République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université L'arbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

Solution positive pour une classe des systèmes p-Laplacien avec paramétres multiples

Présenté Par :
ZAIDI Amira
MENASRIA Nabila

Devant le jury :

Mr R.GUEFAIFIA	MCA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Président
Mm S.ZEDIRI S	MAA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Examinateur
Mr T.BOUALI	MCA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Encadreur
Mr /	MCA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Co-Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Remerciments

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur Bouali Tahar, Maître de Conférences classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également Monsieur Guefaifia Rafik Maître de Conférences classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie Mme Zediri Sounia, Maître-assistante classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa, pour l'honneur qu.il m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu à l'institut de mathématiques qui ont rendu mes séjours au département agréables.

Résumé

En utilisant la méthode de sous et sur solution pour montrer l'existence de solution faible positive des systèmes elliptiques avec condition de type **Dirichlet au bord.**

Mots clés : Solution positive, Systemes p-Laplacien, Paramètres multiples, Sous-solution, Sur-solution.

Abstract

By using the method of sub-super solution to show the existence of weak positive solution of elliptic systems with Dirichlet boundary condition.

Key words : Positive solution, p-Laplacian systems, Multiples parameters, Sub-solution, Super-solution.

Résumé Arabe

نستعمل طريقة الحل الفوقي والتحتي من أجل إثبات وجود حل موجب ضعيف لجملة معادلة اهليليجية مع شروط من نوع ديركلي عند الحدود.

الكلمات المفتاحية: حل موجب, جملة معادلات, p-Laplace ,عامل متغير مضاعف, الحل الفوقي والتحتي.

Table des matières

Notations

· $\boldsymbol{\lambda}$: un paramètre rèel.

· $\boldsymbol{\Omega}$: désigne un ouvert bornè de R^n avec $n \geqslant 3$.

· $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

· $\boldsymbol{\partial\Omega}$: frontière de Ω.

· $\boldsymbol{\Delta}$: le laplacien.

· $\boldsymbol{\Delta u}$: le laplacien de la fonction u tel que $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

· $\boldsymbol{\nabla u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \text{grad}\ \boldsymbol{u}$.

· $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)} = \boldsymbol{W_0^{1,2}(\Omega)}$ muni de la norme $\parallel u \parallel^2 = \int\limits_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 dx$.

· $\boldsymbol{C(\bar{\Omega})}$: l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.

· $\boldsymbol{C^k(\Omega)}$: l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω (avec $K \in \mathbb{N}^*$).

· $\boldsymbol{C_c(\Omega)}$: l'espace des fonctions continus à support compact dans Ω.

· $\boldsymbol{C_0^1(\bar{\Omega})}$: le sous espace vectoriel de $C^1(\bar{\Omega})$, constitué des fonctions de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ et nulles sur $\partial\Omega$.

· $\boldsymbol{\lambda}_1$: la première valeur propre du $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

· $\boldsymbol{\varphi}_1$: la fonction propre associée à λ_1.

· $\boldsymbol{C^k(\bar{\Omega})}$: l'espace des fonctions u de $C^k(\Omega)$ telle que chaque multi-indice α, $\mid \alpha \mid \leq k$ l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha u(x)$ se pronloge continument sur $\bar{\Omega}$.

Introduction générale

Beaucoup de problèmes de physique-mathématique rencontrés par les ingénieurs peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles.
Ce type de modélisation est aujourd'hui l'un des thèmes les plus importants de la compréhension scientifique, et de la recherche mathématiques.
Dans ce travail on a étudié l'existence de solution positive de deux type de système des équations aux dérivées partielles de type elliptique non linéaire avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord ; et notre approche est basée sur la méthode des sous-sur solutions

Le premier système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u), & \text{dans } \Omega; \\ \\ -\Delta v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \gamma(v), & \text{dans } \Omega; \\ \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et Δ est l'opérateur de **Laplace** définie par :

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x)$$

et f, $g, h, \gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones, vérifiant certain conditions.

Ce système a été étudié par **Hai-Shivaji** en **2007** (**voir** [**1**]).

La première valeur propre de l'opérateur $-\triangle$ et la première fonction propre correspondante est très importante dans l'étude du problème (**1**)**,**la première fonction propre a été utilisée pour construire la sous solution de problème (**1**).
En utilisant la technique des sous et sur solutions pour montrer que le problème (**1**) admet au moins une solution positive sous la condition $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ assez large.

Le deuxième système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 f\left(v\right) + \mu_1 h\left(u\right), & \text{dans } \Omega; \\ 1 \\ -\Delta_q v = \lambda_2 g\left(u\right) + \mu_2 \gamma\left(v\right), & \text{dans } \Omega; \\ \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, et $\Delta_s u = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{s-2} \nabla u\right), s > 1,\ s = p, q,$ est l'opérateur $s-$Laplace, et $f,\ g, h, \gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones, vérifiant certain conditions.

On rialité ce problème est une extenstion du problème (1) et par la même méthode nous prouvons l'existence d'une solution positive de peoblème (2).
Le premier chapitre et un préliminaire qui comporte des définitions, des théorèmes, des propositions et des lemmes indispensables pour le reste de la mémoire.

Le deuxième chapitre contient des résultats d'existence de solution faible positive de certaines classes de système elliptique intervanant l'opérateur de **Laplace,** dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$,avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et en utilisant la méthode de sous-sur solution.

Le troisième chapitre est une généralisation du deuxième chapitre et comporte des résultats d'existences de solution faible positive d'une classe de systèmes $(p, q)-$**Laplace,** dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, et en utilisant la même méthode.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle, qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces L^p, les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev, les espaces des fonctions continues, ainsi qu' une partie des définitions sur le problème des valeurs propres. Enfin on va considérer quelques concepts de principe de maximum et du lemme de comparaison qu'ils sont nécessaire de connaitre pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Espaces des fonctions continues

On donne ici quelques notations et conventions utilisées dans la suite.
Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport à $x_i\,(1 \leq i \leq n)$ .Définissons aussi le gradient et le $p-$Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^{\,t} \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

$$\Delta_p u(x) = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right)(x) \,.$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega), \mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b\left(\overline{\Omega}\right)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

Pour $k \geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.
$C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.
Nous définissons aussi $C^k(\overline{\Omega})$, comme l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k(\mathbb{R}^n)$ ou bien comme étant l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, telle que pour tous $0 \leq j \leq k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$, la limite $\lim\limits_{x \to x_0} D^j u(x)$ existe et dépend uniquement de x_0.
$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions tests.

1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de **Lebesgue** dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable, } \exists c > 0, \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Il sera muni de la norme du essentiel-sup

$$\|u\|_{L^\infty} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{c;\ |u(x)| \leq c \quad \text{p.p sur } \Omega\}$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

1.3 Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.1 [2] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $1 \leq i \leq n$. une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f_i(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$,on posera

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,;\ \text{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\,, 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

Théorème 1.1 [2] *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^\infty(\Omega)$ ($W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$) pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, i.e qu'il existe un constant C (dépendant seulement de Ω) tel que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}}\,,\quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

De plus, si Ω est borné on a

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 < p \leq +\infty,$$
$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 \leq q < +\infty.$$

Corollaire 1.1 [2] *Supposons que Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors*

$$\lim_{\substack{|x|\to+\infty \\ x\in\Omega}} u(x) = 0$$

Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\,,\ \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ la langueur de α et $\partial_i u = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la définition (1.1).

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|\partial_i u\|_{L^p}$$

Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2 [2] *Pour $1 \leq p < +\infty$ on définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$,et on écrit*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}}$$

1.3.1 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Proposition 1.1 *(inégalité de **Hölder**) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, supposons que $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $f \in f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1$ et

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Inégalité de Cauchy

Proposition 1.2 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs x et y de E,*

$$| \langle x, y\rangle | \leqslant \| x \| \| y \| .$$

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

1.4 Principe du maximum

Théorème 1.2 [2] *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de classe C^1 et $u \in H^1(\Omega)$ telle que :*

$$\begin{cases} -\triangle u \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > 0$ alors $u > 0$ dans Ω.

1.5 Problème de valeurs propres

1.5.1 Valeurs propres et fonctions propres du Laplace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

• Les valeurs propres de $\left(-\triangle, H_0^1(\Omega)\right)$ sont réelles.

• Ces valeurs propres constitue une suite croissante,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,$$

et

$$\lambda_k \to \infty, \; k \to +\infty.$$

• Il existe une base orthonormale $\{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à λ_k i.e

$$-\triangle \psi_k = \lambda \psi_k \text{ dans } \Omega.$$

1.5.2 Valeurs propres et fonctions propres du $p-$Laplace

Définition 1.3 *On dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0$, est une fonction propres de l'opérateur $-\triangle_p u$ si :*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u . \varphi dx \tag{1.2}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Le nombre réel λ correspondant est appelé valeur propre.
Soit λ_1 définie par

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} \tag{1.3}$$

équivalant à

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx; \int_\Omega |u|^p dx = 1, u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}$$

λ_1 est le premier valeur propre de l'opérateur $p-$Laplacien avec conditions de Dirichlet nulles au bord.

Lemme 1.1 [2] *λ_1 est isolée, alors il existe $\delta > 0$ tel que dans un intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, il n'existe pas un autre valeurs propres de* **(1.2)**.

Lemme 1.2 [2] *a) Soit $p \geq 2$, alors pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$*

$$|\xi_2|^p \geq |\xi_1|^p + p\,|\xi_1|^{p-2} \langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1 \rangle + C(p)\,|\xi_1 - \xi_2|^p,$$

b)Soit $p < 2$, alors pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi_2|^p \geq |\xi_1|^p + p\,|\xi_1|^{p-2} \langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1 \rangle + C(p)\,\frac{|\xi_1 - \xi_2|^p}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}},$$

où $C(p)$ est une constante dépendant uniquement de p.

Lemme 1.3 [7] *La première valeur propre λ_1 est simple. ,i.e si $u.v$ sont deux fonctions propres associées à λ_1,alors, il existe k tel que : $u = kv$.*

Lemme 1.4 [2] *Soit u une fonction propre associée à la valeur propre λ_1, alors u ne change pas de signe sur Ω, de plus si $u \in C^{1,\alpha}$, alors elle ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$.*

Preuve. Par le lemme (1.4), on peut supposer que u, v sont positives sur Ω, et en prenant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(u^p - v^p)}{u^{p-1}}, \\ \varphi_2 &= \frac{(v^p - u^p)}{v^{p-1}}, \end{aligned}$$

deux fonctions test dans la formulation faible **(1.2)**, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx &= \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx \\ \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}} \right) dx &= \lambda \int_\Omega |v|^{p-2} v \left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}} \right) dx \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'addition de ces des deux formules donnent

$$0 = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}} \right) dx \tag{1.5}$$

Et en utilisant les identités :

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) &= \nabla u - p \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} \nabla v + (p-1) \frac{v^p}{u^p} \nabla u, \\ \nabla \left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}} \right) &= \nabla v - p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \nabla u + (p-1) \frac{u^p}{v^p} \nabla v, \end{aligned} \tag{1.6}$$

on obtient le premier terme de **(1.5)**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - p \int_{\Omega} \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \nabla v \nabla u dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (p-1) \frac{v^p}{u^p} |\nabla u|^p \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \ln u|^p \, u^p dx - p \int_{\Omega} v^p \, |\nabla \ln u|^{p-2} \langle \nabla \ln u, \nabla \ln v \rangle dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (p-1) \, |\nabla \ln u|^p \, v^p dx \end{aligned} \tag{1.7}$$

On a une expression analogue pour le second terme de **(1.5)**.La formule **(1.5)** devient alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u^p - v^p) \left(|\nabla \ln u|^p - |\nabla \ln v|^p \right) dx \\ &\quad - p \int_{\Omega} v^p \left(|\nabla \ln u|^{p-2} \langle \nabla \ln u, \nabla \ln v - \nabla \ln u \rangle \right) dx \\ &\quad - p \int_{\Omega} u^p \left(|\nabla \ln v|^{p-2} \langle \nabla \ln v, \nabla \ln u - \nabla \ln v \rangle \right) dx \end{aligned} \tag{1.8}$$

Choisissant $\xi_1 = \nabla \ln u$ et $\xi_2 = \nabla \ln v$ et on utilisons le lemme (1.3) on aura, pour $p \geq 2$

$$0 \geq \int_{\Omega} C(p) \, |\nabla \ln u - \nabla \ln v| \, (u^p + v^p) \, dx \tag{1.9}$$

ou bien

$$0 = |\nabla \ln u - \nabla \ln v| \tag{1.10}$$

alors $u = kv$.

Pour $p < 2$,on utilise la seconde partie du lemme (1.3) comme précédemment. ∎

Théorème 1.3 [2] (*Théorème de la convergence dominée de Lebesgue*) [3] *Soit* $\{f_n\}_{n \geq 1}$*une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *convergeant presque partout vers une fonction mesurable* f. *On suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \geq 1$, *on ait*

$$|f_n| \leq g \quad \text{p.p sur } \Omega$$

Alors : $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0, \text{ et } \int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx$$

Définition 1.4 [4] *Soient ω une partie d'un espace de* ***Banach*** *X et $F : \omega \to \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de* ***Gâteaux*** *(ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t} = \langle l, z\rangle .$$

On posera $F'(u) = l$.

Théorème 1.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$,un ouvert, Pour $p \in (1, +\infty)$ on définie une fonctionnelle $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par*

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx$$

alors J est différentiable dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$J'(u)(v) = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Preuve. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par :$\varphi(x) = |x|^p$,c'est une fonction de classe C^1,et $\nabla\varphi = p|x|^{p-2}x$,
alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t} = p|x|^{p-2}x.y$$

comme conséquence

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x)$$

par le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in \Omega$ et pour $t > 0$, il existe un fonction θ à valeurs dans $]0,1[$ telle que l'on puisse écrire :

$$\begin{aligned} & |\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p - tp|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x) \qquad (1.11) \\ = \; & tp|\nabla u(x) + \theta(t,x)t\nabla v(x)|^{p-2}(\nabla u(x) + \theta(t,x)t\nabla v(x)).\nabla v(x) \\ & -tp|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x) \end{aligned}$$

En divisant par t, on obtient pour presque tout x :

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla (u+tv)(x)|^p - |\nabla u(x)|^p - tp|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x)}{t} = 0.$$

D'autre part, on peut majorer le deuxième membre de l'égalité **(1.11)** divisée par t par

$$h(x) = 2|\nabla v(x)| (|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{p-1}$$

En utilisant ensuite l'inégalité de **Holder,** on a :

$$|h| \leq C \|\nabla v\|_p \left(\|\nabla u\|_p^{p-1} + \|\nabla v\|_p^{p-1} \right).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure à :

$$J'(u)(v) = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

alors J est **Gâteaux** différentiable. ■

Lemme 1.5 (*de comparaison*) [9] *Soient* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v . \nabla \varphi dx \tag{1.12}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0$, *alors* $u \leq v$ $p.p$ *dans* Ω.

Preuve. Notre preuve est basée sur les arguments présentés dans $[5, 6]$. On commence par définir la fonction $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par la formule

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \tag{1.13}$$

il est évident que la fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et continue et sa dérivé de Gâteaux au point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fonction $J'(u) \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ i.e

$$J'(u)(\varphi) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \varphi dx, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.14}$$

$J'(u)$ est continue et bornée. Nous allons montrer que $J'(u)$ est strictement monotone dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En effet, pour toute $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq v$ sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^p dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, nous avons

$$\nabla u.\nabla v \leq |\nabla u|\,|\nabla v| \leq \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \tag{1.15}$$

de la formule (**1.13**) on déduit

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u.\nabla v dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \tag{1.16}$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\, \nabla v.\nabla u dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \tag{1.17}$$

Si $|\nabla u| \geq |\nabla v|$, En utilisant (**1.13**)$-$(**1.15**), nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= J'(u)(u) - J'(u)(v) - J'(v)(u) + J'(v)(v) \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u.\nabla v dx\right) \\
&- \left(\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\, \nabla v.\nabla u dx - \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx\right) \\
&\geq \int_\Omega \tfrac{1}{2}\, |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&- \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\right)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&\geq \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\right)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Si $|\nabla v| \geq |\nabla u|$, en changeant le rôle de u et v en **(1.13)** $-$ **(1.15)** nous avons

$$\begin{aligned}
I_2(v) &= J'(v)(v) - J'(v)(u) - J'(u)(v) + J'(u)(u) \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v . \nabla u dx \right) \\
&- \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2} \right) \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2} \right) \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \right) dx
\end{aligned} \tag{1.19}$$

de **(1.16)** et **(1.17)**, nous avons

$$(J'(u) - J'(v))(u - v) = I_1 = I_2 \geq 0, \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

en autre, si $u \neq v$ et $(J'(u) - J'(v))(u - v) = 0$, puis nous avons

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2} \right) \left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \right) dx = 0,$$

si $|\nabla u| = |\nabla v|$ dans Ω, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(J'(u) - J'(v))(u - v) &= J'(u)(u - v) - J'(v)(u - v) \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx = 0,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

i.e $u - v$ est une constante, compte tenu de $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$ nous obtenons $u = v$, ce qui est contraire avec $u \neq v$. Donc $\left(J'\left(u\right) - J'\left(v\right)\right)\left(u - v\right) > 0$ et $J'\left(u\right)$ est strictement monotone dans $W_0^{-1,p}\left(\Omega\right)$. Soit u, v deux fonctions telles que **(1.14)** est satisfaite, Prenons $\varphi = \left(u - v\right)^+$, la partie positive de $u - v$ comme fonction test dans **(1.14)**, nous obtenons que

$$\left(J'\left(u\right) - J'\left(v\right)\right)\left(\varphi\right) = \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u.\nabla\varphi dx - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{p-2} \nabla v.\nabla\varphi dx \leq 0. \tag{1.21}$$

Les relations **(1.19)** et **(1.20)** impliquent que $u \leq v$. ■

Chapitre 2

Solution positive pour une classe de systèmes elliptique à paramètres multiples avec l'opérateur de Laplace

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la solution faible positive de système suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u) \text{ dans } \Omega \\ \\ -\Delta v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \gamma(v) \text{ dans } \Omega \\ \\ \qquad u = 0 = v \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Delta z = div(\nabla z)$; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 sont des paramètres non négatives, et Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$.

Dans ce chapitre nous prouvons l'existence d'une solution positive quand $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges, sous les conditions suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(M[g(x)])}{x} = 0, \quad \forall M > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma(x)}{x} = 0.$$

2.2 Définitions et notations

Commençons par introduire la définition d'une sous et sur-solution faible du problème **(2.1)**

Définition 2.1 *Soit* $(u,v) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)), (u,v)$ *est dit une solution faible de* **(2.1)** *si elle satisfait*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla \xi dx &= \lambda_1 \int_\Omega f(v)\xi dx + \mu_1 \int_\Omega h(u)\xi dx \text{ dans } \Omega, \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \eta dx &= \lambda_2 \int_\Omega g(u)\eta dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(v)\eta dx \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour tous $(\xi,\eta) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.

Définition 2.2 *Une paire de fonctions non négatives* $(\psi_1,\psi_2), (z_1,z_2)$ *dans* $(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ *sont appelées sous-solutions faibles et sur solutions de* **(2.1)** *si elles satisfait* $(\psi_1,\psi_2), (z_1,z_2) = (0,0)$ *sur* $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \psi_1 \nabla \xi_1 dx &\leq \lambda_1 \int_\Omega f(\psi_2)\xi_1 dx + \mu_1 \int_\Omega h(\psi_1)\xi_1 dx \text{ dans } \Omega, \\ \int_\Omega \nabla \psi_2 \nabla \xi_2 dx &\leq \lambda_2 \int_\Omega g(\psi_1)\xi_2 dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(\psi_2)\xi_2 dx \text{ dans } \Omega, \\ \int_\Omega \nabla z_1 \nabla \xi_1 dx &\geq \lambda_1 \int_\Omega f(z_2)\xi_1 dx + \mu_1 \int_\Omega h(z_1)\xi_1 dx \text{ dans } \Omega \\ \int_\Omega \nabla z_2 \nabla \xi_2 dx &\geq \lambda_2 \int_\Omega g(z_1)\xi_2 dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(z_2)\xi_2 dx \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour tout $(\xi_1,\xi_2) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.

2.3 Résultats principales

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $f,g,h,\gamma \in C^1(0.\infty) \cap C[0.\infty)$ sont des fonctions monotones telles que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \gamma(x) = \infty$

(H_2) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(M[g(x)])}{x} = 0$ pour tout $M > 0$

(H_3) $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma(x)}{x} = 0.$

Exemple 1. Soit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^2 - c_1,$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^2 - c_2,$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k x^{r_k} - c_3,$$

$$\gamma(x) = \sum_{l=1}^{t} \beta_l x^{d_l} - c_4,$$

où $a_i, b_j, \alpha_k, \beta_l, r_k, d_l, c_1, c_2, c_3, c_4 \geqslant 0$, $r_k < 1$ et $d_l < 1$. Alors il est facile de voir que f, g, h et γ vérifient les hypothèse du théorème 2.1.
Nous établissons :

Théorème 2.1 [1] *Soit* $(H_1) - (H_2)$ *satisfaites. Alors* **(2.1)** *a une grande solution positive fournie* $\lambda_1 + \mu_1$ *and* $\lambda_2 + \mu_2$ *sont larges.*

Preuve. Soit σ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet et ϕ la fonction propre correspondante bornée $\phi > 0; \Omega$ et $\|\phi\|_\infty = 1$. Soit $k_0, m, \delta > 0$ sont tel que $f(x), g(x), h(x), \gamma(x) \geqslant -k_0$ pour tout $x \geqslant 0$, et depuis $|\ \nabla\phi\ |^2 - \sigma\phi^2 \geqslant m$,sur $\bar{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geqslant \delta\}$. (c'est possible que $|\ \nabla\phi\ | \neq 0$ en $\partial\Omega$ ou $\phi = 0$ en $\partial\Omega$.) nous vérifions que

$$(\psi_1, \psi_2) \quad : \quad = \left(\left[\frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{2m} k_0 \right] \phi^2, \left[\frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{2m} k_0 \right] \phi^2 \right)$$

est une sous solution de **(2.1)** pour $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges. Soit $\xi \in W$. un calcul montre que si

$$\psi = \left(\frac{Ak_0}{2m} \right) \phi^2$$

ou A est une constante positive alors :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \nabla\psi.\nabla\xi dx &= \left(\frac{Ak_0}{m}\right)\int\limits_{\Omega}\phi\nabla\phi.\nabla\xi dx \\
&= \left(\frac{Ak_0}{m}\right)\left\{\int\limits_{\Omega}\phi\nabla\phi.\nabla\left(\phi\xi\right)dx - \int\limits_{\Omega}\left|\nabla\phi\right|^2\xi dx\right\} \\
&= \left(\frac{Ak_0}{m}\right)\left\{\int\limits_{\Omega}\left[\sigma\phi^2 - \left|\nabla\phi\right|^2\right]\xi dx\right\} .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Notons que sur $\bar{\Omega}_\delta$ nous avons $\mid \nabla\phi \mid^2 -\sigma\phi^2 \geqslant m$. Aussi sur $\Omega - \bar{\Omega}_\delta$ puisque $\phi \geqslant \tau$,pour certains $0 < \tau < 1$, si $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges. Puis par (H_1) $f(\psi_2), h(\psi_1), g(\psi_1), \gamma(\psi_2) \geqslant \frac{k_0}{m} max\{\sigma_2\}$.
il en résult que :
dans $\bar{\Omega}_\eta$.

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m}\left[\sigma\phi^2 - \left|\nabla\phi\right|^2\right] \\
\leq\ & -k_0(\lambda_1+\mu_1) \\
\leq\ & \lambda_1 f(\psi_1) + \mu_1 h(\psi_2)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m}\left[\sigma\phi^2 - \left|\nabla\phi\right|^2\right] \\
\leq\ & -k_0(\lambda_2+\mu_2) \\
\leq\ & \lambda_2 g(\psi_1) + \mu_2 \gamma(\psi_2) .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ensuite,
dans $\Omega \diagdown \bar{\Omega}_\eta$, nous avons $\phi \geq \tau > 0$.par les hypothéses $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}3)$ pour $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ grand nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m}\left[\sigma\phi^2-|\nabla\phi|^2\right] \\ \leq & \frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m} \\ \leq & \lambda_1 f(\psi_1)+\mu_1 h(\psi_2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m}\left[\sigma\phi^2-|\nabla\phi|^2\right] \\ \leq & \frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m} \\ \leq & \lambda_2 g(\psi_1)+\mu_2 \gamma(\psi_2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour tout $x \in \Omega$.de $(2.2)-(2.6)$, il en résulte que (ψ_1, ψ_2) est une sous-solution de systéme (3.1)

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla\psi_1.\nabla\xi dx \\ = & \left(\frac{(\lambda_1+\mu_1)k_0}{m}\right)\left\{\int_\Omega\left[\sigma\phi^2-|\nabla\phi|^2\right]\xi dx\right\} \\ = & \frac{(\lambda_1+\mu_1)k_0}{m}\int_{\Omega_\delta}\left[\sigma\phi^2-|\nabla\phi|^2\right]\xi dx \\ & +\frac{(\lambda_1+\mu_1)k_0}{m}\int_{\Omega-\bar{\Omega}_\delta}\left[\sigma\phi^2-|\nabla\phi|^2\right]\xi dx \\ \leqslant & -(\lambda_1+\mu_1)k_0\int_{\Omega_\delta}\xi dx+\frac{(\lambda_1+\mu_1)k_0}{m}\int_{\Omega-\bar{\Omega}_\delta}\sigma\xi dx \\ \leqslant & \int_{\Omega_\delta}\left[\lambda_1 f(\psi_2)+\mu_1 h(\psi_1)\right]\xi dx+\int_{\Omega-\bar{\Omega}_\delta}\left[\lambda_1 f(\psi_2)+\mu_1 h(\psi_1)\right]\xi dx \\ = & \int_\Omega\left[\lambda_1 f(\psi_2)+\mu_1 h(\psi_1)\right]\xi dx. \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_2 . \nabla \xi dx \leqslant \int_{\Omega} \left[\lambda_2 g\left(\psi_1\right) + \mu_2 \gamma\left(\psi_2\right) \right] \xi dx.$$

i.e.(ψ_1, ψ_2) est sous-résolution de **(2.1)**.

Maintenant, on construire une sur solution de système **(2.1)**. Soit e la solution de

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, \text{in } \Omega, \\ e = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit

$$(z_1, z_2) := \left(Ce, (\lambda_2 + \mu_2)\left[g\left(C\|e\|_{\infty}\right)\right] e\right).$$

depuis

$$\int_{\Omega} \nabla z_1 . \nabla \xi dx = C \int_{\Omega} \nabla e . \nabla \xi dx = C \int_{\Omega} \xi dx.$$

par $(H_2) - (H_3)$ nous pouvons choisir C assez grand pour que

$$\begin{aligned} C &\geqslant \lambda_1 f\left([\lambda_2 + \mu_2]\|e\|_{\infty}\left[g\left(C\|e\|_{\infty}\right)\right]\right) + \mu_1 h\left(C\|e\|_{\infty}\right) \\ &\geqslant \lambda_1 f\left(z_2\right) + \mu_1 h\left(z_1\right). \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \nabla z_1 . \nabla \xi dx \geqslant \int_{\Omega} \lambda_1 f\left(z_2\right) \xi dx + \int_{\Omega} \mu_1 h\left(z_1\right) \xi dx.$$

également

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla z_2 . \nabla \xi dx &= (\lambda_2 + \mu_2) \int_{\Omega} g\left(C\|e\|_{\infty}\right) \xi dx. \\ &\geqslant \int_{\Omega} \lambda_2 g\left(z_1\right) \xi dx + \int_{\Omega} \mu_2 g\left(C\|e\|_{\infty}\right) \xi dx. \end{aligned}$$

aussi par (H_3) pour C grand :

$$\begin{aligned} g\left(C\|e\|_{\infty}\right) &\geqslant \gamma\left([\lambda_2 + \mu_2]\left(g\left(C\|e\|_{\infty}\right)\right)\|e\|_{\infty}\right) \\ &\geqslant \gamma\left(z_2\right). \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \nabla z_2.\nabla \xi dx \geqslant \int_{\Omega} \lambda_2 g\left(z_1\right) \xi dx + \int_{\Omega} \mu_2 \gamma\left(z_2\right) \xi dx,$$

i.e. (z_1, z_2) est ici super solution de **(2.1).** Encore $z_i \geqslant \psi_i, i = 1, 2,$ pour C grand. Ainsi il existe une solution (u, v) pour **(2.1)** avec $\psi_1 \leqslant u \leqslant z_1, \psi_2 \leqslant v \leqslant z_2$. Ceci complète la preuve du théorème 2.1. ■

Chapitre 3

Solution positive pour une classe de systèmes elliptique à paramètres multiples avec l'opérateur (p, q)-Laplace

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre l'existence de solution positive de système elliptique de type (p, q) Laplace de la forme suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u) \text{ dans } \Omega \\ \\ -\Delta_q v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \gamma(v) \text{ dans } \Omega \\ \\ \qquad u = 0 = v \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

ou $\Delta_s z = div\left(\mid \nabla z \mid^{s-2} .\nabla z\right); s > 1$ $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 sont des paramètres non négatives, et Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$.

Nous prouvons l'existence d'une solution positive large quand $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges, sous les conditions

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f\left(M\left[g(x)\right]^{\frac{1}{q-1}}\right)}{x^{p-1}} = 0$$

pour tout $M > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x^{p-1}} = 0 et \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma(x)}{x^{q-1}} = 0.$$

La technique employé dans ce chapitre est la même qu'on a utilisé dans le chapitre précédent.

3.2 Définitions et notations :

Définition 3.1 *Soit* $(u,v) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)\right)$, (u,v) *est dit une solution faible de* **(3.1)** *si elle satisfait*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx &= \lambda_1 \int_\Omega f(u) w dx + \mu_1 \int_\Omega h(v) w dx, \quad \forall w \in W, \\
\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w dx &= \lambda_2 \int_\Omega g(u) w dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(v) w dx, \quad \forall w \in W,
\end{aligned}$$

où

$$W := \{w \in C_0^\infty(\Omega) : w \geq 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Définition 3.2 *Une paire de fonctions* $(\psi_1, \psi_2) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *est dit une sous-solution du problème* (3.1) *si :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla \psi_1|^{p-2} \nabla \psi_1 \nabla w dx \\
&\leq \lambda_1 \int_\Omega f(\psi_2) w dx + \mu_1 \int_\Omega h(\psi_1) w dx, \quad \forall w \in W.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla \psi_2|^{q-2} \nabla \psi_2 \nabla w dx \\
&\leq \lambda_2 \int_\Omega g(\psi_1) w dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(\psi_2) w dx, \quad \forall w \in W.
\end{aligned}$$

où

$$W := \{w \in C_0^\infty(\Omega) : w \geq 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Définition 3.3 *Une paire de fonctions* $(z_1, z_2) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *est dit une sur solution du problème* **(3.1)** *si :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2} \nabla z_1 \nabla w dx \\
&\geq \lambda_1 \int_\Omega f(z_2) w dx + \mu_1 \int_\Omega h(z_1) w dx, \quad \forall w \in W.
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2} \nabla z_2 \nabla w dx$$
$$\geq \lambda_2 \int_\Omega g(z_1) w dx + \mu_2 \int_\Omega \gamma(z_2) w dx, \quad \forall w \in W.$$

où

$$W := \{w \in C_0^\infty(\Omega) : w \geq 0 \textit{ dans } \Omega\}$$

3.3 Résultats principales

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $f, g, h, \delta \in C^1(0.\infty) \cap C[0.\infty)$ sont des fonctions monotones telles que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \gamma(x) = \infty$

(H_2) $\lim_{x\to\infty} \frac{f\left(M[g(x)]^{\frac{1}{q-1}}\right)}{x^{p-1}} = 0$ pour tout $M > 0$

(H_3) $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x^{p-1}} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma(x)}{x^{q-1}} = 0.$

Exemple 1. Soit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^2 - c_1,$$
$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^2 - c_2,$$
$$h(x) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k x^{r_k} - c_3,$$
$$\gamma(x) = \sum_{l=1}^{t} \beta_l x^{d_l} - c_4,$$

où $a_i, b_j, \alpha_k, \beta_l, r_k, d_l, c_1, c_2, c_3, c_4 \geqslant 0$, $r_k < 1$ et $d_l < 1$. Alors il est facile de voir que f, g, h et γ vérifient les hypothèse du théorème 2.1.

Nous établissons :

Théorème 3.1 [1] *Soit $(H_1) - (H_2)$ satisfaites. Alors* **(3.1)** *a une grande solution positive fournie $\lambda_1 + \mu_1$ and $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges.*

Preuve. Soit σ_p, σ_q sont les première valeurs propres respectives de $-\Delta_p, -\Delta_q$ avec condition de Dirichlet et ϕ_p, ϕ_q sont les fonctions propres correspondantes bornée $\phi_p, \phi_q > 0; \Omega$ et $\| \phi_p \|_\infty = 1 = \| \phi_q \|_\infty$. Soit $k_0, m, \delta > 0$ sont tel que $f(x), g(x), h(x), \gamma(x) \geqslant -k_0$ pour tout $x \geqslant 0$, et depuis$| \nabla\phi_p |^p - \sigma_p \phi_p^p \geqslant m, | \nabla\phi_q |^q - \sigma_q\phi_q^q \geqslant m$ sur $\bar{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geqslant \delta\}$. (c'est possible que $| \nabla\phi_s | \neq 0$ en $\partial\Omega$ ou $\phi_s = 0$ en $\partial\Omega$ pour $s = p, q$.) nous vérifions que
Nous vérifions que (ψ_1, ψ_2) est une sous-solution de (3.1) pour $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ large, où

$$\psi_1 = \left[\frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{m} k_0\right]^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p}\right) \phi_p^{\frac{p}{p-1}},$$

$$\psi_2 = \left[\frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{m} k_0\right]^{\frac{1}{q-1}} \left(\frac{q-1}{q}\right) \phi_q^{\frac{q}{q-1}}.$$

est une sous solution de **(3.1)** pour $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges. Soit $\xi \in W$. un calcul montre que si

$$\psi = \left(\frac{Ak_0}{m}\right)^{1/s-1} \left(\frac{s-1}{s}\right) \phi_s^{s/s-1}, s = p, q$$

où A est une constante positive alors :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\psi|^{s-2} \nabla\psi.\nabla\xi dx \\
&= \frac{k_0(\lambda_1 + \mu_1)}{m} \int_\Omega \phi_s |\nabla\phi_s|^{s-2} \nabla\phi_s.\nabla\xi dx \\
&= \frac{k_0(\lambda_1 + \mu_1)}{m} \left\{\int_\Omega \phi_s |\nabla\phi_s|^{s-2} \nabla\phi_s.\nabla(\phi_s\xi) dx - \int_\Omega |\nabla\phi_s|^s \xi \, dx\right\} \\
&= \frac{k_0(\lambda_1 + \mu_1)}{m} \left\{\int_\Omega [\sigma_s\phi_s^s - |\nabla\phi_s|^s]\xi \, dx\right\} \text{ pour } s = p, q. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Notons que sur $\bar{\Omega}_\delta$ nous avons $| \nabla\phi_s |^s - \sigma_s\phi_s^s \geqslant m$ pour $s = p, q$. Aussi sur $\Omega - \bar{\Omega}_\delta$ puisque $\phi_p \geqslant \tau_p, \phi_q \geqslant \tau_q$ pour certains $0 < \tau_p, \tau_q < 1$, si $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ sont larges. Puis par (H_1)

$$f(\psi_2), h(\psi_1), g(\psi_1), \gamma(\psi_2) \geqslant \frac{k_0}{m} max\{\sigma_p, \sigma_q\}.$$

il en résult que :

dans $\bar{\Omega}_{\eta}$.

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m}\left[\sigma_p\phi_p^p-\left|\nabla\phi_p\right|^p\right] \\ \leq \; & -k_0(\lambda_1+\mu_1) \\ \leq \; & \lambda_1 f(\psi_1)+\mu_1 h(\psi_2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m}\left[\sigma_q\phi_q^q-\left|\nabla\phi_q\right|^q\right] \\ \leq \; & -k_0(\lambda_2+\mu_2) \\ \leq \; & \lambda_2 g(\psi_1)+\mu_2\gamma(\psi_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ensuite,
dans $\Omega\diagdown\bar{\Omega}_{\eta}$, nous avons $\phi_p\geq\sigma>0$ et $\phi_q\geq\sigma>0$. par les hypothéses $(\mathcal{H}1)-(\mathcal{H}3)$ pour $\lambda_1+\mu_1$ et $\lambda_2+\mu_2$ grand nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m}\left[\sigma_p\phi_p^p-\left|\nabla\phi_p\right|^p\right] \\ \leq \; & \frac{k_0(\lambda_1+\mu_1)}{m} \\ \leq \; & \lambda_1 f(\psi_1)+\mu_1 h(\psi_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m}\left[\sigma_q\phi_q^q-\left|\nabla\phi_q\right|^q\right] \\ \leq \; & \frac{k_0(\lambda_2+\mu_2)}{m} \\ \leq \; & \lambda_2 g(\psi_1)+\mu_2\gamma(\psi_2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour tout $x\in\Omega$.de $(3.2)-(3.6)$, il en résulte que (ψ_1,ψ_2) est une sous-solution de systéme (3.1).

Maintenant, soit $e_s, s = p, q$ des solutions de le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_s e_s = 1, \text{ in } \Omega \\ \\ e_s = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \text{ pour } s = p, q$$

Soit

$$\begin{aligned} z_1 &: = Ce_p \\ z_2 &: = (\lambda_2 + \mu_2)^{1/q-1} \left[g \left(C \left\| e_p \right\|_\infty \right) \right]^{1/q-1} e_q \end{aligned}$$

depuis

$$\begin{aligned} \int_\Omega & \mid \nabla z_1 \mid^{p-2} \nabla z_1 . \nabla \xi dx = C^{p-1} \int_\Omega \mid \nabla e_p \mid^{p-2} \nabla e_p . \nabla \xi dx \\ &= C^{p-1} \int_\Omega \xi dx. \end{aligned}$$

par $(H_2) - (H_3)$ nous pouvons choisir C assez grand pour que

$$\begin{aligned} C^{p-1} &\geqslant \lambda_1 f \left([\lambda_2 + \mu_2]^{1/q-1} \left\| e_p \right\|_\infty \left[g \left(C \left\| e_p \right\|_\infty \right) \right]^{1/q-1} \right) + \mu_1 h \left(C \left\| e_p \right\|_{\infty\infty} \right) \\ &\geqslant \lambda_1 f(z_2) + \mu_1 h(z_1). \end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \mid \nabla z_1 \mid^{p-2} \nabla z_1 . \nabla \xi dx \geqslant \int_\Omega \lambda_1 f(z_2) \xi dx + \int_\Omega \mu_1 h(z_1) \xi dx.$$

également

$$\begin{aligned} \int_\Omega & \mid \nabla z_2 \mid^{q-2} \nabla z_2 . \nabla \xi dx = (\lambda_2 + \mu_2) \int_\Omega g \left(C \left\| e_p \right\|_\infty \right) \xi dx. \\ &\geqslant \int_\Omega \lambda_2 g(z_1) \xi dx + \int_\Omega \mu_2 g \left(C \left\| e_p \right\|_\infty \right) \xi dx. \end{aligned}$$

aussi par (H_3) pour C grand

$$g\left(C\left\|e_p\right\|_\infty\right) \geqslant \gamma\left(\left[\lambda_2+\mu_2\right]^{1/q-1}\left(g\left(C\left\|e_p\right\|_\infty\right)\right)^{1/q-1}\left\|e_p\right\|_\infty\right)$$
$$\geqslant \gamma\left(z_2\right).$$

donc

$$\int_\Omega \mid \nabla z_2 \mid^{q-2} \nabla z_2.\nabla\xi dx \geqslant \int_\Omega \lambda_2 g\left(z_1\right)\xi dx + \int_\Omega \mu_2\gamma\left(z_2\right)\xi dx,$$

i.e. (z_1, z_2) est une super solution de **(3.1).** Encore $z_i \geqslant \psi_i, i = 1, 2,$ pour C grand. Ainsi il existe une solution (u, v) pour **(3.1)** avec $\psi_1 \leqslant u \leqslant z_1, \psi_2 \leqslant v \leqslant z_2$. Ceci complète la preuve du théorème 3.1. ■

Conclution

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution recherchée , plus précisément on a montrer que si on peut trouver une sous- solution ψ et une sur-solution z d'un problème aux limites bien particulier, et si de plus $\psi \leq z$ alors il existe une solution qui satisfait $\psi \leq u \leq z$. Ce qui nous assure sous certaines conditions l'existence de solutions.

Bibliographie

[1] J. Ali,R. Shivaji, Positive solutions for a class of p-Laplacian systems with multiple parameters, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1013–1019

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et application, Massom. Parie. (1985)

[3] R. Dalmasso. Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems, Nonlinear Anal. 39 (2000)559–568.

[4] O. Kavian, Introduction à la théorique des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,Springer-Velarg.France, Parie, 1993.

[5] K. Perera , Zhang Z. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index. J Differential Equations. 2006 ;221(1) :246-255.

[6] B. Ricceri . On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters. J Global Optimization. 2010 ;46(4) :543-549. Ruzicka M. Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical

Theory. Berlin : Springer-Verlag ; 2002.

[7] JJ. Sun , Tang CL. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations. Nonlinear Anal. 2011 ;74 :1212-1222

[8] QH. Zhang . Existence of positive solutions for a class of p(x)–Laplacian systems. J Math Anal Appl. 2007 ;333 :591-603.

[9] Z. Zhang , K Perera . Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. J Math Anal Appl. 2006 ;317 :456-463.