République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : E.D.P et applications

Thème

Solutions positives d'une certaine classe de systèmes elliptiques avec singularités

Présenté Par :
Mabrouk Nada
Hamaidia Bouthaina

Devant le jury :

Mr Akrout Kamel	MCA	Univérsité Larbi Tébessi-Tébessa	Président
Mm Mesloub Fatiha	MCA	Univérsité Larbi Tébessi-Tébessa	Examinateur
Mm Zediri Sounia	MAA	Univérsité Larbi Tébessi-Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Résumé

Dans ce travail, nous établissons l'existence de deux solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaires singuliers. Les principaux outils sont la méthode de sous et sur-solution et le degré topologique Leray-Schauder

Les mots clés : Systèmes elliptiques, Degré topologique de Leray-Schauder, Homotopie, méthode de sous et sur solution

Abstract

In this work we establish the existence of two positive solutions for class of quasi-linear singular elliptic systems. The main tools are sub and super-solution method and Leray-Schauder Topological degree.

Keywords: Elliptic systems, Leray-Schauder topological degree, Homotopy, sub and super solution method.

ملخص

في هذا العمل نبحث عن وجود حلين موجبين لجملة معادلات إهليليجية غير خطية بنقاط شاذة . الطرق الأساسية المستخدمة هي طريقة الحل الفوقي و التحتي (sous et sur solution) و طريقة الدرجة الطوبولوجية (degré topologique) للوري شودير.

الكلمات المفتاحية: جملة معادلات إهليليجية, الدرجة الطوبولوجية للوري شودير, هوموتوبي, طريقة الحل الفوقي و التحتي .

Remerciments

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrons témoigner toutes nos gratitudes.

Nous voudrons tout d'abord adresser toutes notre reconnaissances à la directrice de ce mémoire, Madame ZEDIRI Sounia, Maitre-assistante classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa de nos avoir encadré, orienté, aidé et pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous remercions également les membres du jury : Akrout Kamel comme un président, Maitre de conférences classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa, Mesloub Fatiha comme une examinatrice, Maitre de conférence classe A à l'université Larbi Tébessi-Tébessa, pour leur volonté de réviser et de juger ce travail.

Nous adresse nos sincères remerciements à Dr. R.GUEFAIFIA, qui est guidé nos pensées en fonction de ses conseils et qui ont répondu à nos questions lors de nos recherches.

Nous désirons remercier les professeurs de l'université, qui nous ont fourni les outils nécessaires à la réussite de notre étude universitaire.

Enfin, nous adresse nos plus sincères remerciements à nos proches, nos parents, nos soeurs, nos frères et nos amies pour le soutien constant tout au long des années de l'étude

Table des matières

Introduction

Dans cette mémoire, nous établissons l'existence de deux solutions positives d'équations aux dérivées partielles, concernent des systèmes du type elliptique avec singularités, intervenant le p-Laplace.

Noter étude de ce genre des problèmes elliptiques singulier est grandement justifiée car ils se modélisent de plusieurs situations physiques telles que l'écoulement de pseudo-plastiques en mécanique des fluides catalyseurs, chimiques hétérogènes fluides, non-Newtoniens, et ainsi sur la formation de motifs biologiques. Dans Fulks-Maybee [16] , le lecteur trouvera une très belle illustration physique d'un problème pratique qui conduit à un problème singulier. En ce qui concerne le système singulier il convient de citer, entre autres, l'important système Gierer-Meinhardt qui est la contrepartie stationnaire d'un parabolique système proposé par Gierer-Meinhardt (voir [22, 14]) qui intervient dans l'étude de morphogenèse sur des expériences sur hydra, un animal de quelques millimètres de long. Outre l'importance de l'application physique sur mentionner, nous aimerions tiens à mentionner que d'un point de vue mathématique les problèmes singuliers sont également intéressants, ils ont une nécessité mathématique non triviale, les techniques de résolution de ses problèmes impliquent le degré topologique, théorie de la bifurcation, point fixe théorèmes, méthode des sous et sur solutions, théorie des opérateurs pseudo-monotones et méthodes variationnelles. Ici, il est impossible de citer tous les articles de littérature qui utiliser les techniques ci -dessus, mais le lecteur peut trouver les applications de celles-ci méthodes mentionnées dans Alves & Moussaoui [4], Hai [25], Ghergu & Radulescu [17], Giacomoni, Hernandez & Moussaoui [20], Giacomoni, Hernandez & Sauvy [21], Hernandez, Mancebo & Vega, [27], Khodja & Moussaoui [30], Zhang [44], Zhang & Yu [43], Diaz, Morel & Oswald [15], Alves, Corrêa & Gonçalves [6], Crandall & Rabinowitz [13], Taliaferro [40], Lunning & Perry [33], Motreanu & Moussaoui [34, 35, 36], Moussaoui, Khodja & Tas [37], Agarwall and O'Regan [9], Stuart [39],et leurs références.

Nous avons organisé ce travail de la façon suivante :

Dans le **premier chapitre**, on rappelle les notations et les notions préliminaires nécessaires en vue de les utiliser dans le chapitre suivant, ensuite on donne un rappel sur les espaces fonctionnelles, ainsi qu' un rappel sur l'opérateur p-Laplace, et nous considérons quelques définitions et théorèmes nécessaires sur le degré topologie et lemme de comparaison que nous avons besoin de savoir.

Au **deuxième chapitre**, nous abordons la question de l'existence de deux solutions positives pour une classe de système quasi-linéaire singulier utilisant la méthode de la sous et sur solution et le degré topologique de Leray-Schauder.Pour ces résultas, veuillez voir [10] .

Chapitre 1

Préliminaire

1- Rappels sur les espaces fonctionnels.

2- L'opérateur p-laplacien.

3- Degré Topologique.

4- Principe de comparaisons.

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de hölder

Dans beaucoup d'applications la chaine des espaces C^k s'avère insuffisante et on ressent le besoin de définir des espaces "intermédiaire" entre deux espaces C^k et C^{k+1} les espaces de hölder était construits pour cela .il y a plusieurs variantes de tels espaces. On en présente une, et pour plus d'informations sur ces espaces, référez-vous à H.Queffélec et C. Zuily [28].

Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$:

Définition 1.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in]0,1]$.$C^{0,\alpha}$ *est l'espaces vectoriel des fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que*

$$f \in L^{\infty}(\Omega) \text{ i.e } f \text{ est mesurable bornée sur } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\exists C > 0 : \forall x, y \in \Omega,\ |f(x) - f(y)| \leq C |x-y|^{\alpha}. \tag{1.2}$$

Sur cet espace on met la norme :

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{1.3}$$

Propriétés

Proposition 1.1 *Tout élément* f *de* $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$ *se prolonge en une fonction* $\tilde{f} : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ *qui est borné et vérifie* (1.2) *pour* x, y *dans* $\bar{\Omega}$.*En particulier* $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$.

Proposition 1.2 *Muni de la norme* (1.3), $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

i) Si $\alpha \geq \alpha'$ *on a* $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ *et l'inclusion est continue.*

ii) Si Ω *est un ouvert borné et* $\alpha > \alpha'$, *l'inclusion* $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ *est compacte.*

Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition et propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$. On peut définir les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ par récurrence sur k, en posant pour $k \geq 1$:

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \Leftrightarrow f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega), i = 1..n.$$

Il est équivalent de dire :

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \Leftrightarrow f \in C_b^k(\Omega) \text{ et } \partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \forall |\beta| \leq k,$$

on a noté ici

$$\partial^\beta = (\frac{\partial}{\partial x})^\beta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^\beta, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})^\beta, |\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n.$$

On muni $C^{k,\alpha}(\Omega)$ de la norme :

$$\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha,$$

où $\|.\|_\alpha$ est la norme $C^{0,\alpha}$ définie en (1.3), cette norme est équivalente à la norme :

$$\|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{|\beta| = k} \sup_{x \neq y} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}.$$

On résume les principales propriétés des espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ comme suite :

a- Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, les dérivées d'ordre au plus k se prolongent en des fonctions continues bornées sur $\bar{\Omega}$ qui vérifient des conditions de Hölder d'exposant α sur $\bar{\Omega}$.

b- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach.

c- Si $k + \alpha \geq k' + \alpha'$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est contenu dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

d- Si Ω est un ouvert borné et si $k + \alpha > k' + \alpha'$ l'injection de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.

e- Si Ω est un ouvert borné et si $k+\alpha > k'+\alpha'$, $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C(\varepsilon) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$$

f- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algèbre multiplicative .Si $(u,v) \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ alors $uv \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{k,\alpha} \leq C \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$$

1.1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p\, dx < \infty \right\},$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable et il existe } C > 0, \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \},$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \}$$

1.1.3 Espaces de Sobolev.

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les puissances et les dérivées sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est très important pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de **H. Brezis** [8] ou **R. A. Adams** [1].

Définition 1.2 *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. On définit les espaces de Sobolev comme suit :*

1. $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } D_i u \in L^2(\Omega), \text{pour tout } i = 1, ..., N\}$.
2. Pour $m \in \mathbb{N}, H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ telle que } |\alpha| \leq m\right\}$.
3. Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \text{ tq } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tq } |\alpha| \leq m\right\}.$$

Notons que pour $m = 0$, l'espace $W^{0,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.3 *On appelle espace de* ***Sobolev*** *d'ordre 1 sur l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \ tq \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), pour\ tout\ i = 1, ..., N\right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.3 *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est*

1) *Un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$.

2) *Un espace séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

3) *Un espace réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Définition 1.4 *Soit* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$, *il est munit de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$, *est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Lemme 1.1 *Lorsque* $\Omega = \mathbb{R}^N$, *on sait que* $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *et par conséquent*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corollaire 1.1 *Une autre caractérisation de* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *si est de classe* C^1 *et* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *avec* $1 \leq p < \infty$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$.

ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorèmes d'injection de Sobolev

Enonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.5 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :*

a) X est un sous-espace de Y.

b) $\exists C > 0$ tel que pour tout $u \in X$: $\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$.

Définition 1.6 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si :*

i) X s'injecte de façon continue dans Y.

ii) toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.

Théorème 1.1 ***(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)*** *Soit $1 \leq p < N$, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } p \text{ est donné par } \frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $1 \leq p < N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [p, p^*],$$

et pour le cas limite $p = N$, on a :

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [N, +\infty[.$$

Théorème 1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^\infty(\Omega)(W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega))$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, i.e qu'il existe un constant C (dépendant seulement de Ω) tel que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

1.2 L'opérateur p-laplacien

L'opérateur p-laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |\nabla u|^{p-4} \left\{ |\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$$

avec $1 < p < +\infty$, cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$, le p-Laplace coïncide avec le laplacien usuel Δ

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

1.2.1 Propriétés de l'opérateur p-laplacien

Considérons maintenant l'opérateur p-Laplace défini sur l'espace de Sobolev dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p et q deux réels, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Quel que soit u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq N$, d'où on peut définir l'application suivante sur $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$

$$(u, v) \longrightarrow a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Théorème 1.3 *Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue, d'où il existe un unique élément, noté $A(u)$ de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ telle que :

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

l'application

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$$
$$u \longrightarrow A(u)$$

est notée

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Proposition 1.4 *L'opérateur $-\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Proposition 1.5 *L'opérateur $-\Delta_p$ est monotone de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve L'application qui à t de $\mathbb{R}$ associe $|t|^p$ dans $\mathbb{R}$ étant convexe, on déduit que sa dérivée est une fonction croissante, donc

$$\forall (t,r) \in \mathbb{R}^2, (|t|^{p-2}\, t - |r|^{p-2}\, r)(t-r) \geq 0$$

D'ou

$$\langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v), u - v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx \geq 0$$

Par conséquent $-\Delta_p$ est monotone. ■

Théorème 1.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$. Pour $p \in]1, +\infty[$, nous définissons la fonctionnelle $\psi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx$$

alors ψ est différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\left\langle \psi'(u), v\right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p\, \nabla u \nabla v dx = \langle -\Delta_p u, v\rangle$$

1.2.2 Première valeur propre de l'opérateur p-Laplace

La première valeur propre de $-\Delta_p$

Définition 1.7 *Une valeur propre de l'opérateur p-laplacien est un nombre réel pour lequel il existe une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution non-triviale de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2} u, x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, Les solutions faibles de cette équation sont les fonctions propres.

L'interprétation variationnelle est la suivante :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uvdx \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.5}$$

La première valeur propre de l'opérateur p-laplacien est notée par λ_1, elle est carateriser par :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} \tag{1.6}$$

Ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh.

Equivalant à

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx; \int_\Omega |u|^p dx = 1, u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

La fonction φ_1 est appelée fonction propre. On dit aussi que (φ_1, λ_1) est une solution propre de $(1, 4)$

Remarquons qu'on a

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi_1|^p \, dx}{\int_\Omega |\varphi_1|^p \, dx}$$

Simplicité

Théorème 1.5 *La première valeur propre λ_1 est simple, i.e, si φ et ψ sont deux fonctions propres associées à λ_1 alors $\varphi = \alpha\psi$ pour un certain α.*

Isolation

Théorème 1.6 *La première valeur propre λ_1 est isolée, alors il existe $\delta > 0$ tel que dans un intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, il n'existe pas un autre valeur propre de $(1, 5)$.*

1.2.3 La propriété $(S)_+$ de l'opérateur $-\Delta_p$

Définition 1.8 [42]*Soit X un espace Banach réfléxif et X^* son dual topologiue. A mappage $A : X \to X^*$ est de type $(S)_+$,si pour chaque suite u_n dans X satisfaisant $u_n \to u_0$ dans X et*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \langle A(u_n), u_n - u_0 \rangle \leq 0,$$

on a $u_n \to u_0$.

1.3 Degré topologique

Cette section contient des définitions, propositions et quelques propriétés sur le degré topologique de Brouwer (En dimension finie) et le degré topologique de Leray-Shauder (en dimension infinie), et pour une présentation plus complète de degré topologique vous voulez consultez O.Kavian [29].

1.3.1 Degré topologique de Brouwer

Nous donnons ici une formulation précise du degré topologique de Brouwer et de ses propriétés principales.

Définition 1.9 *Soient $N \geq 1$ un entier, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction*

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N),$$

et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(\partial\Omega)$.

On considère $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0; +\infty[, R)$ à support compact contenu dans $]0, \varepsilon[$, et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1$$

On appelle le degré topologique de Brouwer de f dans Ω,par rapport au point cible b le nombre :

$$\deg(f, \Omega, b) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|f(x) - b|)J_f(x)dx,$$

où $J_f(x)$ la matrice jacobienne du fonction f.

On va voir maintenant que le degré topologique de Brouwer est indépendant du choix de la fonction φ et du choix de ε.

Lemme 1.2 *Soit g une fonction de classe C^2 de à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1}$. On pose :*

$$B_i = \det(\partial_{1g}, ..., \partial_{i-1g}, \partial_{i+1g}, ..., \partial_{Ng}).$$

Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \partial_i B_i = 0.$$

Lemme 1.3 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^2. On désigne par $A_{ij}(x)$ le cofacteur de $\partial_i f^j(x)$ dans $J_f(x)$.*

Alors pour tout $j = \overline{1, N}$ *fixé on a :*

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij}(x) = 0.$$

Lemme 1.4 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *et* $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose que* $0 \notin f(\partial\Omega)$ *et que* $supp(\psi) \subset [0, \varepsilon[$ *pour un* $0 < \varepsilon < dist(0, f(\partial\Omega))$, *et*

$$\int_0^{+\infty} r^{N-1} \psi(r) dr = 0.$$

Alors on a :

$$\int_\Omega \psi(|f(x)|) J_f(x) dx = 0.$$

Proposition 1.6 *Avec les hypothèses et les notations de la définition* **1.8***, le degré topologique* $deg(f, \Omega, b)$ *est indépendant de* ε *et de la fonction* φ*, pour vu que* $\varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$.

Proposition 1.7 *Soient* Ω *un ouvert borné,* $f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *et* b *un point de* $\mathbb{R}^N$.*On suppose que* $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$.*Alors si* $\varepsilon > 0$ *est tel que :*

$$\varepsilon < \frac{1}{4} dist(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)), et \ \|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,$$

on a :

$$\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b).$$

Théorème 1.7 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.*On considère un point* $b \notin f(\partial\Omega)$ *et* $(f_k)_k$ *une suite de fonctions de* $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *telle que :*

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0, \ sur \ \bar{\Omega},$$

alors le degré topologique de f_k *existe pour* k *assez grand et le degré topologique de* f *est défini par*

$$\deg(f, \Omega, b) = \lim_{k \to +\infty} \deg(f_k, \Omega, b).$$

Remarque 1.1 *Le degré topologique étant défini pour des fonctions continues.*

1.3.2 Propriétés du degré de Brouwer

Nous regroupons ici les propriétés les plus importantes du degré topologique de Brouwer. Lorsque cela n'est pas précisé, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue.

La première propriété importante du degré est sa stabilité.

Proposition 1.8 ***(Stabilité)*** *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $f_1, f_2 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sont deux fonctions continues telles que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si :*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty < \frac{1}{4} dist(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)),$$

on a :

$$\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b).$$

Un autre type de stabilité concerne les perturbations par rapport à la cible b.

Proposition 1.9 ***(Stabilité par rapport à la cible)*** *Soient Ω un ouvert borné et $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que $b, b_1 \in \mathbb{R}^N$ sont dans la même composante connexe de $f(\partial\Omega)^c$ alors :*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b_1).$$

Proposition 1.10 ***(Additivité)*** *Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \mathbb{R}^N)$. Si b est un point de $\mathbb{R}^N$ et $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, alors :*

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b).$$

Corollaire 1.2 ***(Excision)*** *Soient Ω un ouvert borné, une fonction $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $K \subset \bar{\Omega}$ un compact et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Alors :*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega \backslash K, b).$$

Le résultat suivant est très souvent utilisé pour montrer l'existence de solutions pour des équations *non linéaires dans* $\mathbb{R}^N$*.*

Proposition 1.11 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *et* b *un point de* $\mathbb{R}^N$ *n'appartenant pas à* $f(\partial\Omega)$*. Si* $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$*,alors l'équation* $f(x) = b$ *admet au moins une solution dans* Ω*.*

Corollaire 1.3 ***(Normalisation)*** *Soient* Ω *un ouvert borné et* $b \in \mathbb{R}^N$*. En désignant par* I *l'application identité, on a :*

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, b \in \Omega \\ 0, b \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

du fait que $J_I(x) = 1$.

On a, aussi du fait que $J_{-I}(x) = (-1)^N$

$$\deg(-I, \Omega, b) = \begin{cases} (-1)^N, b \in \Omega \\ 0, b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

En utilisant les propositions 1.**9** *et* **1**.**11** *on déduit le résultat suivant :*

Corollaire 1.4 *Si* H *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f(\bar{\Omega}) \subset H$*, alors pour tout* $b \notin f(\partial\Omega)$ *on a :*

$$\deg(f, \Omega, b) = 0.$$

Proposition 1.12 ***(Invariance par homotopie)*** *Soient* $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ *une fonction continue et* $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$*.Alors pour tout* $t \in [0, 1]$

on a :

$$\deg(H(., t), \Omega, b) = \deg(H(., 0), \Omega, b).$$

Proposition 1.13 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et deux fonctions* $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*.On suppose que* $f = g$ *sur* $\partial\Omega$ *et que* $b \notin f(\partial\Omega)$*. Alors on a :*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b).$$

Lemme 1.5 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*. On désigne par :*

$$S = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Alors on a :

$$\deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.14 ***(Borsuk)*** *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ symétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire. On désigne par S l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $0 \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$.Alors :*

i) si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est un entier impair.

ii) si $0 \notin \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est un entier pair.

Proposition 1.15 ***(Non rétraction de la boule)*** *soient $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte et S^{N-1}la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Il n'existe pas de fonction continue*

$$\varphi : B \to S^{N-1} \ tq \ \varphi|_{S^{N-1}} = I.$$

1.3.3 Degré topologique de Leray-Schauder

On va définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité du type $I - T$ où T est compact et I désigne l'application identité de X. Le point de départ est toute fois le degré topologique de Brouwer. Sans perte de généralité, on peut supposer que le point cible est l'origine.

Lemme 1.6 *Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \bar{\Omega} \to X$ est compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on ait :*

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

Lemme 1.7 *Soit Ω un ouvert borné de X, et $T : \bar{\Omega} \to X$ un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un* *sous-espace vectoriel de dimension finie* E_ε *de* X *et un opérateur* $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \to E_\varepsilon$ *tels que :*

$$\begin{aligned} \forall u &\in \bar{\Omega}, \|T_\varepsilon u - Tu\| \leq \varepsilon, \\ \forall u &\in \partial\Omega, \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Lemme 1.8 *Soit* Ω *un ouvert borné de* X*, et* $T : \bar{\Omega} \to X$ *un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur* $\partial\Omega$*, et* $\varepsilon > 0$ *est tel que*

$$\|u - Tu\| \geq 3\varepsilon \text{ sur } \partial\Omega.$$

On suppose que $T_{1\varepsilon}$ *et* $T_{2\varepsilon}$ *sont deux approximations de* T*, telles que pour* $i = 1, 2$ *on ait :*

$$T_{1\varepsilon}(\Omega) \subset E_\varepsilon,$$

où E_ε *est un sous-espace de dimension finie de* X*, et de plus* $\|T_{i\varepsilon} - Tu\| \leq \varepsilon$ *pour* $u \in \Omega$ *, et*

$$\|u - T_{i\varepsilon}u\| \geq 3\varepsilon \text{ pour } u \in \partial\Omega.$$

Alors, si F *est un sous espace vectoriel de dimension finie de* X *contenant* E_ε *tel que :*

$$\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing,$$

on a :

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega, 0) = \deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

Lemme 1.9 *Soient* E_n*,* E_p *deux sous-espaces de dimension finie et* $\omega \subset E_n \times E_p$ *un ouvert borné. On identifie* $E_n \times \{0\}$ *à* E_n *et on suppose que :*

$$\omega_n = \omega \cap (E_n \times \{0\}) \neq \varnothing.$$

Soient $\varphi \in C(\bar{\omega}, E_n)$ *et* $f(x, y) = (x - \varphi(x, y), y)$ *pour* $(x, y) \in E_n \times E_p$*.On suppose que pour tout* x *tel que* $(x, 0) \in \partial\omega$*,on a* $\varphi(x, 0) \neq (x, 0)$*, et on considère la fonction* $f_0(x) = x - \varphi(x, 0)$

définie sur $\bar{\omega}_n$*. Alors, en notant* deg_n, deg_{n+p} *les degrés topologiques dans* E_n *et* $E_{n+p} = E_n \times E_p$ *respectivement, on a :*

$$\deg_{n+p}(f, \omega, 0) = \deg_n(f_0, \omega_n, 0).$$

Preuve (voir[29] page 123). ■

Théorème 1.8 ***(Leray-Schauder)*** *Soient* X *un espace de Banach,* Ω *un ouvert borné de* $X, T : \bar{\Omega} \to X$ *un opérateur compact sans point fixe sur* $\partial\Omega$*. Alors* $\varepsilon > 0$*,* $E_\varepsilon \subset X$*, et* $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \to E_\varepsilon$ *étant donnés par le lemme 1.7, on considère* F *un sous-espace vectoriel de dimension finie*

contenant E_ε *et tel que* $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing$*.On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de T *et de* Ω*. Si* $b \in X$ *est tel que* $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$*, le degré de* $I - T$ *dans* Ω *par rapport à la cible* b *est défini comme étant*

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

1.3.4 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Dans ce paragraphe nous réunissons les propriétés les plus importantes du degré topologique de Leray-Schauder. Dans toute la suite on suppose que X est un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \Omega \to X$ un opérateur compact.

Proposition 1.16 ***(Additivité)*** *Si* Ω_1, Ω_2 *sont deux ouverts bornés disjoints et* $T : \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \to X$ *est un opérateur compact n'a pas de point fixe sur* $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$*, alors :*

$$\deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Proposition 1.17 *Si* $b \in X$ *est tel que pour tout* $u \in \bar{\Omega}$ *on a :*

$$u - Tu \neq b,$$

alors :

$$\deg(I - T, \Omega, b) = 0.$$

Corollaire 1.5 *Si $b \in X$ est tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a :*

$$u - Tu \neq b \ \textit{et} \ \deg(I - T, \Omega, b) \neq 0,$$

alors il existe $u \in \Omega$ tel que :

$$u - Tu = b.$$

Proposition 1.18 *Soient T_1, T_2 des applications compactes de $\bar{\Omega}$ dans X et $b \in X$ tel que :*

$$4\varepsilon = dist(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) > 0.$$

Alors si :

$$\sup_{u \in \bar{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon,$$

on a :

$$\deg(I - T_1, \Omega, b) = \deg(I - T_2, \Omega, b).$$

Corollaire 1.6 *Soient $b \in X$ et $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to X$ une application compacte, telle que pour tout $(u,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ on ait :*

$$u - H(u,t) \neq b.$$

Alors le degré $\deg(I - H(.,t), \Omega, b)$ est constant pour $t \in [0,1]$:

$$\deg(I - H(.,t), \Omega, b) = \deg(I - H(.,0), \Omega, b).$$

Proposition 1.19 *Soient $b, b_1 \in X$ tels que $b, b_1 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Alors si b et b_1 appartiennent à la même composante connexe de $X \backslash (I - T)(\partial\Omega)$, on a :*

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T, \Omega, b_1).$$

1.4 Théorème de Minty-Browder

Théorème 1.9 [8]*Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $A : E \to E'$une application (non linéaire) continue telle que*

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle > 0, \forall v_1, v_2 \in E, v_1 \neq v_2$$

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} = \infty.$$

Alors, pour tout $f \in E'$ il existe $u \in E$ unique solution de l'équation $Au = f$.

1.5 Convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.10 *Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ qui converge p.p vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et on a :*

$$\int_\Omega f_n(x)\, dx \to \int_\Omega f(x)\, dx$$

1.6 Principe de comparaison

Lemme 1.10 [3] *Soient $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi dx$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0,$alors $u \leq v$ p.p dans Ω.

Preuve Notre preuve est basée sur les arguments présentés dans [24, 38]. ■

1.7 Quelques inégalitées

1.7.1 inégalitée de hölder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$f, g \in L^1(\Omega) et \left\| fg \right\|_1 \leq \left\| f \right\|_p \left\| g \right\|_{p'}.$$

1.7.2 inégalitée de Hardy-Sobolev dans le cas $\theta = 0$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, pour $1 \leq p < n$,et on note $p^* = \frac{np}{(n-p)}$.Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\left(\int_\Omega |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

satisfait pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Chapitre 2

Solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaire avec singularités

---

2.1 Introduction

On considère le système suivant d'équations elliptiques quasi-linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{\alpha_1} v^{\beta_1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q v = u^{\alpha_2} v^{\beta_2}, x \in \Omega, \\ u, v > 0, x \in \Omega, \\ u, v = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, et de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, Δ_p et Δ_q, $1 < p, q < N$, sont les opérateurs p-laplacien et q-laplacien, respectivement, telle que $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ et $\Delta_q v = div(|\nabla v|^{q-2} \nabla v)$. Nous considérons le système (P) dans un cas singulier, en supposant que

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < 0 < \beta_1 < \min \left\{ p-1, \frac{q^*}{p^*}(p-1-\alpha_1) \right\} \\ -1 < \beta_2 < 0 < \alpha_2 < \min \left\{ q-1, \frac{p^*}{q^*}(q-1-\beta_2) \right\} \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce cas, le système (P) est coopérative, pour u (resp.v) fixé a droite de l'équation 1 (resp. équation 2) de (P) est croissante en v (resp. u).

Les résultats développés ici et dans l'annexe sont publiés en [10].

2.2 Existence du première solution de (P)

Théorème 2.1 *(voir [10]) Supposons que l' hypothèse (2.1) est satisfaite, le système (P) admet une solution positive $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour certains $\gamma \in (0,1)$. De plus, il existe une sous-sur solution $(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v}) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ pour (P) tels que :*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \;\; et \;\; \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), x \in \bar{\Omega}. \tag{2.2}$$

Dans ce travail, la solution de (P) est pris au sens faible, C'est-à-dire la paire $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec u,v positive p.p dans Ω, satisfaisant :

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \varphi dx \\ \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx = \int\limits_{\Omega} u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \psi dx \end{cases} \tag{2.3}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

Nous montrons dans la preuve suivante que la principale difficulté technique ce tenir dans la présence des termes singuliers dans le système (P).Notre approche est basée sur la méthode de la sous et sur solution [9]. Cependant, cette méthode ne peut pas être mise en œuvre directement en raison de la présence de termes singuliers dans le système (P). L'application de la méthode de la sous et sur-solution en conjonction avec le résultat de régularité dans [25] sous l'hypothèse (2.1), nous permettre de prouver l'existence d'une solution (positive) $(u,v) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour certains $\gamma \in (0,1)$, de problème (P).

Sous et sur solution

Définition 2.1 *Soit le couple $(\underline{u},\underline{v}) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour certains $\gamma \in (0,1)$ une sous solution de (P) il vérifie que*

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \underline{u}^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \varphi(x) dx,$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi(x) dx \leq \int_{\Omega} \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi(x) dx.$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1.p}(\Omega) \times W_0^{1.q}(\Omega)$ et $\varphi,\psi \geq 0$.

Soit le couple $(\overline{u},\overline{v}) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour certains $\gamma \in (0,1)$ une sous solution de (P) il vérifie que

$$\int_{\Omega} |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \varphi(x) dx,$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi(x) dx \leq \int_{\Omega} \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi(x) dx.$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1.p}(\Omega) \times W_0^{1.q}(\Omega)$ *et* $\varphi, \psi \geq 0$.

Dans ce qui suit, on note $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ les fonctions propres positives normalisées associées aux premiès valeurs propres principales $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ de $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$, respectivement :

$$\begin{cases} -\Delta_s \phi_{1,s} = \lambda_{1,s} \left|\phi_{1,s}\right|^{p-2} \phi_{1,s}, x \in \Omega, \\ \phi_{1,s} = 0, x \in \partial\Omega, \\ \left\|\phi_{1,s}\right\|_{\infty} = 1, s = p, q. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le principe du maximum fort garantit l'existence de constantes positives l_1 et l_2 tel que

$$l_1 \phi_{1,p}(x) \leq \phi_{1,q}(x) \leq l_2 \phi_{1,p}(x), x \in \Omega, \tag{2.5}$$

Pour une utilisation ultérieure, rappelons qu'il existe une constante $l > 0$ telle que

$$\phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq l d(x), x \in \Omega, \tag{2.6}$$

où $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ (voir [19]). De plus, puisque $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ appartient à $C^1(\bar{\Omega})$, il existe $M > 0$ tel que

$$M = \max_{x \in \Omega} \left\{ \left|\phi_{1,p}(x)\right| + \left|\phi_{1,q}(x)\right| \right\}. \tag{2.7}$$

Preuve (voir [10]**)**

Définissons w_1 et w_2 comme les solutions uniques faibles des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 = w_1^{\alpha_1}, x \in \Omega, \\ w_1 > 0, x \in \Omega, \\ w_1 = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q w_2 = w_2^{\beta_2}, x \in \Omega, \\ w_2 > 0, x \in \Omega, \\ w_2 = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

respectivement, qui sont connus pour satisfaire

$$c_2\phi_{1,p}(x) \leq w_1(x) \leq c_3\phi_{1,p}(x) \text{ et } c_2'\phi_{1,q}(x) \leq w_2(x) \leq c_3'\phi_{1,q}(x) \tag{2.9}$$

avec des constantes positives c_2, c_3, c_2', c_3' (voir [19]). Considérez $\xi_1, \xi_2 \in C^1(\bar{\Omega})$ les solutions des problèmes de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta_p\xi_1(x) = \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x), x \in \Omega, \\ \xi_1 = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -\Delta_q\xi_2(x) = \phi_{1,q}^{\beta_2}(x), x \in \Omega, \\ \xi_2 = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev [5,Lemme 2.3] garantit que le côté droit de (2.10) appartient à $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W^{-1,q'}(\Omega)$, respectivement. Par conséquent, [8] implique l'existence et l'unicité ξ_1 et ξ_2 dans (2.10). De plus, (2.8), (2.9), la monotonie des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ donne

$$c_0\phi_{1,p}(x) \leq \xi_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ et } c_0'\phi_{1,q}(x) \leq \xi_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ sur } \Omega, \tag{2.11}$$

pour certaines constantes positives c_0, c_1, c_0', c_1'.et pour z_1 et z_2 satisfaire

$$-\Delta_p z_1(x) = h_1(x), x \in \Omega, z_1 = 0, x \in \partial\Omega, \tag{2.12}$$

et

$$-\Delta_q z_2(x) = h_2(x), x \in \Omega, z_2 = 0, x \in \partial\Omega, \tag{2.13}$$

où

$$h_1(x) = \begin{cases} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x), x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x), x \in \Omega_\delta, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} \phi_{1,q}^{\beta_2}(x), x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,q}^{\beta_2}(x), x \in \Omega_\delta \end{cases} \tag{2.15}$$

et

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\},$$

avec un $\delta > 0$ fixé suffisamment petit et $d(x) = d(x, \partial\Omega)$.

L'inégalité de Hardy-Sobolev ainsi que le théorème de Minty-Browder impliquent l'existence et l'unicité de z_1 et z_2 dans (2.12) et (2.13). De plus, (2.12) et (2.13), la monotonie des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ et de [25], implique que

$$\frac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x) \leq z_1\,(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ et } \frac{c_0'}{2}\phi_{1,q}(x) \leq z_2\,(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ sur } \Omega. \tag{2.16}$$

Ensuite, notre objectif est de montrer l'existence de sous et sur-solutions pour (P).

L'existence de sous solution $(\underline{u}, \underline{v})$ **:**

Soient

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(z_1, z_2) \tag{2.17}$$

on a

$$\begin{aligned}
-\Delta_p\underline{u} &= -\Delta_p(C^{-1}z_1(x)) = -\operatorname{div}(\left|\nabla C^{-1}z_1(x)\right|^{p-2}\nabla C^{-1}z_1(x)) \\
&= -\operatorname{div}(C^{-(p-2)}\left|\nabla z_1(x)\right|^{p-2} C^{-1}\nabla z_1(x)) \\
&= -\operatorname{div}(C^{-(p-1)}\left|\nabla z_1(x)\right|^{p-2}\nabla z_1(x)) \\
&= C^{-(p-1)}(-\operatorname{div}(\left|\nabla z_1(x)\right|^{p-2}\nabla z_1(x))) \\
&= C^{-(p-1)}(-\Delta_p z_1(x)) \\
&= C^{-(p-1)}h_1(x).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\Delta_q\underline{v} &= -\Delta_q(C^{-1}z_2(x)) = -\operatorname{div}(\left|\nabla C^{-1}z_2(x)\right|^{q-2}\nabla C^{-1}z_2(x)) \\
&= -\operatorname{div}(C^{-(q-2)}\left|\nabla z_2(x)\right|^{q-2} C^{-1}\nabla z_2(x)) \\
&= -\operatorname{div}(C^{-(q-1)}\left|\nabla z_2(x)\right|^{q-2}\nabla z_2(x)) \\
&= C^{-(q-1)}(-\operatorname{div}(\left|\nabla z_2(x)\right|^{q-2}\nabla z_2(x))) \\
&= C^{-(q-1)}(-\Delta_q z_2(x)) \\
&= C^{-(q-1)}h_2(x).
\end{aligned}$$

Pour $C > 0$,il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &= C^{-(p-1)}(-\Delta_p z_1(x)) = C^{-(p-1)} h_1(x) \leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_1} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_1}. \\ -\Delta_q \underline{v} &= C^{-(q-1)}(-\Delta_q z_2(x)) = C^{-(q-1)} h_2(x) \leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_2} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Sur Ω_δ on a :

$$\begin{aligned} -C^{-(p-1)} \phi_{1.p}^{\alpha_1}(x) &< 0 \leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_1} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_1}, x \in \Omega_\delta \\ -C^{-(p-1)} \phi_{1.p}^{\alpha_1}(x) &\leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_1} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_1}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

et

$$\begin{aligned} -C^{-(q-1)} \phi_{1.q}^{\beta_2}(x) &< 0 \leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_2} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_2}, x \in \Omega_\delta \\ -C^{-(q-1)} \phi_{1.q}^{\beta_2}(x) &\leq (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_2} (C^{-1} z_2(x))^{\beta_2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &\leq \underline{u}^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1}, x \in \Omega_\delta. \\ -\Delta_q \underline{v} &\leq \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2}, x \in \Omega_\delta. \end{aligned}$$

Sur $\Omega \backslash \bar{\Omega}_\delta$:

Soit $x \in \Omega \backslash \bar{\Omega}_\delta$:

D'après les propriétées dela fonction propre de $-\Delta_p$ $\exists \mu > 0$:

$$\phi_{1.p}(x), \phi_{1.q}(x) \geq \mu. \tag{2.20}$$

On a

$$\phi_{1.p}(x) \leq 1,$$

alors, puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$

$$\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x) \geq 1,$$

par multiplication par une constante on obtien

$$C^{-(p-1)}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x) \geq C^{-(p-1)},$$

de même on a

$$C^{-(p-1)}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)C^{\alpha_1+\beta_1}(z_1(x))^{-\alpha_1} \geq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}(z_1(x))^{-\alpha_1}$$

d'ou

$$C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1}$$

D'après $(2.7), (2.16)$ on a

$$\begin{aligned} C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} &\leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(c_1\phi_{1.p}(x))^{-\alpha_1} \\ &\leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(c_1\left\|\phi_{1.p}(x)\right\|)^{-\alpha_1} \\ &\leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(c_1\max\left|\phi_{1.p}(x)\right|)^{-\alpha_1} \\ &\leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(c_1M)^{-\alpha_1}, \end{aligned}$$

de (2.20) on a

$$C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\mu^{\alpha_1}(c_1M)^{-\alpha_1}.$$

Pour $C > 0$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\mu^{\alpha_1}(c_1M)^{-\alpha_1} &\leq C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\mu^{\beta_1}(c_1M)^{-\alpha_1} \\ &< (\frac{c_0^{'}}{2}\mu)^{\beta_1} \\ &\leq (\frac{c_0^{'}}{2}\phi_{1.q}(x))^{\beta_1} \\ &\leq (z_2(x))^{\beta_1}, x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta. \end{aligned}$$

Alors

$$C^{-(p-1)+\alpha_1+\beta_1}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq (z_2(x))^{\beta_1}, x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta. \tag{2.21}$$

Donc

$$C^{-(p-1)}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x) \leq (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}, x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta. \tag{2.22}$$

De même façon pour la deuxième équation, et puisque $\beta_2 < 0 < \alpha_2$, et d'après $(2.7), (2.16)$ et (2.20), et pour un $C > 0$ suffisamment grand on a :

$$C^{-(q-1)}\phi_{1.q}^{\beta_2}(x) \leq (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2}, x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta. \tag{2.23}$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta_p\underline{u} \leq \underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q\underline{v} \leq \underline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2}, x \in \Omega. \end{cases}$$

Effectivement. et par un calcul directe, on obtiens

$$\begin{cases} -\Delta_p\underline{u} = -\operatorname{div}(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}) = C^{-(p-1)}h_1(x), \\ -\Delta_q\underline{v} = -\operatorname{div}(|\nabla\underline{v}|^{q-2}\nabla\underline{v}) = C^{-(q-1)}h_2(x), \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta_p\underline{u}\varphi(x)dx &= \int_\Omega C^{-(p-1)}h_1(x)\varphi(x)dx, \varphi(x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x) \in W_0^{1.p}(\Omega) \qquad (2.24) \\ &= C^{-(p-1)}\int_\Omega h_1(x)\varphi(x)dx \\ &= C^{-(p-1)}\left[\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)\varphi(x)dx - \int_{\Omega_\delta}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)\varphi(x)dx\right] \\ &= C^{-(p-1)}\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)\varphi(x)dx - C^{-(p-1)}\int_{\Omega_\delta}\phi_{1.p}^{\alpha_1}(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Et d'après (2.24), (2.18), (2.21) et (2.22), on voit facilement que :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta_p \underline{u}\ \varphi(x)dx &= -\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u})\varphi(x)dx \\
&= \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi(x)dx \\
&= C^{-(p-1)}\int_\Omega h_1(x)\varphi(x)dx \\
&\leq \int_\Omega (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$-\int_\Omega \Delta_p \underline{u}\varphi(x)dx \leq \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}\varphi(x)dx.$$

De même par la deuxième équation, et d'après (2.19), (2.23), on a

$$-\int_\Omega \Delta_q \underline{v}\psi(x)dx \leq \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2}\psi(x)dx.$$

Donc pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1.p}(\Omega) \times W_0^{1.q}(\Omega)$ et $\varphi,\psi \geq 0$,cela prouve que $(\underline{u},\underline{v})$ est une sous-solution pour le problème (P).

L'existence de sur solution $(\overline{u},\overline{v})$:

Soit

$$(\overline{u},\overline{v}) = C(\xi_1,\xi_2). \tag{2.25}$$

On a :

$$\begin{aligned}
-\Delta_p\overline{u} &= -\Delta_p(C\xi_1) = -\operatorname{div}(|\nabla C\xi_1|^{p-2}\nabla C\xi_1) \\
&= -\operatorname{div}(C^{p-1}|\nabla\xi_1|^{p-2}\nabla\xi_1) \\
&= C^{p-1}(-\operatorname{div}(|\nabla\xi_1|^{p-2}\nabla\xi_1)) \\
&= C^{p-1}(-\Delta_p\xi_1) \\
&= C^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\Delta_q \overline{v} &= -\Delta_q(C\xi_2) = -\operatorname{div}(|\nabla C\xi_2|^{q-2}\nabla C\xi_2) \\
&= -\operatorname{div}(C^{q-1}|\nabla \xi_2|^{q-2}\nabla \xi_2) \\
&= C^{q-1}(-\operatorname{div}(|\nabla \xi_2|^{q-2}\nabla \xi_2)) \\
&= C^{q-1}(-\Delta_q \xi_2) \\
&= C^{q-1}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x)
\end{aligned}$$

Maintenant on va montrer que :

$$\begin{cases} -\Delta_p \overline{u} = C^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) \geq (C\xi_1)^{\alpha_1}(C\xi_2)^{\beta_1} \\ -\Delta_q \overline{v} = C^{q-1}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) \geq (C\xi_1)^{\alpha_2}(C\xi_2)^{\beta_2} \end{cases}$$

On a

$$\phi_{1,p} \leq \left\|\phi_{1,p}\right\| = 1,$$

et puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$

$$\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) \geq 1,$$

par multiplication par une constante, on obtient

$$C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x){\xi_1}^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}{\xi_1}^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1}.$$

D'après (2.11), on a

$$\begin{aligned}
C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x){\xi_1}^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_0\phi_{1,p})^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} \\
&\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}c_0^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} \\
&\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}{\xi_2}^{-\beta_1} \\
&\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'\phi_{1,q})^{-\beta_1},
\end{aligned}$$

et de (2.7), on a

$$\begin{aligned} C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'\phi_{1,q})^{-\beta_1} &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'\left\|\phi_{1,q}\right\|)^{-\beta_1} \\ &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'\max\left|\phi_{1,q}\right|)^{-\beta_1} \\ &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'M)^{-\beta_1} \end{aligned}$$

Pour $C > 0$ suffisamment grand :

$$C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'M)^{-\beta_1} \geq 1$$

Alors

$$\begin{aligned} C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x){\xi_1}^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}{\xi_1}^{-\alpha_1}{\xi_2}^{-\beta_1} \\ &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'M)^{-\beta_1} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

De même façon pour la deuxième équation, et puisque $\beta_2 < 0 < \alpha_2$, et d'après (2.11),(2.7), et pour $C > 0$ suffisamment grand satisfait aussi :

$$\begin{aligned} C^{q-1-\alpha_2-\beta_2}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x){\xi_1}^{-\alpha_2}{\xi_2}^{-\beta_2} &\geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2}{\xi_1}^{-\alpha_2}{\xi_2}^{-\beta_2} \\ &\geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2}(c_0M)^{-\alpha_2} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} -\Delta_p\overline{u} \geq \overline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q\overline{v} \geq \overline{u}^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2}, x \in \Omega. \end{cases}$$

Effectivement. On a

$$\begin{cases} -\Delta_p\overline{u} = -\operatorname{div}(|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}) = C^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) \\ -\Delta_q\overline{v} = -\operatorname{div}(|\nabla\overline{v}|^{q-2}\nabla\overline{v}) = C^{q-1}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x). \end{cases}$$

Par un calcul directe, on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta_p \overline{u}\varphi(x)dx &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u})\varphi(x)dx, \varphi(x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega) \\
&= \int_{\Omega} |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla \varphi(x)dx \\
&= \int_{\Omega} C^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)\varphi(x)dx \\
&\geq \int_{\Omega} (C\xi_1)^{\alpha_1}(C\xi_2)^{\beta_1}\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta_q \overline{v}\psi(x)dx &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v})\psi(x)dx, \psi(x) \geq 0 \text{ et } \psi(x) \in W_0^{1,q}(\Omega) \\
&= \int_{\Omega} |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\nabla \psi(x)dx \\
&= \int_{\Omega} C^{q-1}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x)\psi(x)dx \\
&\geq \int_{\Omega} (C\xi_1)^{\alpha_2}(C\xi_2)^{\beta_2}\psi(x)dx.
\end{aligned}$$

D'ou

$$-\int_{\Omega} \Delta_p \overline{u}\varphi(x)dx = \int_{\Omega} |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla \varphi(x)dx \geq \int_{\Omega} \overline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1}\varphi(x)dx, \tag{2.26}$$

et

$$-\int_{\Omega} \Delta_q \overline{v}\psi(x)dx = \int_{\Omega} |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\nabla \psi(x)dx \geq \int_{\Omega} \overline{u}^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2}\psi(x)dx. \tag{2.27}$$

Donc pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \in W_0^{1,q}(\Omega)$ et $\varphi, \psi \geq 0$, cela prouve que $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution pour le problème (P).

Conclusion

On a :

$$\begin{cases} \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \\ \underline{v} \leq v \leq \overline{v} \end{cases}$$

D'après (2.1)

$$\begin{cases} \overline{u}^{\alpha_1} \leq u^{\alpha_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1} \\ \underline{v}^{\beta_1} \leq v^{\beta_1} \leq \overline{v}^{\beta_1} \end{cases} \tag{$S1$}$$

et

$$\begin{cases} \underline{u}^{\alpha_2} \leq u^{\alpha_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \\ \overline{v}^{\beta_2} \leq v^{\beta_2} \leq \underline{v}^{\beta_2} \end{cases} \tag{$S2$}$$

On multiplions $(S1)$ (resp.$(S2)$) terme à terme :

$$\begin{cases} \overline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \leq u^{\alpha_1}v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} \\ \underline{u}^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2} \leq u^{\alpha_2}v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} \end{cases}$$

D'après (2.17) et (2.25), on obtiens

$$\begin{aligned} u^{\alpha_1}v^{\beta_1} &\leq \underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} \leq (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C\xi_1)^{\beta_1} \\ &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}z_1(x)^{\alpha_1}{\xi_1}^{\beta_1}. \end{aligned}$$

De (2.11) et (2.16), on a

$$\begin{aligned} C^{-\alpha_1+\beta_1}z_1(x)^{\alpha_1}{\xi_1}^{\beta_1} &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c_1\phi_{1,q})^{\beta_1} \\ &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\phi_{1,q}^{\beta_1} \end{aligned}$$

et puisque

$$\phi_{1,q}^{\beta_1} \leq 1$$

on a

$$C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\phi_{1,q}^{\beta_1} \leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}$$

et de (2.6), on a

$$\begin{aligned} C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}l^{\alpha_1}d^{\alpha_1}(x) \\ &\leq C_1 d^{\alpha_1}(x), \end{aligned}$$

telle que

$$C_1 = C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1)^{\beta_1}l^{\alpha_1}.$$

De même on a

$$\begin{aligned} u^{\alpha_2}v^{\beta_2} &\leq \overline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} \leq (C\xi_1)^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2} \\ &\leq C_2 d^{\beta_2}(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} u^{\alpha_1}v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} \leq C_1 d^{\alpha_1}(x), \\ u^{\alpha_2}v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} \leq C_2 d^{\beta_2}(x), \end{cases}$$

où $C_1, C_2 > 0$. Donc on conclus qu'il existe une solution $(u,v) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour $\gamma \in (0,1)$ de $(\mathbf{P})$ dans un rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. ∎

2.3 Existence du deuxième solution de (P)

Théorème 2.2 *(voir* [10]*) Sous hypothèse* (2.1),*le problème* (P) *possède au moins deux solutions (positives) en* $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, *pour certains* $\gamma \in (0,1)$.

Dans la preuve du théorème ci-dessus, nous utiliserons la méthode des sous et sur solutions combinées avec le degré topologique de Leray-Schauder, la première solution est donnée par le théorème (2.1) qu 'elle est située dans un rectangle de sous-sur solution.

Cependant, en raison des termes singuliers dans le système (P), la théorie de degré topologique ne peut être mise en œuvre directement. À gérer cette difficulté, nous perturbons le système (P) en introduisant un paramètre $\varepsilon \in (0,1)$. Cela donne lieu à un système régularisé (P_r) défini pour $\varepsilon > 0$, nous montrons que le degré d'un opérateur correspondant au système (P_r) sur un plus grand ensemble est 0, et d'autre part, nous montrons que le degré d'un opérateur correspondant au système (P_r) est 1 sur un ensemble approprié. Ce qui prouve l'existence d'une solution pour (P_r).Et après nous trouvons la deuxième solution de (P) par passage à la limite comme $\varepsilon \to 0$.

Avant de commencer la preuve du **théorème** (2.2), nous aimerions souligner que par le théorème(2.1) l'ensemble des solutions $(u,v) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, $\gamma \in (0,1)$, de problème (P) n'est pas vide. Ensuite, sans aucune perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une constante $R > 0$ tel que toutes les solutions (u,v) avec $C^{1,\gamma}$-régularité satisfaire

$$\|u\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})}, \|v\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})} < R. \tag{2.28}$$

Nous notons

$$\begin{aligned} B_R(0) &= \left\{(u,v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) : \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} < R\right\}, \\ O_R &= \{(u,v) \in B_R(0) : \underline{u} \ll u \ll R \text{ et } \underline{v} \ll v \ll R\} \end{aligned}$$

et

$$\hat{O} = \{(u,v) \in B_R(0) : \underline{u} \ll u \ll \hat{u} \text{ et } \underline{v} \ll v \ll \hat{v}\},$$

où

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \Lambda(w_1, w_2) \tag{2.29}$$

avec w_1, w_2 fixé dans (2.8) et $\Lambda > 0$ est une constante qui sera choisie plus tard. Un calcul simple donne que O_R et $\hat{O}$ sont des ensembles ouverts dans $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$. Dans ce qui suit, nous supposerons sans perte de généralité que

$$R > \max\left\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\bar{u}\|_\infty, \|\underline{v}\|_\infty, \|\bar{v}\|_\infty, \|\hat{u}\|_\infty, \|\hat{v}\|_\infty\right\}.$$

Dans la suite, nous utilisons la notation $u_1 \ll u_2$ lorsque $u_1, u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$ satisfaire :

$$u_1 < u_2 \forall x \in \Omega \text{ et } \frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \text{ sur } \partial\Omega,$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

La proposition suivante est utile pour prouver notre deuxième résultat principal.

Proposition 2.1 *Supposons* (2.1) *est vérifié, Puis toutes les solutions* (u, v) *de* (P) *est dans* $[\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]$ *telle que*

$$u(x) \ll \hat{u}(x) \text{ et } v(x) \ll \hat{v}(x) \text{ dans } \Omega. \tag{2.30}$$

Preuve De (2.25),et (2.17) on a

$$\begin{aligned} -\Delta_p u(x) &= u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \\ &\leq \underline{u}^{\alpha_1} \bar{v}^{\beta_1} = (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_1} (C\xi_2)^{\beta_1}, \end{aligned}$$

d'après (2.16), (2.11) et (2.1), on obtiens

$$\begin{aligned} \underline{u}^{\alpha_1} \bar{v}^{\beta_1} &= (C^{-1} z_1(x))^{\alpha_1} (C\xi_2)^{\beta_1} \\ &\leq (C^{-1} \frac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x))^{\alpha_1} (C c_1' \phi_{1,q}(x))^{\beta_1} \\ &\leq C^{-\alpha_1 + \beta_1} (\frac{c_0}{2})^{\alpha_1} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) (c_1' \phi_{1,q}(x))^{\beta_1}. \end{aligned}$$

De (2.7) on a

$$\begin{aligned}
C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1'\phi_{1,q}(x))^{\beta_1} &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1'\left\|\phi_{1,q}(x)\right\|)^{\beta_1} \\
&\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1'M)^{\beta_1},
\end{aligned}$$

et de (2.9), on obtiens

$$\begin{aligned}
C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1'M)^{\beta_1} &\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1'M)^{\beta_1}(c_3 w_1(x))^{\alpha_1} \\
&\leq C^{-\alpha_1+\beta_1}(\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(c_1'M)^{\beta_1}c_3^{\alpha_1}(w_1(x))^{\alpha_1} \\
&< \Lambda^{p-1}(w_1(x))^{\alpha_1}
\end{aligned}$$

pour un Λ assez grand et par (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda^{p-1}(w_1(x))^{\alpha_1} &= \Lambda^{p-1}(-\Delta_p w_1(x)) \\
&= -\Delta_p(\Lambda w_1(x)) \\
&= -\Delta_p\hat{u}(x), x \in \Omega,
\end{aligned}$$

alors d'après (2.30), il s'ensuite que

$$-\Delta_p u(x) < -\Delta_p(\Lambda w_1(x)) = -\Delta_p\hat{u}(x), x \in \Omega. \tag{2.31}$$

De même manière pour la seconde équation de (P),on obtient

$$\begin{aligned}
-\Delta_q v(x) &= u^{\alpha_2}v^{\beta_2} \\
&\leq \bar{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} \\
&\leq \Lambda^{q-1}(w_2(x))^{\beta_2} = -\Delta_q(\Lambda w_2(x)) \\
&\leq -\Delta_q\hat{v}(x), x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

pour Λ assez grand. Par conséquent, le principe de comparaison forte trouvé dans [7, proposition 2.6] mène à la conclusion. Ceci termine la preuve de Prop.2.1. ∎

Le problème auxiliaire :

Nous utiliserons le degré topologique pour obtenir la deuxième solution. Cependant, les termes singuliers dans le système (P) empêchent que le calcul du degré soit bien défini. Pour surmonter cette difficulté, nous perturbons le système (P) en introduisant un paramètre $\varepsilon \in (0,1)$. Cela donne lieu à un système régularisé pour (P) défini pour $\varepsilon > 0$ comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (u+\varepsilon)^{\alpha_1} v^{\beta_1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q v = u^{\alpha_2}(v+\varepsilon)^{\beta_2}, x \in \Omega, \\ u(x), v(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x), v(x) = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_r}$$

Nous appliquons la théorie des degré topologique au problème régularisé (P_r). Ceci conduit à trouver une solution positive pour (P_r) située en dehors de l'ensemble $\hat{O}$. Alors on a l'existence d'une seconde solution de (P). La preuve contienne quatres étapes.

Remarque 2.1 *Il est très important de noter que le même raisonnement exploité dans la démonstration du théorème* (2.1) *et de la proposition* 2.1 *fournit que le problème* (P_r) *a une solution (positive)* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}), \gamma \in (0,1)$ *dans* $[\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]$*, où les fonctions* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\bar{u}, \bar{v})$ *sont des sous-sur solutions de* (P_r) *et* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *vérifie*

$$u_\varepsilon(x) \ll \hat{u}(x) \text{ et } v_\varepsilon(x) \ll \hat{v}(x) \text{ dans } \Omega,$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

La première estimation

Nous transformons le problème (P_r) en un problème doté de propriétés de monotonicité utiles. A cette fin, introduisons les fonctions :

$$\tilde{u} = \begin{cases} R, \text{ si } u \geq R \\ u, \text{ si } \underline{u} \leq u \leq R \\ \underline{u}, \text{ si } u \leq \underline{u} \end{cases}, \tilde{v} = \begin{cases} R \text{ , si } v \geq R \\ v, \text{ si } \underline{v} \leq v \leq R \\ \underline{v}, \text{ si } v \leq \underline{v} \end{cases} \tag{2.33}$$

où $(\underline{u}, \underline{v})$ et R sont donnés par (2.17) et (2.28), respectivement. Définir les opérateurs

$$\begin{aligned} T_{p,\varepsilon}(u) &= -\Delta_p u + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, u^{p-1}\right\}, \\ T_{q,\varepsilon}(v) &= -\Delta_q v + \rho \max\left\{R^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}, v^{q-1}\right\}, \end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ et une constante $\rho > 0$. Nous étudierons la classe d'homotopie de problème

$$\begin{cases} T_{p,\varepsilon}(u) = f_{1,\epsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v}), x \in \Omega, \\ T_{q,\varepsilon}(v) = f_{2,\epsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v}), x \in \Omega, \\ u, v > 0, x \in \Omega, \\ u, v = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_f}$$

où $f_{1,\epsilon,t}$ et $f_{2,\epsilon,t}$ sont définies comme suit :

$$f_{1,\epsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v}) = t(\tilde{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + m(1-t)\tilde{u}^{p-1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \tilde{u}^{p-1}\right\}, \tag{2.34}$$

$$f_{2,\epsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v}) = t\tilde{u}^{\alpha_2}(\tilde{v}+\varepsilon)^{\beta_2} + m(1-t)\tilde{v}^{q-1} + \rho \max\left\{R^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}, \tilde{v}^{q-1}\right\}, \tag{2.35}$$

avec un constant $m > \max\left\{\lambda_{1,p}, \lambda_{1,q}\right\}$.Dans la suite, on fixe la constante $\rho > 0$ dans (P_f) assez grand, de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$t\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}s_2^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, (p-1)s_1^{p-2}\right\} \geq 0$$

et

$$t\beta_2(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1}s_1^{\alpha_2} + \rho \max\left\{R^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}, (q-1)s_2^{q-2}\right\} \geq 0,$$

uniformément pour tout $x \in \Omega$,pour $(s_1, s_2) \in [\underline{u}, R] \times [\underline{v}, R]$, $\varepsilon \in (0,1)$ avec le choix ci-dessus de ρ,le terme dans la partie droite de la première (resp. seconde) équation dans (P_f) augmente ainsi que u (resp. v) augmente, pour tout $\varepsilon > 0$ petit.

Le résultat suivant est crucial dans notre approche, car il établit une importante estimation préalable pour le problème (P_f). De plus , il est également montré que les solutions de (P_f) ne peut pas se produire en dehors du rectangle formé par la sous-solution $(\underline{u}, \underline{v})$ et la constante R.

Proposition 2.2 *supposer que* (2.1) *est vérifier. Si* (u, v) *est une solution de* (P_f)*, alors* $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$*, pour tout* $\gamma \in (0, 1)$*, et satisfait*

$$\|u\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})}, \|v\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})} < R$$

En outre, que

$$\underline{u}(x) \ll u(x) \text{ et } \underline{v}(x) \ll v(x) \text{ dans } \Omega, \forall t \in [0, 1]. \tag{2.36}$$

Preuve Premièrement, par la technique des itérations de Moser[26], nous prouvons que les solutions de (P_f) sont bornées dans $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. Sou l'hypothèse (2.36), il s'ensuit que

$$\max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1} R^{\beta_1}, u^{p-1}\right\} - \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1} R^{\beta_1}, \tilde{u}^{p-1}\right\} \geq 0, x \in \Omega \tag{2.37}$$

et

$$\max\left\{R^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2}, v^{q-1}\right\} - \max\left\{R^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2}, \tilde{v}^{q-1}\right\} \geq 0, x \in \Omega, \tag{2.38}$$

alors,

$$\begin{cases} -\Delta_p u \leq \tilde{u}^{\alpha_1} \tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q v \leq \tilde{u}^{\alpha_2} \tilde{v}^{\beta_2} + m\tilde{v}^{q-1}, x \in \Omega, \\ u, v > 0, x \in \Omega, \\ u, v > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.39}$$

Soit une constante $A \in (0, R]$, définissons sur Ω les fonctions

$$u_A = \min\{u(x), A\} \text{ et } v_A = \min\{v(x), A\}.$$

Agissant sur (P_f) avec

$$(\varphi, \psi) = (u_A^{k_1 p+1}, u_A^{\bar{k}_1 q+1}),$$

où

$$(k_1 + 1)p = p^* \text{ et } (\bar{k}_1 + 1)q = q^* \tag{2.40}$$

et en intégrant sur Ω,nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -\Delta_p u_A.\varphi(x)dx &= \int_{\Omega} -\Delta_p u_A.u_A^{k_1p+1}dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u_A|^{p-2}\nabla u_A.\nabla u_A^{k_1p+1}dx \\
&= (k_1p+1)\int_{\Omega} |\nabla u_A|^p u_A^{k_1p}dx \\
&\leq \int_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1})u_A^{k_1p+1}dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -\Delta_q v_A.\psi(x)dx &= \int_{\Omega} -\Delta_q v_A.v_A^{\bar{k}_1q+1}dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla v_A|^{q-2}\nabla v_A.\nabla v_A^{\bar{k}_1q+1}dx \\
&= (\bar{k}_1q+1)\int_{\Omega} |\nabla v_A|^q v_A^{\bar{k}_1q}dx \\
&\leq \int_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_2}\tilde{v}^{\beta_2} + m\tilde{v}^{q-1})v_A^{\bar{k}_1q+1}dx
\end{aligned}$$

Alors

$$(k_1p+1)\int_{\Omega} |\nabla u_A|^p u_A^{k_1p}dx \leq \int_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1})u_A^{k_1p+1}dx \tag{2.41}$$

et

$$(\bar{k}_1q+1)\int_{\Omega} |\nabla v_A|^q v_A^{\bar{k}_1q}dx \leq \int_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_2}\tilde{v}^{\beta_2} + m\tilde{v}^{q-1})v_A^{\bar{k}_1q+1}dx \tag{2.42}$$

Selon le théorème d'injection de Sobolev, les côtés gauches de (2.41) et (2.42) sont estimés de la manière suivante :

$$(k_1p+1)\int\limits_{\Omega} |\nabla u_A|^p \, u_A^{k_1p} dx = \frac{k_1p+1}{(k_1+1)^p}\int\limits_{\Omega} \left|\nabla u_A^{k_1+1}\right|^p dx \geq C_1 \frac{k_1p+1}{(k_1+1)^p} \left\|u_A\right\|^{p^*}_{(k_1+1)p^*} \tag{2.43}$$

et

$$(\bar{k}_1q+1)\int\limits_{\Omega} |\nabla v_A|^q \, v_A^{\bar{k}_1q} dx = \frac{\bar{k}_1q+1}{(\bar{k}_1+1)^q}\int\limits_{\Omega} \left|\nabla v_A^{\bar{k}_1+1}\right|^q dx \geq C_1' \frac{\bar{k}_1q+1}{(\bar{k}_1+1)^q} \left\|v_A\right\|^{q^*}_{(\bar{k}_1+1)q^*}, \tag{2.44}$$

où C_1 et C_1' sont des constantes positives. En remarquant que $k_1p+1+\alpha_1>0$ et $\bar{k}_1q+1+\beta_2>0$ il s'avère que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1}+m\tilde{u}^{p-1})u_A^{k_1p+1}dx &= \int\limits_{\Omega} (u_A^{\alpha_1}v^{\beta_1}+mu_A^{p-1})u_A^{k_1p+1}dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} u_A^{k_1p+1+\alpha_1}v^{\beta_1}dx + m\int\limits_{\Omega} u_A^{(k_1+1)p}dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} u^{k_1p+1+\alpha_1}v^{\beta_1}dx + m\int\limits_{\Omega} u^{(k_1+1)p}dx
\end{aligned} \tag{2.45}$$

et

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} (\tilde{u}^{\alpha_2}\tilde{v}^{\beta_2}+m\tilde{v}^{q-1})v_A^{\bar{k}_1q+1}dx &= \int\limits_{\Omega} (u^{\alpha_2}v_A^{\beta_2}+mv^{q-1})v_A^{\bar{k}_1q+1}dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} u^{\alpha_2}v_A^{\bar{k}_1q+1+\beta_2}dx + m\int\limits_{\Omega} v_A^{(\bar{k}_1+1)q}dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} u^{\alpha_2}v^{\bar{k}_1q+1+\beta_2}dx + m\int\limits_{\Omega} v^{(\bar{k}_1+1)q}dx.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ensuite, en suivant l'argument très similaire à celui de [36], nous obtenons que

$(u,v)\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$ et il existe une constante $L>0$, indépendante de R, telle que

$$\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq L.$$

En outre, à partir de (2.32) et puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1} &= \tilde{u}^{\alpha_1}(\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1-\alpha_1}) \\ &= u^{\alpha_1}(v^{\beta_1} + mu^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq \underline{u}^{\alpha_1}(\|v\|_\infty^{\beta_1} + m\,\|u\|_\infty^{p-1-\alpha_1}), \end{aligned}$$

de (2.17) et (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} \underline{u}^{\alpha_1}(\|v\|_\infty^{\beta_1} + m\,\|u\|_\infty^{p-1-\alpha_1}) &\leq (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq (C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq (C^{-1}\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1})\phi_{1,p}^{\alpha_1}, \end{aligned}$$

d'après (2.6), on a

$$\begin{aligned} (C^{-1}\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1})\phi_{1,p}^{\alpha_1} &\leq (C^{-1}\frac{c_0}{2})^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1})l^{\alpha_1}d^{\alpha_1}(x) \\ &\leq C_1 d^{\alpha_1}(x), x \in \Omega, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1} &= \tilde{u}^{\alpha_1}(\tilde{v}^{\beta_1} + m\tilde{u}^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq \underline{u}^{\alpha_1}(\|v\|_\infty^{\beta_1} + m\,\|u\|_\infty^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq (C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(L^{\beta_1} + mL^{p-1-\alpha_1}) \\ &\leq C_1 d^{\alpha_1}(x), x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.47}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{\alpha_2}\tilde{v}^{\beta_2} + m\tilde{v}^{q-1} &= \tilde{v}^{\beta_2}(\tilde{u}^{\alpha_2} + m\tilde{v}^{q-1-\beta_2}) \\
&\leq \underline{v}^{\beta_2}(\|u\|_\infty^{\alpha_2} + m\,\|v\|_\infty^{q-1-\beta_2}) \\
&\leq (C^{-1}\frac{c_0'}{2}\phi_{1,q})^{\beta_2}(L^{\alpha_2} + mL^{q-1-\beta_2}) \\
&\leq C_2 d^{\beta_2}(x), x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

avec les constantes positives C_1 et C_2. Ainsi, sur la base de (2.37),(2.38),(2.47),(2.48) et (2.39), la théorie de la régularité non linéaire trouvée dans [25] garantit que les solutions (u, v) de (P_f) appartiennent à $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ pour certains $\gamma \in (0, 1)$ et satisfaire (2.28).

Maintenant, nous prouvons seulement la première inégalité de (2.36) car la seconde peut être justifiée de la même manière. Pour cela, nous définissons les fonctions $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$f(x) = C^{-(p-1)}h_1(x) + \rho \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\}$$

et

$$g(x) = f_{1,\epsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v})$$

Par la Remarque 2.1, les strictes inégalités de (2.18),(2.22) et la monotonie de $f_{1,\epsilon,t}$ et (2.14) et (2.15) implique que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&< (C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&= \underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\}
\end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon \in (0,1)$ et puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$,il devient

$$\begin{aligned}
&\underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&\leq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)m\underline{u}^{p-1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} = f_{1,\epsilon,t}(x,\underline{u},\underline{v}) \\
&\leq f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v}) = g(x), x \in \Omega_\delta.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)m\underline{u}^{p-1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&= f_{1,\epsilon,t}(x,\underline{u},\underline{v}) \leq f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v}) = g(x), x \in \Omega_\delta,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

et

$$\begin{aligned}
f(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\} \\
&< (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\}, x \in \Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. D'autre part

$$\begin{aligned}
(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} &= (t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\
&= t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}
\end{aligned}$$

par (2.17), on a

$$\begin{aligned}
&t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(c^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(c^{-1}z_2(x))^{\beta_1},
\end{aligned}$$

et d'après (2.16) ,on obtient

$$\begin{aligned}
&t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(c^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(c^{-1}z_2(x))^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(c^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1},
\end{aligned}$$

de (2.20),(2.7) et par (2.1) ,on obtient

$$\begin{aligned}
&t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)(c^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1}\\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)(c^{-1}\tfrac{c_0}{2}\mu)^{\alpha_1}(c^{-1}c_1'M)^{\beta_1}\\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)(c^{-1}\tfrac{c_0}{2}\mu)^{p-1}m,
\end{aligned}$$

pour

$$m=(c^{-1}c_1'M)^{\beta_1},$$

donc, par récurrence on obtien

$$\begin{aligned}
&t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)(c^{-1}\tfrac{c_0}{2}\mu)^{p-1}m\\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)m\underline{u}^{p-1}, x\in\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}=(t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}\\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)m\underline{u}^{p-1}, x\in\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta,
\end{aligned}\tag{2.51}$$

à condition que $m>0$ soit suffisamment grand pour tout $t\in[0,1]$ et tout $\varepsilon\in(0,1)$. En combinant (2.50) avec (2.51) et en utilisant la monotonie de $f_{1,\epsilon,t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}+\rho\max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1},\underline{u}^{p-1}\right\} \qquad (2.52)\\
&< f_{1,\epsilon,t}(x,\underline{u},\underline{v})\leq f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v})=g(x), x\in\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta.
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,1]$ et tout $\varepsilon\in(0,1)$. Par conséquent, il résulte de (2.49) et (2.52) que pour chaque ensemble compact $K\subset\subset\Omega$, il existe une constante $\tau=\tau(K)>0$ telle que

$$\begin{aligned}
f(x)+\tau &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}+\rho\max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1},\underline{u}^{p-1}\right\}+\tau\\
&\leq f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v})=g(x) \text{ p.p dans } K\cap\Omega_\delta
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
f(x)+\tau &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}+\rho\max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1},\underline{u}^{p-1}\right\}+\tau \\
&\leq f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v})=g(x) \text{ p.p dans } K\cap\Omega\backslash\bar{\Omega}_{\delta},
\end{aligned}
$$

pour tout $t\in[0,1]$ et tout $\varepsilon\in(0,1)$. Par conséquent, étant donné un ensemble compact $k\subset\subset\Omega$, il y a $\tau>0$ tel que

$$f(x)+\tau\leq g(x),\forall x\in K$$

et ainsi, $f\prec g$ et $f,g\in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. Ainsi, par le principe de comparaison forte, (voir annexe proposition 2.5) nous en déduisons que

$$u(x)\gg\underline{u}(x),\forall x\in\Omega.$$

La preuve de la seconde inégalité de (2.36) est réalisée de manière similaire. Ceci complète la preuve de **Prop**.2.2 ■

Proposition 2.3 *sous l'hypothèse* (2.1) *le problème* (P_f) *n'a pas de solution pour* $t=0$.

Preuve Argumenter par contradiction , prenons $(u^*,v^*)\in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})\times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour $\gamma\in(0,1)$ une solution non trivial (positive) de (P_f) avec

$$(u^*,v^*)\in O_R \text{ et } t=0. \tag{2.53}$$

De (2.16) et (2.17)

$$\underline{u}(x)=C^{-1}z_1(x)\geq C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x),x\in\Omega.$$

Dans la suite, nous fixons $u_1=c^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x)$ et prenons $\lambda_\delta=\lambda_{1,p}+\delta$ pour $\delta>0$. Soit $u_2\in C^1_0(\bar{\Omega})$ une solution de :

$$
\begin{cases}
-\Delta_p u_2=\lambda_\delta u_1^{p-1},x\in\Omega,\\
u_2=0,x\in\partial\Omega.
\end{cases}
$$

Alors pour $\delta > 0$ petit et m assez large, on a

$$-\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} \leq m\tilde{u}^{p-1} = -\Delta_p u^*$$

et

$$-\Delta_p u_1 = \lambda_{1,p} u_1^{p-1} \leq \lambda_\delta u_1^{p-1} = -\Delta_p u_2.$$

par la méthode du principe de comparaison :

$$u_1 \leq u_2 \leq u^*, x \in \Omega.$$

Considérons maintenant les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda_\delta u_{n-1}^{p-1}, x \in \Omega, \\ u_n = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On obtient une suite croissante $\{u_n\}$ telle que

$$u_1 \leq u_{n-1} \leq u_n \leq u^*, x \in \Omega.$$

En passant à la limite, nous obtenons une solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_\delta u^{p-1}, x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ce qui est impossible pour $\delta > 0$ assez petit parce que la première valeur propre pour p-laplacien est isolé. Par conséquent, le problème (P_f) n'a pas de solution pour $t = 0$.

Définissons l'homotopie $\mathcal{H}_\varepsilon$ sur $[0,1] \times C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ par

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} T_{p,\varepsilon}^{-1} & 0 \\ 0 & T_{q,\varepsilon}^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{1,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v}) \\ f_{2,\epsilon,t}(x,\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix},$$

l'homotopie $\mathcal{H}_\varepsilon$ est bient définit, d'après le lemme 2.1(voir l'annexe) et parce que les fonctions

$f_{\epsilon,t}$ et $g_{\epsilon,t}$ appartiennent à $C(\bar{\Omega})$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$, En outre que

$$H_\varepsilon : [0,1] \times C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$$

est complètement continu pour tous $\varepsilon \in (0,1)$.

Ceci est dû à la compacité des opérateurs $T^{-1}_{p,\varepsilon}, T^{-1}_{q,\varepsilon} : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, voir Compacité de $T_{p,\varepsilon}$ pour plus de détails. Par conséquent, $(u,v) \in O_R$ est une solution pour (P_r) si, et seulement si,

$$(u,v) \in O_R \text{ et } \mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) = 0.$$

D'après la proposition 2.2 précédente et comme R est un priori strictement lié, il est clair que les solutions de (P_f) doivent se trouver dans O_R. Ainsi, le fait que le problème (P_f) n'ait pas de solution pour $t = 0$ (voir proposition 2.3) implique que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), O_R, 0) = 0, \varepsilon \in (0,1).$$

Par conséquent, à partir de la propriété d'invariance d'homotopie, il s'ensuit que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), O_R, 0) = \deg(\mathcal{H}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), O_R, 0) = 0, \varepsilon \in (0,1). \tag{2.54}$$

■

La deuxième estimation

Nous montrons que le degré d'un opérateur correspondant au système (P_r) est 1 sur l'ensemble $\hat{O}$. À cette fin, nous modifions le problème pour nous assurer que les solutions ne peuvent pas être résolues. se produisent en dehors du rectangle formé par $(\underline{u}, \underline{v})$ et $(\hat{u}, \hat{v})$. Ensemble

$$\tilde{u} = \begin{cases} \hat{u} \text{ si } u \geq \hat{u} \\ u \text{ si } \underline{u} \leq u \leq \hat{u} \\ \underline{u} \text{ si } u \leq \underline{u} \end{cases}, \tilde{v} = \begin{cases} \hat{v} \text{ si } v \geq \hat{v} \\ v \text{ si } \underline{v} \leq v \leq \hat{v} \\ \underline{v} \text{ si } v \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{2.55}$$

on définir le problème de la troncature

$$\begin{cases} T_{p,\varepsilon}(u) = g_{1,\varepsilon,t}(x,u,v), x \in \Omega, \\ T_{p,\varepsilon}(v) = g_{2,\varepsilon,t}(x,u,v), x \in \Omega, \\ u, v > 0, x \in \Omega, \\ u, v = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_g}$$

avec

$$\begin{aligned} g_{1,\varepsilon,t}(x,u,v) &= t(\tilde{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\eta(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, \tilde{u}^{p-1}\right\}, \\ g_{2,\varepsilon,t}(x,u,v) &= t(\tilde{v}+\varepsilon)^{\beta_2}\tilde{u}^{\alpha_2} + (1-t)\eta(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2} + \rho \max\left\{(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}R^{\alpha_2}, \tilde{v}^{q-1}\right\}, \end{aligned}$$

pour

$$\tilde{u} = s_1, \tilde{v} = s_2$$

il devient

$$\begin{aligned} g_{1,\varepsilon,t}(x,u,v) &= t(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1}s_2^{\beta_1} + (1-t)\eta(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, s_1^{p-1}\right\}, \\ g_{2,\varepsilon,t}(x,u,v) &= t(s_2+\varepsilon)^{\beta_2}s_1^{\alpha_2} + (1-t)\eta(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2} + \rho \max\left\{(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}R^{\alpha_2}, s_2^{q-1}\right\}, \end{aligned}$$

avec une constante $\eta > 0$. La constante $\rho > 0$ est choisie suffisamment grand pour que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}s_2^{\beta_1} + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}R^{\beta_1}, (p-1)s_1^{p-2}\right\} \geq 0,$$

et

$$\beta_2(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1}s_1^{\alpha_2} + \rho \max\left\{(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-1}R^{\alpha_2}, (q-1)s_2^{q-2}\right\} \geq 0,$$

uniformément dans $x \in \Omega$, pour $(s_1, s_2) \in [\underline{u}, \hat{u}] \times [\underline{v}, \hat{v}]$ et $\varepsilon \in (0, 1)$.

Nous énonçons le résultat suivant concernant le système de troncature (P_g).

Proposition 2.4 *Sous la condition* (2.1) *chaque solution* (u, v) *de* (P_g) *est en* $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ *pour certains* $\gamma \in (0,1)$,*avec* $\|u\|_{C^{1,\gamma}}, \|v\|_{C^{1,\gamma}} < R$ *et satisfait*

$$\underline{u}(x) \ll u(x) \ll \hat{u}(x) \text{ et } \underline{v}(x) \ll v(x) \ll \hat{v}(x), \forall x \in \Omega. \tag{2.56}$$

Preuve Un argument assez similaire à celui de la preuve de la proposition 2.2 prévoit que toutes les solutions de (P_g) sont en $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ pour certains $\gamma \in (0,1)$.

Prouvons (2.56). Nous ne montrons que la première partie des inégalités dans (2.56) car la seconde partie peut être justifiée de la même manière. Pour cela, nous définissons les fonctions $f, \tilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ donné par

$$f(x) = C^{-(p-1)} h_1(x) + \rho \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, \underline{u}^{p-1}\right\}$$

et

$$\tilde{g}(x) = g_{1,\varepsilon,t}(x, \tilde{u}, \tilde{v}).$$

De la Remarque 2.1, (2.16) et (2.7), pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout $t \in [0,1]$, de même manière de proposition 2.2, Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(t + 1 - t)(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \leq t(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1} (C^{-1} c_1' \phi_{1,q})^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1} (C^{-1} c_1' M)^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\eta(\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1}, \Omega \backslash \bar{\Omega}_\delta
\end{aligned} \tag{2.57}$$

à condition que $\eta > 0$ soit suffisamment grand. Ensuite, suivant l'argument assez similaire qui prouve (2.36) dans la proposition 2.2, on obtient pour chaque ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $\tau = \tau(K) > 0$ telle que

$$f(x) + \tau \leq \tilde{g}(x) \text{ p.p dans } \Omega.$$

Par conséquent, $f \prec \tilde{g}$ et $f, \tilde{g} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Ainsi, par le principe de forte comparaison (voir la proposition 2.5), nous déduisons que

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \forall x \in \Omega.$$

Définissons l'homotopie N_ε sur $[0,1] \times C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ par

$$N_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} T_{p,\varepsilon}^{-1} & 0 \\ 0 & T_{q,\varepsilon}^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{1,\varepsilon,t}(x,u,v) \\ g_{2,\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Clairement, le lemme 2.1 et la proposition 2.6 impliquent que N_ε est une homotopie bien définie et complètement continue pour tous les $\varepsilon \in (0,1)$ et tous $t \in [0,1]$. De plus, $(u,v) \in \hat{O}$ est une solution du système (P_r) si, et seulement si,

$$(u,v) \in \hat{O} \text{ et } N_\varepsilon(1,u,v) = 0, \varepsilon \in (0,1).$$

On tenant compte de la proposition 2.4 et de la définition de la fonction $\hat{u}$ et $\hat{v}$, toutes les solutions de (P_g) sont également des solutions de (P_r). De plus, ces solutions doivent être dans l'ensemble $\hat{O}$. De plus, pour $t = 0$ dans (2.58), le théorème de Minty-Browder avec l'inégalité de Hardy-Sobolev et [25,lemme 3.1] garantissent que les problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \eta(\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1}, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -\Delta_q v = \eta(\phi_{1,q} + \varepsilon)^{\beta_2}, x \in \Omega \\ v = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

admettre des solutions positives uniques $\grave{u}_\varepsilon$ et $\grave{v}_\varepsilon$ dans $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ pour certains $\gamma \in (0,1)$ et pour $\varepsilon \in (0,1)$, respectivement. Ensuite, la propriété d'invariance à l'homotopie du degré donne

$$\begin{aligned} \deg(N_\varepsilon(1,.,.), \hat{O}, 0) &= \deg(N_\varepsilon(0,.,.), \hat{O}, 0) \\ &= \deg(N_\varepsilon(0,.,.), B_R(0), 0) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Puisque

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,.,.) = N_\varepsilon(1,.,.) \text{ dans } \hat{O},$$

il s'ensuit que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,.,.), \hat{O}, 0) = 1, \tag{2.60}$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. ■

La troisième estimation :

Ensuite, nous supposerons que :

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in \partial\hat{O},$$

autrement nous aurons une solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \partial\hat{O}$,ce qui diffère de la solution (u,v) du théorème (2.1), car $(u,v) \in \hat{O}$. Ici, nous avons utilisé que $\hat{O}$ est un ensemble ouvert, puis $(u,v) \notin \partial\hat{O}$.

Par $(2.59), (2.60)$ et (2.54), on déduit de la propriété d'excision du degré de Leray-Schauder que :

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), O_R \backslash \overline{\hat{O}}, 0) = -1$$

et donc le problème (P_r) admet une solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ pour certains $\gamma \in (0,1)$ avec

$$(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in O_R \backslash \overline{\hat{O}}. \tag{2.61}$$

Au vu de la Remarque 2.1, $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon)$ est nécessairement une autre solution de (P_r).

Preuve du théorème (2.2)

Définissez $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec tout entier positif $n \geq 1$. De (2.61) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, nous savons qu'il existe $(\breve{u}_n, \breve{v}_n) = (\breve{u}_{\frac{1}{n}}, \breve{v}_{\frac{1}{n}})$ borné en $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ pour certains $\gamma \in (0,1)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p \breve{u}_n = (\breve{u}_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1} \breve{v}_n^{\beta_1}, x \in \Omega, \\ -\Delta_q \breve{v}_n = \breve{u}_n^{\alpha_2} (\breve{v}_n + \frac{1}{n})^{\beta_2}, x \in \Omega, \\ \breve{u}_n = \breve{v}_n = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.62}$$

satisfaisant

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \in O_R \backslash \overline{\hat{O}} \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.63}$$

En utilisant le théorème d'Arzel'a-Ascoli, on peut passer à la limite dans $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ et les fonctions limites $(\breve{u}, \breve{v}) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ satisfont (P) avec

$$(\breve{u}, \breve{v}) \in O_R \backslash \overline{\hat{O}}. \tag{2.64}$$

Enfin, à cause de (2.64) et de la proposition 2.1, nous obtenons que $(\breve{u}, \breve{v})$ est une deuxième solution du problème (P). ■

2.4 Annexe

2.4.1 Principe de comparaison forte

Proposition 2.5 *Soit* $u_1, u_2 \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *soient les solutions des problèmes*

$$\begin{cases} T_{p,\varepsilon}(u_1) = f(x), x \in \Omega \\ u_1 = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad et \begin{cases} T_{p,\varepsilon}(u_2) = g(x), x \in \Omega \\ u_2 = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$T_{p,\varepsilon}(u) = -\Delta_p u + \rho \max\left\{ (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u|^{p-2} u \right\},$$

pour certains $\varepsilon \in (0,1)$ *et* $f, g \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. *Si* $f \prec g$, *c'est-à-dire pour chaque ensemble compact* $K \subset \Omega$, *il y a* $\tau = \tau(K) > 0$ *tel que*

$$f(x) + \tau \leq g(x), p.p \ dans \ K,$$

alors $u_1 \ll u_2$.

Preuve La preuve est très similaire à celle de la proposition 2.6 dans [7], il suffit de notons que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ l'inégalité suivante est vraie :

$$|\max\{a,b\} - \max\{c,d\}| \leq \max\{|a-c|, |b-d|\}, \tag{2.65}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} &\left|\max\left\{ (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_1|^{p-2} u_1 \right\} - \max\left\{ (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_2|^{p-2} u_2 \right\}\right| \\ &\leq \left| |u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2 \right|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est un point clé dans les arguments trouvés dans[7]. ■

2.4.2 Compacité de $T_{p,\varepsilon}$

Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} T_{p,\varepsilon}(u) = f(x) \ \ x \in \Omega \\ u = 0 \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.66}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $T_{p,\varepsilon} : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est l'opérateur défini comme suit :

$$T_{p,\varepsilon}(u) = -\Delta_p u + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1} R^{\beta_1}, |u|^{p-2} u\right\} \text{ pour tout } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Une solution de (2.66) est comprise dans le sens faible, c'est-à-dire $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla\varphi + \rho \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1} R^{\beta_1}, |u|^{p-2} u\right\} \varphi\right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi dx, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.67}$$

Lemme 2.1 *Le problème* (2.66) *possède une solution unique* u_ε *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. *De plus, si* $f \in L^\infty(\Omega)$ *la solution* u_ε *appartient à* $C^{1,\gamma}(\Omega)$, *pour certains* $\gamma \in (0,1)$, *et satisfait*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\gamma}} \le \bar{R}, \tag{2.68}$$

où $\bar{R}$ *est une constante positive, qui dépend de* $\|f\|_\infty$.

Preuve Pour prouver le lemme, nous appliquons le théorème Minty-Browder. Pour ce faire, nous prouvons que l'opérateur $T_{p,\varepsilon}$ est continu, monotone strict et coercitif pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Montrons que $T_{p,\varepsilon}$ est un opérateur continu. Pour $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned} &\|T_{p,\varepsilon}(u_n) - T_{p,\varepsilon}(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \|\varphi\|_{1,p} \le 1} |\langle T_{p,\varepsilon}(u_n) - T_{p,\varepsilon}(u), \varphi\rangle| \\ &\le \int_\Omega \left|\left(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \nabla\varphi\right| dx \\ &+\rho \int_\Omega \left|\max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1} R^{\beta_1}, |u_n|^{p-2} u_n\right\} - \max\left\{(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1} R^{\beta_1}, |u|^{p-2} u\right\}\right| |\varphi| \, dx. \end{aligned}$$

Ensuite, si $p \geq 2$, en utilisant [23,Lemme 5.3] avec l'inégalité de Hölder et (2.65), nous dérivons

$$\begin{aligned}
&\|T_{p,\varepsilon}(u_n) - T_{p,\varepsilon}(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq c_p \left\||\nabla u| + |\nabla u|\right\|_p^{p'(p-2)} \|u_n - u\|_{1,p}^{p'} \\
&+\rho \sup_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \|\varphi\|_{1,p} \leq 1} \int_\Omega \left|\max\left\{0, |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u\right\}\right| |\varphi| \, dx \\
&\leq C \left(\|u_n\|_{1,p} + \|u\|_{1,p}\right)^{p'(p-2)} \|u_n - u\|_{1,p}^{p'} + \rho \left\||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u\right\|_{p'},
\end{aligned} \tag{2.69}$$

avec une constante $C > 0$. Si $1 < p < 2$ [23,Lemme 5.4] et l'inégalité de Hölder implique que

$$\|T_{p,\varepsilon}(u_n) - T_{p,\varepsilon}(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq c_p \|u_n - u\|_{1,p} + \rho \left\||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u\right\|_{p'}. \tag{2.70}$$

En conséquence, l'opérateur $T_{p,\varepsilon}$ est continu pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Maintenant, nous affirmons que $T_{p,\varepsilon}$ est strictement monotone et coercitif. En effet, supposons que $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous notons que l'intégrale

$$\int_\Omega \left(\max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_1|^{p-2} u_1\right\} - \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_2|^{p-2} u_2\right\}\right)(u_1 - u_2) \, dx \tag{2.71}$$

est positif parce que

$$\left(\max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_1|^{p-2} u_1\right\} - \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_2|^{p-2} u_2\right\}\right)(u_1 - u_2) \geq 0, x \in \Omega. \tag{2.72}$$

Alors pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ on a

$$\begin{aligned}
&\langle T_{p,\varepsilon}(u_1) - T_{p,\varepsilon}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = \int_\Omega \left\langle \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2\right), \nabla(u_1 - u_2) \right\rangle dx \\
&+\rho \int_\Omega \left(\max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_1|^{p-2} u_1\right\} - \max\left\{(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_2|^{p-2} u_2\right\}\right)(u_1 - u_2) \, dx \\
&\geq \int_\Omega \left\langle \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2\right), \nabla(u_1 - u_2) \right\rangle dx,
\end{aligned}$$

et la réclamation découle de la monotonie absolue de $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. La coercivité de l'opérateur $T_{1,\varepsilon}$, peut être facilement prouvée en utilisant la coercivité de $-\Delta_p$. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Minty-Browder qui garantit l'existence d'une solution unique pour le problème (2.66) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ensuite, nous montrons que les solutions u_ε de (2.66) sont dans $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, pour certains $\gamma \in (0, 1)$ pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. La preuve est basée sur la technique des itérations de Moser associée à la théorie de la régularité non linéaire (voir [32]). Pour $M > 0$, définissez sur Ω la fonction $u_{\varepsilon,M}(x) = \min(u_\varepsilon(x), M)$. Nous agissons sur(2.67) avec $\varphi = u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1}$ où

$$k_1 p + 1 = p^* \tag{2.73}$$

qui donne

$$\int_\Omega \left((k_1 p+1) \left|\nabla u_{\varepsilon,M}\right|^p u_{\varepsilon,M}^{k_1 p} + \rho \max\left\{ (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \right\} u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1} \right) dx = \int_\Omega f(x) u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1} dx. \tag{2.74}$$

D'après le théorème d'inclusion de Sobolev, le côté gauche de (2.74) est estimé de dessous comme suit

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left((k_1 p+1) \left|\nabla u_{\varepsilon,M}\right|^p u_{\varepsilon,M}^{k_1 p} + \rho \max\left\{ (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \right\} u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1} \right) dx \\ \geq & \int_\Omega \left((k_1 p+1) \left|\nabla u_{\varepsilon,M}\right|^p u_{\varepsilon,M}^{k_1 p} + \rho |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1} \right) dx \\ \geq & \int_\Omega \left((k_1 p+1) \left|\nabla u_{\varepsilon,M}\right|^p u_{\varepsilon,M}^{k_1 p} + \rho u_{\varepsilon,M}^{(k_1+1)p} \right) dx \\ = & \frac{k_1 p+1}{(k_1+1)^p} \int_\Omega \left|\nabla u_{\varepsilon,M}^{k_1+1}\right|^p + \rho \left\|u_{\varepsilon,M}\right\|_{p^*}^{p^*} \geq C_1 \frac{k_1 p+1}{(k_1+1)^p} \left\|u_{\varepsilon,M}\right\|_{(k_1+1)p^*}^{p^*}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

où C_1 est une constante positive. À partir de (2.73), le côté droit de (2.74) est estimé d'en haut par

$$\int_\Omega f(x) u_{\varepsilon,M}^{k_1 p+1} dx \leq \|f\|_\infty \int_\Omega u_\varepsilon^{k_1 p+1} dx \leq \|f\|_\infty \|u_\varepsilon\|_{p^*}^{k_1 p+1}. \tag{2.76}$$

En suivant les mêmes arguments que dans [36], nous obtenons que $u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ pour tout

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Ensuite, de la théorie de la régularité non linéaire [32], nous déduisons que $u_\varepsilon \in C^{1,\gamma}(\Omega)$, pour certains $\gamma \in (0,1)$ et $\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\gamma}} < \bar{R}$ pour une grande constante $\bar{R} > 0$ et pour tous les $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ∎

Le lemme 2.1 assure que l'opérateur inverse

$$T_{p,\varepsilon}^{-1} : C(\bar{\Omega}) \to C^1(\bar{\Omega})$$

est bien défini pour tous les $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. La proposition suivante donne quelques propriétés concernant $T_{p,\varepsilon}^{-1}$.

Proposition 2.6 *L'opérateur $T_{p,\varepsilon}^{-1}$ est continu et compact pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Preuve Tout d'abord, montrons que $T_{p,\varepsilon}^{-1}$ est un opérateur continu. Nous allons donc définir $f_n \to f$ en $C(\bar{\Omega})$. Notant $u_n = T_{p,\varepsilon}^{-1}(f_n)$ se lit comme

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi + \rho \max \left\{ (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1 - 1} R^{\beta_1}, |u_n|^{p-2} u_n \right\} \varphi \right) dx = \int_\Omega f_n(x) \varphi dx, \tag{2.77}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque par (2.68) la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, ainsi que une sous-suite noté au sens tient

$$u_n \to u, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.78}$$

Nous mettons $\varphi = u_n - u$ dans (2.77) Le théorème de convergence dominé de Lebesgue assure

$$\lim_{n \to \infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle = 0.$$

La propriété S_+ de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec (2.78) implique $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, la délimitation de la suite $\{u_n\}$ dans $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ et puisque l'injection de $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset C^1(\bar{\Omega})$ est compacte, il s'avère que le long d'une sous-suite noté au sens, on a le fait que $u_n \to u$ en $C^1(\bar{\Omega})$ Finalement, (2.77) donne $u = T_{p,\varepsilon}^{-1}(f)$, prouvant que $T_{p,\varepsilon}^{-1}$ est un opérateur continu. Ensuite, nous montrons que $T_{p,\varepsilon}^{-1}(C(\bar{\Omega}))$ est un sous-ensemble relativement compact de $C^1(\bar{\Omega})$.

On a $u_n = T_{p,\varepsilon}^{-1}(f_n)$ avec $f_n \in C(\bar{\Omega})$ pour tout n. Suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve $u \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que, le long d'une sous-suite noté au sens $u_n \to u$ dans $C^1(\bar{\Omega})$, ainsi, la compacité relative de $T_{p,\varepsilon}^{-1}$ est prouvée.

$\blacksquare$

Conclusion

L'objectif de ce travail est de traité un problème quasi-linéaire avec singularités, et l'établissement de l'existence de deux solutions positives.

La méthode des sous et sur solution est un outil permettant de montrer l'existence de la première solution faible de problème grâce à la fonction propre associée à l'opérateur $p-$Laplacien, et d'autres solution connues des problèmes elliptiques intervenant le p-Laplace, cette solution est située dans un ensemble bien approprié, incluse dans un rectangle $[\underline{u}, \underline{v}] \times [\overline{u}, \overline{v}]$ qui appartient à $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}), \gamma \in (0,1)$.

La deuxième solution est trouvée par passage de limite $\varepsilon \to 0$ dans un autre problème de perturbation (P_r) dont l'existence de sa solution est prouvé par le degré topologie de Leray-Schauder. qui va ce situer dans un autre ensemble.

Bibliographie

[1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] R. P. Agarwal & D. O'Regan, Existence theory for single and multiple solutions to singular positive boundary value problems, J. Diff. Equat. 175(2001),393-414.

[3] J. Ali, R. Shivaji, Existence results for classes of Laplacian systems with sign-changing weight, Applied Mathematics Letters, 20(2007),558-562.

[4] C. O. Alves & A. Moussaoui, Existence of solutions for a class of singular elliptic systems with convection term, Asymptotic Analysis 90(2014),237-248.

[5] C. O. Alves & F. J. S. A. Corrêa, On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators, Appl. Math. Comput. 185(2007),727-736.

[6] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa & J.V.A. Gonçalves, Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems, Adv. Nonlinear Stud. 5(2005),265-278.

[7] D. Arcoya & D. Ruiz, The Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplace operator, Comm. Partial Diff. Eqts. 31(2006),849-865.

[8] H. Brézis. Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[9] S. Carl, V. K. Le & D. Motreanu, Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparaison principles and applications, Springer, New York, 2007.

[10] Claudianor O. Alves & Abdelkrim Moussaoui, Positive solutions for a class of quasilinear singular elliptic systems, Article :June 2016.

[11] P. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri & F. De Thelin, Existence of Positive Solutions for a Nonvariational Quasilinear Elliptic System, J. Diff. Eqts. 166(2000),455-477.

[12] M. M. Coclite & G. Palmieri, On a singular nonlinear Dirichlet problem, Comm. Partial Diff. Equat. 14(1989),1315-1327

[13] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz & L. Tartar, On a Dirichlet problem with singular nonlinearity, Comm. Partial Diff. Equat. 2(1977),193-222.

[14] M. del Pino, A priori estimates applications to existence-nonexistence for a semilinear elliptic system, Ind. University Math. J. 43(1994),77-129.

[15] I. Diaz, J. M. Morel & L. Oswald, An elliptic equation with singular nonlinearity, Comm. Partial Diff. Equat. 12(1987),1333-1344.

[16] W. Fulks & J. S. Maybee, A singular non-linear equation, Osaka Math. J. 12(1960),1-19.

[17] M. Ghergu & V. Radulescu, On a class of Gierer-Meinhardt systems arising in morphogenesis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 344(2007),163-168.

[18] M. Ghergu, Lane-Emden systems with negative exponents, J. Funct. Anal. 258(2010),3295-3318.

[19] J. Giacomoni, I. Schindler & P. Takac, Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation, A. Sc. N. Sup. Pisa (5)6(2007),117-158.

[20] J. Giacomoni, J. Hernandez & A. Moussaoui, Quasilinear and singular systems : the cooperative case, Contemporary Math. 540(2011), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 79-94.

[21] J. Giacomoni, J. Hernandez & P. Sauvy, Quasilinear and singular elliptic systems, Advances Nonl. Anal. 2(2013),1-41.

[22] A. Gierer & H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik 12(1972),30-39.

[23] R. Glowinski & A. Marroco, Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problémes de Dirichlet non linéaires, Univ. Paris VI et CNRS, 189, nr. 74023.

[24] S. Haghaieghi, G.A. Afrouzi, Sub-super solutions for (p-q) Laplaciansystems, Boundary Value Problems (2011),52.

[25] D. D. Hai, On a class of singular p-Laplacian boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 383(2011),619-626.

[26] Haslhofer, Moser Iteration & ε-regularity.

[27] J. Hernandez, F. J. Mancebo & J. M. Vega, Positive solutions for singular semilinear elliptic systems, Adv. Diff. Eqts. 13(2008),857-880.

[28] Hervé Queffélec & Claude Zuily, Elements D'analyse "Agrégation de mathématiques 2 éme édition.

[29] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problémes Elliptiques, Springer, Paris-Berlin-Heidelberg, 1993.

[30] B. Khodja & A. Moussaoui, Positive solutions for infinite semipositone/positone quasilinear elliptic systems with singular and superlinear terms, Submitted.

[31] A. C. Lazer & P. J. Mckenna, On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem, Proc. American Math. Soc. 3(111),1991.

[32] G. M. Lieberman, Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Anal. 12(1988),1203-1219.

[33] C. D. Luning & W. L. Perry, Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler boundary value problem, SIAM J. Math. Anal. 12(1981),874-879.

[34] D. Motreanu & A. Moussaoui, A quasilinear singular elliptic system without cooperative structure, Act. Math. Sci. 34 B (3)(2014),905-916.

[35] D. Motreanu & A. Moussaoui, An existence result for a class of quasilinear singular competitive elliptic systems, Applied Math. Letters 38(2014),33-37.

[36] D. Motreanu & A. Moussaoui, Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system, Complex Var. Elliptic Eqts. 59(2014),285-296.

[37] A. Moussaoui, B. Khodja & S. Tas, A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations in RN, Nonlinear Anal. 71(2009),708-716.

[38] C. V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York (1992).

[39] C. A. Stuart, Existence and approximations of solutions of nonlinear elliptic equations, Math. Z. 147(1976),53-63.

[40] S. Taliaferro, A nonlinear singular boundary value problem, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. (1979)897-904.

[41] J. L. Vazquez, A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. Appl. Math. Optim. 12(1984),191-202.

[42] Zeidler, NonlinearFunction Analysis and its applications H B, Springer-Verlag, New York, 1990.

[43] Z. Zhang & J. Yu, On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term, SIAM J. Math. Anal. 32(2000),916-927.

[44] Z. Zhang, On a Dirichlet with a singular nonlinearity, J. Math. Anal. Appl. 194(1995),103-113.