

Table des matières

1	Préliminaires sur les systèmes dynamiques	7
1.1	Introduction	7
1.2	Définitions dans systèmes dynamiques	8
1.3	Classification des systèmes dynamiques	9
1.3.1	Systèmes dynamiques à temps continue	9
1.3.2	Systèmes dynamiques à temps discret	9
1.3.3	Système autonome et non-autonome	9
1.4	Propriétés des systèmes dynamiques	10
1.4.1	Point fixe	10
1.5	Stabilité des systèmes dynamiques à temps continue	10
1.5.1	Introduction	10
1.5.2	Classification des points d'équilibres	10
1.5.3	Stabilité au sens de Lyapunov à temps continue	12
1.6	Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires	15
2	Théorie du chaos	17
2.1	Introduction	17
2.2	Définitions du chaos	17
2.3	Caractéristiques du chaos	18
2.3.1	La non linéarité	18
2.3.2	Le déterminisme	18
2.3.3	L'aspect aléatoire	18
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales	19
2.4	Les attracteurs	19
2.4.1	Définitions d'attracteurs	19

2.4.2	Les propriétés d'un attracteur	20
2.4.3	Les différents types d'attracteurs	20
2.5	Détection du chaos	22
2.5.1	L'exposant de Lyapunov	22
2.5.2	Dimension fractale	24
3	Synchronisation des système dynamiques chaotiques	27
3.1	Introduction	27
3.2	Définitions de la synchronisation	27
3.2.1	Définitions générales	27
3.2.2	Définitions mathématiques	28
3.3	Différents types de synchronisation des systèmes dynamiques	29
3.3.1	Synchronisation complète	29
3.3.2	Anti-Synchronisation	29
3.3.3	Synchronisation décalée	30
3.3.4	Synchronisation généralisée (GS)	30
3.3.5	Synchronisation projective (PS)	31
3.3.6	Synchronisation MPS	31
3.3.7	Synchronisation Q.S	31
3.4	Méthode de synchronisation	32
3.4.1	Méthode de contrôleur actif	32
3.5	Application de deux types de synchronisation	33
3.5.1	Synchronisation complète des systèmes chaotiques	33
3.5.2	Anti-Synchronisation des systèmes chaotiques	35
4	Méthodes et applications pour la synchronisation des systèmes dynamiques	38
4.1	Introduction	38
4.2	Nouveau critère pour la synchronisation des systèmes quadratiques n -D	39
4.2.1	Description des systèmes maître-esclave chaotiques	39
4.2.2	Méthode de la synchronisation	40
4.3	Applications Numérique de la synchronisation entre deus systèmes chaotiques à 3-D et hyperchaotiques à 4-D a temps continu	41
4.3.1	Synchronisation globale de deux systèmes chaotiques (Chen et Rössler) . .	41
4.3.2	Synchronisation globale entre deux système hyperchaotique (Liu et Rössler)	43
4.4	Conclusion	45

Liste de figure

Figure N°	Titre	Page
Figure (1-1)	Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^n	11
Figure (2-1)	Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x_1	19
Figure (4-1)	Les erreurs de synchronisation entre les deux systèmes (Chen, Rössler)	43
Figure (4-2)	Les erreurs de synchronisation entre le système de Liu et le système de Rössler	45

Notations

\dot{x}	point fixe
A	matrice constante
λ	valeur propre
$\text{Re}(\lambda)$	partie réel du valeur propre
$\text{Im}(\lambda)$	partie imaginaire du valeur propre
$Jf(x)$	la matrice Jacobienne
$f^{(j)}$	j éme itération de f
d	la distance
A	attracteur
$B(A)$	bassin d'attracteur
T	la période de solution
μ_d	la mesure le l'ensemble M
D_L	dimension de Lyapunov
$H(x)$	fonction de Heaviside
$e(t)$	l'erreur
$\ \cdot \ $	la norme euclidienne
$U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$	est un contrôleur
α_i	facteur d'échelle
$v(t)$	fonction de Lyapunov
$\dot{x}(t)$	système chaotique maître
$\dot{y}(t)$	système chaotique esclave

Introduction Générale

Un système dynamique est un ensemble d'états possible avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés, aucun élément aléatoire n'est admis dans notre définition d'un système dynamique déterministe. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables.

Les systèmes dynamiques désignent couramment une partie des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique.

La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié qui dépend des outils utilisés (analytique, géométrique, probabiliste). En 1963, le météorologue (**Edward Lorenz**) énonce bien le problème. Il venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les systèmes chaotiques par **Tien-Yien Li** et **James A Yorke** qui ont présenté pour la première fois le terme chaos.

Toujours au XIX^{ème} siècle, le mathématicien russe **Aleksander Mikhailovich Lyapunov** effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Les travaux de **Lyapunov** seront très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche active, lié au développement de la télécommunication, il a connu des améliorations très remarquables dans le début du XX^{ème} siècle.

En 1990 **Carroll** et **Pecora**,^[1] pionniers de la synchronisation ayant comme idée d'employer un signal chaotique entre deux systèmes dynamiques identiques, le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur (maître), le deuxième est le système récepteur (esclave), c'était la synchronisation identique. Au cours des dernières années la synchronisation des systèmes chaotiques a attiré beaucoup d'attention en raison de ses larges applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie, différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos.

Notre mémoire est scindée en quatre chapitres sa structuration se présente comme suit : le premier chapitre est consacré aux notions de base sur les systèmes dynamiques telle que (la définition de système discret et continu, les points fixes et nous représentons aussi la notion de stabilité des systèmes dynamiques continus).

Le deuxième chapitre est réservé à la théorie du chaos nous donnons quelques définitions du chaos, caractéristique du chaos et sa détection et les attracteurs et leurs types (régulier et étrange). Un sujet qui a acquis beaucoup d'attention dans notre mémoire est la synchronisation de système chaotique, notion évoquée dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est focalisé sur l'étude de simple pour la synchronisation globale de deux systèmes quadratiques chaotiques 3D hyperchaotique 4-D à temps continue.

Chapitre 1

Préliminaires sur les systèmes dynamiques

1.1 Introduction

Le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques, un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles avec un loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement, ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premières travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du 19^{ème} siècle, en effet vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au 19^{ème} siècle, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement, il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Le but de ce chapitre est de donner les aspects généraux des systèmes dynamiques, quelques définitions préliminaires permettent de cerner les caractéristique essentielle des systèmes dynamiques et les propriétés telles que la stabilité.

1.2 Définitions dans systèmes dynamiques

Définition 1.1 Un système dynamique[2] est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont «ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système» évolue en fonction du temps, L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- a- de son état initial c'est-à-dire son état a l'instant t_0 .
- b- de sa loi d'évolution.

Définition 1.2 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $f(., x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $f(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $f(0, x) = x$.
4. $f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3 Système dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où A est une matrice constante. La solution de 1.1 est :

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Le système 1.1 engendre un système dynamique, puisque l'application : $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$f(t, x(t)) = e^{At}x \quad (1.2)$$

Définition 1.4 Système dynamique non linéaire

Soit le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.3)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système 1.3 le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$f(x^*) = 0$$

Définition 1.5 Considérons le système 1.3 le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ où $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)\right) = Df(x^*)$; $1 \leq i, j \leq n$ et $f(x^*) = 0$ et appelé linéarisation de 1.3 en x^* .

1.3 Classification des systèmes dynamiques

1.3.1 Systèmes dynamiques à temps continue

Un système dynamique dans un temps continue est représenté par un système d'équation différentielle du premier ordre,[3] de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (1.4)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne le dynamiques du système.

Si on associé à cette dynamique un état initial $x_0 = x(t_0)$.

Pour chaque couple choisi, (x_0, t_0) on peut identifier une solution unique :

$$\Phi(., x_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\Phi_f(t_0, x_0, t_0) = x_0 \text{ et } \dot{\Phi}_f(t, x_0, t_0) = f(\Phi_f(t; x_0, t_0), t)$$

Cette solution appelée souvent trajectoire, fournit les états successifs occupés par le système à chaque instant t .

1.3.2 Systèmes dynamiques à temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est présenté par une application (fonction itérative)

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

On peut également identifier pour chaque couple (x_0, k_0) une solution unique

$$\Phi_f(., x_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\Phi_f(k_0, x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \Phi_f(k+1, x_0, k_0) = f(\Phi_f(k, x_0, k_0), k)$$

1.3.3 Système autonome et non-autonome

a- Lorsque la variable libre t apparait explicitement dans l'expression de f , le système est dite **non-autonome**.

b- On peut toujours transformer un système **non-autonome** en système **autonome** (où t n'apparaît pas explicitement).

Remarque 1.1 Par un changement de variable approprié on peut transformer un système **non-autonome** de dimension (n) à un système **autonome** équivalent de dimension $(n + 1)$.

1.4 Propriétés des systèmes dynamiques

1.4.1 Point fixe

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système.

Définition 1.6 (à temps continu) Un point fixe (ou critique ou singulier, ou point stationnaire) de l'équation : $\dot{x}_t = f(x, t, p)$, est un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$.

Définition 1.7 (à temps discret) Un point fixe d'une application $x_{k+1} = f(x_k, p)$

est un point invariant par f , c'est-à-dire un point x^* de l'espace de phases vérifiant l'équation $f(x^*) = x^*$.

1.5 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continue

1.5.1 Introduction

La notion de stabilité d'un système caractérise le comportement de ses trajectoires autonome des points d'équilibres l'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des système dynamique telle que la stabilité au sens de **Lyapunov**.

1.5.2 Classification des points d'équilibres

a- Cas des systèmes linéaires

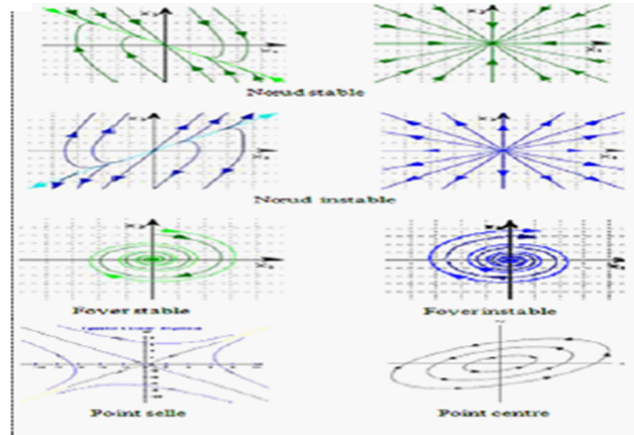
Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.6)$$

Où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.8 – Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et même signe, la solution $x = 0$ est appelée nœud.

- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$. La solution $x = 0$ est appelée foyer.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$. La solution est appelée centre.



Figure(1-1)-Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

b- Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.7)$$

Définition 1.9 Un point critique de x^* de 1.7 est appelée puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives ; il est appelée sources si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives ; il est appelée selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Stabilité

Théorème 1.1 Soit $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^1$, un système dynamique continue. Si x^* un point fixe ($f(x^*) = 0$), alors si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative, x^* est stable et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive.

1.5.3 Stabilité au sens de Lyapunov à temps continu

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous désignons par x^* un point d'équilibre de 1.8 $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq t_0$, et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système 1.8 initialisée en x_0 à l'instant t_0 , et f une fonction non linéaire.

Définition 1.10 (Stabilité) *l'origine est un point d'équilibre x^* stable au sens de Lyapunov du système 1.8 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Définition 1.11 (Stabilité uniforme) *l'origine est un point d'équilibre x^* uniformément stable au sens de Lyapunov du système 1.8 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Définition 1.12 (Attractivité) *l'origine est un point d'équilibre x^* attractif du système 1.8 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0$$

Lorsque $\delta(\varepsilon) = +\infty$, on dit que l'origine est globalement attractive.

Définition 1.13 (Stabilité asymptotique) *l'origine est un point d'équilibre x^* asymptotique (resp. globalement asymptotique) stable du système 1.8 S'il est : stable attractif (resp. globalement attractif).*

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0$$

La stabilité asymptotique signifie qu'on peut déterminer un voisinage du point d'équilibre telle que n'importe quelle trajectoire, issue d'un point $x(0)$ appartenant ou voisinage de x^* tende vers x^* lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 1.14 (Stabilité exponentielle) *l'origine est un point d'équilibre x^* localement exponentielle stable du système 1.8. S'il existe deux constantes strictement positives a, b telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0, x_0 \in B_r$$

lorsque $B_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

Définition 1.15 (Instabilité) le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Soit le système des équations :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.16 Une solution $\Phi(t)$ du système 1.9 telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que toute solution $x(t)$ de 1.9 dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

Alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que toute solution $x(t)$ de 1.9 dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Si en plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

Alors $\Phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.1 ($n = 2$)

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y \\ \dot{y}(t) = x \end{cases}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix}; \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \forall t > 0$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta; \text{ on prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}; \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de **Lyapunov**.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \not\rightarrow 0$$

Donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

On va présenter les deux méthodes de **Lyapunov** (méthode directe et méthode indirecte), ces deux méthodes sont concrétisées par dans exemples pratiques.

a- Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) La première méthode de **Lyapunov** est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système 1.8. Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x^* s'expriment comme suit :

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
2. Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Exemple 1.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases}$$

L'origine 0 est un point fixe

$$\text{et son linéarisation est } Df(0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les valeurs propre de $Df(0)$ est $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$, toutes négatives d'ou le point d'équilibre 0 est **asymptotiquement stable**.

b- Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe) La première méthode de **Lyapunov** est simple à appliquer mais ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre, elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contre partie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ est appelée fonction de **Lyapunov**, qui décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant résume cette méthode.

Théorème 1.2 *Le point d'équilibre x^* du système 1.8 est stable si il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

1- D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$

2- $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$, $\forall x \neq x^*$ dans D

3- $V(x^*) > 0$. Si de plus $\dot{V}(x^*) \leq 0$, $\forall x \neq x^*$ dans D . Alors x^* est **asymptotiquement stable** au sens de **Lyapunov**.

Si on suppose encore que $V(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toute les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement, asymptotiquement stable).

Remarque 1.2 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de **Lyapunov**. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de **Lyapunov**.*

Exemple 1.3 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$$

le système à un point d'équilibre unique $(0, 0)$

On pose $V(x) = x^2 + y^2 > 0$: d'après le théorème de **Lyapunov** :

1. Si $a < 0$, le point fixe est asymptotiquement stable.
2. Si $a = 0$, le point est au moins stable au sens de **Lyapunov**.
3. Si $a > 0$, le système est stable au sens **Lyapunov**.

1.6 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire définit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(\dot{x}^* + \dot{\varepsilon}(t)) \quad (1.10)$$

et soit x_0 un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliqué au voisinage de point fixe, la fonction F peut être développée en série de **Taylor** au voisinage de point x_0 comme suite :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}_0 = f(\dot{x}_0 + \dot{\varepsilon}(t)) \simeq f(x_0) + J_f(x_0) \bullet \varepsilon(t) \quad (1.11)$$

avec $J_f(x_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction f définit par :

$$J_f(x_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_0}$$

comme $f(x_0) = x_0$, alors l'équation 1.11 redevient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x_0) \bullet \varepsilon(t) \quad (1.12)$$

l'écriture 1.12 veut dire que le système 1.10 est linéarité.

Chapitre 2

Théorie du chaos

2.1 Introduction

De nos jours, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences. En effet, de nombreux modèles mathématiques des processus physique, des phénomènes biologiques des réactions chimiques et de système économiques étaient définis utilisant des systèmes dynamiques chaotiques et hyper chaotiques tant en temps continue qu'à temps discret.

chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement, le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques chaotiques, cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos de donner la définition du chaos, **Due à Devaney** quelques définitions de base sont nécessaires.

2.2 Définitions du chaos

Définition 2.1 *On dit que la fonction $f : X \rightarrow X$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ telle que pour $x_0 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $y_0 \in X$ et entier $j \geq 0$ satisfaisant : $d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta$, ou d représente la distance et $f^{(j)}$ la j ième itération de f .*

Définition 2.2 *Supposons que X un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X ($\bar{Y} = X$). Ce qui revient à dire que Y est*

dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une suite de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .

Définition 2.3 f est topo-logiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans X , il existe $x_0 \in U$ et un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, telle que pour $f^{(j)}(x_0) \in V$ ou, de façon équivalente, il existe un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, telle que pour $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

On est maintenant en position d'énoncer la définition du chaos, au sens de **Devaney**.

Définition 2.4 Une fonction $f : X \rightarrow X$ est dite constituée d'un dynamique chaotique si :

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topo-logiquement transitive.
3. L'ensemble des points périodiques de f est dense dans X .

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables [4].

2.3 Caractéristiques du chaos

2.3.1 La non linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire ne peut pas être chaotique.

2.3.2 Le déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de "prédire" le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarité.

Dans les phénomène aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

2.3.3 L'aspect aléatoire

Tout les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires.

2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

D'un point de vue mathématique, on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta.$$

Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant le taux de divergence des trajectoires [5].

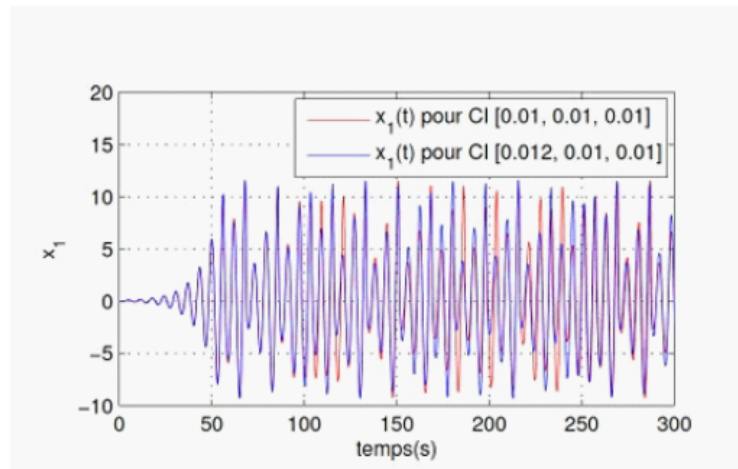


Figure (2-1) - Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x_1

2.4 Les attracteurs

2.4.1 Définitions d'attracteurs

Définition 2.5 *Un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.*

Définition 2.6 [6], [7] *Soit $(X, \{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ un système dynamique, A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On dit que A est un attracteur, s'il est vérifié trois conditions suivantes :*

- a- A est invariant sous l'action du flot (i.e $\varphi_t(A) \subset A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
- b- A est stable au sens de **Lyapunov** (si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$).
- c- Il existe une orbite dense dans A telle que $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$.

2.4.2 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur possède les propriétés suivante :

1. Un sous ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .
2. Il existe un ensemble $A \subset B$; telle que pour voisinage de A ; la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Cette "zone d'influence" est le bassin d'attraction, c'est l'ensemble : $W = \cup_{t < 0} \varphi_t(V)$;
3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

2.4.3 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs régulières et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotiques, peuvent être de trois sortes :

1. Le point fixe

C'est le cas le plus courant et le plus simple d'attracteur, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point). On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes, les nœuds stables et les foyers stables.

2. Le cycle limite périodique

Définition 2.7 Une solution $X(t)$ d'un système dynamique autonome ou non est périodique s'il existe un entier T pour lequel pour tout t , $X(t+T) = X(t)$ et $X(t+\bar{T}) = X(t)$ pour tout

$0 < \bar{T} < T$, T est alors appelé la période de la solution.

Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même.

L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes. En général, on trouve trois types de cycle-limite : cycle-limite stable, cycle-limite instable et cycle-limite semi-stable (en pratique instable).

3. Le cycle limite pseudo-périodique

C'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore)

Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (est appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

Définition 2.8 (*Guckenheimer et Holmes*) Un ensemble A est un attracteur si :

- a- A est fermé et invariant.
- b- A est indécomposable.
- c- L'union de A avec son bassin d'attraction et de mesure de Lebesgue positive.

Définition 2.9 (*Berge et al*) [8] Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.

Définition 2.10 (*Farmer et Sidorowich*) [9] Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov $\lambda_k > 0$.

Les différents types d'attracteurs chaotiques

Les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principales : attracteur hyperbolique, Quasi-attracteur, et attracteur de types **Lorenz**.

1. Attracteur hyperbolique

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles limites structurellement stable. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

2. Quasi-attracteur

Ces types d'attracteurs sont des ensembles limites renfermant des orbites périodiques des différents types topologiques et des orbites structurellement instable. Par exemple les attracteurs générés par le circuit de **chua** [10].

3. Attracteur de types Lorenz

Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stable mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stable (hyperbolique) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de **Lorenz** lui-même [11].

2.5 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si les systèmes non linéaire est ou non chaotiques, on a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : Les exposants de Lyapunov et dimension fractale.

2.5.1 L'exposant de Lyapunov

Le 12 Octobre 1892 **Lyapunov** soutient à l'Université de Moscou une thèse de doctorat intitulée : Le problème général de la stabilité du mouvement. Il y introduit l'idée de mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines. Lorsque cette divergence croit exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de **Lyapunov**, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment **Lyapunov** a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left(\dot{f}(x_{i-1}) \right) \right| \quad (2.1)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimal E_0 . Après n itération, l'erreur initiale E_0 sera donc amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$, notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à, puisque :

$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \dots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$, il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithme, utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned}$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de **Lyapunov**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet soit $f(x_i)$ cette fonction.

$$\begin{aligned} E_i &= f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \\ \frac{E_i}{E_{i-1}} &= \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dot{f}(x)$$

Alors si f est dérivable, on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = \dot{f}(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow +\infty$$

Par conséquent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left(\dot{f}(x_{i-1}) \right) \right|$$

lorsque l'exposant de **Lyapunov** est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0$$

et par conséquent

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de **Lyapunov** est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme. Généralement on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de **Lyapunov** :

-Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou orbite périodique stable. Il caractérise le système dissipatif. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de **Lyapunov** λ qui tend vers $-\infty$.

-Si $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

-Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continue, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

Etat stable		Dimension de Lyapunov	Exposant de Lyapunov
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
périodique d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
périodique d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

"Tableaux de classification des régimes permanents selon les exposants de **Lyapunov**"

2.5.2 Dimension fractale

L'attracteur étrange avec sa dimension fractale est satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $A \subset B \implies d(A) \leq d(B)$.
2. $A = \emptyset \implies d(A) = 0$.
3. $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.

et Il existe plusieurs types de dimension fractale pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Hausdorff

La dimension de **Hausdorff** [12] de $M \subset \mathbb{R}^n$ est défini par :

$$D_H = \sup \{d, \mu_d(M) = +\infty\} = \inf \{d, \mu_d(M) = 0\} \quad (2.2)$$

d'où $\mu_d(M)$ est la mesure d-dimensionnelle de **Hausdorff** de l'ensemble M : Ce type de dimension dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble.

Dimension de Lyapunov

La dimension de **Lyapunov** [13] est donné par :

$$D_L = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{|j+1|} + j \quad (2.3)$$

d'où $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ sont les exposant de **Lyapunov** d'un attracteur d'un système dynamique et j le grand entier naturel tel que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$: Ce type tient compte de la dynamique du système.

Dimension de Minkowski-Bouligand

En général la dimension adéquate peut être utilisé est la dimension de **Minkowski-Bouligand**, soit $F(r)$ la région tracée dehors par un petit cercle avec rayon r qui est une courbe fractale, alors quand la limite existe :

$$D_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln F(r)}{-\ln r} + 2 \quad (2.4)$$

il a conjecturé que pour tout fractale strictement auto-similor, la dimension de **Hausdorff** D autrement $D_M > D$

Dimension de corrélation

L'intégrale de corrélation est défini comme suit :

$$c(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} H(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad (2.5)$$

Où H la fonction de **Heaviside** donnée par $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, et elle vérifie la relation

$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \Phi(x) dx = \int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$, pour une fonction de teste $\Phi(x)$. Dans les applications la fonction

de **Heaviside** est utilisée dans les modèles des circuits électriques. Quand la limite au-dessous existe, la dimension de corrélation est définie comme suit :

$$D_2 = d_{cor} = \lim_{\varepsilon, \dot{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[\frac{c(\varepsilon)}{c(\dot{\varepsilon})} \right]}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}} \right)}$$

L'équation de la dimension de corrélation pour un système M-Dimensionnelle avec exactement $(1 - Q, \text{exige}) N_{\min}$ points tel que :

$$N_{\min} \geq \left[\frac{R(2 - Q)}{(1 - Q)} \right]^M$$

Où $R \geq 1$ est la longueur de la «région de plateaux». Si attracteur existe, alors une évaluation de D_2 sature au-dessus d'un certain M donné par : $M \geq 2D + 1^8$.

Chapitre 3

Synchronisation des système dynamiques chaotiques

3.1 Introduction

Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction du temps. L'un des configurations de synchronisation les plus populaires est la configurations maître-esclave pour laquelle un système dynamique appelé système esclave suit le rythme et la trajectoire imposés par une autre système dynamique appelé système maître. Les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos, cette synchronisation paraît difficile à réaliser, car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire seulement une période d'oscillation la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Ce chapitre peut être vu comme une synthèse bibliographique compacte sur les différentes méthodes de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

3.2 Définitions de la synchronisation

3.2.1 Définitions générales

Définition 3.1 *Synchronisation est un mot décomposé un deux parties : (syn) qui veut dire(ensemble) et (chronos) qui veut dire (temps), c'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

Définition 3.2 *Synchronisation est un manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque systèmes évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

3.2.2 Définitions mathématiques

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, **Brown et Kocarev [14]** ont récemment fournir une définit mathématique de la synchronisation.

Pour construire la définition, ils supposent deux sous système :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes. Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale donné par 3.1. Avec les conditions initiale $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour chaque sous système, on forme une trajectoires $\varphi_x(\omega_0)$ et $\varphi_y(\omega_0)$ (ω_0 était une condition initiale donnée). On note par χ l'espace de toutes les trajectoire du premier sous système et par ξ l'espace de toutes les trajectoires du seconde sous système, et on considère deux fonctions (propriétés) $g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_y : \xi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui une sont pas identiques nulle, la premier \mathbb{R} représente le temps, nous disons que les fonctions g_x et g_y sont les propretés des sont systèmes définis par (1) respectivement.

Enfin, pour définir une état synchronisé, **Brown et Kocarev [14]** et exigent une fonction $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\|h\| = 0$ ou $\|h\| \rightarrow 0$ (où $\|\cdot\|$ est toute norme).

Nous disons que la fonction h , que est indépendante du temps, compare les propretés mesurées sur les deux sous systèmes et les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si $h(g_x, g_y) = 0$.

Définition 3.3 (**Brown et Kocarev**) *Les sous systèmes dans (3-1) sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y s'il existe un instant indépendant de l'application h telle que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$. Avec le chois de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation.*

Théorème 3.1 *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de **Lyapunov** des synchronisations esclave appelés les exposants de **Lyapunov** conditionnels, sont négatif.*

3.3 Différents types de synchronisation des systèmes dynamiques

Dans cette section, aux sens d'une étude bibliographique, nous avons recueilli différents types de la synchronisation telle que : synchronisation complète (**SC**), anti-synchronisation, synchronisation généralisé (**SG**), synchronisation projective, synchronisation **M.P.S**, synchronisation décalée, synchronisation **Q.S**...

3.3.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète a été réalisé grâce aux effet des forces d'accouplements unidirectionnelles des systèmes c'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique.

Définition 3.4 *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel représentés par les équation différentielles :*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $X(t)$ est le vecteur d'état du système maître de dimension n et $Y(t)$ le vecteur d'état du système esclave de dimension m

F et G sont des champs de vecteurs $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ à déterminer le vecteur de contrôle .

L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t), \forall x(0), y(0)$$

telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0 \quad (3.3)$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

- Si $F = G$, on dit qu'on une synchronisation complète identique.
- Si $F \neq G$, on dit une synchronisation complète non identique.

3.3.2 Anti-Synchronisation

Définition 3.5 *Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour réaliser l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes, s'il existe un contrôleur U telle que l'équation :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0 \quad (3.4)$$

Alors l'erreur d'anti-synchronisation est présenté par :

$$\|e(t)\| = \|Y(t) + X(t)\|$$

3.3.3 Synchronisation décalée

Définition 3.6 (Diao et al) On dit que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques présentent une synchronisation décalée si et seulement si le temps est décalé.

Définition 3.7 Si les variables d'état $Y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(t)$ du système chaotique maître en temps décalé, on dit qu'il existe une synchronisation retardée comme l'indique la relation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \varepsilon)\| = 0, \forall x(0). \quad (3.5)$$

3.3.4 Synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée, comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des chaotiques de dimensions et des modèles différent systèmes.

Elle manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotique :

La synchronisation généralisé à été introduite pour des systèmes couplés uni-directionnellement par Rulkov et Al [15] en 1995. Pour définir la synchronisation généralisée, on considère un cycle de système maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) \\ \dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.6)$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$, sont les états de système maître et le système esclave respectivement, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U(t) = (u_i(t))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer.

Définition 3.8 S'il existe une fonction $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0; \forall x(0), y(0).$$

Alors le système maître et le système esclave (3-2) se synchronisent au sues généralisé par rapport à la fonction Φ .

3.3.5 Synchronisation projective (PS)

La synchronisation projective a été d'abord rapportée par **Mainieri** et **Rehacek** [16] dans les systèmes chaotiques partiellement linéaires, dans les quels les réponses des deux systèmes identiques synchronisent jusqu'à un facteur d'échelle constant α_i .

XU et al [2] ont également introduit plusieurs régimes de contrôle basés sur la théorie stabilité de **Lyapunov** pour mener le facteur échelle à une valeur souhaitée et dérivé une condition générale pour la synchronisation projective que tous conditionnels des exposants de **Lyapunov** sont non positifs pour les systèmes en temps continu.

Définition 3.9 On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = y_i(t)_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = x_i(t)_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\exists \alpha_i \neq 0 \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0 ; \forall (x(0), y(0)) , i = 1, 2, \dots, n$$

On appelle α_i facteur d'échelle constant.

- Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

3.3.6 Synchronisation MPS

Guo-Humili [3] a proposé une nouvelle méthode de synchronisation appelée synchronisation notées **MPS** (en anglais- Modifie projective synchronisation), où les deux systèmes maître et esclave se synchronisent jusqu'à une matrice de mise à l'échelle constante.

Définition 3.10 Pour le système maître et le système esclave, s'il existe une matrice constante $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - HY(t)\| = 0 \quad (3.7)$$

Alors nous appelons cette synchronisation "**MPS**" et H la matrice de mise à l'échelle.

3.3.7 Synchronisation Q.S

La plus générale définition du synchronisation **Q.S** est présenté par **Yong** entre deux systèmes dynamiques

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ \dot{Y} = G(X, Y) \end{cases} \quad (3.8)$$

Où $X = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m, Y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs d'états, $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues

$Q_1(x), \dots, Q_h(x)$ et $S_1(y), \dots, S_h(y)$ les variables d'observations du système maître et le système esclave respectivement.

Les systèmes maître et esclave sont synchronisent en respectant $Q_1(x), \dots, Q_h(x)$ et $S_1(y), \dots, S_h(y)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Q_i(X(t)) - S_i(Y(t))\| = 0, i = 1, \dots, h \quad (3.9)$$

L'erreur du synchronisation est :

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)) \quad (3.10)$$

Où $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$

3.4 Méthode de synchronisation

3.4.1 Méthode de contrôleur actif

Le schéma de contrôle actif est proposé par **Bai** et **Lonngren** a reçu une attention considérable au cours de la dernière décennie, les applications à divers système abondent dont certains systèmes comprennent le système de **Rössler** et **Chen**, Les circuits électroniques qui modèlent une équation de 3^{ème} ordre, système de **Lorenz**, **Chen**, **Lü**, modèle géophysique, rasance magne tic nucléaire.

La méthode du contrôleur actif est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes non identiques mais aussi pour la synchronisation des systèmes hyperchaotique.

Soient deux systèmes chaotiques à synchronisent maître et esclave définis par :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases}$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'états des systèmes maître et esclave respectivement, et $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent nille faut que l'erreur entre les trajectoires des systèmes, donc le système converge vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini, cet erreur est déterminé comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.11)$$

Alors

$$\dot{e}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \quad (3.12)$$

$$\dot{e}(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U \quad (3.13)$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) \quad (3.14)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (3.15)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire, le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(t), y(t)) \quad (3.16)$$

d'où V est le contrôleur actif définit par :

$$V = -Le(t) \quad (3.17)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue, on obtient donc la formule finale de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t) \quad (3.18)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître et le système esclave et transformée en problème de zéro stabilité du système 3.18.

3.5 Application de deux types de synchronisation

3.5.1 Synchronisation complète des systèmes chaotiques

On utilise la méthode de contrôleur actif

On assume qu'on a deux systèmes de **Lorenz** de 1963 [11], système maître contrôle le système esclave représentés respectivement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \delta(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \delta(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = rx_2 - y_2 - x_2z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = -bz_2 + x_2y_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour la synchronisation complète, l'erreur est défini par :

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1 \\ e_2 = y_2 - y_1 \\ e_3 = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{e}_3 = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \delta (e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = r e_1 - e_2 - x_2 z_2 + x_1 z_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -b e_3 + x_2 y_2 - x_1 y_1 + u_3 \end{cases} \quad (3.22)$$

d'après la méthode de contrôleur actif, l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = A e(t) + N(X(t), Y(t)) + U$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 z_2 + x_1 z_1 \\ x_2 y_2 - x_1 y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$U = V - N(X(t) - Y(t))$$

On définit le contrôleur U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = x_2 z_2 - x_1 z_1 + v_2 \\ u_3 = -x_2 y_2 + x_1 y_1 + v_3 \end{cases} \quad (3.23)$$

Remplaçons 3.23 dans 3.22, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \delta (e_2 - e_1) + v_1 \\ \dot{e}_2 = r e_1 - e_2 + v_2 \\ \dot{e}_3 = -b e_3 + v_3 \end{cases}$$

V le contrôleur actif défini par $V = -L e(t)$ nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -\delta e_2 \\ v_2 = -r e_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient la formule finale d'erreur :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $\lambda_1 = -\delta$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -b$, tous les λ sont négatives.

Donc le système est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**, ce qui assure que pour tout $t \rightarrow +\infty$ l'erreur $e_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3$).

C'est-à-dire la synchronisation complète de deux systèmes est réalisée.

3.5.2 Anti-Synchronisation des systèmes chaotiques

Premièrement on utilise la méthode de contrôleur actif :

Soit les systèmes maître et esclave représentés respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + cy_2 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.26)$$

Pour l'anti-synchronisation, l'erreur est défini par :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 + x_1 \\ e_2 = y_2 + x_2 \\ e_3 = y_3 + x_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 + \dot{x}_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 + \dot{x}_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 + \dot{x}_3 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = ce_2 - y_1y_3 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -be_3 + y_1y_2 + x_1x_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.28)$$

d'après la méthode de contrôleur actif, l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \\ \begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 + x_1x_3 \\ y_1y_2 - x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$U = V - N(X(t) - Y(t))$$

On définit le contrôleur U comme suit

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = y_1y_3 + x_1x_3 + v_2 \\ u_3 = -y_1y_2 + x_1x_2 + v_3 \end{cases} \quad (3.29)$$

Remplaçons 3.29 dans 3.28, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + v_1 \\ \dot{e}_2 = ce_2 + v_2 \\ \dot{e}_3 = -be_3 + v_3 \end{cases} \quad (3.30)$$

V le contrôleur actif défini par $V = -Le(t)$ nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -ae_2 \\ v_2 = -2ce_2 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient la formule finale d'erreur :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Les valeurs propres $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -c$, $\lambda_3 = -b$, tous les λ sont négatives donc le système est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**, ce qui assure que pour tout $t \rightarrow +\infty$ l'erreur $e_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3$)

C'est-à-dire l'anti-synchronisation de deux systèmes est réalisée.

2^{ème} méthode

Pour obtenir l'anti-synchronisation il faut que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Pour éliminer les termes non linéaires dans l'équation 3.28, la fonction de contrôle est choisi comme dans 3.29 et comme la méthode précédent, on obtient 3.30

Dans ce cas, le problème d'anti-synchronisation se transforme en un problème de contrôle de l'erreur pour la stabiliser à la valeur zéro.

Pour définir les lois de contrôle, on choisit la fonction de **Lyapunov** suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (3.33)$$

Dont la forme générale de la dérivée est la suivante :

$$\frac{dV(t)}{dt} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = e_1 (ae_2 - ae_1 + v_1) + e_2 (ce_2 - x_1 e_3 + v_2) + e_3 (x_1 e_2 - be_3 + v_3)$$

Si on choisit

$$\begin{cases} v_1 = -ae_2 \\ v_2 = x_1 e_3 - 2ce_2 \\ v_3 = -x_1 e_2 \end{cases} \quad (3.34)$$

La dérivée de la fonction de **Lyapunov** devient :

$$\frac{dV(t)}{dt} = -ae_1^2 - ce_2^2 - be_3^2$$

Si on pose $r = \min \{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -r (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -2rV(t) \\ V(t) &\leq V(0) \exp(-2rt) \end{aligned}$$

Ce qui assure que pour tout $t \rightarrow +\infty$ l'erreur $e_i(t) \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$

C'est-à-dire l'anti-synchronisation de deux systèmes est réalisée.

Chapitre 4

Méthodes et applications pour la synchronisation des systèmes dynamiques

4.1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques est devenue un domaine de recherche actif, elle a attiré de plus en plus l'attention de nombreux domaines de la science et la technique en raison de ses applications potentielles [17], [18], [19], [20]. Beaucoup types de synchronisation des systèmes chaotiques ont été présentés comme la synchronisation complète [21], l'anti-synchronisation [22], synchronisation généralisée [23] et la synchronisation projective [24], etc. Ainsi de suite, ont été appliqués avec succès à des systèmes chaotiques et hyperchaotiques.

De ce chapitre, on va développée un nouveau critère simple pour la synchronisation globale de deux systèmes quadratiques chaotiques couplés de n dimensions en temps continu. En utilisant la théorie de stabilité de **Lyapunov** et un choix convenable de vecteur de contrôle, un nouveau critère de synchronisation est dérivé sous la forme d'un simple inégalité algébrique qui est très pratique pour vérifier. Le nouveau critère est appliqué à des systèmes quadratiques chaotiques en 3-D et hyperchaotique en 4-D, respectivement. Ce travail a fait l'objet d'un publication internationale : "Synchronization analysis of quadratic chaotic systems in n -D" [25].

Une nouvelle méthode universelle de synchronisation est proposée pour garantir la synchronisation en n -D entre deux systèmes chaotiques maître-esclave en temps continu. A fin de vérifier l'efficacité de la méthode proposée, nous l'appliquons tout d'abord à deux systèmes chaotiques en 3-D, le système de **Rössler** [26] et le système de **Chen-Tesi** [27], puis pour deux systèmes hyperchaotiques en 4-D, le système hyperchaotique de Liu [28] et [29] et le système hyperchaotique de Chen. Ce travail a fait aussi l'objet d'une publication internationale : " Synchronization analysis

of quadratic chaotic systems in n -D "[30].

Afin d'atteindre nos objectifs, ce travail est scindé en trois sections, sa structuration se présente comme suite : une description des systèmes maître-esclave chaotiques, puis l'analyse de la synchronisation. On passe dans la troisième section à la synchronisation globale de deux systèmes chaotiques et pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée, nous fournissons deux exemples célèbres des systèmes chaotiques et hyperchaotiques.

4.2 Nouveau critère pour la synchronisation des systèmes quadratiques n -D

4.2.1 Description des systèmes maître-esclave chaotiques

Nous considérons le système chaotique maître décrit par :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \alpha_{pq}^i x_p(t) x_q(t) + \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1)$$

où $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système 4.1, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(\alpha_{pq}^i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($1 \leq i \leq n$) et $\gamma_i \in \mathbb{R}$. ($1 \leq i \leq n$).

Pour le système esclave nous considérons le système chaotique suivant :

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j(t) + \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \beta_{pq}^i y_p(t) y_q(t) + \delta_i + u_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.2)$$

où $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système 4.2, $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(\beta_{pq}^i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($1 \leq i \leq n$), $\delta_i \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les contrôleurs de synchronisation à déterminer.

Les erreurs de synchronisation entre le système maître 4.1 et le système esclave 4.2 sont définies par :

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.3)$$

Alors, le problème de synchronisation est de trouver des contrôleurs $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui stabilisent les erreurs de synchronisation 4.3 tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e_i(t)| = 0$, ($1 \leq i \leq n$).

4.2.2 Méthode de la synchronisation

Les erreurs de synchronisation entre le système maître 4.1 et le système esclave 4.2 peuvent être décrites comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j(t) + L_i + N_i + u_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.4)$$

où

$$L_i = \sum_{j=1}^n (b_{ij} - a_{ij}) x_j(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.5)$$

et

$$N_i = \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \beta_{pq}^i y_p(t) y_q(t) - \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \alpha_{pq}^i x_p(t) x_q(t) + \delta_i - \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.6)$$

Maintenant, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Le système maître 4.1 et le système esclave 4.2 sont globalement synchronisés en vertu des contrôleurs de synchronisation suivants :*

$$u_i = -L_i - N_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} e_j(t) - k_i e_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.7)$$

où les constantes de contrôle $\{k_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont choisies telles que :

$$b_{ii} - k_i < 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.8)$$

Preuve. En remplaçant la loi du contrôle 4.7 dans 4.4, les erreurs de synchronisation peuvent être écrites comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = (b_{ii} - k_i) e_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.9)$$

Pour prouver la stabilité zéro des erreurs de synchronisation 4.9, nous considérons la fonction quadratique de **Lyapunov** suivante :

$$V(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2(t) \quad (4.10)$$

La dérivée de 4.10 le long de la solution du système 4.9 est

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^n \dot{e}_i(t) e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (b_{ii} - k_i) e_i^2(t) \end{aligned}$$

On utilise 4.8, on a : $\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^n (b_{ii} - k_i) e_i^2(t) < 0$. Alors, la solution zéro des erreurs de synchronisation 4.9 est asymptotiquement stable et globalement synchronisée. ■

4.3 Applications Numérique de la synchronisation entre deux systèmes chaotiques à 3-D et hyperchaotiques à 4-D a temps continu

4.3.1 Synchronisation globale de deux systèmes chaotiques (Chen et Rössler)

Le système maître est le système chaotique de **Chen** :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 + cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (4.11)$$

où $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$.

Le système esclave est le système chaotique de **Rössler** :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 + \alpha y_2 \\ \dot{y}_3 = -\gamma y_3 + \beta + y_1 y_3 \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 5.7$ et $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ est le vecteur contrôleur.

Les erreurs de synchronisation entre le système maître (5-11) et le système esclave (5-12) peuvent être décrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 = -y_1 - y_2 - a(x_2 - x_1) + (-x_1 + x_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{x}_2 = y_1 + \alpha y_2 - (c - a)x_1 - cx_2 + x_1x_3 + (\alpha x_2 - \alpha x_2) + u_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \dot{x}_3 = -\gamma y_3 + \beta + y_1 y_3 + bx_3 - x_1x_3 + (\gamma x_3 - \gamma x_3) + u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(y_1 - x_1) + [-y_2 - a(x_2 - x_2) - x_1] + u_1 \\ \dot{e}_2 = \alpha(y_2 - x_2) + [y_1 + \alpha x_2 - (c - a)x_1 - cx_2 + x_1x_3] + u_2 \\ \dot{e}_3 = -\gamma(y_3 - x_3) + [\beta + y_1 y_3 + bx_3 - x_1x_3 - \gamma x_3] + u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1 + b_{12}e_2 + b_{13}e_3 + [L_1 + N_1 + u_1] \\ \dot{e}_2 = b_{21}e_1 + \alpha e_2 + b_{23}e_3 + [L_2 + N_2 + u_2] \\ \dot{e}_3 = b_{31}e_1 + b_{32}e_2 - \gamma e_3 + [L_3 + N_3 + u_3] \end{cases} \quad (4.13)$$

telles que :

$$\begin{cases} L_1 = -a(x_2 - x_1) - x_1 \\ N_1 = -y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2 = \alpha x_2 - (c - a)x_1 - cx_2 \\ N_2 = y_1 + x_1x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3 = bx_3 - \gamma x_3 \\ N_3 = \beta + y_1y_3 - x_1x_3 \end{cases}$$

Pour réaliser la synchronisation entre le système de **Chen** 4.11 et le système de **Rössler** 4.12, nous pouvons choisir le vecteur contrôleur U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -L_1 - N_1 - b_{12}e_2 - b_{13}e_3 - k_1e_1 \\ u_2 = -L_2 - N_2 - b_{21}e_1 - b_{23}e_3 - k_2e_2 \\ u_3 = -L_3 - N_3 - b_{31}e_1 - b_{32}e_2 - k_3e_3 \end{cases} \quad (4.14)$$

Substituant le loi de contrôleur 4.14 dans l'équation 4.13 on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = [-e_1 + b_{12}e_2 + b_{13}e_3 + L_1 + N_1 + u_1] - L_1 - N_1 - b_{12}e_2 - b_{13}e_3 - k_1e_1 \\ \dot{e}_2 = [b_{21}e_1 + \alpha e_2 + b_{23}e_3 + L_2 + N_2 + u_2] - L_2 - N_2 - b_{21}e_1 - b_{23}e_3 - k_2e_2 \\ \dot{e}_3 = [b_{31}e_1 + b_{32}e_2 - \gamma e_3 + L_3 + N_3 + u_3] - L_3 - N_3 - b_{31}e_1 - b_{32}e_2 - k_3e_3 \end{cases}$$

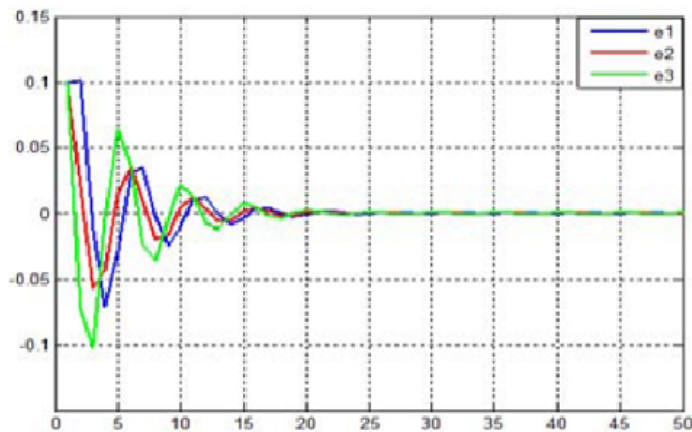
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1 \\ \dot{e}_2 = (\alpha - k_2)e_2 \\ \dot{e}_3 = -\gamma e_3 \end{cases} \quad (4.15)$$

où k_2 est une constante de contrôle à déterminer.

Corollaire 4.1 Si une constante de contrôle k_2 telle que : $k_2 > \alpha$

Alors, le système de **Chen** 4.11 et le système de **Rössler** 4.12 sont globalement synchronisés en de loi du contrôle 4.14.

Afin de valider les résultats théoriques obtenus une simulation numérique est élaborée (FIG(4-1)).



Figure(4-1) - Les erreurs de synchronisation entre les deux systèmes (Chen ; Rössler).

4.3.2 Synchronisation globale entre deux systèmes hyperchaotiques (Liu et Rössler)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 + x_1x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 - x_1x_2 + x_4 \\ \dot{x}_4 = a_4x_1 + x_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

où $a_1 = 10$, $a_2 = 35$, $a_3 = 1.4$, $a_4 = 5$.

Le système esclave est le système hyperchaotique de **Rössler** décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 - y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + b_1y_2 + y_4 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_3 + b_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 = -b_3y_3 + b_4y_4 + u_4 \end{cases} \quad (4.17)$$

où $b_1 = 0.25$, $b_2 = 2$, $b_3 = 0.5$, $b_4 = 0.05$ et $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ est le vecteur contrôleur.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 = (-y_2 - y_3 + u_1) - a_1(x_2 - x_1) + a_1y_1 - a_1y_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{x}_2 = (y_1 + b_1y_2 + y_4 + u_2) - a_2x_1 - x_1x_3 + x_4 + (b_1x_2 - b_1x_2) \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \dot{x}_3 = (y_1y_3 + b_2 + u_3) + a_3x_3 + x_1x_2 - x_4 + (a_3y_3 - a_3y_3) \\ \dot{e}_4 = \dot{y}_4 - \dot{x}_4 = (-b_3y_3 + b_4y_4 + u_4) - a_4x_1 - x_2 + (b_4x_4 - b_4x_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -a_1 e_1 + b_{12} e_2 + b_{13} e_3 + b_{14} e_4 + [L_1 + N_1 + u_1] \\ \dot{e}_2 = b_1 e_2 + b_{21} e_1 + b_{23} e_3 + b_{24} e_4 + [L_2 + N_2 + u_2] \\ \dot{e}_3 = -a_3 e_3 + b_{31} e_1 + b_{32} e_2 + b_{34} e_4 + [L_3 + N_3 + u_3] \\ \dot{e}_4 = b_4 e_4 + b_{41} e_1 + b_{42} e_2 + b_{43} e_3 + [L_4 + N_4 + u_4] \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} L_1 = -a_1 x_2 \\ N_1 = -y_2 - y_3 + a_1 y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2 = -a_2 x_1 + x_4 + b_1 x_2 \\ N_2 = y_1 + y_4 - x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3 = -x_4 \\ N_3 = a_3 y_3 + y_1 y_3 + b_2 + x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_4 = -a_4 x_1 - x_2 - b_4 x_4 \\ N_4 = -b_3 y_3 \end{cases}$$

Pour atteindre la synchronisation entre le système hyperchaotique de **Liu** 4.16 et le système hyperchaotique de **Rössler** 4.17, nous pouvons choisir le vecteur contrôleur U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -L_1 - N_1 - b_{12} e_2 - b_{13} e_3 - b_{14} e_4 - k_1 e_1 \\ u_2 = -L_2 - N_2 - b_{21} e_1 - b_{23} e_3 - b_{24} e_4 - k_2 e_2 \\ u_3 = -L_3 - N_3 - b_{31} e_1 - b_{32} e_2 - b_{34} e_4 - k_3 e_3 \\ u_4 = -L_4 - N_4 - b_{41} e_1 - b_{42} e_2 - b_{43} e_3 - k_4 e_4 \end{cases} \quad (4.19)$$

substituant le loi de contrôleur 4.19 dans l'équation on obtene :

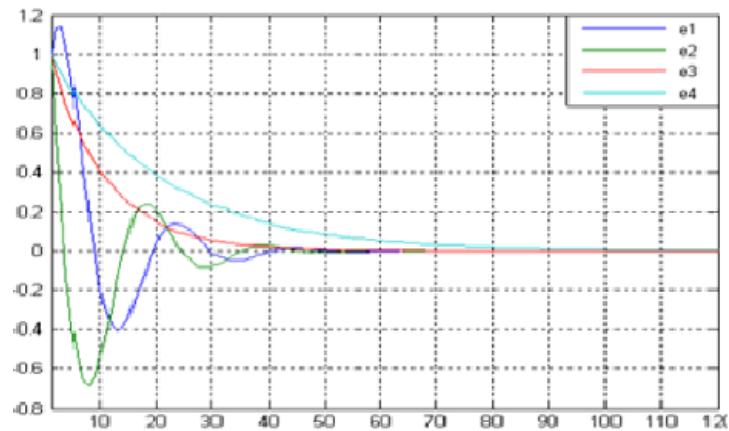
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -a_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = (b_1 - k_2) e_2 \\ \dot{e}_3 = -a_3 e_3 \\ \dot{e}_4 = (b_4 - k_4) e_4 \end{cases} \quad (4.20)$$

Théorème 4.2 Pour les deux systèmes hyperchaotiques couplés de **Liu** 4.16 et de **Rössler** 4.17 ,si $(k_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont choisis telles que :

$$k_2 > b_1 \text{ et } k_4 > b_4 \quad (4.21)$$

Alors les deux systèmes sont globalement synchronisés en vertu de la loi du contrôle 4.19.

Les résultats numériques représentés montrent l'efficacité du schéma proposé (FIG(4-2))



Figure(4-2) - Les erreurs de synchronisation entre le système de Liu et le système de Rössler

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau critère simple pour la synchronisation globale de deux systèmes chaotiques arbitraires en n -D a été dérivé. Ce simple critère a été appliqué à une large classe des systèmes chaotiques et hyperchaotiques. Des simulations numériques ont montré l'efficacité de la méthode proposée.

Conclusion.

On a étudié dans ce travail la synchronisation des systèmes dynamiques à temps continu. On a réservé la première partie à la présentation des systèmes dynamiques et leurs types. Ainsi nous étudions comment étudier la stabilité de ces système, et la deuxième partie nous avons présentés une vue panoramique sur la théorie du chaos et comme nous l'avons mentionné les attracteur et la troisième partie nous avons présenté abordons le problème de la synchronisation des systèmes chaotiques. En citant les différents types de ce dernier et la méthode la plus utilisé, à la fin nous abordons sur le synchronisation globale entre deux systèmes chaotiques a n dimension. Actuellement, la synchronisation fait l'outil le plus moderne pour sécuriser la transmission de l'information, et malheureusement elle utilise aussi pour attaquer les réseaux et les systèmes.

Bibliographie

- [1] **L.M.Pecora , T.L.Carroll**, "Synchronization in chaotic systems.", Phys. Rev. Lett. 64, 821-825, 1990.
- [2] **David Viennot**, "Analyse spectrale pour les systèmes dynamiques classiques." Master physique, physique numérique.
- [3] **Eric Goncalvés da Silva**, "Introduction aux systèmes dynamiques et chaos." Institut polytechnique de Grenoble, Avril 2004.
- [4] **Devaney RL**, An introduction to chaotic dynamical systems. In Addison-Wisley, Redwood City, CA37.
- [5] **Tayeb Hamaizia**, Systèmes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique", thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences, Université de Constantine -1-, le 25/04/2013.
- [6] **J.Guckenheimer , P.Holmes**, "Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields.", Springer-Verlag, New York. B, 1983.
- [7] **D.Ruelle**, "Chaotic Evolution and Strange Attractors.", Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- [8] **P.Berge , Y.Pomeau , C.Vidal**."Order Within Chaos.", Hermann and John Wiley and Sons, Paris, France, 1984.
- [9] **J.D.Farmer , J.J.Sidorowich**, "Predicting chaotic time series.", Phys. Rev. Lett. 59, 845.T.T, 1987.
- [10] **L.O.Chua**, "Chua's circuit : an overview ten years later.", Journal of Circuits Systems & Computers, vol.4, no.2, pp.117-159, 1994.
- [11] **E.Lorenz**, "Deterministic nonperiodic flow, Journal of the Atmospheric Sciences.", vol. 20, no.2, pp. 130-141, 1963.

-
- [12] **E.HAUSDORFF**, "Dimension und ausseres Mass.", Math. Annalen 79, 1919.
- [13] **T.Y.Li** , **J.A.Jorke**, "Period three implies chaos, American Mathematical Monthly.", 82, pp.481-485, 1975.
- [14] **R.Brown** , **L.Kocarev**, "A unifying definition of synchronization for dynamical systems.", Chaos, vol. 10(2), pp. 344-349, June, 2000.
- [15] **N.FRulkov**, **K.M. Sushchik** , **L.S. Tsimring** , **H.D.I. Abarbanel**, "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems.", Phys. Rev. E, 51, pp.980-994, 1995.
- [16] **R.Mainieri** , **J.Rehacek**, "Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems.", Phys. Rev. Lett. 82, pp. 3042-5,1999.
- [17] **B.Blasius** , **L.Stone**, "Chaos and phase synchronization in ecological systems.",Int. J. Bifur. Chaos, vol .10, pp. 2361-2380, 2000.
- [18] **M.Lakshmanan** , **K.Murali**, "Chaos in Nonlinear Oscillators : Controlling and Synchronization.", Singapore, World Scientific, 1996.
- [19] **S.KHan** , **C.Kerrer**, **Y. Kuramoto**, "Dephasing and bursting in coupled neural oscillators.", Phys Rev Lett, vol.75, pp.3190-3193, 1995.
- [20] **A.Mengue** , **B.Essimbi**, "Secure communication using chaotic synchronization in mutually coupled semiconductor lasers.", Nonlinear Dyn, vol.70, pp. 1241-1253, 2012.
- [21] **X.F.Li** , **A.IC.S.Leung** , **X.P.Han** , **X.J.Liu** , **Y.D.Chu**, "Complete (anti-synchronization) of chaotic systems with fully uncertain parameters by adaptative control.", Nonlinear Dyn. vol.63, pp. 263-275, 2001.
- [22] **X.Zhang** , **H.Zhu**, "anti-synchronization of two different hyperchaotic systems via active and adaptative control, International journal of Sciences.", vol. 6, pp. 216-223, 2008.
- [23] **G.Zhang** , **Z.Liu** , **Z.Ma**, "Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamics systems.", Chaos, Solitons and Fractals, vol.32, pp.773-779, 2007.
- [24] **J.Qiang**, "Projective synchronization of new heperchaotic Lorenz system chaotic systems.", Phys. Lett. A, vol.370, pp.40-45, 2007.
- [25] **A.Gasri** , **A.Ouannas**, "synchronization analysis of quadratic chaotic systems in n-D.", Far East Journal of Mathematical sciences, FJMS, vol. 96, No 2, pp.241-248, 2015.
- [26] **O.E.Rössler**, "An equation for continuous chaos.", Phys. Lett. A ; 57(5) : 397-398, 1976.
- [27] **G.Genesio** , **A.tesi**, "Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in non-linear systems." Automtica, vol. 28(3), pp.531-548, 1992.

- [28] **O.E.Rössler**, "Continuous chaos-four prototype equations.", Bifurcation theory and applications in scientific disciplines", Ann. New York Acad. Sci, vol. 316, New York Acad. Sci, New York, pp. 376-392, 1979.
- [29] **O.E.Rössler**, "An equation for hyperchaos.", Phys. Lett. A, vol. 71, pp. 155-157, 1979.
- [30] **A.Ouannas** , **A.Gasri**, "General synchronization approach for general chaotic systems in continuous-time.", Far East Journal of Mathematical sciences, FJMS, vol.96, No 2, pp.231-239, 2015.