République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière :Mathématiques
Option : EDP et Appliquées

Thème

Etude de quelques problèmes d'évolution fractionnaires

Présenté Par :
ZERGUI Sana
BOUSLAMA Ilham.

Devant le jury :

Mr BOUMAAZA Nouri	MCA	Univérsité Larbi Tébessa	Président
Mr NABTI Abderrazak	MCB	Univérsité Larbi Tébessa	Examinateur
Mr REBIAI Belgacem	Professeur	Univérsité Larbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut…

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,

L'amour, le respect, la reconnaissance…

Aussi, c'est tout simplement que

Je dédie ce

Memoire …

À MES CHERS PARENTS

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour moninstruction et mon bien être, ma mère.

A ce qui travaille beaucoup pour moi, , a ce qui mes donne son nom avec toute firté mon père le miséricorde de Dieu.

Je dit pour toi remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

A MES CHERS ET ADORABLE FRERES ET SŒURS

Hicham Issam Hanan Siham Walid et à leurs pousse surtout mon petit enfant Douha

À MES AMIS DE TOUJOURS

Chahra Aicha Amel Rayen Ilham Soumia Fatma Salima Mounira Nour Mouna Sabrina Khawla UNE SPECIALE DEDICACE A ma cherie Nada

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.

Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

À celui qui a paticipé à ce travail, mon cher amie Lahouma.

Zergui Sana

À MES CHERS PARENTS

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.
Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.
Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

A MES CHERS ET ADORABLES SŒURS

Ikram Nada Houda Khadidja et mon petit frère que j'adore Nouna

À MES AMIS DE TOUJOURS

Chayma Habala Moufida Sasoki Marwa Fatma Kholoud Mounira Nawel Awatif wissem Donia Randa Loulou Soumia Amira Nassima Loubna Najwa,
UNE SPECIALE DEDICACE A ma cherie Hasna

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.

Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincere.

À celui qui a paticipé à ce travail, mon cher amie Sana.

Bouslama Ilham

Remerciements

Au terme de ce travail je remercie le bon dieu le tout miséricordieux pour la faveur de l'islam, de m'avoir donné la santé, la volonté, la force sans lesquels ce travail n'aurait pas été réalisé et pour tout ce qu'il m'a offert dans cette vie.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, Monsieur B.Rebiai, qui m'a permis d'enrichir considérablement mes connaissances mathématiques. Merci pour votre générosité, professeur!

J'adresse de remerciements particuliers à Monsieur N.Boumaaza pour ses conseils précieux.

C'est un plaisir et honneur pour moi de le remercier chaleureusement d'avoir accepté la présidence du jury.

Je suis très sensible à l'honneur que fait Monsieur le docteur A.Nabti en acceptant de faire partie de jury.

Je le prie de trouver ici l'expression de ma plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

C'est un honneur pour moi de les remercier infiniment d'avoir accepté de faire partie de jury.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants de l'Université de Tébessa, de Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie et de Département des Mathématiques et Informatiques et en particulier le professeur E.Zeraoulia.

Nous remercions également tout ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire

A tous ma famille.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.

A tous mes amis..

الملخص

.

في هذه المذكرة، اهتممنا بدراسة مشاكل الوجود المحلي والكلي والانفجار في زمن منته لحلول بعض المعادلات ذات المشتقات الجزئية الكسرية. لقد بدأنا ببعض التراميز والمفاهيم الأساسية. ثم درسنا معادلتين كسريتين غير خطيتين؛ المعادلة الأولى مع لابلاسيان كسري بالنسبة للفضاء والمعادلة الثانية مع مشتقات كسرية بالنسبة للزمن والمكان.

الكلمات المفتاحية

المشتقات والتكاملات الكسرية، المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية، الوجود المحلي، انفجار الحلول، الوجود الكلي.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of problems of local and global existence and the blow-up in finite time of solutions for some fractional partial differential equations. We started with some basic notions and notations. Then we studied two nonlinear fractional equations; the first equation with a fractional Laplacian in space and the second equation with fractional derivatives in time and space.

Key words

Fractional derivatives and integrals, fractional partial differential equations, locale existence, blow-up of solutions, global existence.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des problèmes d'existence locale et globale et explosion en temps fini des solutions pour certains équations aux derivées partielles fractionnaires. Nous avons commencé par quelques notations et notions de base. Ensuite, nous avons étudié deux équations fractionnaires non linéaires; la première équation avec un Laplacien fractionnaire en espace et la deuxième équation avec des dérivées fractionnaires en temps et en espace

Mots clés

Dérivées et intégrales fractionnaires, équations aux dérivées partielles fractionnaires, existence locale, explosion des solutions, existence globale.

Table des matières

Introduction

Les phénomènes de la diffusion anormale ont été observés durant ces dernières années, dans de nombreux domaines, tels que ceux de la turbulence, de l'infiltration dans les milieux poreux et du contrôle des pollutions, bien que la demande de modélisations mathèmatiques appropriés soit élevée dans la biomécanique à la géophysique à l'acoustique, la modélisation de la diffusion anormale par des équations différentielles était longtemps une question de la physique mathématique embarrassantes.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de certains problèmes d'équations différentielles fractionnaires en temps et/ou en espace. Les solutions de ces équations peuvent explose en temps fini. Dans ce cas le temps maximal d'existence est relié à une alternative d'éxplosion. Cependant, pour donner un sens à la notion d'explosion en temps fini, il faut bien préciser l'espace dans laquel on travaille et avec quelle norme on mesure la solution.
Ce mémoire est divisé en trois chapitres, dans le premier chapitre, on introduit quelques notations et notions de base, la notion de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire selon quelques approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) et quelques applications des dérivées fractionnaires.
Dans le deuxième chapitre, nous étudions une équation d'évolution avec un Laplacien fractionnaire et un terme non-linéaire non-local en temps. On montre que la solution est globale dans le cas sur-critique pour toute donnée initiale ayant une mesure assez petite, tandis que dans le cas sous-critique, on montre que la solution explose en temps fini $T_{\max} > 0$ pour toute condition initiale positive et non-triviale. Dans ce dernier cas, on cherche le comportement de la norme L^{∞} de la solution en précisant le taux d'explosion lorsque t s'approche du temps d'explosion $T_{\max}$.
Nous cherchons aussi les conditions nécessaires pour l'existence locale et globale de la solution.
Dans le troisiéme chapitre on généralise le resultat du deuxiéme chapitre à une équation différentielle fractionnaire en temps et en espace.
Enfin, ce travail se termine par une conclusion résumant les principaux résultats étudiés.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et notions de base

1.1.1 Espaces fonctionnels

On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace de fonctions u mesurables sur Ω telles que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions u mesurable sur Ω et vérifient

$$|u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega,$$

où C est une constante positive. $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, |u(x)| = inf \left\{C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\right\}.$$

On définit les espaces $L^p([0,T],X)$, $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty([0,T],X)$ comme suit

$$L^p([0,T],X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ mesurable, } \int_0^T \|u\|^p_X < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p([0,T],X)} = \int_0^T \|u\|^p_X \, .$$

$$L^{\infty}([0,T],X)=\left\{u:[0,T]\to X \text{ mesurable}, \sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X^p<\infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p([0,T],X)}=\sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X^p$$

$C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini .

$H^1(\Omega)$ est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2\left(\Omega\right),1\leq i\leq n\right\},$$

D'une façon générale pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $1\leq p\leq\infty$, les espaces de **Sobolev** $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}\left(\Omega\right)$ sont définis comme suit

$$H^m\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right):D^\alpha u\in L^2\left(\Omega\right) \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha|\leq m\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega\left|D^\alpha u\right|^2dx=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$W^{m,p}\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^p\left(\Omega\right):D^\alpha u\in L^p\left(\Omega\right),|\alpha|\leq m\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{m,p}=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

où $D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}+\partial x_2^{\alpha_2}+...+\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.

$L^\infty_{loc}\left(\Omega\right)$ est l'espace des fonctions localement intégrable défini par

$$L^\infty_{loc}\left(\Omega\right)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R} \text{ mesurable}, \int_K|u|^p\,dx<\infty \text{ pour tout compact de } \Omega\right\}.$$

1.1.2 Inégalités utiles

•**Inégalité de Hölder** Soient $1 < p,\, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et u une fonction de $L^p(\Omega)$ et v une fonction de $L^q(\Omega)$. Alors l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

•**Inégalité de Young**

Soient a, b deux nombres réels et p, q deux nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a l'inégalité de Young suivante

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

•**Inégalité de $\varepsilon-$Young**

Soient $X \geq 0$, $Y \geq 0$ et p, q deux nombres réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité de $\varepsilon-$Young s'écrit comme suit

$$XY \leq \varepsilon X^P + C(\varepsilon) Y^q.$$

•**Inégalité de Ju**

Soient $N \geq 1$, $\delta \in [0.2]$ et $q \geq 1$, pour toute fonction non négative de Schwartz Ψ, on a

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \psi^q \leq q\psi^{q-1} (-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \psi.$$

où $\triangle$ est le **Laplacien**.

1.1.3 Notion d'existence locale et globale

L'étude d'existence locale et d'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaires abstraites (voir A.Friedman, D. Henry, A. Pazy). Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, et $f : X \to X$,

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f, \ t > 0, \\ \qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction u de la variable $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (1.1), s'il existe un intervalle maximal $[0, T)$, sur le quel u est définie, et elle est l'unique solution de (1.1) dans $C^1([0, T), X)$.*

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu
i) $T = +\infty$
ii) $T < +\infty$ et $\lim_{t \to T} \|u\| = +\infty$
On dit que la solution est globale si i)est satisfaite, et que la solution explose en temps fini si on a ii).

1.2 Dérivation et intégration fractionnaire

Avant de donner la définition de la dérivation et l'intégration fractionnaires, on introduit les définitions de quelques fonctions utiles pour la suite.
Fonction Gamma
La fonction Gamma prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (sauf en certains points), elle est définie comme suit

Définition 1.2 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{\alpha-1} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.
On trouve, en intégrant par parties, que

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), Re(\alpha) > 0.$$

Et en particulier

$$\Gamma(n+1) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fonction Bêta
La fonction bêta est définie par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau, Re(p) > 0, Re(q) > 0.$$

Remarque 1.1 *Le lien entre la fonction Gamma et la fonction bêta est*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, Re(p) > 0, Re(q) > 0.$$

On note que l'idée de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation
et l'intégration itérées.

1.2.1 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

et

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)\,du = \int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt.$$

Le n^{ieme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{n-1} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)\,dt,$$

pour tout entier n :
Cette formule est appelée formule de **Cauchy**.
Riemann a généralisé cette formule pour n non entier, et l'intégration fractionnaire est définie par

Définition 1.3 *Soit $f \in [a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale*

$$I_{a^+}^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\,dt,$$

telle que $a \in]-\infty, +\infty[$
est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de **Riemann-Liouville** d'ordre α, et l'intégrale

$$I_{b^-}^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\,dt,$$

telle que $b \in]-\infty, +\infty[$
est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre α.

1.2.2 Dérivation fractionnaire

On va citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.
Approche de **Grünwald-Letnikov**
L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule suivante

$$D^p f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{p}{k} f(t-kh),$$

avec $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)....(p-k+1)}{k}$
La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 \leq p < n$) est

$${}^G D^p f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh),$$

et

$${}^G D^{-p} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh).$$

Puisque on a

$$(-1)^k \tbinom{p}{k} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)}.$$

Et si f est de classe C^m, alors utilisant l'intégration par parties, on obtient

$${}^G D^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^n(\tau)\, d\tau,$$

et aussi

$${}^G D^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^n(\tau)\, d\tau.$$

Exemple 1.1 ***1)-Dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov***

La dérivée fractionnaire au sens de **Grünwald-Letnikov** d'une fonction constante n'est pas nulle en générale
Si $f(t) = c$ et p est un nombre non entier positif on a

$$f^{(k)} = 0, k = 1, 2, ..., n,$$

$$\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{c}{\Gamma(n-p)}(t-a)^{-p}.
\end{aligned}$$

2)- La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$

Soit p est un nombre non entier tel que $0 \leq n-1 < p < n$, avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}.$$

Donc on obtient

$${}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{-p}\, d\tau.$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on trouve

$$\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\, d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(\alpha-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

À titre d'exemple, on a

$${}^{G}D^{\frac{1}{2}}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.$$

Approche de **Riemann-Liouville**

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p, avec $n-1 \leq p < n$, au sens de **Riemann-Liouville** est définie par

$$^{RL}D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-p} f(t) \right).$$

Remarque 1.2 *Si f est de classe $\mathcal{C}^m$, alors après des intégrations par parties et des dérivées répétées, on obtient*

$$^{RL}D^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau =^G D^p f(t).$$

On voit dans ce cas que l'approche de **Riemann-Liouville** et l'approche de **Grünwald-Letnikov** sont équivalentes.

Exemple 1.2 ***1)-Dérivée d'une fonction constante***

La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la fonction constante, en générale, n'est pas nulle ni constante, et on a

$$^{RL}D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

2) -La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$

Soit p un nombre non entier, $0 \leq n-1 \leq p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a

$$^{RL}D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha\, d\tau.$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} ^{RL}D^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\, \beta(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\, \Gamma(n-p)\, \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\, \Gamma(n+\alpha-p+1)\, \Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

À titre d'exemple

$$^{RL}D^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Propriétés

1)- Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, c-à-d

$$^{RL}D^{p}\left(I^{p}f\left(t\right)\right)=f\left(t\right).$$

Mais en générale, on a

$$^{RL}D^{p}\left(I^{q}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{p-q}f\left(t\right),$$

Si $p-q<0, {}^{RL}D^{p-q}f(t)=I^{q-p}f(t)$.

Généralement les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne commutent pas

$$^{RL}D^{-p}\left(^{RL}D^{q}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{q-p}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left(^{RL}D^{q-k}f(t)\right)_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma\left(p-k+1\right)},$$

avec $m-1\leq q<m$.

2)- composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si $f^{(k)}\left(a\right)=0, k=0,1,2,....n,$ on a dans ce cas

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(^{RL}D^{p}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{n+p}f\left(t\right),$$

et

$$^{RL}D^{p}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{n+p}f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma\left(k-p-n+1\right)}.$$

3) Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1\leq p<n$ et $m-1\leq q<m$, alors

$$^{RL}D^{p}\left(^{RL}D^{q}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{p+q}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{q-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma\left(p-k+1\right)},$$

et

$$^{RL}D^{q}\left(^{RL}D^{p}f\left(t\right)\right)=^{RL}D^{q+p}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{p-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma\left(q-k+1\right)}.$$

Donc pour que les opérateurs de dérivations fractionnaires $^{RL}D^{q}$ et $^{RL}D^{p}$ $(p\neq q)$, commutent , il faut que $\left[D^{q-k}f(t)\right]_{t=a}=0$, et $\left[D^{p-k}f(t)\right]_{t=a}=0$. pour tout $k=$ 0,1,2...,m.

Approche de Caputo

L'avantage principal de l'approche de **Caputo** est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de **Caputo** acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c-à-d, contient les valeurs limites des dérivées d'ordres entiers des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

Définition 1.4 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a,b]$.*

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de **Caputo** est définie par

$$^{C}D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau = I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right).$$

Propriétés

1)-Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que $^{C}D^p f(t)$ et $^{RL}D^p f(t)$ existent, alors

$$^{C}D^p f(t) =^{RL} D^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)},$$

et on remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura

$$^{C}D^p f(t) =^{RL} D^p f(t).$$

2)-Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue, on a

$$^{C}D^p I_a^p f(t) = f(t) \text{ et } I_a^{p C}D^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{k}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de **Caputo** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire
mais n'est pas un inverse à droite.

Exemple 1.3 ***1)-Dérivée d'une fonction constante***

La dérivée d'une fonction constante au sens de **Caputo** est nulle

$$^{C}D^p C = 0.$$

2)-Dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo

Soit p un entier avec $0 \le n-1 < p < n$; et $\alpha > n-1$, alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$${}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau.$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{a}^{t}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Quelques propriétés générale des dérivées fractionnaires

1)-Linéarité : La dérivée fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t)$$

2)- Régle de Leibniz : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule de **Leibniz** est

$$D^{\alpha}(f(t)\times g(t)) = \sum_{k=o}^{n}\binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t)$$

où n est un entier et D^{α} est la dérivée de **Grünwild-letnikov** et de **Riemann-Liouville**.

1.3 Applications des dérivées fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science.

Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

1.3.1 Exemple simple

Interprétation physique de l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville**
Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ. Cependant, le temps τ affiché par l'horloge est incorrect. Nous supposons que la relation entre le temps incorrect (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact T est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha} \right]. \tag{1}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.
Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A(t) = \int_0^t V(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture

$$S_0(t) = \int_0^t V(\tau)\, dg_t(\tau) = I^{\alpha} V(t), \tag{3}$$

avec

$$I^{\alpha} V(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} V(\tau)\, d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (2) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :
Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** donnée par l'équation (3) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur locale du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.
La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet mobile.
Donc, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la vitesse individuelle $V(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue
$T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation (1) représente la véritable distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet.

Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_0(t)$.
La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle $V(t)$: $V(\tau) = D^{\alpha}S_0(t)$ avec

$$D^{\alpha}S_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{S_0(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $V_0(t) = S_0'(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $V(t)$:

$$V_0(t) = \frac{d}{dt}I^{\alpha}V(t) = D^{1-\alpha}V(t).$$

Par conséquent, la dérivée au sens de **Riemann-Liouville** d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_0(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)}\left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right],$$

pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :

$$V_0(t) = V(t).$$

Chapitre 2

Etude d'une équation différentielle non linéaire avec une dérivée fractionnaire en espace

2.1 Introduction

Dans ce chapitre (voir [19]), on s'intérèsse à l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} \left| u^{p-1} \right| u(s) ds, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $N \geq 1, 0 < \beta \leq 2, 0 < \gamma < 1, p > 1$ et $D\left((-\triangle)^{\beta/2}\right) = H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)$, avec

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in S'; (-\Delta)^{\beta/2} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\} \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\beta/2} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\} \qquad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace des distributions de Schwartz et $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ l'espace de Sobolev homogène d'ordre β. Γ est la fonction gamma d'Euler et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ où $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendants vers zero lorsque x tend vers l'infini.
L'apparition de la constante $\Gamma(1-\gamma)$ est là juste par commodité. Elle nous permet d'écrire le problème (2.1.1) sous la forme :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J^{\alpha}_{0/t}\left(\left|u^{p-1}\right| u\right) \ , & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ , & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $\alpha = 1 - \gamma \in (0,1)$ et,

$$J^{\alpha}_{0/t} f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

pour tout $t \in [0,T]\,, T > 0$ et tout $f \in L^q\,(0,T)\,(1 \leq q \leq +\infty)\,.$
est l'intégrale fractionnaire à gauche de **Riemann-Liouville** d'ordre α (voir 25).
Comme une motivation physique, le problème (2.1.1) est un intéressant modèle physique dans lequel un milieu superdiffusive est couplé à un milieu classique de diffusion. Le terme non-linéaire de (2.1.1) pourrait être interprétée comme l'effet d'un milieu qui est classiquement diffusif non linéaire liée à un milieu superdiffusive. Un tel lien pourrait prendre la forme d'un milieu poreux matériaux ayant des propriétés réactives qui patiellement isolé par contact avec un milieu classique diffusif. Pour plus d'information, voir le papier récent de Roberts et Olmstead [37].
Rappelons maintenant un résultat d'existance locale et d'unicité pour l'équation (2.1.1).
Si $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ $\left(\text{respectivement } u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N) \text{ avec } r \in [1,+\infty]\right)$ alors il existe une unique solution maximale u de (2.1.1) définie sur un intervalle de temps maximal $[0, T_{\max})\,, 0 \leq T_{\max} \leq +\infty$. De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées :
$-u \in C\left([0,T)\,, C_0(\mathbb{R}^N)\right)$ $\left(\text{respectivement } u \in C\left([0,T)\,, C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)\right) \text{ pour tout } 0 < T < T_{\max}\right).$
$-u$ est une solution douce de (2.1.1) (pour la notion de solution douce voir ci-dessous).
$-$Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$ alors $u\,(t) > 0$ pour tout $0 < T < T_{\max}$.
$-$L'alternative d'explosion suivante est vérifiée :
ou bien $T_{\max} = +\infty$,
ou bien $T_{\max} < +\infty$ et $\lim_{t \to T_{\max}} \|u\,(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty$
Lorsque $T_{\max} < +\infty$ on dit que u explose en temps fini ; lorsque $T_{\max} = +\infty$, on dit que u est globale.
Maintenant, il est simple de vérifier que si $u\,(x,t)$ est une solution de (2.1.1), alors pour tout $\lambda > 0, \lambda^{\beta(2-\gamma)/(p-1)} u\left(\lambda x, \lambda^\beta t\right)$ est encore une solution de donnée initiale $\lambda^{\beta(2-\gamma)/(p-1)} u_0\,(\lambda x)\,.$ Comme

$$\left\| \lambda^{\beta(2-\gamma)/(p-1)} u_0\,(\lambda.) \right\|_{L^q} = \lambda^{\beta(2-\gamma)/(p-1)-N/q} \left\| u_0\,(.) \right\|_{L^q} \text{ pou tout } q \in [1,\infty]\,, \tag{2.1.2}$$

alors l'exposant qui garde la norme de Lebesgue dans (2.1.2) invariante est :

$$q_{sc} = \frac{N\,(p-1)}{\beta\,(2-\gamma)}.$$

Donc, on peut imaginer, comme dans le résultat de Weissler dans [44] , que si $q_{sc} > 1$, i.e $p > q_{sc}$ où l'exposant d'échelle (scaling exponent) q_{sc} est donné par :

$$q_{sc} = 1 + \frac{\beta\,(2-\gamma)}{N},$$

et si $\|u_0\|_{L^{q_{sc}}}$ est suffisamment petite, alors la solution est globale. Cazenave, Dickstein et Weissler [8] ont montré que ce phénomène ne marche pas, i.e. que l'exposant critique n'est pas celui prévu par Fujita, pour l'equation suivante :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma}\,|u|^{p-1}\,u\,(s)\,ds & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1.3}$$

qui est un cas particulier de l'Eq. (2.1.1).

2.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le **Laplacien** fractionnaire, les intégrales fractionnaires et les dérivés fractionnaires qui seront utilisé ultérieurement.

Premièrement, si nous considérons l'équation

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = J^{\alpha}_{0/t}(|u|^{p-1}\,u),$$

où $\alpha \in 1-\gamma \in (0,1)$ et $J^{\alpha}_{0/t}$ est l'intégrale fractionnaire de **Riemann-liouville**.

On prenons l'équation de diffusion fractionnaire linéaire

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = 0,\ \beta \in (0,2]\,, x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.2.1}$$

alors, sa solution fondamentale S_β peut être représenté via la transformation de Fourier par

$$S_\beta(t)(x) = S_\beta(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(ix\xi - t\,|\xi|^\beta\right) d\xi. \tag{2.2.2}$$

Il est évident que cette fonction satisfait

$$S_\beta(1) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), S_\beta(x,t) \geq 0, \int\limits_{\mathbb{R}^N} S_\beta(x,t)\,dx = 1, \tag{2.2.3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$. D'où, en utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et la forme auto-similaire pour $S_\beta(x,t) = t^{-N/\beta} S_\beta(xt^{-1/\beta}, 1)$, nous avons

$$\left\| S_\beta(t) * v \right\|_q \leq C t^{-N/\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \left\| v \right\|_r, \tag{2.2.4}$$

pour tout $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et tout $1 \leq r \leq q \leq \infty$, $t > 0$.
En outre, comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint avec $D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^\beta(\mathbb{R}^N)$, nous avons :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^{\beta/2} v\,(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v\,(x)\,(-\Delta)^{\beta/2} u(x) dx, \tag{2.2.5}$$

pour tout $u, v \in H^\beta(\mathbb{R}^N)$.
Dans un domaine borné ouvert Ω, nous dénotons par $\Delta^{\beta/2}$le **Laplacien** fractionnaire dans Ω avec condition de Dirichlet .Nous avons

$$\begin{cases} \Delta^{\beta/2} \varphi_k = \lambda_k^{\beta/2} \varphi_k & \text{sur } \Omega, \\ \varphi_k = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \diagdown \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.6}$$

et

$$D\,(\Delta)^{\beta/2} = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ s.t } u\mid_{\partial\Omega} = 0; \left\| \Delta^{\beta/2} u \right\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \left| \lambda_k^{\beta/2} \left\langle u, \varphi_k \right\rangle \right|^2 < +\infty \right\}.$$

Si, pour $u \in D\,(\Delta)^{\beta/2}$ nous avons

$$\Delta^{\beta/2} u = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \lambda_k^{\beta/2} \left\langle u, \varphi_k \right\rangle \varphi_k,$$

et de plus nous avons l'intégration par parties suivante

$$\int\limits_{\Omega} u(x) \Delta^{\beta/2} v(x) dx = \int\limits_{\Omega} v(x) \Delta^{\beta/2} u(x) dx, \tag{2.2.7}$$

pour tout $u, v \in D((-\Delta)^{\beta/2})$.
Ensuite, si $AC\,[0,T]$ est l'espace de toutes les fonctions qui sont absolument continues sur $[0,T]$ avec $0 < T < +\infty$ alors, pour $f \in AC\,[0,T]$, les dérivés fractionnaires de **Riemann-Liouville** à gauche $D^\alpha_{0/t} f(t)$ et droite $D^\alpha_{t/T} f(t)$ d'ordre $\alpha \in (0,1)$ sont définis comme suit (voir 25) :

$$D^\alpha_{0/t} f(t) = D J^{1-\alpha}_{0/t} f(t), \tag{2.2.8}$$

$$D^\alpha_{t/T} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D \int_t^T (s-t)^{-\alpha} f(s) ds, \tag{2.2.9}$$

pour tout $t \in [0,T]$, où $D = d/dt$ la dérivée usuelie, et

$$J_{0/t}^{\alpha} f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \tag{2.2.10}$$

est l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville**, pour tout $f \in L^q(0,T)(1 \leq q \leq \infty)$.
Maintenant, pour chaque $f, g \in C([0,T])$.telle que $D_{0/t}^{\alpha} f(t)$, $D_{t/T}^{\alpha} f(t)$ existent et sont continues, pour tout $t \in [0,T]\,,\, 0 < \alpha < 1$, nous avons l'intégration par parties (voir [39, (2.64) p. 46]).

$$\int_0^T \left(D_{0/t}^{\alpha} f\right)(t) g(t) dt = \int_0^T f(t) \left(D_{t/T}^{\alpha} g\right)(t) dt. \tag{2.2.11}$$

Notons aussi que, pour tout $f \in AC^2\,[0,T]\,$, nous avons (voir (2.2.30) en $[25]$)

$$-\,DD_{t/T}^{\alpha} f = D_{t/T}^{1+\alpha} f \tag{2.2.12}$$

Où

$$AC^2\,[0,T] = \{f : [0,T] \to \mathbb{R} \text{ telle que } Df \in AC\,[0,T]\}\,.$$

En outre, pour tout $1 \leq q \leq \infty$, l'égalité suivante (voir[$25,$ Lemme 2.4 p.74])

$$D_{0/t}^{\alpha} J_{0/t}^{\alpha} = Id_{L^q(0,T)} \tag{2.2.13}$$

est vraie presque partout sur $[0,T]\,$.
Plus tard, nous utiliserons les résultats suivants :
• Si $w_1(t) = (1-t/T)_+^{\sigma}$, $t \geq 0, T > 0, \sigma \gg 1$, puis en obtient $y = \frac{s-t}{T-t}$

$$\begin{aligned}
D_{t/T}^{\alpha} w_1(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D \int_t^T (s-t)^{-\alpha} (1-t/T)_+^{\sigma} ds \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D \left[\int_t^T (s-t)^{-\alpha} (\frac{T-s}{T})^{\sigma} ds \right] \\
&= -\frac{T^{-\sigma}}{\Gamma(1-\alpha)} D \left[(T-t)^{-\alpha+\sigma+1} \int_t^T y^{-\alpha} (1-y)^{\sigma} ds \right] \\
&= \frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(T-t)^{-\alpha+\sigma}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T y^{-\alpha} (1-y)^{\sigma} ds \\
&= \frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(T-t)^{-\alpha+\sigma} B(1-\alpha, \sigma+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(T-t)^{-\alpha+\sigma} \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\sigma-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(1+\sigma-\alpha)} T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\sigma-\alpha},
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha+1}_{t/T}w_1(t) &= -DD^{\alpha}_{t/T}w_1(t) \\
&= -D\left[-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}D\int_t^T (s-t)^{-\alpha}(1-t/T)^{\sigma}_{+}ds\right] \\
&= D\left[\frac{T^{-\sigma}}{\Gamma(1-\alpha)}D\left[(T-t)^{-\alpha+\sigma+1}\int_t^T y^{-\alpha}(1-y)^{\sigma}ds\right]\right] \\
&= D\left[\frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(T-t)^{-\alpha+\sigma}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T y^{-\alpha}(1-y)^{\sigma}ds\right] \\
&= \frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(\sigma-\alpha)(T-t)^{-\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(1-\alpha)}B(1-\alpha,\sigma+1) \\
&= \frac{T^{-\sigma}(1-\alpha+\sigma)(\sigma-\alpha)(T-t)^{-\alpha+\sigma-1}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\sigma-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma-\alpha)}T^{-(\alpha+1)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\sigma-\alpha-1}_{+},
\end{aligned} \tag{2.2.15}
$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$;on a

$$
\left(D^{\alpha}_{t/T}w_1(t)\right)(T) = 0; \qquad \left(D^{\alpha}_{t/T}w_1(t)\right)(T) = CT^{-\alpha}, \tag{2.2.16}
$$

Ou $C = (1-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)/\Gamma(2-\alpha+\sigma)$.

2.3 Existence locale

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence locale et l'unicité des solution douces du probléme (2.1.1), Soit $T(t) = \exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right)$. Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ généré par la puissance fractionnaire $-(-\Delta)^{\beta/2}$ (voir Yosida[45]). On à $T(t)v = S_\beta(t) * v$, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, où S_β est donné par (2.2.2) et $u * v$ est la convolution de u et v. Nous commençons par :

Définition 2.1 *(solution douce).Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$ et $T > 0$.On dit que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce du problème (2.1.1) si u satisfait à l'équation intégrale suivante*

$$
u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)J^{\alpha}_{0/s}(|u|^{p-1})u(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.1}
$$

Théorème 2.1 *(existence locale). Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $p > 1$, il existe un temps maximale $T_{\max} > 0$ et une solution douce $u \in C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ au problème (2.1.1). Par ailleurs, soit $T_{\max} = \infty$*

sinon $T_{\max} < \infty$ *et* $\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^N)} \to \infty$ *lorsque* $t \to T_{\max}$. *De plus, si* $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$, *alors* $u(t) > 0$ *pour tout* $0 < t < T_{\max}$. *En outre, si* $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, *pour* $1 \leq r < \infty$, *alors* $u \in C([0, T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$ arbitraire, Nous définissons l'espace de Banach

$$E_T = \left\{u \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N)); \|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_{L^\infty}\right\},$$

où $\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))}$. Ensuit, pour chaque $u \in E_T$, nous définissons

$$\psi(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)J^\alpha_{0/s}(|u|^{p-1})u(s)ds.$$

Comme d'habitude, nous prouvons l'éxitence locale par le théorème du ponit fixe de Banach

• $\psi : E_T \to E_T$: Soit $u \in E_T$, en utilisant (2.2.4), nous obtenons avec $\|.\|_\infty = \|.\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)\|_1 &= \left\|T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)J^\alpha_{0/s}(|u|^{p-1})u(s)ds\right\|_1 \\
&= \left\|T(t)u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}T(t-s)(|u|^{p-1})u(s)ds\right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
&\leq \|T(t)u_0\|_{L^\infty(0,T)} + \left\|\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}T(t-s)(|u|^{p-1})u(s)dsd\sigma\right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u(\sigma)\|^p_\infty dsd\sigma\right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&= \|u_0\|_\infty + \frac{t^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\|u(\sigma)\|^p_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\|u\|^p_1 \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^{2-\gamma}2^p\|u_0\|^{p-1}_\infty}{\Gamma(3-\gamma)}\|u_0\|_\infty.
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons

$$\frac{T^{2-\gamma}2^p\|u_0\|^{p-1}_\infty}{\Gamma(3-\gamma)} \leq 1 \tag{2.3.2}$$

nous concluons que $\|\psi(u)\|_1 \leq 2\|u_0\|_\infty$, et alors $\psi(u) \in E_T$.

•ψ **est contractante** : pour $u, v \in E_T$, prenant en compte de (2.2.4), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)-\psi(v)\|_1 &= \left\| T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,J_{0/s}^{\alpha}\left(|u|^{p-1}u\right)ds - T(t)\,v_0 + \int_0^t T(t-s)\,J_{0/s}^{\alpha}\left(|v|^{p-1}v\right)ds \right\|_1 \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| |u|^{p-1}u(\sigma) - |v|^{p-1}v(\sigma) \right\|_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| |u|^{p-1}u(\sigma) - |v|^{p-1}v(\sigma) \right\|_\infty ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&= \frac{t^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \left\| |u|^{p-1}u(\sigma) - |v|^{p-1}v(\sigma) \right\|_1 \\
&\leq \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_1 \\
&\leq \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} C(p)\,\|u-v\|_1 \left(\left| |u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right| \right) \\
&\leq \frac{C(p)2^p\,\|u_0\|_\infty^{p-1}\,T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \|u-v\|_1 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u-v\|_1 .
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante

$$\left| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right| \leq C(p)\,|u-v|\,(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}); \tag{2.3.3}$$

T est choisi telle que

$$\frac{T^{2-\gamma}2^p\,\|u_0\|_\infty^{p-1}\max(2C(p),1)}{\Gamma(3-\gamma)} \leq 1. \tag{2.3.4}$$

Alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution douce unique $u \in \Pi_T$, où $\Pi_T = L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$, au problème (2.1.1).

•**Unicite :** Si u, v sont deux solution douces dans E_T pour $T > 0$, en utilisant (2.2.4) et (2.3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_\infty &\leq \frac{C(p)\,2^p\,\|u_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\,\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_\infty\, d\sigma ds \\
&= \frac{C(p)\,2^p\,\|u_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t\int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma}\,\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_\infty\, ds d\sigma \\
&= \frac{C(p)\,2^p\,\|u_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^t (t-\sigma)^{-\gamma}\,\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_\infty\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Alors l'unicité découle de l'inégalité de **Granwall** [9].

Ensuite, en utilisant le caractère unique des solution, nous concluons à l'existence d'une solution sur un intervalle maximale $[0,T_{\max})$ où

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0;\ \text{il existe une solution douce } u\in\prod_{T}\text{ à (2.1.1)}\right\}\leq+\infty.$$

On note que, à l'aide de la continuité du semi-groupe de $T(t)$. Nous pouvons facilement conclure que

$$u\in C\left([0,T_{\max}),C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$$

Deplus, si $0\leq t\leq t+\tau<T_{\max}$, en utilisant (2.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} u(t+\tau) &= T(\tau)u(t)+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\tau T(\tau-s)\int_0^s(s-\sigma)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(t+\sigma)\,d\sigma ds \qquad (2.3.5)\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\tau T(\tau-s)\int_0^t(t+s-\sigma)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(\sigma)\,d\sigma ds, \end{aligned}$$

Pour prouver que $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\to\infty$ comme $t\to T_{\max}$, si $T_{\max}<\infty$, on procède par contradiction. Supposons que u soit une solution de (2.3.1) sur un intervalle $[0,T)$ avec $\|u(t)\|_{L^\infty((0.t)\times\mathbb{R}^N)}<\infty$ et $T_{\max}<\infty$. En utilisant le fait que le dernier terme de (2.3.5) dépent seulement des valeurs de u dans l'intervalle $(0.t)$ et en utilisant le théorème de point fixe, nous concluons que u peut être étendu à une solution sur l'intervalle $[0,T')$ avec $T'>T$. Si on répéte cette itération, On obtient une contraduction avec le fait que le temps maximal $T_{\max}$ est fini.

Positivité des solutions : si $u_0\geq0$ et $u_0\not\equiv0$, nous pouvons construire une solution positive sur l'intervalle $[0.T]$ en appliquons l'argument du point fixe dans l'ensemble $E_T^+=\{u\in E_T;u\geq0\}$. En particulier, il résulte de (2.3.1) que $u(t)\geq T(t)u_0>0$ sur $(0.T]$. Cela n'est pas difficile par l'unicité pour déduire que u reste positive sur $(0,T_{\max})$.

Regularité : si $u_0\geq0$ et $u_0\not\equiv0$, pour $1\leq r<\infty$, alors répétant l'argument du point fixe dans l'espace

$$E_{T,r}=\left\{u\in L^\infty\left((0.T),C_0\left(\mathbb{R}^N\right)L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right);\|u\|_1\leq2\|u_0\|_{L_\infty},\|u\|_{\infty,r}\leq2\|u_0\|_{L^r}\right\},$$

à la place de E_T, où $\|.\|_{\infty,r}=\|.\|_{L^\infty((0.T),L^r(\mathbb{R}^N))}$, et en estimant $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u^{p-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ et en utilisant l'argumemt d'application contraction à (2.2.4), nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$; nous concluons alors que $u\in C\left([0,T_{\max}),C_0\left(\mathbb{R}^N\right),L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

Nous disons que u est une solution globale si $T_{\max}=\infty$; quand $T_{\max}<\infty$, alors u s' explose dans un temps fini et dans ce cas nous avons $\|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\to\infty$ comme $t\to T_{\max}$. ■

2.4 Explosion de solutions

Maintenant, nous voulons obtenir un résultat d'explosion de l'Eq (2.1.1) pour faire ceci, nous montrons qu'une solution douce est une solution faible

Définition 2.2 *(solution faible)Soit $u_0 \in L^{\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $0 < \beta \leq 2$,$p > 1$ et $T > 0$. On dit que u est une solution du problème (2.1.1), si $u \in L^p\left((0,T), L^{\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, et u vérifait l'équation suivante*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi(x,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha}_{0|t}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)\,\varphi(x,t) \\ = &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x,t) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_t(x,t), \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

pour toute fonction test $\varphi \in C^1\left([0,T], H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ à support compact telle que $\varphi(.,T) = 0$ où

$\alpha = 1 - \gamma \in (0,1)$.

Lemme 2.1 *On considère $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, et soit $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ une solution douce du problème (2.1.1), alors u est une solution faible pour (2.1.1) pour tout $0 < \beta \leq 2$ et tout $T > 0$.*

Preuve. Soit $T > 0, 0 < \beta \leq 2, u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et soit $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ une solution de (2.3.1). Soit $\varphi \in C^1\left([0,T], H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi$ soit compact avec $\varphi(.,T) = 0$. Ensuit, multipliant (2.3.1) par φ et intégrant sur $\mathbb{R}^N$, On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\,u_0(x)\,\varphi(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^t T(t-s)\,J^{\alpha}_{0|t}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)\,dx\right)\varphi(x,t).$$

Nous différencions pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi(x,t) \quad = \quad &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}\left(T(t)\,u_0(x)\,\varphi(x,t)\right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t T(t-s)\,J^{\alpha}_{0|t}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,s)\,ds\right)\varphi(x,t), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Maintenant, en utilisant (2.2.5) et une propriété du semi-groupe $T(t)$ ([9, chapitre 3]), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}\left(T(t)\,u_0(x)\,\varphi(x,t)\right) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} A\left(T(t)\,u_0(x)\right)\varphi(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\,u_0(x)\,\varphi_t(x,t) \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\,u_0(x)\,A\varphi(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\,u_0(x)\,\varphi_t(x,t), \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t T(t-s)f(x,s)\,ds\right)\varphi(x,t)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\varphi(x,t)\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t A\left(T(t-s)f(x,s)\right)ds\varphi(x,t)\,dx\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t T(t-s)f(x,s)\,ds\varphi_t(x,t)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\varphi(x,t)\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t T(t-s)f(x,s)\,dsA\varphi(x,t)\,dx\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t T(t-s)f(x,s)\,ds\varphi_t(x,t)\,dx, \qquad (2.4.4)\end{aligned}$$

où $f = J^{\alpha}_{0|t}\left(|u|^{p-1}u\right) \in C\left([0,T];L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. Ainsi, en utilisant (2.3.1),(2.4.3) et (2.4.4), nous concluons (2.4.2) implique

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi(x,t)=\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)A\varphi(x,t)+\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)+\int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\varphi(x,t).$$

Nous concluons en intégrant par rapport au temps sur $[0,T]$ et en utilisant le fait que $\varphi(.,T)=0$.

■

Théorème 2.2 *(Explosion) Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Si*

$$p \leq 1+\frac{\beta(2-\gamma)}{(N-\beta+\beta\gamma)} = p^* \text{ ou } p<\frac{1}{\gamma}, \qquad (2.4.5)$$

alors la solution douce de (2.1.1) explose en temps fini .

On note que dans le cas où $p=p^*$ et $\beta \in (0,2)$, on prend $p>\frac{N}{N-\beta}$ avec $N>\beta$.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u soit une solution douce globale de (2.1.1), alors u est une solution du ce problème dans $C\left([0,T],C_0\left(R^N\right)\right)$ pour tout $T \ggg 1$ tel que $u(t)>0$ pour tout $t\in[0,T]$. Alors, en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha}_{0|t}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)\varphi(x,t)\\ &=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x,t)-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t),\end{aligned}$$

pour toute fonction test $\varphi \in C^1\left([0,T],H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi)$ est un compact avec $\varphi(.,T)=0$, où $\alpha=1-\gamma\in(0,1)$.

Maintenant nous prenons

$$\varphi(x,t) = D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) = D^{\alpha}_{t|T}\left(\left(\varphi_1(x)\right)^l \varphi_2(t)\right)$$

où

$$\varphi_1^l(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{1}{\beta}}}\right), \varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\eta},$$

avec $l \geq \frac{p}{p-1}$, $\eta \geq \max\left\{\frac{\alpha p+1}{p-1}; \alpha+1\right\}$ et Φ est une fonction continûment différentiable et non négative et non-croissante telle que

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \text{ si } r \geq 2, \end{cases}$$

$0 \leq \Phi(r) \leq 1, |\Phi'(r)| \leq \frac{C_1}{r}$ pour tout $r > 0$, en utilisant (2.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x)\, D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,0)\right) + \int_{\Omega_T} J^{\alpha}_{0|t}\left(u^p\right)(x,t)\, D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) \\ = &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}} D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\, D D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right), \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

où $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$, tel que $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 2T^{\frac{1}{\beta}}\right\}$ et $\int_{\Omega} = \int_{\Omega} dx$ et $\int_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} dxdt$.
En plus, en utilisant (2.2.11) et (2.2.16) à gauche de (2.4.6), on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x)\, D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,0)\right) dx + \int_{\Omega_T} J^{\alpha}_{0|t}\left(u^p\right)(x,t)\, D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) dxdt \\ = &\int_{\Omega} u_0(x)\, \varphi_1^l\left(D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2\right)(0)\, dx + \int_{\Omega_T} D^{\alpha}_{0|t} J^{\alpha}_{0|t}\left(u^p\right)(x,t)\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) dxdt \\ = &\; CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0(x)\, \varphi_1^l(x)\, dx + \int_{\Omega_T} D^{\alpha}_{0|t} J^{\alpha}_{0|t}\left(u^p\right)(x,t)\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) dxdt, \end{aligned}$$

et (2.2.12) à droit de (2.4.6), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}} D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\, D D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) \\ = &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}} D^{\alpha}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) + \int_{\Omega_T} u(x,t)\, D^{\alpha+1}_{t|T}\left(\tilde{\varphi}(x,t)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_1^l(x) + \int_{\Omega_T} D_{0|t}^{\alpha} J_{0|t}^{\alpha}(u^p)(x,t)\,(\tilde{\varphi}(x,t)) \\
= \; & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^{\alpha}(\tilde{\varphi}(x,t)) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\, D_{t|T}^{\alpha+1}(\tilde{\varphi}(x,t))\,. \qquad (2.4.7)
\end{aligned}$$

En outre, utilisant (2.2.13) on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} u^p(x,t)\,(\tilde{\varphi}(x,t)) + CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_1^l(x) \\
= \; & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1^l D_{t\backslash T}^{\alpha}(\varphi_2(t)) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\, D_{t\backslash T}^{\alpha+1}(\tilde{\varphi}(x,t))\,. \qquad (2.4.8)
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Ju

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\left(\varphi_1^l\right) \leq l\varphi_1^{l-1}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1$$

on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} u^p(x,t)\,(\tilde{\varphi}(x,t))\,dxdt + CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dxdt \\
\leq \; & C\int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1 D_{t\backslash T}^{\alpha}(\varphi_2(t))\right| dxdt + \int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_1^l\left|D_{t|T}^{\alpha+1}(\varphi_2(x))\right| dxdt \\
= \; & C\int_{\Omega_T} u(x,t)\left(\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\right)\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1 D_{t|T}^{\alpha}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
& + \int_{\Omega_T} u(x,t)\left(\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\right)\varphi_1^l\left|D_{t\backslash T}^{\alpha+1}(\varphi_2(t))\right| dxdt. \qquad (2.4.9)
\end{aligned}$$

Par conséquent,en utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p}a^p + \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}b^{\tilde{p}}, \text{où } p\tilde{p} = p+\tilde{p}, a>0, b>0, p>1, \qquad (2.4.10)$$

avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\,\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}, \\ b = \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1 D_{t|T}^{\alpha}(\varphi_2(t))\right|, \end{cases}$$

dans le premièr intégrale à droit de (2.4.9) et avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\,\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}, \\ b = \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\varphi_1^{l}\left|D_{t\backslash T}^{\alpha+1}(\varphi_2(x))\right|, \end{cases}$$

dans le deuxième intégrale à droit de (2.4.9), on obtient (puisque u_0 n'est pas négative)

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\Omega_T} u^p(x,t)\,(\tilde{\varphi}(x,t))\,dxdt \\
\leq\;& C\int_{\Omega_T}(\varphi_1(x))^{l-\tilde{p}}(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1 D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_2(t))\right|^{\tilde{p}}dxdt \\
&+C\int_{\Omega_T}(\varphi_1(x))^{l}(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|D^{\alpha+1}_{t\backslash T}(\varphi_2(x))\right|^{\tilde{p}}dxdt.
\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables

$$\tau=T^{-1}t,\xi=T^{\frac{-1}{\beta}}x,$$

On utilise les formules (2.2.14) et (2.2.15) à droit de (2.4.11), on obtient

$$\int_{\Omega_T} u^p(x,t)\,(\tilde{\varphi}(x,t))\leq CT^{-\delta},\tag{2.4.12}$$

où $\delta=(1+\alpha)\,\tilde{p}-1-\frac{N}{\beta},C=C\left(|\Omega_1|,|\Omega_2|\right),\,\Omega_i$ désigne la mesure de $\Omega_i, i=1,2$ avec

$$\Omega_1=\left\{\xi\in\mathbb{R}^N;|\xi|\leq 2\right\},\Omega_2=\{\tau\geq 0,;\tau\leq 1\}.$$

Maintenant, en notans que, comme

$$\left(p\leq p^{*}\text{ou } p<\frac{1}{\gamma}\right)\Longleftrightarrow\left(\delta\geq 0\text{ ou } p<\frac{1}{\gamma}\right),\tag{2.4.13}$$

On a trois cas

Le premier cas : $p<p^{*}\,(\delta\geq 0)$:passant à la limite dans (2.4.12) quand $T\to+\infty$; on trouve

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\int_{|x|\leq 2T^{\frac{1}{\beta}}} u^p(x,t)\,\tilde{\varphi}(x,t)\,dxdt=0.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, la continuité en temps et en espace de la fonction u et le fait que

$$\lim_{T\to+\infty}\tilde{\varphi}(x,t)=1,$$

on déduit que

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u^p(x,t)\,dxdt=0\Rightarrow u\equiv 0.$$

Ce qui est une contradiction .

Deuxième cas : $p = p^* \, (\delta = 0)$

En utilisant l'inégalité (2.4.12) avec $T \to +\infty$ et en prenant en compte le fait que $(p = p^*)$, d'une part

$$u \in L^p \left((0, \infty), L^p \left(\mathbb{R}^N \right) \right), \tag{2.4.14}$$

et d'autre part, on répéte le même calcul comme précédemment, en prenant cette fois

$$\varphi_1(x) = \Phi \left(\frac{|x|}{B^{\frac{-1}{\beta}} T^{\frac{1}{\beta}}} \right), 1 \leq B < T,$$

T est suffisament grand telle que, quand $T \to +\infty$, B ne tend pas vers $+\infty$ au même temps. On obtient

$$\int_{\Sigma_T} u^p \tilde{\varphi}(x,t)\, dxdt \leq CB^{\frac{-N}{B}} + CB^{\frac{-N}{B} + \tilde{p}}, \tag{2.4.15}$$

Et en utilisant le changement de variables

$$\tau = T^{-1} t, \xi = \left(\frac{T}{B} \right)^{\frac{-1}{\beta}} x,$$

où

$$\Sigma_T = [0, T] \times \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; |x| \leq 2B^{\frac{-1}{\beta}} T^{\frac{1}{\beta}} \right\}$$

et

$$\int_{\Sigma_T} = \int_{\Sigma_T} dx$$

ainsi, en utilisant $p > \frac{N}{N-B}$ et prenant la limite quand $T \to +\infty$ alors $B \to +\infty$, on obtient

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^p (x,t)\, dxdt = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Qui est une contradiction.

Troisième cas : Pour $p < \frac{1}{\gamma}$.

On réppéte la même argument comme dans le cas $p < p^*$, en choisissant la fonction test :

$$\varphi(x,t) = D^\alpha_{t|T} \left(\bar{\varphi}(x,t) \right) = D^\alpha_{t|T} \left(\left(\varphi_3(x) \right)^l \varphi(t)_4 \right),$$

où

$$\varphi_3(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{R}\right), \varphi_4(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^\eta,$$

$R \in (0, T)$ suffisament grand, telle que quand $T \to +\infty$,nous avons pas $R \to \infty$ en même temps, la fonction Φ est définie comme précédemment. On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_{C_T} u^p(x,t)(\bar{\varphi}(x,t))\,dxdt + CT^{-\alpha}\int_C u_0(x)(\varphi_3(x))^l\,dx \\
\leq\ & C\int_{C_T} u(x,t)\left(\bar{\varphi}^{\frac{1}{p}}\bar{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\right)(\varphi_3(x))^l\left|D_{t|T}^{\alpha+1}(\varphi_4(t))\right|dx \\
&+C\int_{C_T} u(x,t)\left(\bar{\varphi}^{\frac{1}{p}}\bar{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\right)(\varphi_3(x))^{l-1}\left|(-\triangle_x)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_3(x)\,D_{t|T}^{\alpha}(\varphi_4(t))\right|dxdt,
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

où

$$C_T = [0,T] \times C, \text{pour } C = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 2R\right\}, \int_C = \int_C dx \text{ et } \int_{C_T} = \int_{C_T} dxdt.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Young (2.4.10) avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\,\bar{\varphi}^{\frac{1}{p}}, \\ b = \bar{\varphi}^{\frac{-1}{p}}(\varphi_3(x))^l\left|D_{t|T}^{\alpha+1}(\varphi_4(t))\right|, \end{cases}$$

dans le premier intégrale à droit de (2.4.20), et avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\,\bar{\varphi}^{\frac{1}{p}}, \\ b = \bar{\varphi}^{\frac{-1}{p}}(\varphi_3(x))^{l-1}\left|(-\triangle_x)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_3 D_{t|T}^{\alpha}(\varphi_4(t))\right|, \end{cases}$$

dans le deuxième intégrale à droit de (2.4.20), et comme u_0 est non négative, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{p}\right)\int_{C_T} u^p(x,t)(\bar{\varphi}(x,t))\,dxdt \\
\leq\ & C\int_{C_T}(\varphi_3(x))^l(\varphi_4(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|D_{t|T}^{\alpha+1}(\varphi_4(t))\right|^{\tilde{p}}dxdt \\
&+C\int_{C_T}(\varphi_3(x))^{l-\tilde{p}}(\varphi_4(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|(-\triangle_x)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_3 D_{t|T}^{\alpha}(\varphi_4(t))\right|^{\tilde{p}}.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Alors, les nouvelles variables

$$\xi = \frac{x}{R}, \tau = \frac{t}{T},$$

et (2.2.14), (2.2.15), nous permet d'obtenir l'estimation

$$\int_{C_T} u^p(x,t)\left(\bar{\varphi}(x,t)\right)dxdt \leq CT^{1-(1+\alpha)\tilde{p}}R^N + CT^{1-\alpha\tilde{p}}R^{N-\beta\tilde{p}}. \tag{2.4.18}$$

En prenant la limite quand $T \to +\infty$, nous déduisons, comme

$$(p < \frac{1}{\gamma}) \Longleftrightarrow (1-\alpha\tilde{p}) < 0,$$

on trouve

$$\int_0^{+\infty}\int_C u^p(x,t)\left(\varphi_3(x)\right)^l dxdt = 0.$$

Finalement, mettant $R \to +\infty$, on obtient une contraduction . ∎

Remarque 2.1 *(1) Si on prend $\beta = 2$ et $v(x,t) = (\Gamma(1-\gamma))^{(1-\gamma)/(p-1)}u(\Gamma(1-\gamma)^{1/2}x, \Gamma(1-\gamma)t)$ où u est une solution de (2.1.1), nous récupérons le résultat dans [8] dans un cas particulier.*

(2) Nous pouvons étendre notre analyse à l'équation

$$u_t = -(-\Delta)^{\beta/2}u + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t \frac{\psi(x,s)\left|u(s)\right|^{p-1}u(s)}{(t-s)^\gamma} \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.4.21}$$

où $p > 1$, $\beta \in (0,2]$, $0 < \gamma < 1$ et $\psi \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$, $\psi(.,t) > 0$ pour tout $t > 0$,

$$\begin{cases} \psi(B^{-1/\beta}T^{1/\beta}\xi, T\tau) \geq C > 0 & si\ p \leq p^* \\ \psi(R\xi, T\tau) \geq C > 0 & si\ p < 1/\gamma \end{cases}$$

pour toute $R > 0$, $B < T$, $\tau \in [0,1]$ et $\xi \in [0,2]$.
(3) Dans le théorème 2.2, nous utilisons précisément la solution faible, mais dans ce cas, nous obtenons une non-existence de solutions globales faibles.Par conséquent, pour obtenir des résultats de gonflement, nous utilisons la solution douce et l'alternative :soit $T_{\max} = \infty$, $T_{\max} < \infty$ et $\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^N)} \to \infty$ comme $t \to T_{\max}$.
(4) Nous pouvons prendre le problème spatio-fractionnaire moyen-poreux non local qui est notre première motivation pour étendre les résultats de [8] :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}\left|u\right|^{m-1}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\left|u\right|^{p-1}u(s)ds & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où $\beta \in (0,2]$, $0 < \gamma < 1$, $1 \leq m < p$, $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$.
Le seuil sur p sera

$$p \leq 1 + \frac{(2-\gamma)(N(m-1)+\beta)}{(N-\beta+\beta\gamma)_+} \quad \text{où} \quad p < \frac{m}{\gamma}.$$

2.5 Existence globale

Dans cette section, nous prouvons l'existence globale de solutions de (2.1.1). Dans ce qui suit nous utilisons la notation de $p_{sc} := \frac{N(p-1)}{\beta(2-\gamma)}$. Comme $p^* > 1 + \frac{\beta(2-\gamma)}{N}$,on note que $p > p^* \Rightarrow p_{sc} > 1$.

Théorème 2.3 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_{sc}}(\mathbb{R}^N)$ et $0 < \beta \leq 2$. Si*

$$p > \max\left\{\frac{1}{\gamma}; p^*\right\}, \tag{2.5.1}$$

et $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}}$est suffisamment petite, alors la solution u existe globalement. On note qu'on prendre $|u_0(x)| \leq C\,|x|^{-\beta(2-\gamma)/(p-1)}$au lieu de $u_0 \in L^{p_{sc}}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Comme $p > 1/\gamma$, alors nous avons la possibilité de prendre une constante positive $q > 0$ de telle sorte que :

$$\frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{N}{\beta q} < \frac{1}{p-1} \quad ,q \geq p. \tag{2.5.2}$$

En utilisant $(2.5.1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-1} &> \frac{N}{\beta q} > \frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} \\
\frac{q}{p-1} &> \frac{N}{\beta} > \frac{(2-\gamma)q}{p-1} - \frac{q}{p} \\
q &> \frac{N(p-1)}{\beta} > (2-\gamma)q - \frac{q(p-1)}{p} \\
q &> \frac{N(p-1)}{\beta} > \frac{N(p-1)}{\beta(2-\gamma)} = p_{sc} > 1 \\
q &> \frac{N(p-1)}{\beta} > p_{sc} > 1.
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Soit

$$b = \frac{N}{\beta p_{sc}} - \frac{N}{\beta q} = \frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{N}{\beta q}. \tag{2.5.4}$$

Alors, en utilisant (2.5.2)-(2.5.4), nous concluons que

$$b > \frac{1-\gamma}{p-1} > 0, \;\; pq < 1, \;\; \frac{N(p-1)}{\beta q} + (p-1)b + \gamma = 2. \tag{2.5.5}$$

Comme $u_0 \in L^{p_{sc}}$, en utilisant (2.2.4) et (2.5.4), nous obtenons, pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|S_\beta(t) * u_0\|_{L^q} &= \|T(t)u_0\|_{L^q} = \sup_{t>0} \left\|\exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right) u_0\right\|_{L^q} \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{L^{p_{sc}}}+\frac{1}{q})} \|u_0\|_{L^{p_{sc}}} \\
&= Ct^{-(\frac{N}{\beta L^{p_{sc}}}-\frac{N}{\beta q})} \|u_0\|_{L^{p_{sc}}} \\
&= Ct^{-b} \|u_0\|_{L^{p_{sc}}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{t>0} \left\|\exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right) u_0\right\|_{L^q} \leq Ct^{-b} \|u_0\|_{L^{p_{sc}}} = \eta < \infty. \tag{2.5.6}$$

On pose

$$\Xi = \left\{u \in L^\infty((0,\infty), L^q(\mathbb{R}^N)); \sup_{t>0} t^b \|u(t)\|_{L^q} \leq \delta\right\}, \tag{2.5.7}$$

où $\delta > 0$ doit être choisi suffisamment petit. Si nous définissons

$$d_\Xi(u,v) = \sup_{t>0} t^b \|u(t) - v(t)\|_{L^q} \quad ,\forall u, v \in \Xi, \tag{2.5.8}$$

alors (Ξ, d) est un espace métrique complet. On pose :

$$\Phi(u)(t) = \exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right) u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \exp\left(-(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}\right) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds, \tag{2.5.9}$$

pour tout $t \geq 0$. De (2.2.4), (2.5.6) et (2.5.7) nous avons

$$\begin{aligned}
t^b \|\Phi(u)(t)\|_{L^q} &= t^b \left\|V + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \exp\left(-(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}\right) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds\right\|_{L^q} \\
&\leq t^b \|V\|_{L^q} + \left\|\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \exp\left(-(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}\right) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds\right\|_{L^q} \\
&\leq \eta + Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{\beta}(\frac{q}{p}-\frac{1}{q})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma)\|_{L^{\frac{q}{p}}} d\sigma ds \\
&\leq \eta + C\delta^p t^p \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{\beta q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds.
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

avec

$$V = \exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right) u_0$$

En utilisant (2.5.2) et $pq < 1$, nous parvenons

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^s \frac{(t-s)^{-\frac{N}{\beta q}(p-1)}}{(s-\sigma)^{\gamma}}\sigma^{-bp}d\sigma ds &= \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{-\gamma}\sigma^{-bp}d\sigma\right)\int_0^t \frac{(t-s)^{-\frac{N(p-1)}{\beta q}}}{s^{bp+\gamma-1}}ds \\ &= Ct^{-\frac{N(p-1)}{\beta q}-bp-\gamma+2} \\ &= Ct^{-b}.\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Pour tout $t \geq 0$. Ainsi, nous déduisons de (2.5.10)-(2.5.11) que

$$t^b \left\|\Phi(u)(t)\right\|_{L^q} \leq \eta + C\delta^p. \tag{2.5.12}$$

Par conséquent, si η et δ sont choisis suffisamment petits de telle sorte que $\eta + C\delta^p \leq \delta$, nous voyons que $\Phi : \Xi \to \Xi$ est une contraction stricte, de sorte qu'il ait un unique point fixe $u \in \Xi$ qui est une solution de (2.1.1).

Maintenant, nous montrons que $u \in C\left([0,\infty), C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

Premièrement, nous montrons que $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ si $T > 0$ est suffisamment petit. En effet, notons que le cas ci-dessus fait montrer l'unicité dans Ξ_T, où, pour $T > 0$,

$$\Xi_T = \left\{u \in L^\infty(0,T), L^q\left(\mathbb{R}^N\right);\ \sup_{0<t<T} t^b \left\|u(t)\right\|_{L^q} \leq \delta\right\}.$$

Soit $\tilde{u}$ la solution locale de (2.1.1) construite dans le Théorème (2.3.2). De puis alors $u_0 \in C_0\mathbb{R}^N \cap L^{p_{sc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors, utilisant le fait que $u_0 \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ et (2.5.3), nous avons $\tilde{u} \in C\left([0,T_{\max}), L^q\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ par Théorème (2.3.2). Il suit que $\sup_{0<t<T} t^b \left\|\tilde{u}(t)\right\|_{L^q} \leq \delta$ si $T > 0$ est suffisamment petit. Par conséquent, par unicité, $u = \tilde{u}$ sur $[0,T]$, de telle sorte que $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. Ensuite, nous montrons que $u \in C\left([T,\infty), C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. En effet, pour $t > T$, nous écrivons

$$\begin{aligned} u(t) - \exp\left(-t(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\right)u_0 &= \int_0^t \exp\left(-(t-s)(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\right)\int_0^T (s-\sigma)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(\sigma)d\sigma ds \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(-(t-s)(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\right)\int_T^s (s-\sigma)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(\sigma)d\sigma ds \\ &\equiv I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Puisque $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, il s'ensuit que $I_1 \in C\left([T,\infty), C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. Aussi, par les calculs utilisés pour construire le point fixe à l'aide du fait que $t^{-b} \leq T^{-b} < \infty$ et $pq > q$, $I_1 \in C\left([T,\infty), L^q\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

Ensuite, notons que $\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right) < 1$ pour (2.5.3).

Par conséquent, il existe $r \in (q,\infty]$ telle que

$$\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{r}\right)<1. \tag{2.5.13}$$

Soit $T<s<t$. (le cas de $s\leq T\leq t$ est évident) . Depuis $u\in L^{\infty}\left((0,\infty),L^{q}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right)$,nous avons $|u|^{p-1}u\in L^{\infty}((T,s),L^{\frac{q}{p}(\mathbb{R}^{N})})$, et il est facilement suit, en utilisant (2.2.4) et (2.6.13), que $I_{2}\in C\left([T,\infty),L^{r}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right)$. Comme les termes $\exp\left(-(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\right)u_{0}$ et I_{1} à la foit appartiennent à $C\left([T,\infty),C_{0}\left(\mathbb{R}\right.\right.$ $C\left([T,\infty),L^{q}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right)$, nous voyons que $u\in C\left([T,\infty),L^{r}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right)$. par itération à un nombre finie de fois, nous déduisons que $u\in C\left([T,\infty),C_{0}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right)$. Ceci termine la preuve. ■

2.6 Conditions nécessaires d'existence locale et globale

Dans cette partie, on établit les conditions nécessaires pour l'existence des solutions faibles locales et globales du problème (2.1.1).

Théorème 2.4 *(Conditions nécessaires pour l'existence globale)*
Soit $u_{0}\in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$, $u_{0}\geq0$, $0<\beta\leq2$, $p>1$. Si u est une solution globale faible pour le problème (2.1.1), alors il existe une constante positive $C>0$, telle que

$$\lim_{|x|\rightarrow\infty}\inf\left(u_{0}\left(x\right)|x|^{\frac{\beta(2-\gamma)}{p-1}}\right)\leq C. \tag{2.6.1}$$

Preuve. Soit u une solution globale faible de (2.1.1), alors

$$u\in L^{p}\left(\left(0,R^{\beta}\right),L^{\infty}\left(B_{2R}\right)\right).$$

pour tout $R>0$, où B_{2R} désigne la boule fermée du centre 0 et de rayon $2R$. Ainsi, nous répétons le même calcul comme dans la preuve du Théorème 4.2, En prenant comme fonction test

$$\varphi\left(x,t\right)=D_{t\backslash T}^{\alpha}\tilde{\varphi}\left(x,t\right)=D_{t\backslash T}^{\alpha}\left(\varphi_{1}\left(\frac{x}{R}\right)\varphi_{2}\left(t\right)\right)$$

où $0\leq\varphi_{1}\in D\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}$ est le premier vecteur propre de l'opérateur **Laplacien** fractionnaire $\triangle^{\frac{\beta}{2}}$ dans B_{2}, avec la condition au limite de Dirichlet homogène (2.2.6), associé à la première valeur propre $\lambda=\lambda_{1}^{\frac{\beta}{2}}$, et $\varphi_{2}\left(t\right)=\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)_{+}^{l}$ pour $l\gg1$ assez grand.
Alors comme pour l'estimation (2.4.11) nous avons, avec $\Sigma=\left[0,R^{\beta}\right]\times B_{2R}$.

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma}u^{p}\left(x,t\right)\tilde{\varphi}\left(x,t\right)dxdt+CR^{-\alpha\beta}\int_{|x|\leq2R}u_{0}\left(x\right)\varphi_{1}\left(\frac{x}{R}\right)dx\\&=\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{N}}u\left(x,t\right)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{1}\left(\frac{x}{R}\right)D_{t\backslash R^{\beta}}^{\alpha}\varphi_{2}\left(t\right)dxdt+\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{N}}u\left(x,t\right)\varphi_{1}\left(\frac{x}{R}\right)D_{t\backslash R^{\beta}}^{\alpha+1}\varphi_{2}\left(t\right)dxdt\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

On a

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt,$$

Donc d'aprés l'inegalité de Young avec ε, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt \\
\leq\ & \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\tilde{\varphi} + C(\varepsilon)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\varphi}^{\frac{-\tilde{p}}{p}}\left|\varphi_1 D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}(\varphi_2)\right|^{\tilde{p}} dxdt \\
=\ & \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\tilde{\varphi} + C(\varepsilon)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_1\varphi_2)^{\frac{-\tilde{p}}{p}}\varphi_1^{\tilde{p}}\left|D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}(\varphi_2)\right|^{\tilde{p}} dxdt \\
=\ & \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\tilde{\varphi} + C(\varepsilon)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^{\tilde{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\varphi_2^{\frac{-\tilde{p}}{p}}\left|D^{\alpha+1}_{t\backslash R^\beta}(\varphi_2)\right|^{\tilde{p}} dxdt,
\end{aligned}$$

et de la même façon on obtient que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\tilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt,$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha}_{t\backslash R^\beta}\varphi_2(t)\,dxdt \\
\leq\ & \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\tilde{\varphi} + C(\varepsilon)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_1\varphi_2)^{\frac{-\tilde{p}}{p}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1 D^{\alpha}_{t\backslash R^\beta}(\varphi_2)\right|^{\tilde{p}} dxdt.
\end{aligned}$$

Pour ε assez petit, on obtient

$$\begin{aligned}
&CR^{-\alpha\beta}\int_{|x|\leq 2R} u_0(x)\,\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)dx \\
\leq\ & C\int_\Sigma \varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|D^{\alpha+1}_{t|R^\beta}\varphi_2(t)\right|^{\tilde{p}} dxdt \\
&+C\int_\Sigma\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{-1}{p-1}}(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|\triangle^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha}_{t|R^\beta}\varphi_2(t)\right|^{\tilde{p}} dxdt,
\end{aligned}$$

où $\alpha = 1-\gamma$, $\tilde{p} = \frac{p}{p-1}$ et $\tilde{p}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$. Si nous considérons le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{R^\beta} \text{ et } \xi = \frac{x}{R}$$

et en utilisant le fait que

$$\triangle^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)=R^{-\beta}\lambda\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right),$$

et que

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{t\backslash R^{\beta}}\varphi_2(t) &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-l+\alpha)}R^{-\alpha\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha}\\
&= \Lambda_1 R^{-\alpha\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha},\\
D^{\alpha+1}_{t\backslash R^{\beta}}\varphi_2(t) &= \frac{(l-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-l+\alpha)}R^{-(\alpha+1)\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha+1}\\
&= \Lambda_2 R^{-(\alpha+1)\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha+1}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&CR^{-\alpha\beta}\int\limits_{|x|\le 2R}u_0(x)\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)dx\\
\le\;& C\int_{\Sigma}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|\Lambda_2R^{-(\alpha+1)\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha+1}\right|^{\tilde{p}}dxdt\\
&+C\int_{\Sigma}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{-1}{p-1}}(\varphi_2(t))^{\frac{-1}{p-1}}\left|\Lambda_1R^{-\alpha\beta}\left(1-\frac{t}{R^{\beta}}\right)^{l-\alpha}\right|^{\tilde{p}}dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&CR^{-\alpha\beta}R^{N}\int_{|\xi|\le 2}u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi\\
\le\;& C\left\{\frac{R^NR^{\beta-(\alpha+1)\beta\tilde{p}}\Lambda_2^{\tilde{p}}}{\left((l-\alpha-1)\tilde{p}-\frac{\tilde{p}}{p}\right)+1}\int_{\Sigma}\varphi_1(\xi)\,d\xi+\frac{R^NR^{\beta-(\alpha+1)\beta\tilde{p}}\lambda^{\tilde{p}}\Lambda_2^{\tilde{p}}}{(l-\alpha)\tilde{p}-\frac{\tilde{p}}{p}}\int_{\Sigma}\varphi_1(\xi)\,d\xi\right\},
\end{aligned}$$

$$CR^{-\alpha\beta}\int_{|\xi|\le 2}u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi\le CR^{\beta-(\alpha+1)\beta\tilde{p}}\left\{C_1\int_{\Sigma}\varphi_1(\xi)\,d\xi+C_2\int_{\Sigma}\varphi_1(\xi)\,d\xi\right\},$$

où $C_1=\frac{\Lambda_2^{\tilde{p}}}{\left((l-\alpha-1)\tilde{p}-\frac{\tilde{p}}{p}\right)+1}$ et $C_2=\frac{\lambda^{\tilde{p}}\Lambda_2^{\tilde{p}}}{(l-\alpha)\tilde{p}-\frac{\tilde{p}}{p}}$, et aussi

$$CR^{-\alpha\beta}\int_{|\xi|\le 2}u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi\le CR^{\beta-(\alpha+1)\beta\tilde{p}}\left\{(C_1+C_2)\int_{|\xi|\le 2}\varphi_1(\xi)\,d\xi\right\},$$

$$\begin{aligned} CR^{-\alpha\beta}\int_{|\xi|\leq 2} u_0\left(R\xi\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi &\leq C\left(R\right)\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi \\ &= C\left(R\right)\int_{|\xi|\leq 2}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(\tilde{p}-1)}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\tilde{p})}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi \\ &\leq C\left(R\right)\left(2R\right)^{\beta(1+\alpha)(\tilde{p}-1)}\int_{|\xi|\leq 2}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\tilde{p})}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi, \end{aligned}$$

où $C\left(R\right)=R^{\beta-(1+\alpha)\beta\tilde{p}}\left(C_1+C_2\right)$, et si

$$\int_{|\xi|\leq 2} u_0\left(R\xi\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi \leq C\int_{|\xi|\leq 2}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\tilde{p})}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi, \tag{2.6.3}$$

en utilisant l'estimation

$$\begin{aligned} \inf_{|\xi|>1}\left(u_0\left(R\xi\right)\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(\tilde{p}-1)}\right)\int_{|\xi|\leq 2}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\tilde{p})}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi &\leq \int_{1<|\xi|\leq 2} u_0\left(R\xi\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi \\ &\leq \int_{|\xi|\leq 2} u_0\left(R\xi\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi, \end{aligned}$$

dans le côté gauche de (2.6.3), nous concluons, après avoir divisé par $\int_{|\xi|\leq 2}\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\tilde{p})}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi$ que

$$\inf_{|\xi|>1}\left(u_0\left(R\xi\right)\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(\tilde{p}-1)}\right)\leq C. \tag{2.6.4}$$

Passant à la limite dans (2.6.4), lorsque $R\to\infty$, nous obtenons

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf\left(u_0\left(R\xi\right)\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(\tilde{p}-1)}\right)\leq C.$$

■

Corollaire 2.1 *(Condidition suffisantes pour la non-existence des soluions globales)*

Soit $u_0\in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $u_0\geq 0$, $0<\beta\leq 2$, $p>1$.Si

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf\left(u_0\left(x\right)\left|x\right|^{\frac{\beta(2-\gamma)}{p-1}}\right)=+\infty,$$

alors le problème (2.1.1) ne peut pas admettre une solution globale faible.
Ensuite, nous donnons une condition nécessaire pour l'existence locale où nous obtenons une estimation somblable de T fondé dans la preuve du Théorème 3.2 lorsque $|x|$ tend vers à l'infini.

Théorème 2.5 *(Conditions nécessaires pour l'existence locale)*
Soit $u_0 \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $u_0 \geq 0$, $\beta \in (0,2]$, $p > 1$. Si u est une solution locale faible de (2.1.1) sur $[0,T]$, où $0 < T < +\infty$, alors nous avons

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0\left(x\right) \leq CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}}, \tag{2.6.5}$$

pour une constante positive $C > 0$. Notons que, si $A = \lim_{|x|\to\infty} \inf u_0\left(x\right)$, alors on obtient une estimation somblable à celle du temps maximal $T_{\max}$ trouvé dans le Théorème d'existence locale,

$$\frac{T^{2-\gamma}A^{p-1}}{C^{p-1}} \leq 1.$$

Preuve. On prend, pour $R > 0$ suffisamment grand,

$$\varphi\left(x,t\right) = D_{t|T}^{\alpha}\tilde{\varphi}\left(x,t\right) = D_{t|T}^{\alpha}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\varphi_2\left(t\right)\right),$$

où $\varphi_2\left(t\right) = \left(1-\frac{t}{T}\right)_+^l$, alors comme dans 6.2 nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_1} u^p\left(x,t\right)\tilde{\varphi}\left(x,t\right)dxdt + CT^{-\alpha}\int_{|x|\leq 2R} u_0\left(x\right)\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)dx \\
\leq\ & C\int_{\not{\Sigma}_1}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\left(\varphi_2\left(t\right)\right)^{\frac{-1}{p-1}}\left|D_{t\backslash T}^{\alpha+1}\varphi_2\left(t\right)\right|^{\tilde{p}}dxdt \\
&+C\int_{\not{\Sigma}_1}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{-2}{p-1}}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)^{\frac{-1}{p-1}}\left|\triangle^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)D_{t\backslash T}^{\alpha}\varphi_2\left(t\right)\right|^{\tilde{p}}dxdt,
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

où $\Sigma_1 = [0,T]\times\left\{x\in\mathbb{R}^N; |x|\leq 2R\right\}$, $\alpha = 1-\gamma$ et $\tilde{p} = \frac{p}{p-1}$. Maintenant, dans le côté droit de (2.6.6), nous introduisons le changement de variables suivant

$$\tau = T^{-1}t \text{ et } \xi = R^{-1}x,$$

et nous utilisons le fait que

$$\triangle^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) = R^{-\beta}\lambda\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right),$$

pandant que dans le côté gauche nous utilisons la positivité de u, ensuite nous parvenons que

$$CT^{-\alpha}\int_{|\xi|\leq 2} u_0\left(R\xi\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi \leq \left(CT^{1-(1+\alpha)\tilde{p}} + C\lambda T^{1-\alpha\tilde{p}}R^{-\beta\tilde{p}}\right)\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1\left(\xi\right)d\xi,$$

et ainsi

$$\int_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi \leq C(R,T)\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1(\xi)\,d\xi, \tag{2.6.7}$$

où

$$C(R,T) = CT^{(1+\alpha)(1-\tilde{p})} + CT^{1+\alpha(1-\tilde{p})}R^{-\beta\tilde{p}}.$$

En utilisant l'estimation

$$\begin{aligned}\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi))\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1(\xi)\,d\xi &\leq \int_{1<|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi\\ &\leq \int_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

dans le côté gauche de (2.6.7), nous concluons, après avoir divisé par $\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1(\xi)\,d\xi$ que

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)) \leq CT^{(1+\alpha)(1-\tilde{p})} + CT^{1+\alpha(1-\tilde{p})}R^{-\beta\tilde{p}}. \tag{2.6.8}$$

Passant à la limite dans (2.6.8), lorsque $R\to\infty$, nous avons

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf(u_0(x)) \leq CT^{(1+\alpha)(1-\tilde{p})} = CT^{-\frac{2-\gamma}{P-1}}.$$

■

Chapitre 3

Etude d'une équation différentielle fractionnaire en temps et en espace

3.1 Intoduction

Dans ce chapitre (voir [33]), nous considérons l'équation fractionnaire suivante :

$$ {}_0^C D_t^\alpha u + (-\Delta)^{\beta/2} u =_0 J_t^\gamma \, |u|^{p-1} \, u \;, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1.1}$$

avec les données initiales :

$$u(x,0) = u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N) \;, \tag{3.1.2}$$

où $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro en l'infini, $N \geq 1, 0 < \alpha < 1-\gamma, 0 < \gamma < 1, 0 < \beta \leq 2, p > 1$ et ${}_0^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de **caputo** d'ordre α définie, pour une fonction différentiable u, par :

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(t) =_0 J_t^{1-\alpha} u'(t),$$

${}_0 J_t^{1-\alpha}$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de **Riemann-Liouville** d'ordre $1-\alpha$ définie, pour une fonction intégrable u, par :

$$ {}_0 J_t^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds,$$

où Γ est la fonction gamma. L'opérateur non-locale $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par :

$$(-\Delta)^{\beta/2} v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\beta \, \mathcal{F}(v)(\xi))(x),$$

pour tout $v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$, où $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β, défini par :

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in S'; (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\} \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\} \qquad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace des distributions de Schwartz, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ est son inverse.

Le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$ est lié aux vols de Lévy en physique. De nombreuses observations et expériences liées aux vols de Lévy (super-diffusion), par exemple la diffusion collective de glissement sur des surfaces solides, l'optique quantique ou la diffusion turbulente de Richardson, ont été réalisées ces derniéres années. Les processus symétriques β-stables, $0 < \beta < 2$, sont les caractéristiques de base pour une classe de processus de Lévy sautants. En comparaison au processus brownien continu $\beta = 2$, les processus symétriques β-stables ont des sauts infinis dans une période de temps arbitraire. Les sauts importants de ces processus rendent leurs variance et leurs attentes infinies selon $0 < \beta < 2$ où $0 < \beta \leq 1$, respectivement (voir $[25]$). Rappelons que lorsque $\beta = 3/2$, les processus symétriques β-stables apparaissent dans l'étude de la dynamique stellaire (voir $[12]$).

Le calcul fractionnaire a acquis une importance considérable en raison de son application dans nombreuses disciplines telles que la physique, la mécanique, la chimie, l'ingénierie, etc. En conséquence, de nombreux auteurs ont largement étudié les équations différentielles ordinaires et partielles d'ordre fractionnaires (voir $[13, 25, 31, 36, 47-49]$). Rappelons d'abord quelques résultats précédents sur les équations de diffusion fractionnaires.

Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, le problème $(3.1.1) - (3.1.2)$ se réduit a l'équation de la chaleur semi-linéaire

$$u_t - \Delta u = |u|^{p+1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1.3}$$

avec (3.1.2). Dans $[21]$, Fujita a montré que si $u \geq 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$ et $p < 1 + 2/N$, alors u explose en temps fini, et si $p > 1 + 2/N$, alors pour toute donnée initiale suffisamment petite, la solution du problème (3.1.2)-(3.1.3) existe globalement. Le cas critique $p = 1 + 2/N$ s'est avéré par la suite (voir $[23-29]$). Dans $[47]$, Weissler a prouvé que si la valeur initiale u_0 est suffisamment petite dans $L^{qc}(\mathbb{R}^N)$, $qc = N(p-1)/2 > 1$, la solution de (3.1.2)-(3.1.3) existe globalement. Dans $[26]$, Kirane, Laskri et Tatar ont discuté de l'équation d'évolution

$$ {}_0^C D_t^\alpha u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = h(x,t) \left| u \right|^{p-1}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1.4} $$

où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leq 2, p > 0, h(x,t) \geq C\left| x \right|^\sigma t^\rho$ pour $x \in \mathbb{R}^N, t > 0, C > 0, \sigma, \rho$ et satisfaire à certaines conditions. Ils ont prouvé que si $0 < p \leq 1 + (\alpha(\sigma+\beta)+\beta\rho)/(\alpha N + \beta(1-\alpha))$, le problème (3.1.2)-(3.1.4) n'a pas de solutions globales. Dans $[8]$,Cazenave, Dicksteint et Weissler ont prouvé que toutes les solutions non triviales et non négatives de l'équation

$$ u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \left| u(s) \right|^{p-1} u(s) ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1.5} $$

avec $(3.1.2)$, où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \gamma < 1$, explosent en temps fini lorsque $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$ et $p \leq \max\{1 + \beta(2-\gamma)/(N - \beta + \beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, et si $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N), q_{sc} = N(p-1)/(4-2\gamma)$ avec $\|u_0\|$ suffisamment petit et $p > \max\{1 + \beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors la solution est globale. Lorsque $\gamma = 0$, toutes les solutions non triviales explosent comme l'a prouvé par Souplet $[41]$ .Dans $[20]$, Fino et Kirane ont considéré l'équation

$$ u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \left| u(s) \right|^{p-1} u(s) ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1.6} $$

avec (3.1.2), où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \beta \leq 2, 0 < \gamma < 1, p > 1$; ils ont prouvé que si $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$ et $p \leq \max\{1 + \beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors toute solution explose en temps fini, et que si $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N)$, où $q_{sc} = N(p-1)/\beta(2-\gamma)$ avec $\|u_0\|$ suffisamment petit et $p > \max\{1 + \beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors u existe globalement.

3.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous pésentons quelques préliminaires qui seront utilisés dans la suite de cette étude.
La fonction de **Mittag-Leffler** est définie pour $z \in \mathbb{C}$ (voir$[25]$) par

$$ E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \;\; \alpha \in \mathbb{C}, \; \Re e(\alpha) > 0, \; z \in \mathbb{C}, $$

et son intégrale fractionnaire **Riemann-Liouville** satisfait

$$ {}_0J_t^{1-\alpha}(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha). $$

Nous avons besoin de la fonction de type Wright qui a été considérée par Mainardi [30]

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma(k+1)\sin(\pi(k+1)\alpha)}{k!},\ 0<\alpha<1;\end{aligned}$$

ϕ_α est une fonction entière a les propriétés suivantes :
(a) $\phi_\alpha(\theta)\geq 0$, pour $\theta\geq 0$ et $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta=1$;
(b) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\theta^r d\theta=\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)}$, pour $r>-1$;
(c) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\exp\left(-z\theta\right)d\theta=E_{\alpha,1}(-z)$, $z\in\mathbb{C}$;
(d) $\alpha\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\exp\left(-z\theta\right)d\theta=E_{\alpha,\alpha}(-z)$, $z\in\mathbb{C}$.
Maintenant, nous énonçons certaines propriétés des dérivés fractionnaires et des intégrales fractionnaires. Soit $T>0$ et $0<\alpha<1$, si ${}_0^C D_t^\alpha f\in L^1(0,T), g\in C^1([0,T])$ et $g(T)=0$, alors nous avons la formule suivante d'intégration par parties (voir par exemple [39])

$$\int_0^T g(t){}_0^C D_t^\alpha f(t)dt=\int_0^T (f(t)-f(0)){}_t^C D_T^\alpha g(t)dt, \tag{3.2.7}$$

où

$${}_t^C D_T^\alpha g(t)=-\frac{d}{dt}\,{}_tJ_T^{1-\alpha}g(t),$$

$${}_tJ_T^{1-\alpha}g(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (s-t)^{-\alpha}g(s)ds,$$

pour $T>0$ et $n>0$, si on pose $\varphi(t)=(1-\frac{t}{T})_+^n$,
alors
${}_t^C D_T^\alpha\varphi(t)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}T^{-\alpha}(1-\frac{t}{T})^{n-\alpha}$, $t\leq T$.
Soit $T(t)=\exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right)$. Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, (voir par exemple [14, 15]) , et pour $t>0$, $x\in\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}T(t)u_0 &= \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x-y,t)u_0(y)dy \qquad ,\\ G_\beta(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(ix\xi-t\left|\xi\right|^\beta\right)d\xi.\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Il est bien connu que $G_\beta(x,t)$ satisfait

$$G_\beta(x,1) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \ \ , G_\beta(x,t) \geq 0 \, , \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t)dx = 1.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et la forme $G_\beta(x,t) = t^{-N/\beta} G_\beta(xt^{-1/\beta}, 1)$, nous avons

$$\|G_\beta(t) * v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \, , \tag{3.2.9}$$

pour tout $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq r \leq q \leq \infty$.
On définit les opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ par

$$P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) u_0 d\theta, \, t \geq 0, \tag{3.2.10}$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \alpha \int_0^\infty \theta \phi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) u_0 d\theta, \, t \geq 0. \tag{3.2.11}$$

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire linéaire suivante

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) + (-\Delta)^{\beta/2} u(x,t) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \end{cases} \tag{3.2.12}$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^1((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution de (3.2.12), alors elle satisfait (voir $[43, 5]$)

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) f(x,s) ds,$$

où $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ sont respectivement données par (3.2.10) et (3.2.11)
On pose, pour $0 < \alpha < 1$,

$$K(x,t) = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) G_\beta(x, t^\alpha \theta) d\theta \ , \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \, , t > 0.$$

Notons que, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \, , G_\beta(x, t^\alpha \theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$, alors K est bien défini.
Puisque $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) d\theta = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t) dx = 1$, on a

$$\|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \qquad t > 0.$$

On annonce maintenant les lemmes suivants qui donnent quelques propriétés utiles aux opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ (voir$[46]$).

Lemme 3.1 *L'opérateur $P_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$ a les propriétés suivantes :*

(a) si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et $\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,
(b) si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\beta}{N}$, alors

$$\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(1-N/\beta r)}{\Gamma(1-\alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} . \tag{3.2.13}$$

Lemme 3.2 *Pour l'opérateur $S_{\alpha,\beta}(t), t > 0$, nous avons les résultats suivants :*

(a) si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $S_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} ;$$

(b) Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, si $\frac{1}{r} < \frac{2\beta}{N}$, alors

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha(4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(2-N/\beta r)}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} . \tag{3.2.14}$$

Lemme 3.3 *Soit $A = (-\Delta)^{\beta/2}$. Pour $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, nous avons $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 \in D(A)$, pour $t > 0$, et*

$${}_0^C D_t^\alpha P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = AP_{\alpha,\beta}(t)u_0, \ \ t > 0,$$

$$\|AP_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C}{t^\alpha} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} , \ \ t > 0,$$

pour certaine constante $C > 0$.

Lemme 3.4 *Supposons que $f \in L^q((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$, $q > 1$, et que*

$$z(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) f(s) ds ,$$

alors

$${}_0J_t^{1-\alpha} z(t) = \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s) f(s) ds.$$

De plus, si $\alpha q > 1$, alors $z \in C((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$.

3.3 Existence Locale

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe, nous prouvons l'existence locale pour le problème (3.1.1)-(3.1.2).
Premièrement, nous donnons la définition de la solution douce de (3.1.1)-(3.1.2)

Définition 3.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T > 0$.On dit que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de (3.1.1)-(3.1.2), si u satisfait*

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)(x,s)ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{3.3.15}$$

Théorème 3.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max} = T(u_0) > 0$ et une unique solution douce $u \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème (3.1.1)-(3.1.2). De plus, soit $T_{\max} = +\infty$, ou $T_{\max} < +\infty$ avec $\|u\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$. Si, en outre, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ pour $t \in (0,T_{\max})$. De plus, si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour un certain $r \in [1,\infty)$, alors $u \in C([0,T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.*

Preuve. Pour $T > 0$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, on définit ■

$$E_T = \left\{ u \mid u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right\},$$

et

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad u,v \in E_T.$$

Puisque $C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, il en résultat que (E_T, d) est un espace métrique complet.

Maintenant, nous définissons l'opérateur

$$G(u)(t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds, \qquad u \in E_T.$$

Ensuite, en utilisant (3.2.14), nous avons

$$
\begin{aligned}
& \|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1}\, {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u) d\sigma ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \|u(\sigma)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
= & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{\gamma t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^p_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
= & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Si nous choisissons T assez petit telle que

$$
\frac{2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 1,
$$

nous obtenons

$$
\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
$$

En outre, pour $u, v \in E_T$, nous avons

$$
\begin{aligned}
& \|G(u)(t) - G(v)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|v|^{p-1}v)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-t)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
= & \frac{\gamma t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{C(p)2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{2} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}
$$

grâce à l'inégalité suivante

$$\left||u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right|\leq C(p)\,|u-v|\,(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}),$$

où T est choisi tel que

$$\frac{C(p)2^{p}\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\left\|u_0(t)\right\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, G est contractif sur E_T. Donc, G a un point fixe unique $u\in E_T$ par l'argument du point fixe de Banach. Ensuite, en utilisant l'unicité des solutions, nous concluons l'unicité de la solution sur un intervalle maximal $[0,T_{\max})$, où

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0:\text{il existe une solution douce }u\in L^\infty([0,T]\,,C_0(\mathbb{R}^N))\text{ pour }(3.1.1)-(3.1.2)\right\}.$$

Supposons que $T_{\max}<\infty$ et qu'il existe une constante positive M telle que

$$\left\|u(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq M,\qquad\qquad t\in[0,T_{\max})\,.$$

Puisque $P_{\alpha,\beta}(t)u_0$ est uniformément continu sur $[0,T_{\max}]$, donc la limite $\lim_{t\to T_{\max}}u(x,t)$ existe. On note $u_{T_{\max}}=\lim_{t\to T_{\max}}u(x,t)$. Donc, $u\in C([0,T_{\max}]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$ et par le Lemme 3.4 nous avons

$$\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\in C([0,T_{\max}]\,,C_0(\mathbb{R}^N)).$$

Pour $h>0$, $\delta>0$, soit

$$E_{h,\delta}=\left\{u\in C([T_{\max},T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N)):u(T_{\max})=u_{T_{\max}},d(u,u_{T_{\max}})\leq\delta\right\},$$

où

$$d(u,v)=\max_{t\in[T_{\max},T_{\max}+h]}\left\|u-v\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\qquad u,v\in E_{h,\delta}.$$

Comme $C([T_{\max},T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, alors $(E_{h,\delta},d)$ est un espace métrique complet.

Nous définissons l'opérateur G sur $E_{h,\delta}$ par

$$\begin{aligned}G(v)(t)\quad&=\quad P_{\alpha,\beta}(t)u_0+\int_0^{T_{\max}}(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\\&\qquad+\int_{T_{\max}}^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|v|^{p-1}v)ds,\end{aligned}$$

pour $v \in E_{h,\delta}$. Clairement, on a $G(v) \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N))$, et $G(v)(T_{\max}) = u(T_{\max})$.
En répétant l'argument ci-dessus, nous pouvons prouver que G a un point fixe $v \in E_{h,\delta}$.
Puisque

$$v(T_{\max}) = G(v)(T_{\max}) = u(T_{\max}),$$

si on pose

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0, T_{\max}), \\ v(x,t), & t \in [T_{\max}, T_{\max}+h] \end{cases},$$

alors $\tilde{u} \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N))$ et

$$\tilde{u}(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^{\gamma}(|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u})ds.$$

Ensuite, $\tilde{u}$ est une solution de (3.1.1)-(3.1.2), ce qui est en contradiction avec la définition de $T_{\max}$.
Supposons que $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq r < \infty$, alors nous répétons le même argument que ci-dessus dans l'espace suivant

$$\begin{aligned} E_{T,r} &= \{u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)), \text{ tel que} \\ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))} &\leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \|u\|_{L^\infty([0,T],L^r(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\}. \end{aligned}$$

En estimant de $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans le théorème de mappage de contraction, en utilisant (3.2.14), nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$. Puis nous concluons que

$$u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)).$$

Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors nous pouvons construire une solution non négative de (3.1.1)-(3.1.2) sur $[0,T]$ en appliquant l'argument ci-dessus dans l'ensemble $E_T^+ = \{u \in E_T : u \geq 0\}$. En particulier, il résulte de (3.3.15) que $u(t) \geq 0$ sur $(0, T_{\max})$.

3.4 Explosion des solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (3.1.1)-(3.1.2) et après nous prouvons l'explosion de solutions.

Définition 3.2 *Soit* $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N), 0 < \beta \leq 2, 0 < \alpha < 1-\gamma, 0 < \gamma < 1$ *et* $T > 0$. *On dit que* $u \in L^p((0,T), L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N))$ *est une solution faible de (3.1.1)-(3.1.2) si*

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,{}_t^CD_T^{\alpha}\psi(x,t)dxdt \\ = &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\psi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,{}_t^CD_T^{\alpha}\psi(x,t)dxdt, \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

pour toute fonction test $\psi\in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\operatorname{supp}_x\psi\subset\subset\mathbb{R}^N$ *et* $\psi(.,T)=0.$

Nous donnons maintenant le lemme suivant qui prouve que toute solution douce du problème (3.1.1)-(3.1.2) est une solution faible.

Lemme 3.5 *Soit* $u_0\in C_0(\mathbb{R}^N)$, *et* $u\in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^N))$ *une solution douce de (3.1.1)-(3.1.2). Alors* u *est une solution faible de (3.1.1)-(3.1.2), pour tous* $0<\beta\leq 2,\ 0<\alpha<1-\gamma,\ 0<\gamma<1$ *et* $T>0$.

Preuve. *Supposons que* $u\in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^N))$ *est une solution douce de (3.1.1)-(3.1.2), alors nous avons*

$${}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)={}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0)+{}_0J_t^{1-\alpha}\Big(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s){}_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\Big).$$

En utilisant le Lemme 3.4, nous obtenons

$${}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)={}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}u_0-u_0)+\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s){}_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds.$$

Alors, pour tout $\psi\in C^1([0,T],H_{\beta}(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\operatorname{supp}_x\psi\subset\subset\mathbb{R}^N$ *et* $\psi(x,T)=0$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}{}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s){}_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dsdx+\int_{\mathbb{R}^N}{}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}u_0-u_0)\psi dx \\ &= H_1(t)+H_2(t). \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Par le Lemme 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N}{}_0^CD_t^{\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx+\int_{\mathbb{R}^N}{}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0)\psi_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}A(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx+\int_{\mathbb{R}^N}{}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0)\psi_t dx. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Soit $h > 0, t \in [0,T)$ *et* $t+h \to T$*, alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{H_1(t+h)-H_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t+h-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)d\theta dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)d\theta dxds \\
&= H_3+H_4+H_5,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
H_3 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\qquad \times\psi(x,t+h)dx, \\
H_4 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta)-T((t-s)^\alpha\theta)\right)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\qquad \times\psi(x,t)dx, \\
H_5 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta)-T((t-s)^\alpha\theta)\right)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\qquad \times(\psi(x,t+h)-\psi(x,t))dx.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, quand $h \to 0$*, nous concluons que*

$$\begin{aligned}
H_3 &\to \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dx, \\
H_4 &\to \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds\psi_t dx, \\
H_5 &\to \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)dsA\psi dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_1 sur $[0,T)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dx + \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi_t dxds \\ &+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)A\psi dxds.\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dx \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds\right)\psi_t dx \\ &+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)A\psi dxds,\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

pour $t \in [0,T)$. Par (3.4.17)-(3.4.19), nous avons

$$\int_0^T \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt} dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dxdt = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t)u_0(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u-u_0)_0^C D_T^\alpha \psi dxdt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dxdt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt \\ = \;& 0.\end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \, {}_t^C D_T^\alpha \psi dxdt \\ = &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \, {}_t^C D_T^\alpha \psi dxdt,\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Lemme. ∎

Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (3.1.1)-(3.1.2).

Définition 3.3 *On dit que la solution du probléme (3.1.1)-(3.1.2) explose en temps fini, si*

$$\lim_{t\to T} \|u(.,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} = +\infty.$$

Théorème 3.2 *Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$. Si*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_1 (x)\, dx > 0,$$

où $\varphi_1 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Alors, la solution douce du problème (3.1.1)-(3.1.2) explose en temps fini.

Preuve. D'après le Lemme 3.5, toute solution douce de (3.1.1)-(3.1.2) est une solution faible. En utilisant la définition 3.2 avec

$$\psi(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma} \left(\varphi_1(x)\, \varphi_2(t)\right), 0 < \gamma < 1,$$

pour tout $\varphi \in C^1([0,T], H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ où $\mathrm{supp}_x\, \varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,T) = 0$, le fait que ${}_t J_T^{\gamma}({}_t^C D_T^{\gamma}\varphi(x,t)) = \varphi(x,t)$ et la formule d'intégration par parties (3.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^p \varphi dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi(x,t)\, dx dt \\ = \;& \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\, (-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x,t)\, dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\; {}_t^C D_T^{\alpha} \varphi(x,t)\, dx dt, \end{aligned}$$

Ici, on prend φ_1 est le premier vecteur propre de $(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}$ dans un domaine borné Ω, associé à la première valeur propre $\lambda = \lambda_1^{\beta/2}$, tel que

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1 = \lambda_1^{\beta/2} \varphi_1, x \in \Omega; \varphi_1 = 0, x \in \partial\Omega \text{ et } \int\limits_{\Omega} \varphi_1 dx = 1,$$

où $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2R^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\}, R > 0$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} u^p \varphi_1 \varphi_2 dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} u_0(x)\, \varphi_1\, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt \\ = \;& \lambda_1^{\beta/2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} u \varphi_1\, {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} u\, \varphi_1\, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt, \end{aligned}$$

Par conséquent, par l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\int_\Omega u\varphi_1 dx \right)^p \varphi_2 dt + \int_0^T \int_\Omega u_0(x)\, \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt \\
\leq \;& \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T \int_\Omega u\varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u \, \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt.
\end{aligned}$$

Soit $f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\varphi_1 dx$. Pour R tend vers ∞, on a

$$\int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \leq \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T f {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dt + \int_0^T f {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt. \tag{3.4.20}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p} a^p + \frac{2^{q-1}}{q} b^q, \;\; pq = p+q, \; a, b > 0, \; p, q > 1,$$

dans le côté droit de (3.4.20), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \\
\leq \;& \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T f \varphi_2^{\frac{1}{p}} \varphi_2^{\frac{-1}{p}} \, {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dt + \int_0^T f \varphi_2^{\frac{1}{p}} \varphi_2^{\frac{-1}{p}} \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \\
\leq \;& \frac{1}{2p} \int_0^T f^p \varphi_2 dt + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
& + \frac{1}{2p} \int_0^T f^p \varphi_2 dt + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \;\; \leq \;\; & C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
& + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt.
\end{aligned}$$

En prenant

$$\varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m, \;\; t \in [0, T], \; m \geq \max\left\{ 2, \frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1} \right\},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_0^T f(0)\,{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\varphi_2 dt &= Cf(0)\int_0^T T^{-\alpha-\gamma}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\alpha-\gamma}dt \\ &= Cf(0)\,T^{-\alpha-\gamma}\left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\alpha-\gamma+1}}{-\frac{1}{T}(m-\alpha-\gamma+1)}\right]_0^T \\ &= Cf(0)\,T^{-\alpha-\gamma+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C\int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left({}_t^C D_T^{\gamma}\varphi_2\right)^{\frac{p}{p-1}}dt &= C\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{-m}{p-1}}T^{-\frac{\gamma p}{p-1}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{(m-\gamma)p}{p-1}}dt \\ &= CT^{-\frac{\gamma p}{p-1}}\left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\frac{\gamma p}{p-1}+1}}{-\frac{1}{T}\left(m-\frac{\gamma p}{p-1}+1\right)}\right]_0^T \\ &= CT^{1-\frac{\gamma p}{p-1}},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C\int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\varphi_2\right)^{\frac{p}{p-1}}dt &= C\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{-m}{p-1}}T^{\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{(m-\gamma-\alpha)p}{p-1}+1}dt \\ &= CT^{\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}}\left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}+1}}{-\frac{1}{T}\left(m+\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}+1\right)}\right]_0^T \\ &= CT^{-\frac{(\gamma+\alpha)p}{p-1}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T f^p\varphi_2 dt + CT^{1+\gamma-\alpha}f(0) \le C\left(T^{1-\frac{p\gamma}{p-1}} + T^{1-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}\right).$$

Alors

$$f(0) \le C\left(T^{\alpha+\gamma-\frac{p\gamma}{p-1}} + T^{-\frac{\alpha+\gamma}{p-1}}\right). \tag{3.4.21}$$

En laissant $T\to\infty$ dans (3.4.21), nous obtenons $f(0)\le 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, ce qui prouve que la solution explose en temps fini. ■

Théorème 3.3 *Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0 \ge 0, u_0 \not\equiv 0$. Si*

$$1 < p < 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N},$$

alors toute solution du problème (3.1.1)-(3.1.2) explose en temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u est une solution globale douce pour le problème (3.1.1)-(3.1.2). En utilisant le Lemme 3.5 et la Définition 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J_t^{\gamma}\left(|u|^{p-1}u\right)\psi(x,t)\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,{}_t^C D_T^{\alpha}\psi(x,t)\,dxdt\\
=\;&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\psi(x,t)\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,{}_t^C D_T^{\alpha}\psi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

pour tout $\psi\in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x\psi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\psi(.,T)=0$, où $0<\alpha<1-\gamma$ et $0<\gamma<1$.

Soit $\Phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(s)=1$ pour $|s|\le 1$, $\Phi(s)=0$ pour $|s|>2$ et $0\le\Phi(s)\le 1$.

Maintenant, nous prenons

$$\psi(x,t)={}_t^C D_T^{\gamma}\varphi(x,t)={}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_1^l(x)\,\varphi_2(t)\right),\, l\ge\frac{p}{p-1},$$

pour tout $\Phi\in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x\varphi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,T)=0$, avec

$$\varphi_1(x)=\Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right),\varphi_2(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^m,m\ge\max\left\{2,\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}\right\},$$

pour $t\in[0,T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)dxdt \qquad (3.4.22)\\
=\;&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l\,{}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)dxdt.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Ju (voir [1])

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\left(\varphi_1^l\right)\le l\varphi_1^{l-1}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)dxdt\\
\le\;& C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\,{}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)\right|dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)\,\left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2(t)\right)\right|dxdt,
\end{aligned}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Ensuite, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + CT^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \\
\leq\ & C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta}{2}}\right)\varphi_1\,{}_t^C D_T^{\gamma}(\varphi_2(t))\right| dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^l(x)\ \left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
\leq\ & \frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^{l-q}\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l\right|^q\left|{}_t^C D_T^{\gamma}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt \\
&+\frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt.
\end{aligned}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{T},\quad \xi = \frac{x}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

nous obtenons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + T^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{1+\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}. \tag{3.4.23}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}.$$

Donc, si une solution de (3.1.1)-(3.1.2) existe globalement, alors en prenant $T\to+\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0\equiv 0, \tag{3.4.24}$$

ce qui est une contradiction. Donc la solution de (3.1.1)-(3.1.2) explose en temps fini. ■

Maintenant, en fonction des résultats d'explosion précédents, nous pouvons déduire le théorème suivant qui donne l'explosion de L^∞–solutions du problème (3.1.1)-(3.1.2). Soit $T_\varepsilon = \sup\left\{T\in[0,\infty)\,;\ \text{il existe une solution unique } u\in C\left([0,T), L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \text{ de } (3.1.1)-(3.1.2)\right\}$ le temps d'existence maximal de L^∞-solutions. Alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.4 *Soit $u_0\in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0\geq 0, u_0\not\equiv 0$. Si $1<p<1+\beta(\alpha+\gamma)/\alpha N$, alors la durée de vie $T_\varepsilon<+\infty$ et la norme*

L^∞ de solutions explose en $t=T_\varepsilon$,

$$\liminf_{t\to T_\varepsilon}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty. \tag{3.4.25}$$

Preuve. Supposons que $T_\varepsilon = +\infty$. Alors u est la solution globale faible de (3.1.1)-(3.1.2) au sens de la définition 3.2 et du Théorème 3.3 nous avons $u \equiv 0$. D'autre part, par l'identité (3.4.22), nous déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0,$$

ce qui est une contradiction. Nous avons donc $T_\varepsilon < +\infty$. Ensuite, nous prouvons un éclatement de la norme L^∞ de la solution locale u. D'abord, nous assumons

$$\liminf_{t \to T_\varepsilon} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty,$$

alors il existe une suite $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, T_\varepsilon)$ et une constante positive $M > 0$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = T_\varepsilon,$$

et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M. \tag{3.4.26}$$

Ainsi, pour tout $t_n \in \{t_n\}_{n\geq 1}$, par l'estimation (3.4.26) et le théorème de l'existence locale, il existe une constante positive $T(M)$ indépendant de t_n telle que nous pouvons construire une solution

$$u \in X = C\left(\left[t_n, t_n + T(M), L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right)\right),$$

de (3.1.1)-(3.1.2).
De plus, puisque la limite de t_n existe, on peut prendre $t_n \in [0, T_\varepsilon)$ tel que $T_\varepsilon - T(M) < t_n \leq T_\varepsilon$. Pour cela nous pouvons aussi construire une solution $u \in X$. Mais l'estimation $t_n + T(M) > T_\varepsilon$ est en contradiction avec la définition de T_ε. Par conséquent nous obtenons

$$\liminf_{t \to T_\varepsilon} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty.$$

Ce qui complète la preuve du théorème. ■

3.5 Existence globale

Dans cette section, nous étudions l'existence globale de solutions du problème (3.1.1)-(3.1.2).

Théorème 3.5 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Si $p \geq 1 + \beta(\alpha+\gamma)/\alpha N$ et $\|u_0\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^N)}$ est suffisamment petit, où*
$q_c = \alpha N(p-1)/\beta(\alpha+\gamma)$, alors la solution de (3.1.1)-(3.1.2) existe globalement.
Notons que nous pouvons prendre $|u_0(x)| \leq C|x|^{-\beta(\alpha+\gamma)/(p-1)}$ au lieu de $u_0 \in L^{q_c}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Nous construisons la solution globale de (3.1.1)-(3.1.2) par le principe de mappage de contraction.
Puisque

$$p \geq 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N} > 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N + \beta - \beta(\alpha+\gamma)},$$

on peut choisir une constante positive $q > 0$ telle que

$$\frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{\alpha N}{\beta q} < \frac{\alpha+\gamma}{p-1}, \tag{3.5.27}$$

et

$$\frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \alpha < \frac{\alpha N}{\beta q}. \tag{3.5.28}$$

Soit

$$\kappa = \frac{\alpha N}{\beta}\left(\frac{1}{q_c} - \frac{1}{q}\right) = \frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \frac{\alpha N}{\beta q}. \tag{3.5.29}$$

Ainsi, il découle de (3.5.27)-(3.5.29) que

$$q > \frac{N\left(p-1\right)}{\beta} > q_c, 0 < p\kappa < 1, \alpha+\gamma = \frac{\alpha N\left(p-1\right)}{\beta q} + \left(p-1\right)\kappa. \tag{3.5.30}$$

Comme $u_0 \in L^{q_c}$, en utilisant (3.2.13) et (3.5.29), on obtient pour $t > 0$,

$$\sup_{t>0} t^{\kappa} \left\|P_{\alpha,\beta}\left(t\right)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\left\|u_0\right\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^N)} = \eta. \tag{3.5.31}$$

Si $u_0(x) \leq C|x|^{-\beta(\alpha+\gamma)/(p-1)}$ pour une constante $C > 0$, alors

$$\left\|T\left(t\right)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}}.$$

Par conséquent

$$\left\|P_{\alpha,\beta}\left(t\right)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{\alpha N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{p-1}} \int_0^{\infty} \phi_\alpha\left(\theta\right)\theta^{\frac{N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}}\,d\theta.$$

Puisque $N/\beta q - (\alpha+\gamma)/\alpha(p-1) > -1$,

$$\int_0^{\infty} \phi_\alpha\left(\theta\right)\theta^{\frac{N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}}\,d\theta < \infty.$$

Par conséquent, nous pouvons également voir que (3.5.31) est satisfaite.
Soit

$$Y = \left\{ u \in \left(L^{\infty}(0,\infty), L^{q}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\right) : \|u\|_{Y} < \infty \right\},$$

où

$$\|u\|_{Y} = \sup_{t>0} t^{\kappa} \|u(t)\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})}.$$

Pour $u \in Y$, nous définissons

$$\Phi(u)(t) = P_{\alpha,\beta}(t)\, u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\, J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1}u\right) ds.$$

Notons $B_M = \{u \in Y : \|u\|_Y \le M\}$. Pour $u, v \in B_M$, $t \ge 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & t^{\kappa} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})} \\ = \;& t^{\kappa} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\, J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1}u\right) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\, J_s^{\gamma}\left(|v|^{p-1}v\right) ds \right\| \\ \le \;& t^{\kappa} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\, J_s^{\gamma}(|u|^{p} - |v|^{p})\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})}\, ds. \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

Puisque $q > p > N(p-1)/2\beta$, donc $p/q - 1/q < 2\beta/N$. Ensuite, par le Lemme 3.2, nous avons

$$\begin{aligned} & t^{\kappa} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})} \\ \le \;& Ct^{\kappa} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta r}} \int_0^s (s-\sigma)^{\gamma-1} \|u^p - v^p\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{N})}\, d\sigma ds \\ \le \;& Ct^{\kappa} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{\gamma-1} \|u^p - v^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^{N})}\, d\sigma ds \\ \le \;& Ct^{\kappa} \int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} (s-\sigma)^{\gamma-1} \left(\|u\|^{p-1}_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})} - \|v\|^{p-1}_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})} \right) \|u-v\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{N})}\, d\sigma ds \\ \le \;& Ct^{\kappa} M^{p-1} \int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} (s-\sigma)^{\gamma-1} \sigma^{-p\kappa} d\sigma ds\, \|u-v\|_{Y}. \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Ensuite, en utilisant (3.5.27) et $p\kappa < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} (s-\sigma)^{\gamma-1} \sigma^{-p\kappa} d\sigma ds \\ = \;& \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{\gamma-1} \sigma^{-p\kappa} d\sigma \right) \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}}{s^{p\kappa-\gamma}} ds \\ = \;& Ct^{\alpha+\gamma-p\kappa-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} = Ct^{-\kappa}, \end{aligned} \tag{3.5.34}$$

pour tout $t \geq 0$. Donc, on déduit de (3.5.33) et (3.5.34) que

$$t^{\kappa} \left\| \Phi\left(u\right) - \Phi\left(v\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq CM^{p-1} \left\| u\left(t\right) - v\left(t\right) \right\|_{Y}.$$

Si on choisit M assez petit pour que $CM^{p-1} < \frac{1}{2}$, alors nous obtenons

$$t^{\kappa} \left\| \Phi\left(u\right) - \Phi\left(v\right) \right\|_{Y} \leq \frac{1}{2} \left\| u - v \right\|_{Y}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} t^{\kappa} \left\| \Phi\left(u\right)\left(t\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \eta + CM^p t^{\kappa} \int_0^t \int_0^s \left(t-s\right)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} \left(s-\sigma\right)^{\gamma-1} \sigma^{-p\kappa} d\sigma ds \\ &\leq \eta + CM^p, \end{aligned}$$

On peut choisit η et M assez petit pour que

$$\eta + CM^p \leq M.$$

Par conséquent, par le principe de mappage de contraction, nous déduisons que Φ a un point fixe unique $u \in B_M$.

Ensuite, nous allons prouver que $u \in C([0,\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$. Tout d'abord, nous prouvons que pour $T > 0$ assez petit, $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$.

En fait, la preuve ci-dessus montre que u est la solution unique dans

$$B_{M,T} = \{u \in \left(L^{\infty}\left(0,T\right), L^q\left(\mathbb{R}^N\right)\right) : \sup_{0<t<T} t^{\kappa} \left\| u\left(t\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq M\}.$$

D'après le Théorème 3.1 et le fait que $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, le problème (3.1.1)-(3.1.2) a une solution unique $\tilde{u} \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q\left(\mathbb{R}^N\right))$, pour $T > 0$ assez petit.

Par conséquent, nous pouvons prendre T assez petit pour que

$$\sup_{0<t<T} t^{\kappa} \left\| \tilde{u}\left(t\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq M.$$

Ensuite, par unicité, nous avons $u \equiv \tilde{u}$ pour $t \in [0,T]$ et $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q\left(\mathbb{R}^N\right))$.

Ensuite, nous montrons que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ par l'argument "bootstrap". Pour $t > T$, nous avons

$$\begin{aligned}
u - P_{\alpha,\beta}(t)\, u_0 &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, {}_0J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\
&= \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, {}_0J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\
&\quad + \int_T^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, {}_0J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\
&= H_6 + H_7.
\end{aligned}$$

D'après $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$, il s'ensuit que $H_6 \in C([T,\infty], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N))$. Supposons que $T_1 > T$, alors nous avons $u^p \in L^\infty((T,T_1), L^{q/p}(\mathbb{R}^N))$, et ${}_0J_t^{\gamma}(|u|^p) \in L^\infty((T,T_1), L^{q/p}(\mathbb{R}^N))$. Notant que $q > N(p-1)/\beta$, on peut choisir $r > q$ tel que $N(p/q - 1/r)/\beta < 1$. Par le Lemme 3.2 et en répétant les mêmes calculs que ci-dessus, nous obtenons $H_7 \in C([T,T_1), L^r(\mathbb{R}^N))$. Et puisque la constante T_1 est arbitraire, on a $H_7 \in C([T,\infty), L^r(\mathbb{R}^N))$, alors $u \in C\left([T,\infty], L^r(\mathbb{R}^N)\right)$.
Posons $r = q\delta^i$ et notons que $\delta^i > 1$,

$$\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q\delta^i}\right) < 1, i = 1, 2, ...,$$

alors nous déduisons par les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment que $u \in C\left([T,\infty], L^{q\delta^i}(\mathbb{R}\right.$
Par des étapes finies, nous avons

$$\frac{p}{q\delta^i} < \frac{\beta}{N},$$

alors

$$u \in C\left([0,\infty), C_0(\mathbb{R}^N)\right).$$

■

Chapitre 4

Conclusion

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension de ce travail, nous avons présenté des résultats d'existence des solutions locales et globales, des resultats d'explosion en temps fini ainsi que les conditions nécessaires pour l'existence locale et globale de la solution pour certains prblèmes d'évolution fractionnaires en temps et en espace. Ces resultats montre que la solution est globale dans le cas sur-critique pour toute donnée initiale ayant une mesure assez petite, tandis que dans le cas sous-critique la solution explose en temps fini.
Au terme de ce mémoire, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de noueaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Bibliographie

[1] A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Calc. Appl. Anal. 20 (3) (2017) 574–594, http ://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0031.

[2] D. Andreucci, A. F. Tedeev, Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations, Adv. Differential Equations 10 (2005), no. 1, 89-120.

[3] P. Baras, R. Kersner, Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations, J. Differential Equations 68 (1987), no. 2, 238-252.

[4] P. Baras, M. Pierre,Critère d'existence de solutions positives pour des equations semi-lin eaires non monotones, Ann. Inst. H. Poincar e Anal. Non Lin eaire 2 (1985), 185-212.

[5] E.G. Bazhlekova, Subordination principle for fractional evolution equations, Fract. Calc. Appl. Anal. 3 (2000), 213-230.

[6] M. Birkner, J. A. Lopez-Mimbela, A.Wakolbinger, Blow-up of semilinear PDE's at the critical dimension. A probabilistic approach (English summary), Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 8, 2431-2442.

[7] K. Bogdan, T. Byczkowski, Potential theory for the -stable Schrodinger operator on bounded Lipschitz domains, Studia Mathematica 133 (1999), no. 1, 53-92.

[8] T. Cazenave, F. Dickstein, F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Nonlinear Analysis 68 (2008), 862-874.

[9] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linèaires, Ellipses, Paris, (1990).

[10] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1-89.

[11] M. Chlebik, M. Fila, From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems, Rend. Mat. Appl. (7) 19 4 (1999), 449-470.

[12] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys. 15 (1943), 1-89.

[13] S. Dipierro, E. Valdinoci, A simple mathematical model inspired by the Purkinje cells : from delayed travelling waves to fractional diffusion, Bull. Math. Biol. 80 (2018) 1849-1870, http ://dx.doi.org/10.1007/s11538-018-0437-z.

[14] J. Droniou et C. Imbert, Fractal first order partial differential equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 182 (2) (2006) 299-331.

[15] S. D. Eidelman, A. N. Kochubei, Cauchy problem for fractional diffusion equations, J. Differential Equations 99 (2004), no. 2, 211-255.

[16] M. Fila, P. Quittner, The blow-up rate for a semilinear parabolic system, J. of Mathematical Analysis and Applications 238 (1999), 468-476.

[17] A. Fino, G. Karch, Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian, J. Monatsh. Math. 160 (2010), 375-384.

[18] A. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation. 2009. <hal-00398110v6>

[19] A. Z. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl. Math. 70 (2012), 133-157.

[20] H. Fujita, On the blowing up of solutions f the problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci.Univ. Tokyo 13 (1966), 109-124.

[21] M. Guedda, M. Kirane, Criticality for some evolution equations, Dierential Equations 37(2001), 511-520.

[22] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 503-505.

[23] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2-D quasi-geostrophic equations, Comm. Pure. Appl. Ana. (2005), 161-181.

[24] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional diferential equations, 2006.

[25] M. Kirane, Y. Laskri, N.-e. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl.312 (2005), 488-501.

[26] M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear Reaction-Di usion systems, J. Math. Analysis and Appl. 268 (2002), 217-243.

[27] K. Kobayashi, On some semilinear evolution equations with time-lag, Hiroshima Math. J. 10(1980), 189-227.

[28] F. Mainardi, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in : S. Rionero, T. Ruggeri (Eds.), Waves and Stability in continuous Media, World Scientific, Singapore, 1994, pp. 246-251.

[29] R. Metzler, J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys A. 37 (2004), 161-208.

[30] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial diferential equations and inequalities, Proc. Steklov. Inst. Math. 232 (2001), 240–259.

[31] A. Nabti, Life span of blowing-up solutions to the Cauchy problem for a time–space fractional diffusion equation, Computers and Mathematics with Applications (2018), https ://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.034.

[32] M. Nagasawa, T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 301-310.

[33] J. Prüss, Evolutionary integral equations and applications, Vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1993.

[34] C. A. Roberts, W. E. Olmstead, Blow-up in a subdi usive medium of in nite extent, Fract.Calc. Appl. Anal. 12 (2009), no. 2, 179-194.

[35] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[36] I. M. Sokolov, J. Klafter, From di usion to anomalous di usion : a century after Einstein's Brownian Motion, Chaos 15 (2005), 6103-6109.

[37] P. Souplet, Blow-up in nonlocal reaction-di usion equations, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998),1301-1334.

[38] P. Souplet, Monotonicity of solutions and blow-up for semilinear parabolic equations with nonlinear memory, Z. angew. Math. Phys. 55 (2004), 28-31.

[39] R. N. Wang, D. H. Chen, T. J. Xiao, Abstract fractional Cauchy problems with almosectorial operators, J. Differential Equations 252 (2012), 202-235.

[40] K. Yosida, Functional analysis, sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.