_n) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ \parallel gx_{n+1} \parallel + \parallel gx_n \parallel]^{\beta}, \end{aligned}$$

maintenant, utilisant $\{c_n\}$ qui est bornée, nous obtenons

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq (1-\varepsilon)\, d(gx_n, gx_{n+1}) + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),$$

d'ou, on passe à la limite comme $n \to \infty$

$$\delta \leq (1-\varepsilon)\,\delta + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),$$

(ie) : $\delta \leq K\varepsilon^{\alpha-1}\Psi(\varepsilon)$ d'ou $\delta = 0$ (nous avons pris $\varepsilon \in [0,1]$) .

5. En utilisant maintenant lemma 2.1 de la manière habituelle et en tenant compte que $\{c_n\}$ est borné, nous pouvons prouver que $\{y_n\}$ est une suite de **Cauchy.**

6. Supposons que gX soit un sous espace complet de X

(la preuve lorsque fX est complet est similaire).

Nous avons cela

$y_n = gx_{n+1} \longrightarrow gz$,pour certains $z \in X$ alors, en pose $\varepsilon = 0$, $x = x_n$, $y = z$ dans (2.8), donc

$$d\,(fx_n, fz) \leq d(gx_n, gz),$$

et en passant à la limite, nous obtenons $fz = gz = \lim_{n\to\infty} y_n$, . Par conséquent $fz = gz = w$ est un point unique de coincidece de f et g.

7. Si la paire (f, g) est faiblement compatible, par résultat classique il s'ensuite que z est un point fixe commun unique de f et g.

Enfin, notons que le choix du point initial x pour la suite de **Jungck** n'est pas pertinent.

En pose $g = I_x$ dans le théoreme précédent, nous obtenons le théorème (1.1) en conséquence.

Clairement, le théorème (2.2) généralise le résultat classique de **Jungck.**

De façon trés similaire, les résultats suivants de type **Pata-Kannan** et **Pata-Chatterjea** est prouvés pour deux applications. ■

2.4 Résultats principaux

Théorème 2.3 [12] *Soit* (X, d) *un espace b-métrique complet avec le paramétre* $s \geq 1$ *et soit* $f, g : X \to X$ *deux application tels que* $fX \subseteq gX$. *Supposons que*

pour certains $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \in [0, \alpha]$, *des constantes fixes. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} max \left\{ \frac{d(gx, gy)}{2s}, d(gx, fx), d(gy, fy) \right\}, \\ +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ &\parallel gx \parallel + \parallel gy \parallel + \parallel fx \parallel + \parallel fy \parallel]^{\beta} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Est valable pour tout $x, y \in X$ *et chaque* $\varepsilon \in [0, 1]$. *Alors* f *et* g *ont un point de coincidence unique, de plus, si* (f *et* g) *sont faiblement compatibles, alors ils*

ont un point fixe commun unique.

Preuve Pour $x_0 \in X$ arbitraire, formons une suite de **Jungck** $\{y_n\}$ par $y_n = fx_n = gx_{n+1}$ (cela est possible de puis $fX \subseteq gX$). Si $y_n = y_{n+1}$ pour certains n, il n'y arien.

Supposons que $y_n \neq y_{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que $d(y_n, y_{n+1})$ décroissant

En pose $\varepsilon = 0$ dans (2.9),on obtient que

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &= d(fx_n, fx_{n+1}), \\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} max \left\{ \frac{d(gx_n, gy_{n+1})}{2s}, d(gx_n, fx_n), d(gx_{n+1}, fx_{n+1}) \right\}, \\ &= \frac{1-\varepsilon}{s} max \left\{ \frac{d(y_{n-1}, y_n)}{2s}, d(y_{n-1}, y_n), d(y_n, y_{n+1}) \right\}, \\ &\leq \frac{1}{s} d(y_{n-1}, y_n), \end{aligned} \tag{2.10}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $d(y_n, y_{n+1})$ est une suite décroissant, tendant à 0 tend $n \to \infty$.

b. Nous allons prouver par induction que la suite $c_n = d(y_n, y_0)$ est bornée par $2sc_1$, l'affirmation est valable pour $n = 1$ et $n = 2$ supposons que $c_n \leq 2sc_1$

pour certains $n \in \mathbb{N}$. Puis, prenant $\epsilon = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(y_{n+1}, y_0) \leq s(d(y_{n+1}, y_1) + d(y_1, y_0)), \\ &= s(d(fx_{n+1}, fx_1) + d(y_1, y_0)), \\ &\leq s\left(\frac{1}{s}\max\left\{\frac{d(gx_{n+1}, gx_1)}{2s}, d(gx_{n+1}, fx_{n+1}), d(gx_1, fx_1)\right\} + d(y_1, y_0)\right), \\ &= \max\left\{\frac{d(y_n, y_0)}{2s}, d(y_n, y_{n+1}), d(y_0, y_1)\right\} + sd(y_1, y_0), \\ &= d(y_0, y_1) + sd(y_1, y_0), \\ &= (1+s)c_1 \leq 2sc_1, \end{aligned}$$

puisque les deux $\frac{d(y_n, y_0)}{2s}$ et $d(y_n, y_{n+1})$ ne sont pas supérieurs à c_1. Ceci termine la preuve inductive

C. prouver que $\{y_n\}$ est une suite de **Cauchy**, supposons le contraire. En utilisant lemme 2.1. Soit les deux suites $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$ de nombres entiers positifs tels que $n_k > m_k > k$,

$$d\left(y_{mk}, y_{n_k}\right) \geq \delta, \ d\left(y_{m_k}, y_{n_k - 1}\right) < \delta,$$

et

$$\frac{\delta}{s} \leq \lim_{n \to \infty} \sup d\left(y_{m_k+1}, y_{n_k}\right), \tag{2.11}$$

remplacement de $x = x_{m_k+1}$, $y = x_{n_k}$ dans l 'éte (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} d\left(y_{m_k+1}, y_{n_k}\right) \leq \; & \frac{1-\varepsilon}{s}\max\left\{\frac{d\left(y_{m_k}, y_{n_k-1}\right)}{2s}, d\left(y_{m_k}, y_{m_k+1}\right), d\left(y_{n_k-1}, y_{n_k}\right)\right\}, \\ & + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon), \end{aligned}$$

tel que$K = \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + \parallel gx \parallel + \parallel gy \parallel + \parallel fx \parallel + \parallel fy \parallel]^{\beta}$, puisque la suite $\{c_n\}$ est bornée, passant à la limite supérieure et en utilisant (2.11), on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{s} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup d\left(y_{m_k+1}, y_{n_k}\right), \\
&\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{d\left(y_{m_k}, y_{n_k-1}\right)}{2s}, 0, 0\right\} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon), \\
&= \frac{1-\varepsilon}{s}\frac{\delta}{2s} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

donc

$$
\frac{\delta}{s} \leq \frac{1-\varepsilon}{s}\frac{\delta}{2s} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon) < \frac{(1-\varepsilon)\delta}{s} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon).
$$

En pose $\varepsilon = 0$, nous obtenons que $\delta \leq 0$, une contradiction. Alors $\delta = 0$.

Démontrer que z est un point fixe, et $gx_n \to gz$, quand $n \to \infty$, pour certains $z \in X$ nous allons montrer que $fz = gz$ on a

$$
\frac{1}{s}d(fz, gz) \leq d(fz, fx_n) + d(fx_n, gz),
$$

$$
\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(gz, gx_n)}{2s}, d(gz, fz), d(gx_n, fx_n)\right\} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon) + d(fx_n, gz).
$$

Il s'ensuit que, pour n assez grand,

$$
\frac{1}{s}d(fz, gz) \leq \frac{1-\varepsilon}{s}d(gz, fz) + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),
$$

et nous obtenons facilement que $fz = gz$,

l'unicitè du point de coincidence s'en suit facilement en prenant $\varepsilon = 0$ dans (2.9), et qu'il s'agit d'un point commun. Le point fixe de f et g suit de manière standard.

En pose $g = I_X$ dans le théorème précédent, on obtient. ■

Corollaire 2.1 [12]*Soit* (X, d) *est un espace b- métrique complet, avec le paramètre* $s > 1$ *et soit* $f : X \to X$ *un application Supposons que pour certains*

$\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1, \beta \in [0, \alpha]$, *des constantes fixes. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(x,y)}{2s}, d(x,fx), d(y,fy)\right\} \\ +\Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+ &\mid x \parallel + \parallel y \parallel + \parallel fx \parallel + \parallel fy \parallel]^{\beta}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

est valable pour tout $x, y \in X$ *et chacun* $\varepsilon \in [0, 1]$ *.Alors* f *a un point fixe unique.*

Exemple 2.1 [12] *Soit* (X, d) *est l'espace b-métrique, considéron l'application suivant* $f : X \to X$.

$$fx = \begin{cases} 100, & x \leq 100 \\ 4, & si\ non, \end{cases}$$

et vérifions le condition de contraction le seul cas non trivial est celui ou $x \in \{1, 2, ..., 100\}$ *et* $y \in \{101, 102, ..., \infty\}$ *ensuite*

$$d(fx, fy) = d(100, 4) = \left|\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\right| = \frac{24}{100}.$$

Donc

$$\frac{24}{100} \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{5} \max\left\{\frac{d(x,y)}{5}, d(x,100), d(y,4)\right\} + \varepsilon^2,$$

(qui est la condition avec $\Lambda = 1,\ \Psi(\varepsilon) = \varepsilon,\ \alpha = 1,\ \beta = 0$*) on a*

$$\max \frac{d\,(x,\ y)}{5} = \max \begin{cases} \frac{1}{5}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, & \begin{pmatrix} x \text{ et } y \text{ sont deux égaux où} \\ l'\text{un est égal et l'autre est égale à } \infty \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5}.5, & \begin{pmatrix} x \text{ et } y \text{ sont tous les deux impairs} \\ \text{ou l'un est impair l'autre est } \infty \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5}.2, & sinon \end{cases} \leq 1$$

$$\max d\,(x, 100) = \begin{cases} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{100}\right|, si\ x\ est\ pair \\ 2, si\ x\ est\ impair \end{cases} \leq 2,$$

$$\max d\,(y, 4) = \begin{cases} \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{100}\right|, si\ y\ est\ pair\ ou\ \infty, \\ 2,\ \ si\ y\ est\ impair\ ou\ \infty \end{cases} \leq 2.$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{24}{100} \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{5} \cdot 2 + \varepsilon^2,$$

qui se remplit pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}$*, pour* $\varepsilon \in [0,1]$*. Alors* f *a un point fixe.*

Exemple 2.2 *unique.*

Chapitre 3

Théorème de point fixe commun dans l'éspace b-rectangulaire utilisant la contraction de Pata

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous avons démontrer le point fixe commun dans l'espace b-rectangulair utilisant la contraction de **Pata**, nous avons démontrer le théorème de point fixe de **Banach** pour illustrer le travail dans l'espace métrique b-rectangulaire.

3.2 Théorème de point fixe contraction de Banach dans l'espace b-rectangulaire

Théorème 3.1 [7] *Soit* (X, d) *est un espace metrique b-rectangulaire avec* $s > 1$ *et* $T : X \longrightarrow X$ *est un application satisfaisante :*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \tag{3.1}$$

pour tout $x, y \in X$*, où* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right]$.

Alors T a un point fixe unique.

Preuve Soit $x_0 \in X$ un arbitraire. Nous définissons une suite $\{x_n\}$ par $x_{n+1} = Tx_n$, pour tous $n \geq 0$. Nous allons montrer que $\{x_n\}$ est une suite de **Cauchy**.
Si $x_n = :x_{n+1}$ alors x_n est le point fixe de T. Supposons que $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, on pose $d(x_n, x_{n+1}) = d_n$, il s'ensuit de (3.1) que :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq d(x_{n-1}, x_n), \\ d_n &\leq d_{n-1}. \end{aligned}$$

Par consiquent on déduit :

$$d_n^* \leq \lambda^n d_0^*. \tag{3.2}$$

De plus, si $x_0 = x_n$ en utilisant (3.2), pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &= d(x_n, Tx_n), \\ d(x_0, x_1) &= d(x_n, x_{n+1}), \\ d_0 &= d_n, \\ d_0 &\leq \lambda^n d_0, \end{aligned}$$

une contradiction. Alors $d_0 = 0$,
c-à-d, $x_0 = x_1$, et donc x_0 est un point fixe de T. Ainsi, nous supposons que $x_n \neq x_m$ pour tousles distincts n, $m \in \mathbb{N}$.

Supposons que

$$d(x_n, x_{n+2}) = d_n^*.$$

Et en utilisant (3.1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+2}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}), \\ &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_{n+1}), \\ d_n^* &\leq \lambda d_{n-1}^*, \end{aligned}$$

donc, nous obtenons

$$d(x_n, x_{n+2}) \leq \lambda^n d_0^*. \tag{3.3}$$

Pour la suite $\{x_n\}$, nous considérons $d(x_n, x_{n+p})$ dans deux cas.

a) Si $p = 2m+1$ alors en utilisant (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+2m+1}) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+2m+1})], \\ &\leq s[d_n + d_{n+1}] + s^2[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_{n+4}) + d(x_{n+4}, x_{n+2m+1})], \\ &\leq s[d_n + d_{n+1}] + s^2[d_{n+2} + d_{n+3}] + s^3[d_{n+4} + d_{n+5}] + \cdots + s^m d_{n+2m}, \\ &\leq s[\lambda^n d_0 + \lambda^{n+1} d_0] + s^2[\lambda^{n+2} d_0 + \lambda^{n+3} d_0] + s^3[\lambda^{n+4} d_0 + \lambda^{n+5} d_0], \\ &\quad + \cdots + s^m \lambda^{n+2m} d_0, \\ &\leq s\lambda^n[1 + s\lambda^2 + s^2\lambda^4 + \cdots]d_0 + s\lambda^{n+1}[1 + s\lambda^2 + s^2\lambda^4 + \cdots]d_0, \\ &= \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0 (\text{notez que } s\lambda^2 < 1). \end{aligned}$$

Donc

$$d(x_n, x_{n+2m+1}) \leq \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0. \tag{3.4}$$

b) Si $p = 2m$, alors en utilisant (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+2m}) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+2m})], \\
&\leq s[d_n + d_{n+1}] + s^2[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_{n+4}) + d(x_{n+4}, x_{n+2m})], \\
&\leq s[d_n + d_{n+1}] + s^2[d_{n+2} + d_{n+3}] + s^3[d_{n+4} + d_{n+5}], \\
&\quad + \cdots + s^{m-1}[d_{2m-4} + d_{2m-3}] + s^{m-1}d(x_{n+2m-2}, x_{n+2m}), \\
&\leq s[\lambda^n d_0 + \lambda^{n+1} d_0] + s^2[\lambda^{n+2} d_0 + \lambda^{n+3} d_0] + s^3[\lambda^{n+4} d_0 + \lambda^{n+5} d_0], \\
&\quad + \cdots + s^{m-1}[\lambda^{2m-4} d_0 + \lambda^{2m-3} d_0] + s^{m-1}\lambda^{n+2m-2} d_0^*, \\
&\leq s\lambda^n[1 + s\lambda^2 + s^2\lambda^4 + \cdots]d_0 + s\lambda^{n+1}[1 + s\lambda^2 + s^2\lambda^4 + \cdots]d_0, \\
&\quad + s^{m-1}\lambda^{n+2m-2} d_0^*,
\end{aligned}$$

$(i.e)$.

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+2m}) &\leq \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0 + s^{m-1}\lambda^{n+2m-2} d_0^*, \\
&< \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0 + (s\lambda)^{2m}\lambda^{n-2} d_0^* (\text{où } 1 < s), \\
&\leq \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0 + \lambda^{n-2} d_0^* (\text{où } \lambda \leq \frac{1}{s}).
\end{aligned}$$

donc :

$$d(x_n, x_{n+2m}) \leq \frac{1+\lambda}{1-s\lambda^2} s\lambda^n d_0 + \beta\lambda^{n-2} d_0. \tag{3.5}$$

Il s'ensuit de (3.4) et (3.5) que

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0 \text{ pour tous } p > 0. \tag{3.6}$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de **Cauchy** dans X.

Par la complétude de (X, d) il éxiste $u \in X$ tel que :

$$lim_{n\to\infty} x_n = u. \tag{3.7}$$

Nous montrerons que u est un point fixe, pour tout $n \in N$. On a

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &\leq s[d(u,x_n)+d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tu)], \\ &= s[d(u,x_n)+d_n+d(Tx_n,Tu)], \\ &\leq s[d(u,x_n)+d_n+d(x_n,u)]. \end{aligned}$$

En utilisant (3.6) et (3.7), il résulte de l'inégalité ci-dessus que $d(u,Tu)=0$, c'est-à-dire $Tu=u$ donc u est un point fixe de T.

Pour l'unicité, soit v un autre point fixe de T, il résulte de (3.1)

$$d(u,v)=d(Tu,Tv)\leq \lambda d(u,v)<d(u,v).$$

Une contradiction, $d(u,v)=0$.

C'est-à-dire que $u=v$, ainsi ,le point fixe est unique. ■

Lemme 3.1 [12] *Soit* (X,d) *est un espace métrique b-rectangulaire avec* $s\geq 1$ *et soit* $\{x_n\}$ *est une suite en* X *telle que*

$$x_n \neq x_m \text{ chaque fois } n\neq m \text{ et } \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0. \tag{3.8}$$

Si $\{x_n\}$ n'est pas une suite de **Chauchy**, alors il existe $\delta>0$ et deux suites $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ des nombres entiers positifs tels que les suivants :

$$d\left(x_{m_k},x_{n_k}\right)\geq \delta,\ \frac{\delta}{s}\leq \lim_{k\to\infty}\sup d\left(x_{m_k},x_{n_k-2}\right)\leq \delta,$$

$$\text{et } \frac{\delta}{s}\leq \lim_{k\to\infty}\sup d\left(x_{m_k+1},\ x_{n_k-1}\right),$$

Preuve Si $\{x_n\}$ n'est pas une suite de **Cauchy**, alors il existe $\delta>0$ pour lequel on peut trouver deux sous-suites x_{mk} et x_{n_k} de $\{x_n\}$ tel que n_k est le plus petit indice pour lequel

$$n_k-3\geq m_k>k \text{ et } d\left(x_{m_k},x_{n_k}\right)\geq \delta, \tag{3.9}$$

cela signifie que

$$d\left(x_{m_k}, x_{n_k-2}\right) < \delta.$$

En prenant à la limite supérieure comme $k \to \infty$, nous obtenons

$$\lim_{k\to\infty} \sup d\left(x_{m_k}, x_{n_k-2}\right) \leq \delta,$$

d' autre part, nous avons

$$\frac{1}{s} d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \leq d\left(x_{m_k}, x_{m_k+1}\right) + d\left(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}\right) + d\left(x_{n_k-1}, x_{n_k}\right).$$

En utilisant (3.8),(3.9) . Et en prenant la limite supérieure comme $k \to \infty$, nous obtenous

$$\frac{\delta}{s} \leq \lim_{k\to\infty} \sup d\left(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}\right),$$

en utilisant l'inégalité b-rectangulaire, nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\left(dx_{m_k}, x_{n_k}\right) &\leq d\left(x_{m_k}, x_{n_k-2}\right), \\ &\quad + d\left(x_{n_k-2}, x_{n_k-1}\right) + d\left(x_{n_k-1}, x_{n_k}\right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.8), (3.9) et en prenant la limite supérieure comme $k \to \infty$, nous avons

$$\frac{\delta}{s} \leq \lim_{k\to\infty} \sup d\left(x_{m_k}, x_{n_k-2}\right).$$

La preuve de lemme 3.1 est achieve.

Nous présentons maintenant le Théorème de **Pata** dans espace b-rectangulaire qui est notre travail essentiel. ∎

3.3 Résultats principaux

On notera $\|x\| = d(x, x_0)$, pour $x \in X$. De plus, $\Psi : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ sera teoujours une fonction croissante, continue à 0, avec $\Psi(0) = 0$.

Théorème 3.2 [12] *Soit (X, d) est un espace métrique b-rectangulaire compléte avec $(s > 1)$, et soit $f,\ g : X \rightarrow X$, tel que $fX \subseteq gX$. Supposons que pour certains*

$\Lambda \geq 0,\ \alpha \geq 1,\ \beta \in [0, \alpha]$, *des constantes fixes. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(gx, gy)}{2s}, d(gx, fx), d(gy, fy)\right\} \\ &+ \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1 + \parallel gx \parallel + \parallel gy \parallel]^{\beta}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

valable pour tout $x, y \in X$ et chaque $\varepsilon \in [0,1]$. Alors f et g ont un point de coincidence unique, de plus, si f et g sont faiblement compatibles, alors f et g ont un point fixe commun unique.

Preuve *De même que dans la preuve du théorème 2.3, il peut être prouvé que*

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{1}{s} d(y_{n-1}, y_n),$$

depuis $d(y_n, y_{n+1}) \rightarrow 0$, comme $n \rightarrow \infty$. De plus, de même que dans [17], $y_n \neq y_m$ chaque fois $n \neq m$. Prouvons que la suite $c_n = d(y_0,\ y_n)$ est
bornée. En utilisant que $y_n \neq y_m$ pour $n \neq m$, on obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} c_n &= \frac{1}{s} d(y_n, y_0) \leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_1) + d(y_1, y_0), \\ &\leq 2c_1 + d(fx_{n+1}, fx_1), \\ &\leq 2c_1 + \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(y_n, y_0)}{2s}, d(y_n, y_{n+1}), d(y_0, y_1)\right\} + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1 + \parallel y_n \parallel + \parallel y_0 \parallel]^{\beta}, \\ &\leq 2c_1 + \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{d(y_n, y_0)}{2s},\ d(y_n, y_{n+1}), d(y_0, y_1)\right\} + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1 + \parallel yn \parallel + \parallel y_0 \parallel]^{\beta}, \\ &\leq 2c_1 + \frac{1-\varepsilon}{s} \max\left\{\frac{c_n}{2s}, c_1\right\} + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \Psi(\varepsilon)[1 + c_n]^{\alpha}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux cas suivant :

a. *Si* $\max\left\{\frac{c_n}{2s}, c_1\right\} = c_1$ *alors* $c_n \leq 2sc_1$ *et la preuve est terminée.*

b. $\max\left\{\frac{c_n}{2s}, c_1\right\} = \frac{c_n}{2s}$ *ensuite nous avons*

$$\frac{1}{s}c_n \leq 2c_1 + \frac{1-\varepsilon}{s}\frac{c_n}{2s} + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1+c_n]^{\alpha},$$

(i.e) :

$$c_n \leq 2sc_1 + (1-\varepsilon)c_n + a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)c_n^{\alpha}.$$

Donc nous avons

$$\varepsilon c_n \leq b + a\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)c_n^{\alpha},$$

où a, b *sont des constantes positives. Maintenant, il s'ensuit que la suite* $\{c_n\}$ *est bornée. Nous appliquons le lemme* 3.1. *Si* $\{y_n\}$ *n'est pas un suite-**Cauchy**, alors, on pose* $\varepsilon = 0$, $x = x_{m_k+1}$ *et* $y = x_{n_k-1}$ *en* (3.10)*, nous avons*

$$d\left(y_{m(k)+1}, y_{n_k-1}\right) \leq \frac{1}{s}\max\left\{\frac{d\left(y_{m_k}, y_{n_k-1}\right)}{2s}, d\left(y_{m_k}, y_{m_k+1}\right), d\left(y_{n_k-1}, y_{n_k}\right)\right\},$$

en prenant maintenant la limite supérieure $k \to \infty$ *et en utilisant Lemme* 3.1*, il s'ensuit que*

$$\frac{\delta}{s} \leq \lim_{k\to\infty}\sup d\left(y_{m(k)+1}, y_{n_k-1}\right) \leq \frac{1}{2s^2}\lim_{k\to\infty}\sup d\left(y_{m(k)},\ y_{n(k)-1}\right) \leq \frac{\delta}{2s^2}.$$

Une contradiction, puisque $s > 1$, $\delta > 0$ *par concéquent,* $\{y_n\}$ *est une suite de **Cauchy.***

De plus, nous avons

$$\frac{1}{s}d(fz, gz) \leq d(fz, fx_n) + d(fx_n, gx_n) + d(gx_n, gz),$$

$$\leq \frac{1-\varepsilon}{s}\max\left\{\frac{d(gz, gx_n)}{2s}, d(gz, fz), d(gx_n, fx_n)\right\} + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon) + d(fx_n, gx_n) + d(gx_n, gz),$$

il résulte que pour n *assez grand*

$$\frac{1}{s}d(fz, gz) \leq \frac{1-\varepsilon}{s}d(gz, fz) + K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),$$

(i.e) :

$$\frac{\varepsilon}{s}d(fz, gz) \leq K\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon),$$

et donc $fz = gz$.

Le reste de la preuve est standard.

Spécifiant $g = I_x$ *dans le théorème précédent, nous obtenons l'extension du résultat fondamentalde* ***Pata*** *(Théorème* 3.1*) au cadre d'espace métrique b-rectangulaire.* ■

Corollaire 3.1 [12] *Soit* (X, d) *un espace métrique rectangulaire complet avec constante ordinaire* k*,* $x_0 \in X$*,* $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$*,* $\beta \in [0, \alpha]$ *sont des constantes fixes. Si pour tous les* $\varepsilon \in [0,\ 1]$*, et* $x,\ y \in X$*, la application* $f : X \to X$ *satisfait à*

$$\| d(fx,\ fy) \| \leq \frac{1-\varepsilon}{k}M(x,\ y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\Psi(\varepsilon)[1 + \| d(x,\ x_0) \| + \| d(y, x_0) \|]^{\beta},$$

où $M(x,\ y) = \max\{\| d(x,\ fx) \|, \| d(y,\ fy) \|, \frac{1}{2K} \| d(x,\ y) \|\}$, alors f a un point fixe unique.

Preuve Il résultent directement du (théorème 3.2) puisque sous ces hypothèses, $(X, \| d \|)$ est une espace métrique b- rectangulaire avec le paramètre K

l'exemple suivant est inspiré de [19, Example 3.2]. ■

Exemple 3.1 [12] *Soit* $X = A \cup B$*, où* $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}\right\}$ *et* $B = [1, 2]$ *Définir* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *de sorte que* $d(x, y) = d(y, x)$ *pour tous* $x,\ y \in X$*, et*

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) &= d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) = 0.03\ ;\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = 0.02; \\ d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) &= d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) = 0.06;\ d(x, y) = (x-y)^2 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Alors (X, d) *est un espace métrique b-rectangulaire avec coefficient* $s = 3$*. Mais* (X, d) *n'est ni un espace métrique ni un espace métrique rectangulaire. Soit* $f, g : X \to X$ *sont définie comme :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3},\ si\ x \in A \\ \frac{1}{5},\ si\ x \in B \end{cases}, g(x) = x.$$

Nous allons vérifier la condition

$$d(fx,\ fy) \leq \frac{1-\varepsilon}{3} \max\left\{\frac{d(x,\ y)}{6},\ d(x,\ fx),\ d(y,\ fy)\right\} + \varepsilon^2[1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel],$$

avec $x_0 = \frac{1}{5}$ *(i.e,* $\parallel x \parallel = d(x, \frac{1}{5})$*). Il suffit de considérer le cas lorsque* $x \in A,\ y \in B$. *Ensuite,*
$d(fx, fy) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) = 0.06,$
$\max \frac{d(x,y)}{6} = \max \frac{|x-y|^2}{6} = \frac{(2-15)^2}{6} = \frac{27}{50},$
$\max d(x, fx) = \max d\left(x, \frac{1}{3}\right) = 0.06,$
$\max d(y, fy) = \max d\ \left(y, \frac{1}{5}\right) = (2-15)^2 = \frac{81}{25}.$
Par conséquent, si $x \in A,\ y \in B$ *nous avons ce* $\max\left\{\frac{d(x,\ y)}{6}, d(x, fx), d(y, fy)\right\} = \frac{81}{25}$, *et nous avons vérifier que*

$$0.06 \leq \frac{1-\varepsilon}{3}\frac{81}{25} + \varepsilon^2(1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel).$$

Depuis $\min\{1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel\} = 1 + 0 + \left(1-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 + \frac{16}{25} = \frac{41}{25}$, nous avons l'inégalité

$$0.06 \leq \frac{1-\varepsilon}{3} \cdot \frac{81}{25} + \frac{41}{25}\varepsilon^2,$$

$0.06 \leq \frac{1-\varepsilon}{3} \cdot \frac{81}{25} + \frac{41}{25}\varepsilon^2$,qui est satisfaite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, à plus forte raison $\varepsilon \in [0, 1]$. Ainsi, nous avons prouvé que toutes les conditions du théorème 3.2 sont verifier et que f et g ont un point fixe commun unique ($z = \frac{1}{3}$).

Notez que le résultat pourrait égalment être obtenu en utilisant le théorème 2.3, même de manière plus facile, car dans ce cas le paramètre à utiliser est $s = 2$.

Ce qui suit serait une version-**Pata** du résultat bien connu de Circ's sur les quasi contractions [22] dans le cadre de l'espace métrique ou b-rectangulaire.

Bibliographie

[1] S. **B**anach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. 3 (1922). $133 - 181$ (french) .

[2] I.A. **B**akhtin, The contraction mapping principle in quasi-metric spaces, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst. 30 (1989), $26 - 37$.

[3] A. **B**ranciari, A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, Publ.Math. Debrecen, 57 (2000), $31 - 37$.1, 2.7

[4] V.,**B**erinde, Iterative Approximation of Fixed points, Springer, (2006).

[5] **C**hatterjea, S. K, Fixed point theorems, C.R. Acad. Bulgare Sci. 25, 1972, $727 - 730$.

[6] S. **C**zerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inf. Univ. Ostrav., 1 (1993), $5 - 11$.1, 2.2.

[7] R. **G**eorge, S. Radenovic, K. P. Reshma, S. Shukla, Rectangular b-metric spaces and contraction principle, J.Nonlinear Sci. Appl., (in press). 1, 2, 2.10, 4, 4.4.

[8] N. **H**ussain, V. Parvaneh, J. R. Roshan, Z. Kadelburg, Fixed points of cyclic (ψ, φ,L,A,B)-contractive mappingsin ordered b-metric spaces with applications, Fixed Point Theory Appl., 2013. (2013), 18 pages.1, 2.5, 2.6.

[9] G. **J**ungck, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. Math. Sci., 9 (1986), $771 - 779$.

[10] G. **J**ungck, Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83 (4) (1976), $261 - 263$.

[11] G. **J**ungck and B. E. Rhoades, Fixed point for set valued functions without continuity, Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998), 227 – 238.

[12] Z. **K**adelburg, S. Radenovi c, Pata-type common fixed point results in b- metric and b-rectangulaire metric space, Intern. J. Anal. Appl., 8 (2015), 944 – 954.

[13] Z. **K**adelburg, D. Dudik´ ,S. Radenovic´, Fixed points of Geaghty-type mapping in verious generalized metric spacs. Abstr. Appl. Anal. 2011, 2011, 561245.

[14] Z. **K**adelburg, S. Radenovic´ , Fixed point under Pata-type condition in metric space, Adv. Fixed Point Theory 2 (2014) 29 – 46.

[15] V. **P**ata, A xed point theorem in metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 10 (2011), 299 – 305.1, 2.1, 4

[16] V. **P**ata, A fixed point theorem in metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 10 (2011), 299 – 305.1, 2.1, 4.

[17] J. **R**. Roshan, N. Hussain, V. Parvaneh, Z. Kadelburg, New fixed point results in b-generalized metric spaces,Nonlinear Anal. Model. Control., (submitted). 1, 2, 2.10, 2.11, 4.

[18] I. R. **S**arma, J. M. Rao, S. S. Rao, Contractions over generalized metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. 2 (2009), 180 – 182.1,b2.8, 2.9.

[19] S. **S**essa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations,Publ. Inst. Math. Beograd 32 (46) (1982), 149 – 153.

[20] R. **S**imon, A. J. Zaslavski, Afixed point theorem for Matkowski contractions, Volume, No. 2, 2007, 303 – 307.

[21] A. **U**mit, E. Karapinar, I. M. Erhan, Meir-Keeler type contractions on modular metric spaces, Filmat 32 : 10 (2018), 3697 – 3707.

[22] B. **L**. Ciri c, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267 – 273.1, 4