Table des matières

Abstract

The purpose of this work is to show the existence and uniqueness of the solutions. First, we study an initial problem of limit value with integral conditions for a parabolic equation. Second, we study a coupled system of hyperbolic equations with non-local conditions, using the energy inequalities method.

Résumé

Le but de ce travail est montrer l'existence et l'unicité de la solution forte. Premiérement, on a étudie un problème aux limites a valeur initiale pour une equation parabolique avec des conditions intégrales. Deuxièmement, on a étudie un problème aux limites a valeur initiale pour un système couplé d'équations hyperbolique avec des conditions non locale, par utilisant la méthode des inégalités énergétiques.

Abstract

The purpose of this work is to show the existence and uniqueness of the strong solution. First, we study an initial problem of limit value with integral conditions for a parabolic equation. Second, we study a coupled system of hyperbolic equations with non-local conditions, using the energy inequalities method.

Introduction

Des modèles mathématiques pour des problèmes mixtes avec des conditions non locaux peuvent être présentés dans de nombreux modèles d'ingénierie tel que la conduction thermique, la désintégration radioactive, l'écoulement sous l'eau, la physique du plasma, la thermoélasticité, la dynamique de population, les problèmes de vibration, la dispersion chimique, la théorie de transmission, la théorie de contrôle , diffusion de fluides dans des milieux poreux et bien d'autres. A cet égard, le lecteur devrait se référer à Ewing et Lin [13], Choi et Chan [10], Shi et Shilor [47], Bouziani [5], Cannon [6], Ionkin [16], Kirane [20], Nakushev [42], Muravei [41], Slemrod [48]. Les conditions standard telles que (Dirichlet, Neumann) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours suffisantes car elles dépendent du contexte physique sur lequel les données peuvent être mesurées à la limite du domaine physique.

La signification physique de conditions non locales telles que l'énergie totale, la masse moyenne, la masse totale, les moments, etc., a servi de cause fondamentale à l'intérêt considérable que suscite ce type de problème mixte.

De nombreuses méthodes ont été utilisées pour traiter des problèmes mixtes avec des conditions non locales. Par exemple, Cannon [6] et Kamynin [18] ont utilisé la méthode potentielle pour étudier certaines équations paraboliques. Ionkin [16], Ionkin et Moiseev [17] ont obtenu des résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution pour d'autres classes des équations paraboliques.

L'une des méthodes d'analyse fonctionnelle utilisées dans l'étude des problèmes mixtes est la méthode des estimations a priori, le lecteur peut se référer aux travaux de Bouziani [3, 4, 5], Mesloub [26, 27, 28, 29], Kartynik [19], Mesloub et Bouziani [30, 31, 32], Mesloub et Lekrine [33], Beilin [2], Mesloub et Messaoudi [34, 35], Muravei Philinovskii [41], Nakushev [42] et Pulkina [43] and Yurchuk [49]. Tous ces précédents ont traité des équations paraboliques et hyperboliques.

Le but de cette mémoire est de prouver l'existence et l'unicité de certains problèmes posés par utilisant la méthode d'analyse fonctionnelle.

Pour étudier les problèmes posés, nous écrivons généralement le problème donné dans le formulaire opérateur :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad \forall u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach B dans l'espace de Hilbert H, convenablement choisis. On établit les estimations a priori pour l'opérateur L et on démontre l'inégalité énergétique du type :

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_H, \quad \forall u \in D(L), \tag{$*$}$$

où $D(L)$ est le domaine de définition de l'opérateur L.

La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u, ses dérivées et ses premitives. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

On démontre ensuite que l'opérateur L est fermable (admet une fermeture) et on dénote $\overline{L}$ sa fermeture. la solution de l'équation

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right)$$

est appelée solution forte du problème considéré.

A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité $(*)$ à l'ensemble des solutions $u \in D\left(\overline{L}\right)$, on obtient

$$\|u\|_B \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_H \ , \ \forall u \in D\left(\overline{L}\right),$$

et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$. Comme l'image $R\left(\overline{L}\right)$ de l'operateure $\overline{L}$ est fermé dans l'espace H, et que $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$.

Pour démontrer l'existence de la solution forte, il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans H.

L'unicité de la solution forte est déduite de l'inégalité de l'énergie.

Cette mémoire est organisée comme suit :

Nous commençons par une introduction, par la suite dans le premier chapitre nous rappellons certaines notions préliminaires qui seront utilisées ultérieurement.

Dans la deuxiéme chapitre, on étudie un problème aux limites a valeur initiale pour une equation parabolique avec des conditions intégrales. On prouve l'existence et l'unicité d'une solution généralisée forte pour le problème donné.

Dans le troisième chapitre, on étudie un problème aux limites a valeur initiale pour un système unidimensionnel d'équations hyperbolique avec des conditions non locale. On prouve l'existence et l'unicité de la solution généralisée forte.

On termine par une conclusion et une liste de références utilisées dans cette mémoire.

Notations

X	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
$\rho(.,.)$	La distance.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}$.
$\lim$	La limite.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p \, dx < \infty$.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions u où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ tel que $u_i \in L^2(\Omega)$, $\forall i = \overline{1, n}$.
H	Un espace de Hilbert.
l	Une fonctionnelle linéaire.
L	Un opérateur linéaire.
$D(L)$	Le domaine de définition de L.
$\overline{L}$	La fermeture de L.
$R(L)$	L'ensemble des valeurs Lu pour tout $u \in D(A)$.
$\mathcal{L}$	Operateur différentiel.
$\frac{d}{dx}$	La dérivée ordinaire par-rapport à x.
$D^k u$	La dérivée généralisée.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$, où $\|k\| \leq l$.
$\mathring{W}_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in W_m^l(\Omega)$ à suport compact dans Ω.
$\|.\|_{m,\Omega}^{(l)}$	La norme dans l'espace $W_m^l(\Omega)$.
$(.,.)_{2,\Omega}^{(1)}$	Le produit scalaire dans l'espace $W_1^2(\Omega)$.
c_Ω	La constante de Poincaré.
$\frac{\partial}{\partial x}$	La dérivée partielle.
$\overrightarrow{\eta}$	Le vecteur unitaire de l'extérieur à $\partial\Omega$.
$\partial\sigma$	L'élément de surface de $\partial\Omega$.
B	Un espace de Banach.
$C(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions continues.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Espace Normés, Espace de Banach et Espace de Hilbert

1.1.1 Espace Normés

Définition 1.1 *Un espace vectoriel linéaire X est dite* ***espace normée*** *si pour chaque élément $x \in X$ il existe nombre réel noté par $\|x\|$ (norme de x), vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{k}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (inégalité triangulaire).

Ainsi , la norme est une application définie sur X, prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés 1 à 3.

Dans cet espace, on introduit la métrique $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (distance entre x et y).

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2 *Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace normé X est dite suite*

de Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon)\ \forall p, q > N_\varepsilon \Longrightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.3 *On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle* ***espace de Banach*** *tout espace normé complet.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.4 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, on appelle **produit scalaire** sur H toute application :*

$$(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{k}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\lambda x + \mu z, y) = \lambda (x, y) + \mu (z, y) \;\; \forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},$ (bilinéaire)
2. $\forall x, y \in H$, on a :

$$\begin{cases} (x,y) = (y,x) & \text{si l'espace est réel} \qquad \text{(symétrique)} \\ (x,y) = \overline{(y,x)} & \text{si l'espace est complexe} \quad \text{(hermitienne)} \end{cases}$$

3. $(x, x) \geq 0 \; \forall x \in H$ et $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (définie positive)

Le nombre (x, y) est appelé produit scalaire des vecteurs x et y.

Définition 1.5 *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace **préhilbertien**.*

L'espaces préhilbertien est un cas particulier de l'espace normée,ceci est exprimé par le lemme suivant.

Lemme 1.1 *Soit H un espace linéaire muni d'un produit scalaire .Alors l'expression*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

$\forall x \in H$, définit une norme sur H (appelée norme hilbertienne).

Définition 1.6 ***Un espace de Hilbert** est une espace préhilbertien complet .*

la distance sur H donnée par

$$\|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

Remarque 1.1 *L'espace de Hilbert est un cas particulier de l'espace de Banach.*

1.2 Orthogonaux et Complémentaire Orthogonal

Définition 1.7 *Soit H un espace préhilbertien et x, y deux vecteurs de H.On dit que x et y sont **orthogonaux** si $(x, y) = 0$. On note $x \perp y$.*

De même, pour les parties $A, B \subset H$ sont dit orthogonaux si tout $a \in A$ est orthogonal à tout $b \in B$:

$$a \perp b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

nous écrivons $x \perp A$ si $x \perp a \ \ \forall a \in A$.

Définition 1.8 *Soit M un sous-ensemble d'un espace préhilbertien H. On appelle **complémentaire orthogonal** de M et on note $M^{\perp}$ l'ensemble*

$$M^{\perp} = \{x \in H; \ \forall a \in M, (a, x) = 0\}.$$

Il est clair que $M^{\perp}$ est un sous-espace fermé, si M est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H alors, $H = M \oplus M^{\perp}$ (somme directe orthogonal).

Théorème 1.1 *Soit H un espace de Hilbert.Un sous-espace M de H est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.*

1.3 Quelques propriétés d'opérateurs et fonctionnelles linéaires

Définition 1.9 ***Une fonctionnelle linéaire** l sur un espace de Hilbert H est une application linéaire numérique continue $l(u)$*

$l : H \to \mathbb{R}$
$\quad u \to l(u)$

l est linéaire, $\forall u_1, u_2 \in H, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$l(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda l(u_1) + \mu l(u_2)$$

l est continue veut dire que $\exists c > 0$ tel que

$$|l(u)| \leq c \|u\|_H$$

1.3.1 Opérateur linéaire bornée

Définition 1.10 ***Un opérateur** A défini par un ensemble $D(A) \subset H$ (H espace de Hilbert) fait associé à chaque $u \in D(A)$ un certain élément $v \in H$ (ie)*

$$Au = v$$

A est linéaire si, $\forall u_1, u_2 \in D\,(A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2)$$

A est bornée si, $\exists c > 0$ tel que

$$\forall u \in D(A) \qquad \|Au\| \leq c\,\|u\| \quad \text{sur} \quad D(A).$$

– Un sous-ensemble important du domaine de A est l'espace nul de A, $N\,(A)$, où

$$N\,(A) = \{x \in D\,(A) : Ax = 0\}.$$

1.3.2 Opérateur linéaire [fermée,fermable]

Définition 1.11 *Le graphe de l'operateur linéaire $A : X \to Y$ est l'ensemble*

$$G(A) = \{(x, Ax)\,|x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Le graphe est un sous espace de $X \times Y$.

Définition 1.12 *On dit que l'operateur A est **fermé** si son graphe est fermé dans $X \times Y$.et noté par $\overline{A}$.*

Remarque 1.2 *Pour prouver que l'operateur A est fermé on procéde en générale de la maniére suivante on prend une suite (u_n) dans $D(A)$ tel que*

$u_n \to u$ dans X

et

$Au_n \to f$ dans Y

il s'agit ensuite de verifie que

$u \in D(A)$

$f = Au$

Définition 1.13 *L'operateur A est dit **férmable** si pour tout suite $u_n \in D(A),\ \ u_n \to 0$ et $Au_n \to f$ alors $f = 0$.*

1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.14 *Soit $m > 0, p \geq 1$, on note $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ l'ensemble définie par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^P(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega); \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \textit{et} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

et

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \textit{mesurable} \setminus \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \textit{mesurable} \setminus \exists C \textit{ tel que } |u(x)| \leq C \textit{ sur } \Omega \},$$

$L^p(\Omega)$ est un espace complet pour la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace complet pour la norme

$$L^\infty(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^m_\infty(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad ,$$

pour $p = 2$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\},$$

le produit scalaire dans $W^{m,2}(\Omega)$ est definie par

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

1.5 Formule de Green

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ de classe C^1. soient u, v deux fonctions de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$. Alors :

Première formule de Green :

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v.\nabla u)\, dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma.$$

Deuxième formule de Green :

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_\Gamma (v\frac{\partial u}{\partial v} - u\frac{\partial v}{\partial v}) d\sigma,$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface de Γ.

1.6 Opérateurs de régularisation

Soit $w\,(\xi)$ une fonction paire de classe C^∞ d'une seule variable ξ avec $w(\xi) > 0$ et $w(\xi) = 0$, si $|\xi| \geq 1$ et $\int\limits_{-1}^{1} w\,(\xi)\, d\xi = 1$ on note par

$$w_\varepsilon\,(x, x') = \frac{1}{\varepsilon} w\left(\frac{x - x'}{\varepsilon}\right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int\limits_{-1}^{1} w_\varepsilon\,(x, x')\, dx = \int\limits_{-1}^{1} w_\varepsilon\,(x, x')\, dx' = 1,$$

et

$$w_\varepsilon\,(x, x') = 0 \text{ si } |x - x'| \geq \varepsilon$$

Soit $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $u \in L^2\,(\Omega)$.

On définit l'opérateur de régularisation $\forall \varepsilon > 0,\ J_\varepsilon : L^2\,(\Omega) \to L^2\,(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} J_\varepsilon u &= \int\limits_\Omega w_\varepsilon\,(x, x')\, u(x') dx' \\ &= \int\limits_{|x - x'| < \varepsilon} w_\varepsilon\,(x, x')\, u(x') dx', \end{aligned}$$

Propriété de J_ε :

P$_1$ Pour $u \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\|J_\varepsilon u - u\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \text{ (ie) } J_\varepsilon u \underset{\varepsilon \to 0}{\to} u, L^2(\Omega),$$

P$_2$ Si $\alpha(x) \in C(\Omega)$ et pour tout $u \in L^2(\Omega)$, alors

$$\|\alpha J_\varepsilon u - J_\varepsilon(\alpha u)\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0,$$

P$_3$ Si $\alpha(x) \in C^1(\Omega)$ et pour tout $u \in L^2(\Omega)$, alors

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(\alpha J_\varepsilon u - J_\varepsilon(\alpha u)) \right\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

1.7 Quelques Inégalités Importantes

1.7.1 Lemme de Gronwall

Si les $f_i(\tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ *sont des fonctions non négatives sur l'intervalle* $(0, T)$, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ *sont intégrables et* $f_3(\tau)$ *est non décroissante sur* $(0, T)$ *, alors si*

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c\Im_\tau f_2(t),$$

alors

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq e^{c\tau} f_3(\tau).$$

où

$$\Im_\tau f_i(\tau) = \int_0^\tau f_i(t)\, dt \quad (i = 1, 2, ...).$$

1.7.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq \left(\int_\Omega u^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.7.3 Inégalité de Cauchy

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$ab \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2.$$

1.7.4 Inégalité de Cauchy avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2.$$

1.7.5 Inégalité de Young (Inégalité de cauchy généralisée)

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{p-1}{p}|b|^{\frac{p}{p-1}}.$$

pour tout $p > 1$

1.7.6 Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, a, b arbitraire (réels)

$$ab \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}}.$$

pout tout $p > 1$

1.7.7 Inégalité de Hölder

$$\forall (f, g) \in L^p(Q) \times L^q(Q) : \int_Q |fg| \leq \left(\int_Q |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_Q |g|^q\right)^{1/q},$$

où p et q sont toujours reliés par la relation : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1.7.8 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx.$$

$\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

1.7.9 Inégalités élémentaires

$$\int_0^l \left(\Im_x^2 (\xi u)\right)^2 dx \leq \frac{l^2}{2} \left\|\Im_x (\xi u)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

$$\int_0^l \left(\Im_x (\xi u)\right)^2 dx \leq \frac{l^2}{2} \left\|\xi u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Chapitre 2

Sur un problème mixte pour une équation parabolique avec des conditions intégrales

Dans ce chapitre, on étudie un problème aux limites a valeur initiale pour une equation parabolique avec des conditions intégrales. On prouve l'existence et l'unicité d'une solution généralisée forte pour le problème donné.

2.1 Position de probléme

Dans le région $Q = (0, l) \times (0, T) = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$. avec $l < \infty$ et $T < \infty$, on considére le probléme de la recherche d'une fonction $u = u(x, t)$, solution du probléme

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right) = f(x,t), \\ l_1 u = u\left(x,0\right) = \varphi(x), \quad x \in \left(0,l\right), \\ \int\limits_0^l u\left(x,t\right)dx = 0, \ t \in \left(0,T\right), \\ \int\limits_0^l xu\left(x,t\right)dx = 0, \ \ t \in \left(0,T\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

où les fonctions $a\left(x,t\right)$ et $b(x,t)$ satisfont les conditions

$$0 \le c_0 \le a\left(x,t\right) \le c_1, \ \frac{\partial a}{\partial t} \le c_2, \ \frac{\partial a}{\partial x} \le c_3, \ b(x,t) \le c_4, \tag{C$_1$}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} \ge c_5, \ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \le c_6, \ \frac{\partial b}{\partial t} \le c_7, \ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} \le c_8, \tag{C$_2$}$$

f et φ sont des fonctions donnés.

2.2 Espaces Fonctionnels Associés

Nous écrivons le probléme (1.1) sous la forme opérationnelle suivant :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L),$$

où

$$Lu = (\mathcal{L}u, l_1 u) \text{ et } \mathcal{F} = (f, \varphi)$$

L'opérateur L est considéré de B à H, où B est l'espace de Banach constitué de fonctions $u \in L^2(Q)$, satisfaisant les conditions de (1.1) et ayant la norme finie

$$\|u\|_B^2 = \sup_{0 \leq \tau \leq T} [\|u(.,\tau)\|_{L^2(0,l)}^2] = \|u(x,\tau)\|_{C(0,T,L^2(0,l))}^2,$$

et H est un espace de Hilbert $L^2(Q) \times L^2(0,l)$ muni de la norme

$$\|\mathcal{F}\|_H^2 = \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,l)}^2.$$

Soit $D(L)$ le domaine de L qui est l'ensemble de toutes les fonctions $u \in L^2(Q)$ pour lequel u_t, u_x, u_{xx}, u_{tx}, $u_{tt} \in L^2(Q)$ et satisfaisant les conditions aux limites dans (1.1).

2.3 Estimation a priori et ses conséquences

On établisse d'abord une estimation a priori pour l'opérateur L à partir de laquelle on conclue l'unicité de la solution du problème donné.

2.4 Unicité de solution

Théorème 2.1 *Si $u \in D(L)$, alors on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_B^2 \leq C \|Lu\|_H^2, \tag{1.2}$$

C'est

$$\|u(x,\tau)\|_{C(0,T,L^2(0,l))}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,l)}^2 \right),$$

où C est une constante positive indépendante de u.

Preuve. On considére le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau)$ de l'operateur $\mathcal{L}u$ et

$$Mu = -\Im_x^2(u) - \Im_x^2(u_t),$$

où

$$\Im_x^2(u) = \int_0^x \int_0^\xi u(\eta, t)\, d\eta d\xi,$$

et

$$Q_\tau = (0,l) \times (0,\tau), 0 \leq \tau \leq T,$$

on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q_\tau)} &= -\left(u_t, \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_x), \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ &\quad -\left(\frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u), \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} - \left(u_t, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ &\quad +\left(\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_x), \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u), \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ &= -\left(f(x,t), \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} - \left(f(x,t), \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

En utilisant les conditions aux limites et intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}-\left(u_t, \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int_{Q_\tau} u_t \Im_x^2(u)\, dxdt \\ &= -\int_0^\tau \int_0^l u_t \Im_x^2(u)\, dxdt \\ &= -\int_0^\tau [\Im_x(u_t)\Im_x^2(u)]_0^l dt + \int_0^\tau \int_0^l \Im_x(u_t)\Im_x(u)\, dxdt \\ \text{(en utilisant } \frac{\partial}{\partial x}[f(x)]^2 &= 2\frac{\partial}{\partial x}[f(x)]f(x)) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(\Im_x(u(x,t)))^2\, dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l [(\Im_x(u(x,t)))^2]_0^\tau dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2 dx,\end{aligned} \tag{1.4}$$

où

$$\int_0^\tau [\Im_x(u_t)\Im_x^2(u)]_0^l dt = 0$$

car

$$\begin{aligned}
[\Im_x(u_t)]_0^l &= \int_0^x [\frac{\partial}{\partial t}u]_0^l dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^x [u]_0^l dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right), \Im_x^2\left(u\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right)\Im_x^2\left(u\right)dxdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right)\Im_x^2\left(u\right)dxdt \\
&= \int_0^\tau [a\left(x,t\right)u_x\Im_x^2\left(u\right)]_0^l dt - \int_0^\tau\int_0^l \Im_x\left(u\right)a\left(x,t\right)u_x dxdt \\
&= \underbrace{-\int_0^\tau\int_0^l \Im_x\left(u\right)a\left(x,t\right)u_x dxdt}_{\text{intégration par parties}} \\
&= -\int_0^\tau [\Im_x\left(u\right)a\left(x,t\right)u]_0^l dt + \int_0^\tau\int_0^l a\left(x,t\right)u^2 dxdt \\
&\quad + \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u\right)dxdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^l a\left(x,t\right)u^2 dxdt + \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u\right)dxdt \\
&= \int_{Q_\tau} a\left(x,t\right)u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u\right)dxdt, \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

où $\int\limits_0^\tau [a(x,t)\, u_x \Im_x^2(u)]_0^l dt = 0$ car $[\Im_x^2(u)]_0^l = [\int\limits_0^\xi \int\limits_0^x u(\eta,t)\, d\eta dx]_0^l = \int\limits_0^\xi \int\limits_0^l u(\eta,t)\, d\eta dx = 0$ $\left(\text{car } \int\limits_0^l u(\eta,t)\, d\eta = 0\right)$

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u), \Im_x^2(u)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u)\, \Im_x^2(u)\, dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u)\, \Im_x^2(u)\, dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau [\Im_x^2(u)\, b(x,t)u]_0^l dt + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \Im_x(u)\, b(x,t) u dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \Im_x(u)\, b(x,t) u dxdt, \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

où

$$-\int\limits_0^\tau [\Im_x^2(u)\, b(x,t)u]_0^l dt = 0,$$

car

$$\begin{aligned}
[\Im_x^2(u)]_0^l &= [\int\limits_0^\xi \int\limits_0^x u(\eta,t)\, d\eta dx]_0^l \\
&= \int\limits_0^\xi \int\limits_0^l u(\eta,t)\, d\eta dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left(u_t, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int\limits_{Q_\tau} u_t \Im_x^2(u_t)\, dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l u_t \Im_x^2(u_t)\, dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau [\Im_x^2(u_t)\, \Im_x(u_t)]_0^l dt + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (\Im_x(u_t))^2 dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (\Im_x(u_t))^2 dxdt, \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

où
$$\int_0^{\tau} [\Im_x^2 (u_t) \Im_x(u_t)]_0^l dt = 0,$$
car
$$\begin{aligned}
[\Im_x(u_t)]_0^l &= \int_0^x [\frac{\partial}{\partial t} u]_0^l dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x [u]_0^l dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right),\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right)\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right)\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau\left[\Im_x^2\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u_x\right]_0^l dt-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\Im_x\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u_x dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\Im_x\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u_x dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau\left[\Im_x\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u\right]_0^l dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l ua\left(x,t\right)u_t dxdt \\
&\quad +\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \underbrace{\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l ua\left(x,t\right)u_t dxdt}_{\text{intégration par parties}}+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\right]_0^\tau dx-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l ua\left(x,t\right)u_t dxdt \\
&\quad -\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\right]_0^\tau dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}(a\left(x,t\right)u^2)dxdt \\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\right]_0^\tau dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\right]_0^\tau dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right),\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \frac{1}{2}\int_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\right]_0^\tau dx-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt\\ &+\int_0^\tau\int_0^l\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt, \qquad (1.8)\end{aligned}$$

où

$$\int_0^\tau\left[\Im_x^2\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u_x\right]_0^l dt=0,$$

car

$$\begin{aligned}\left[\Im_x^2\left(u_t\right)\right]_0^l &= \left[\int_0^\xi\int_0^x\frac{\partial}{\partial t}(u\left(\eta,t\right))d\eta dx\right]_0^l\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\xi\int_0^l u\left(\eta,t\right)d\eta dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right),\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right)\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt\\ &= -\int_0^\tau\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right)\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt\\ &= -\int_0^\tau\left[\Im_x^2\left(u_t\right)b(x,t)u\right]_0^l dt+\int_0^\tau\int_0^l b(x,t)u\Im_x\left(u_t\right)dxdt\\ &= \int_0^\tau\int_0^l b(x,t)u\Im_x\left(u_t\right)dxdt. \qquad (1.9)\end{aligned}$$

En substituant les inégalités $(1.4) - (1.9)$ en (1.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2 dx + \int_{Q_\tau} a\left(x,t\right) u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x} u \Im_x\left(u\right) dxdt \\
&+\int_{Q_\tau} \Im_x\left(u\right) b(x,t) u dxdt \ + \int_{Q_\tau} (\Im_x\left(u_t\right))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,\tau\right) u^2\left(x,\tau\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,0\right)\varphi^2(x) dx \\
&-\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t} u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x} u \Im_x\left(u_t\right) dxdt + \int_{Q_\tau} b(x,t) u \Im_x\left(u_t\right) dxdt \\
= \ &-\int_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2\left(u\right) dxdt - \int_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2\left(u_t\right) dxdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + \int_{Q_\tau} a\left(x,t\right) u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} (\Im_x\left(u_t\right))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,\tau\right) u^2\left(x,\tau\right) dx \\
= \ &\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,0\right)\varphi^2(x) dx - \int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x} u \Im_x\left(u\right) dxdt \\
&-\int_{Q_\tau} b(x,t) u \Im_x\left(u_t\right) dxdt - \int_{Q_\tau} \Im_x\left(u\right) b(x,t) u dxdt - \int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x} u \Im_x\left(u_t\right) dxdt \\
&+\int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t} u^2 dxdt - \int_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2\left(u\right) dxdt - \int_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2\left(u_t\right) dxdt. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions C_1 sur les coefficients et l'inégalité de cauchy avec ε,nous estimons le côté droit comme suit

$$\begin{cases} -\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} u \Im_x(u)\,dxdt \leq \frac{c_3\varepsilon_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_1}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2\,dxdt, \\ -\int\limits_{Q_\tau} \Im_x(u)\, b(x,t) u dxdt \leq \frac{c_4\varepsilon_2}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_2}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2\,dxdt, \\ -\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} u \Im_x(u_t)\,dxdt \leq \frac{c_3\varepsilon_3}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_3}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2\,dxdt, \\ -\int\limits_{Q_\tau} b(x,t) u \Im_x(u_t)\,dxdt \leq \frac{c_4\varepsilon_4}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_4}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2\,dxdt, \\ -\int\limits_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2(u)\,dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u)\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt, \\ -\int\limits_{Q_\tau} f(x,t)\Im_x^2(u_t)\,dxdt \leq \frac{\varepsilon_5}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u_t)\right)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_5}\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt, \\ \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} u^2 dxdt \leq c_2\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt. \end{cases} \tag{1.11}$$

Alors (1.10) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int\limits_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + c_0\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2 dxdt + \frac{c_0}{2}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int\limits_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + \int\limits_{Q_\tau} a(x,t)\,u^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^l a(x,\tau)\,u^2(x,\tau)\,dx \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int\limits_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2 dx + \frac{c_1}{2}\int\limits_0^l \varphi^2(x)dx + c_2\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_3\varepsilon_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt \\ & + \frac{c_3}{2\varepsilon_1}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2\,dxdt + \frac{c_4\varepsilon_2}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_2}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2\,dxdt \\ & + \frac{c_3\varepsilon_3}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_3}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2\,dxdt + \frac{c_4\varepsilon_4}{2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_4}\int\limits_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2\,dxdt \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u)\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt + \frac{\varepsilon_5}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u_t)\right)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_5}\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2dx + c_0\int_{Q_\tau} u^2dxdt + \int_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2dxdt + \frac{c_0}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2dx + \frac{c_1}{2}\int_0^l \varphi^2(x)dx + c_2\int_{Q_\tau} u^2dxdt + \frac{c_3\varepsilon_1}{2}\int_{Q_\tau} u^2dxdt \\
&+\frac{c_3}{2\varepsilon_1}\int_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2dxdt + \frac{c_4\varepsilon_2}{2}\int_{Q_\tau}u^2dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_2}\int_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2dxdt \\
&+\frac{c_3\varepsilon_3}{2}\int_{Q_\tau}u^2dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_3}\int_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2dxdt + \frac{c_4\varepsilon_4}{2}\int_{Q_\tau}u^2dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_4}\int_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u)\right)^2dxdt + \frac{\varepsilon_5}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u_t)\right)^2dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}f^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_5}\int_{Q_\tau}f^2(x,t)dxdt. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

C'est,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2dx + c_0\int_{Q_\tau} u^2dxdt + \int_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2dxdt + \frac{c_0}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\varphi(x)))^2dx + \frac{c_1}{2}\int_0^l \varphi^2dx + \left(c_2 + \frac{c_3\varepsilon_1}{2} + \frac{c_4\varepsilon_2}{2} + \frac{c_3\varepsilon_3}{2} + \frac{c_4\varepsilon_4}{2}\right)\int_{Q_\tau}u^2dxdt \\
&+\left(\frac{c_3}{2\varepsilon_1} + \frac{c_4}{2\varepsilon_2}\right)\int_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2dxdt + \left(\frac{c_3}{2\varepsilon_3} + \frac{c_4}{2\varepsilon_4}\right)\int_{Q_\tau}(\Im_x(u_t))^2dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u)\right)^2dxdt + \frac{\varepsilon_5}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u_t)\right)^2dxdt + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\int_{Q_\tau}f^2(x,t)dxdt. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalités de Poincaré

$$\begin{cases}
\int_{Q_\tau}\left(\Im_x^2(u)\right)^2dxdt \leq \frac{l^2}{2}\int_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2dxdt, \\
\int_{Q_\tau}(\Im_x(u))^2dxdt \leq \frac{l^2}{2}\int_{Q_\tau}u^2dxdt, \\
\int_{Q_\tau}(\Im_x(\varphi))^2dx \leq \frac{l^2}{2}\int_{Q_\tau}\varphi^2dx,
\end{cases} \qquad (1.14)$$

où

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x^2(u)\right)^2 dxdt &= \int\limits_{Q_\tau} \left(\underbrace{\int\limits_0^x \Im_\xi(u)\, d\xi}_{cauchy-schwartz} \right)^2 dxdt \\
&\leq \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\int\limits_0^x d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^x (\Im_\xi(u))^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\int\limits_0^x d\xi \right) \left(\int\limits_0^x (\Im_\xi(u))^2 d\xi \right) \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \int\limits_0^x (\Im_\xi(u))^2 d\xi \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l dt \\
&= \int\limits_0^\tau \frac{l^2}{2} \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} dt \\
&\leq \int\limits_0^\tau \frac{l^2}{2} \left\| \Im_x(u) \right\|^2_{L^2(0,l)} dt \\
&= \frac{l^2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x(u)\right)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

De même manière pour

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x(u)\right)^2 dxdt \leq \frac{l^2}{2} \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt,$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + c_0 \int_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} (\Im_x(u_t))^2 dxdt + \frac{c_0}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{l^2}{4}+\frac{c_1}{2}\right)\int_0^l \varphi^2 dx + \left(c_2 + \frac{c_3\varepsilon_1}{2} + \frac{c_4\varepsilon_2}{2} + \frac{c_3\varepsilon_3}{2} + \frac{c_4\varepsilon_4}{2}\right)\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{c_3}{2\varepsilon_1} + \frac{c_4}{2\varepsilon_2} + \frac{l^2}{4}\right)\int_{Q_\tau} (\Im_x(u))^2 dxdt + \left(\frac{c_3}{2\varepsilon_3} + \frac{c_4}{2\varepsilon_4} + \frac{c_5 l^2}{4}\right)\int_{Q_\tau} (\Im_x(u_t))^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\int_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Si on prend

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = c_3, \quad \varepsilon_4 = 2c_4, \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{l^2},$$

alors (1.15) devient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + 2c_0 \int_{Q_\tau} u^2 dxdt + 2\int_{Q_\tau} (\Im_x(u_t))^2 dxdt + c_0\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{l^2}{2}+c_1\right)\int_0^l \varphi^2 dx + (2c_2 + c_3\varepsilon_1 + c_4\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 + c_4\varepsilon_4)\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{c_3}{\varepsilon_1} + \frac{c_4}{\varepsilon_2} + \frac{l^2}{2}\right)\int_{Q_\tau} (\Im_x(u))^2 dxdt + \left(\frac{c_3}{\varepsilon_3} + \frac{c_4}{\varepsilon_4} + \frac{c_5 l^2}{2}\right)\int_{Q_\tau} (\Im_x(u_t))^2 dxdt \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right)\int_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2 dx + 2c_0 \int_{Q_\tau} u^2 dxdt + c_0\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{l^2}{2}+c_1\right)\int_0^l \varphi^2 dx + \left(2c_2 + c_3 + c_4 + c_3^2 + c_4^2\right)\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&+ \left(c_3 + c_4 + \frac{l^2}{2}\right)\int_{Q_\tau} (\Im_x(u))^2 dxdt + \left(1 + l^2\right)\int_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\min\left(c_0,1\right)\left\{\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2dx+\int_{Q_\tau} u^2dxdt+\int_0^l u^2\left(x,\tau\right)dx\right\}\\
\leq\ &\max\left(\frac{l^2}{2}+c_1,2c_2+c_3+c_4+c_3^2+c_4^2,c_3+c_4+\frac{l^2}{2},1+l^2\right)\\
&\left\{\int_0^l \varphi^2dx+\int_{Q_\tau} u^2dxdt+\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2dxdt+\int_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right\}. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2dx+\int_{Q_\tau} u^2dxdt+\int_0^l u^2\left(x,\tau\right)dx\\
\leq\ &\gamma\left[\int_0^l \varphi^2dx+\int_{Q_\tau} u^2dxdt+\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2dxdt+\int_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Où

$$\gamma=\frac{\max\left(\frac{l^2}{2}+c_1,2c_2+c_3+c_4+c_3^2+c_4^2,c_3+c_4+\frac{l^2}{2},1+l^2\right)}{\min\left(c_0,1\right)}.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (1.18), on obtient :

$$\int_0^l (\Im_x(u(x,\tau)))^2dx+\int_{Q_\tau} u^2dxdt+\int_0^l u^2\left(x,\tau\right)dx\leq\gamma e^{\gamma\tau}\left[\int_0^l \varphi^2dx+\int_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]. \qquad (1.19)$$

Si on écarte les deux premiers termes dans la partie gauche de (1.19), on obtient :

$$\int_0^l u^2\left(x,\tau\right)dx\leq\gamma e^{\gamma\tau}\left[\int_0^l \varphi^2dx+\int_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]. \qquad (1.20)$$

En prenant le supremum des deux côtés de (1.20), on obtient :

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)}\leq\gamma e^{\gamma T}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(0,l)}+\|f\|^2_{L^2(Q)}\right). \qquad (1.21)$$

Donc

$$\|u(x,\tau)\|^2_{[0,T;L^2(0,l)]}\leq C\left(\|\varphi\|^2_{L^2(0,l)}+\|f\|^2_{L^2(Q)}\right).$$

avec $C=\gamma e^{\gamma T}$. ■

Puisque nous n'avons aucune information concernant l'image de l'opérateur L, sauf que $R\left(L\right)\subset H$, il faut prolonger L pour que l'estimation (1.2) soit valable pour l'extension et que sa image soit tout l'espace H. A cette fin, on établisse la proposition suivante.

Proposition 2.1 *L'opérateur $L : B \to H$ admet une fermeture $\overline{L}$.*

Preuve. Soit u_n une suite telle que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } B, \tag{1.22}$$

et

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} = (f, \varphi) \quad \text{dans } H, \tag{1.23}$$

nous devons montrer que $f \equiv 0, \varphi \equiv 0$.
On a d'aprés (1.22)

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } L^2(Q),$$

alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q), \tag{1.24}$$

où $\mathcal{D}'$ est un espace du distributions.
D'aprés la continuité de la dérivation en $\mathcal{D}'(Q)$, (1.24) implique que

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{1.25}$$

Selon (1.23), on a

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^2(Q). \tag{1.26}$$

Alors

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{1.27}$$

D'aprés l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclue que $f \equiv 0$.
Daprés (1.23), on conclue que

$$l_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{1.28}$$

alors

$$l_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.29}$$

De plus

$$\|l_1 u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n\|_B \quad \forall n, \tag{1.30}$$

d'aprés (1.22) on a

$$l_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{1.31}$$

Par conséquence,

$$l_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.32}$$

D'aprés l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclue que $\varphi \equiv 0$.

Cela prouve de la proposition 2.1. ■

Puisque les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont des limites de séquence des points du graphe de L, puis on prend la limite en (1.2) pour obtenir une estimation a priori pour l'opérateur $\overline{L}$,c'est

$$\|u\|_B \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_H \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{1.33}$$

à partir de laquelle on conclue les résultats.

Corollaire 2.1 *Le problème* (1.1) *admet une solution forte unique et dépend continuement des données* $(f, \varphi) \in H$.

Corollaire 2.2 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermé dans* H *et égal à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$, *(c.à. d)* $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$.

Preuve. Premiérement, on prouve que $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé.

Soit $\mathcal{F} \in \overline{R\left(\overline{L}\right)}$ alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D\left(\overline{L}\right)$ tel que

$$\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} \text{ dans } H,$$

(1.33) signifie que :

$$\|u_n\|_B \leq C \left\|\overline{L}u_n\right\|_H, \quad \forall n,$$

alors on en déduit que la convergence de $\overline{L}u_n$ dans H implique la convergence du u_n dans B,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } B.$$

$\overline{L}$ est fermé, (u_n) est une suite dans $D\left(\overline{L}\right)$ et

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } B,$$

$$\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} \text{ dans } H,$$

alors $u \in D\left(\overline{L}\right)$ et $\overline{L}u = \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \in R\left(\overline{L}\right)$.

Par conséquence, $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé dans H.

Maintenant, on prouve $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$.

$\overline{L}$ est une prolongement de L, alors $G(L) \subseteq G\left(\overline{L}\right)$, où $G(L)$ est le graphe de L,

$$G(L) = \{(u, Lu) ; u \in D(L)\},$$

donc

$$R(L) \subseteq R\left(\overline{L}\right),$$

ce qui implique que

$$\overline{R(L)} \subseteq \overline{R(\overline{L})},$$

mais $R(\overline{L})$ est fermé, donc

$$\overline{R(L)} \subseteq R(\overline{L}).$$

D'autre part, soit $\mathcal{F} \in R(\overline{L})$, où $\mathcal{F} = \overline{L}u$ pour certains $u \in D(\overline{L})$ alors $(u, \mathcal{F}) \in G(\overline{L}) = \overline{G(L)}$, il existe une suite $(u_n, Lu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $G(L)$ tel que

$$(u_n, Lu_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, \mathcal{F}) \quad \text{dans} \quad B \times H.$$

où

$$\begin{aligned} & \|(u_n, Lu_n) - (u, \mathcal{F})\|^2_{B\times H} \\ = \quad & \|u_n - u\|^2_B + \|Lu_n - \mathcal{F}\|^2_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

par conséquence $Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}$ dans H, mais $u_n \in D(L)$ $\forall n$, alors on a $\mathcal{F} \in \overline{R(L)}$, donc

$$R(\overline{L}) \subseteq \overline{R(L)}.$$

donc

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}.$$

■

2.5 Existence de solution

Pour prouver l'existence de la solution, on prouve d'abord la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit $D_0(L) = \{u \in D(L) : lu = 0\}$, Si pour $\omega \in L^2(Q_T)$ et pour tous $u \in D_0(L)$ on a :*

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2(Q_\tau)} = 0, \tag{2.1}$$

alors,

$$\omega = 0 \quad \textit{dans} \quad Q.$$

Preuve. Soit

$$\varphi(x,t) = \int_t^T \omega(x,s)\, ds, \tag{2.2}$$

et soit u_t la solution de l'équation

$$\int_0^x \int_0^\xi u_t(\eta, t)\, d\eta d\xi = \varphi(x,t). \tag{2.3}$$

Soit

$$u = \begin{cases} \int_s^t \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau, s \leq t \leq T, \\ 0, \qquad 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

De (2.2) et (2.3) on a :

$$\begin{aligned} \omega(x,t) &= \Im_x^2(u_{tt}) \\ &= \int_0^x \int_0^\xi u_{tt}(\eta,t)\, d\eta d\xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

on va prouver que $\omega(x,t) \in L^2(Q_T)$.

Lemme 2.1 *La fonction $\omega(x,t)$ défini par (2.4) est en $L^2(Q_T)$.*

***Preuve.* (de lemme 2.1).** *On utilise l'opérateur de régularisation J_ε de la forme*

$$(J_\varepsilon u)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right) u(x,s)\, ds,$$

où $W \in C_0^\infty(0,T), W(t) \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\, dt = 1.$$

Appliquer l'opérateur J_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation (2.3), on obtient

$$J_\varepsilon\left(\Im_x^2(u_t)\right) = J_\varepsilon(\varphi(x,t)) + \Im_x^2(u_t) - \Im_x^2(u_t),$$

on dérive par rapport a t (c.à.d) $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\Im_x^2(u_t)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon(\varphi(x,t))\right] + \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_t) - \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_t),$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2(u_t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon(\varphi(x,t))\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2(u_t)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\Im_x^2(u_t)\right)\right],$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2(u_t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon(\varphi(x,t))\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2(u_t) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2(u_t)\right)\right],$$

alors

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right\|_{L^2(Q_T)}^2 \\
= & \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2\left(u_t\right) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 \\
\leq & \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2\left(u_t\right) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}\right)^2 \\
= & \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2\left(u_t\right) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 \\
& +2\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2\left(u_t\right) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)} \\
\leq & \ 2\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2\left(u_t\right) - J_\varepsilon\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 .
\end{aligned}$$

Utilisation les propriétés de l'opérateur J_ε,

$$\left\| J_\varepsilon u - u\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(i.e)} \quad J_\varepsilon u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \textit{ dans } L^2\left(\Omega\right),$$

et

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)\right\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq 2\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[J_\varepsilon\left(\varphi\left(x,t\right)\right)\right]\right\|_{L^2(Q_T)}^2 .$$

$$J_\varepsilon u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \quad \textit{dans} \quad L^2\left(Q_T\right),$$

et la norme de $\frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2\left(u_t\right)\right)$ *dans* $L^2\left(Q_T\right)$ *est borné, on conclue que* $\omega \in L^2\left(Q_T\right)$. ■

Maintenant, par substitution de (2.4) dans (2.1), on a :

$$\left(\mathcal{L}u, \omega\right)_{L^2(Q_s)} = 0,$$

donc

$$\left(u_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right), \Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} = 0. \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) implique

$$\begin{aligned}
& \left(u_t, \Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right), \Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right), \Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} \\
= & \ 0.
\end{aligned}\tag{2.6}$$

En utilisant les conditions intégrales dans (1.1), on trouve les termes de (2.6)

$$\begin{aligned}
\left(u_t, \Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} &= \int\limits_{Q_s} u_t \Im_x^2\left(u_{tt}\right) dxdt \\
&= \int\limits_s^T \left[\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\Im_x\left(u_t\right)\right]_0^l dt - \int\limits_{Q_s} \Im_x\left(u_t\right)\Im_x\left(u_{tt}\right) dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s} \frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\left(\Im_x\left(u_t\left(x,t\right)\right)\right)^2\right]_s^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,T\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\,u_x\right),\Im_x^2(u_{tt})\right)_{L^2(Q_s)} &= -\int\limits_{Q_s}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\,u_x\right)\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&= -\underbrace{\int\limits_s^T\left[\Im_x^2(u_{tt})\,a(x,t)\,u_x\right]_0^l dt}_{=0} + \int\limits_{Q_s} a(x,t)\,u_x\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&= \underbrace{\int\limits_s^T\left[\Im_x(u_{tt})\,a(x,t)\,u\right]_0^l dt}_{=0} - \int\limits_{Q_s} a(x,t)\,uu_{tt}dxdt \\
&\quad -\int\limits_{Q_s}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}u\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&= -\int\limits_0^l\left[a(x,t)\,u_tu\right]_s^T dx + \int\limits_{Q_s} a(x,t)\,u_t^2dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}uu_tdxdt \\
&\quad -\int\limits_{Q_s}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}u\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&= -\int\limits_0^l\left[a(x,t)\,u_tu\right]_s^T dx + \int\limits_{Q_s} a(x,t)\,u_t^2dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}uu_tdxdt \\
&\qquad \text{integ p partie} \\
&\quad -\int\limits_0^l\left[\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}u\Im_x(u_t)\right]_s^T dx + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}u_t\Im_x(u_t)\,dxdt \\
&\quad +\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_t)\,dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right)u_x\right),\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} &= -\left[\underbrace{\left(a\left(x,t\right)u\Im_x\left(u_t\right)\right)|_0^l}_{=0}\right]_s^T+\int_0^l\left[\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)\right]_s^T dx \\
&\quad +\underbrace{\int_0^l\left[a\left(x,t\right)u_x\Im_x\left(u_t\right)\right]_s^T dx-\int_0^l\left[\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u\Im_x\left(u_t\right)\right]_s^T dx}_{=0} \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2\right)dxdt+\int_{Q_s}a\left(x,t\right)u_t^2dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int_{Q_s}a\left(x,t\right)u_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2\right]_s^T dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial t^2}u^2dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int_{Q_s}a\left(x,t\right)u_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u^2\left(x,T\right)dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial a\left(x,s\right)}{\partial t}u^2\left(x,s\right)dx-\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial t^2}u^2dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&\leq \int_{Q_s}a\left(x,t\right)u_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u^2\left(x,T\right)dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial t^2}u^2dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt, \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right),\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} &= \int\limits_{Q_s}\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u\right)\Im_x^2\left(u_{tt}\right)dxdt \\
&= \int\limits_s^T\underbrace{\left[b(x,t)u\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right]_0^l}_{=0}dt - \int\limits_{Q_s} b(x,t)u\Im_x\left(u_{tt}\right)dxdt \\
&= -\int\limits_0^l\underbrace{\left[b(x,t)u\Im_x\left(u_t\right)\right]_s^T}_{=0}dx + \int\limits_{Q_s} b(x,t)u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&\quad +\int\limits_{Q_s}\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&= \int\limits_{Q_s} b(x,t)u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

avec $Q_s = [s,T]\times(0,l)$.

Par substitution de $(2.7)-(2.9)$ à (2.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2dx + \int\limits_{Q_s} a\left(x,t\right)u_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u^2\left(x,T\right)dx \\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial t^2}u^2dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&+\int\limits_{Q_s} b(x,t)u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
=\;& 0. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Il résulte de (2.10) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2dx + \int\limits_{Q_s} a\left(x,t\right)u_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u^2\left(x,T\right)dx \\
=\;& \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial t^2}u^2dxdt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial x}u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 a\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt \\
&-\int\limits_{Q_s} b(x,t)u_t\Im_x\left(u_t\right)dxdt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}u\Im_x\left(u_t\right)dxdt. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions C_1 et C_2 et l'inégalité de Cauchy avec ε, on a les estimations suivantes :

$$\int_{Q_s} \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial t^2} u^2 dxdt \leq c_6 \int_{Q_s} u^2 dxdt, \tag{2.12}$$

$$-\int_{Q_s} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} u_t \Im_x(u_t)\, dxdt \leq \frac{\varepsilon_1 c_3}{2} \int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_1} \int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt, \tag{2.13}$$

$$-\int_{Q_s} \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x \partial t} u \Im_x(u_t)\, dxdt \leq \frac{\varepsilon_2 c_8}{2} \int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{c_8}{2\varepsilon_2} \int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt, \tag{2.14}$$

$$-\int_{Q_s} b(x,t) u_t \Im_x(u_t)\, dxdt \leq \frac{\varepsilon_3 c_4}{2} \int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \frac{c_4}{2\varepsilon_3} \int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt, \tag{2.15}$$

$$-\int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} u \Im_x(u_t)\, dxdt \leq \frac{\varepsilon_4 c_7}{2} \int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{c_7}{2\varepsilon_4} \int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt. \tag{2.16}$$

Par substitution de $(2.12) - (2.16)$ à (2.11), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_t(x,s)))^2\, dx + c_0 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \frac{c_5}{2}\int_0^l u^2(x,T)\, dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_t(x,s)))^2\, dx + \int_{Q_s} a(x,t)\, u_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial a(x,T)}{\partial t} u^2(x,T)\, dx \\
\leq\ & \frac{c_6}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{\varepsilon_1 c_3}{2}\int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \frac{c_3}{2\varepsilon_1}\int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt \\
&+ \frac{\varepsilon_2 c_8}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{c_8}{2\varepsilon_2}\int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt + \frac{\varepsilon_3 c_4}{2}\int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
&+ \frac{c_4}{2\varepsilon_3}\int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt + \frac{\varepsilon_4 c_7}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{c_7}{2\varepsilon_4}\int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En choisissant $\varepsilon_1 = \frac{c_0}{c_3}$, $\varepsilon_3 = \frac{c_0}{c_4}$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_4 = 1$ dans (2.17), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_t(x,s)))^2\, dx + \frac{c_5}{2}\int_0^l u^2(x,T)\, dx \\
\leq\ & \left(\frac{c_6}{2} + \frac{c_8}{2} + \frac{c_7}{2}\right)\int_{Q_s} u^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{c_3^2}{2c_0} + \frac{c_8}{2} + \frac{c_4^2}{2c_0} + \frac{c_7}{2}\right)\int_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + c_5 \int_0^l u^2\left(x,T\right) dx \\
\leq\;& \left(c_6+c_8+c_7\right) \int_{Q_s} u^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{c_3^2}{c_0}+c_8+\frac{c_4^2}{c_0}+c_7\right) \int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

L'inégalité (2.18) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
&\min\left\{1,c_5\right\}\left[\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \int_0^l u^2\left(x,T\right) dx\right] \\
\leq\;& \max\left\{c_6+c_8+c_7, \frac{c_3^2}{c_0}+c_8+\frac{c_4^2}{c_0}+c_7\right\}\left[\int_{Q_s} u^2 dxdt + \int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \int_0^l u^2\left(x,T\right) dx \\
\leq\;& K\left(\int_{Q_s} u^2 dxdt + \int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où

$$K = \frac{\max\left\{c_6+c_8+c_7, \frac{c_3^2}{c_0}+c_8+\frac{c_4^2}{c_0}+c_7\right\}}{\min\left\{1,c_5\right\}}.$$

On introduise maintenant la nouvelle fonction ν définie par

$$\begin{aligned}
\nu\left(x,t\right) &= \int_t^T u_\tau d\tau \\
&= u\left(x,T\right)-u\left(x,t\right), \\
\nu\left(x,s\right) &= u\left(x,T\right)-u\left(x,s\right) \\
&= u\left(x,T\right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

L'inégalité (2.19) devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \int_0^l \upsilon^2\left(x,s\right) dx \\
\leq\;& K\left(\int_{Q_s} \left(\nu\left(x,s\right)-\nu\left(x,t\right)\right)^2 dxdt + \int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt\right),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \int_0^l \upsilon^2\left(x,s\right)dx \\
\leq\ & K\left(\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + 2\int_{Q_s} \nu^2\left(x,s\right)dxdt + 2\int_{Q_s} \nu^2\left(x,t\right)dxdt\right) \\
\leq\ & 2K\left(\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \int_{Q_s} \nu^2\left(x,s\right)dxdt + \int_{Q_s} \nu^2\left(x,t\right)dxdt\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \left[1-2K\left(T-s\right)\right]\int_0^l \upsilon^2\left(x,s\right)dx \\
\leq\ & 2K\left(\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \int_{Q_s} \nu^2\left(x,t\right)dxdt\right). \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

En choisissant $s_0 > 0$, pour que $s \in [T-s_0, T]$ et $1-2K\left(T-s\right) = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,s\right)\right)\right)^2 dx + \int_0^l \upsilon^2\left(x,s\right)dx \\
\leq\ & 4K\left(\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \int_{Q_s} \nu^2\left(x,t\right)dxdt\right), \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

pour tous $s \in [T-s_0, T]$.

Si on suppose

$$H\left(s\right) = \int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \int_{Q_s} \nu^2\left(x,t\right)dxdt, \qquad (2.24)$$

puis il en résulte (2.23) et (2.24) que

$$-\frac{\partial H}{\partial s} \leq 4KH, \qquad (2.25)$$

l'inégalité (2.25) implique que

$$0 \leq 4KHe^{4Ks} + \frac{\partial H}{\partial s}e^{4Ks}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(He^{4Ks}\right) \geq 0. \qquad (2.26)$$

Intégration de (2.26) sur (s,T) et $H(T)=0$, donne

$$\int_s^T \frac{\partial}{\partial s}\left(He^{4Ks}\right) ds \geq 0,$$

alors

$$H(T)\,e^{4Ks} - H(s)\,e^{4Ks} \geq 0,$$

donc

$$H(s)\,e^{4Ks} \leq 0. \tag{2.27}$$

Donc,il résulte de (2.27) que $\omega = 0$ presque partout dans Q_{T-s}.Suivez cette méthode étape par étape, on prouve que $\omega = 0$ presque partout dans Q.

Ceci réalise la preuve de la proposition 2.2. ■

Théorème 2.2 *Si les conditions C_1 et C_2 sont satisfait, alors pour tout $\mathcal{F} = (f,\varphi) \in H$ et pour tout $f \in L^2(Q)\,,\ \varphi \in L^2(0,l)\,,$ il existe une solution unique et forte $u = \overline{L}^{-1}(\mathcal{F}) = \overline{L^{-1}}(\mathcal{F})$ du problème* (1.1)*tel que*

$$\|u\|_B \leq C\,\|Lu\|_H\,,$$

où C est une constante positive indépendante de u.

Preuve. On prouve la densité dans le cas général.

Nous savons que $H = L^2(Q) \times L^2(0,l)$ est un espace de Hilbert, alors l'image de l'opérateur L est dense dans H signifie que l'orthogonalité d'un vecteur $\Psi = (\omega_1,\omega_2) \in H$ à l'ensemble $R(L)\,,$ implique que

$$\begin{aligned}
(Lu,\Psi)_H &= (\{\mathcal{L}u, lu\}\,,\{\omega_1,\omega_2\})_H \\
&= (\mathcal{L}u,\omega_1)_{L^2(Q)} + (lu,\omega_2)_{L^2(0,l)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Implique que $(\omega_1,\omega_2) = 0$.

En mettant $u \in D_0(L)$ dans $(2.28)\,,$ on a

$$(\mathcal{L}u,\omega_1)_{L^2(Q)} = 0,\ \forall u \in D_0(L)\,. \tag{2.29}$$

Donc, en vertu de la Proposition2.2, il résulte de (2.29) que $\omega_1 = 0$.

Alors l'équation (2.28) prend la forme

$$(lu,\omega_2)_{L^2(0,l)} = 0. \tag{2.30}$$

$R(l)$ l'image de l'opérateur de trace l est dense dans l'espace $L^2(0,l)\,,$ donc $\omega_2 = 0$.

Par conséquence $\Psi = 0$, donc $R(L)^{\perp} = \{0\}\,,$ Ainsi $\overline{R(L)} = H$. ■

Chapitre 3

Sur un système couplé d'équations hyperbolique avec des conditions non locale

Dans ce chapitre, on étudie un problème aux limites a valeur initiale pour un système unidimensionnel d'équations hyperbolique avec des conditions non locale. On prouve l'existence et l'unicité de la solution généralisée forte.

3.1 Position du probléme

On considére un problème mixte avec des conditions non locale pour un système couplé hyperbolique avec des conditions intégrales de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(u,v) = u_{tt} - (a(x,t)\,u)_{xx} - h(x,t)\,v = f(x,t), \\ \mathcal{L}_2(u,v) = v_{tt} - (b(x,t)\,v)_{xx} - k(x,t)\,u = g(x,t), \end{cases} \tag{3.1}$$

dans la région

$$Q = (0,l) \times (0,T) = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

Pour $h(x,t) = 0$ et $k(x,t) = 0$, le système (3.1) se découple et on obtient deux équations hyperbolique indépendantes, est une équation d'onde.

On compléte (3.1) avec les conditions initiales

$$\begin{cases} l_1 u = u(x,0) = \phi_1(x), & 0 < x < l, \\ l_1 v = v(x,0) = \phi_2(x), & 0 < x < l, \\ l_2 u = u_t(x,0) = \psi_1(x), & 0 < x < l, \\ l_2 v = v_t(x,0) = \psi_2(x), & 0 < x < l, \end{cases} \tag{3.2}$$

et les conditions intégrales aux limites

$$\int_0^l u dx = 0, \quad \int_0^l x u dx = 0, \quad \int_0^l v dx = 0, \quad \int_0^l x v dx = 0. \tag{3.3}$$

on suppose que

$$\begin{cases} c_0 \leq a(x,t) \leq c_1, \ c_2 \leq b(x,t) \leq c_3, \\ \frac{\partial a}{\partial t} \leq c_4, \ \frac{\partial b}{\partial t} \leq c_5, \ k(x,t) \leq c_6, \\ \frac{\partial k}{\partial t} \leq c_7, \ h(x,t) \leq c_8, \ \frac{\partial h}{\partial t} \leq c_9, \\ c_i, \quad i = 1, ..., 9 \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 Reformulation du problème (Formulaire d'opérateur)

On reformule le problème $(3.1) - (3.3)$ comme une équation d'opérateur de résolution de problème

$$JU = G = (G_1, G_2), \quad J : B \to H, \tag{3.5}$$

où U, JU et G sont respectivement des paires

$$U = (u, v), \ JU = (J_1 U, J_2 U), \ G = (G_1, G_2), \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} J_1 U &= \{\mathcal{L}_1(u,v), l_1 u, l_2 u\}, \\ J_2 U &= \{\mathcal{L}_2(u,v), l_1 v, l_2 v\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$G = JU = (\{f, \phi_1, \psi_1\}, \{g, \phi_2, \psi_2\}). \tag{3.8}$$

$$D(J) = \left\{ U = (u,v) \in \left(L^2(Q)\right)^2 : u_t, \ v_t, \ u_x, \ v_x, \ u_{xx}, \ v_{xx}, \ u_{tx}, \ v_{tx}, \ u_{txx}, \ v_{txx} \in L^2(Q) \right\}, \tag{3.9}$$

satisfaisant les conditions aux limites (3.2) et (3.3).
B est l'espace de Banach obtenu par $D(J)$ par rapport à la norme finie

$$\|U\|_B^2 = \|u(x,\tau)\|_{C(0,T;L^2(0,l))}^2 + \|v(x,\tau)\|_{C(0,T;L^2(0,l))}^2. \tag{3.10}$$

H est l'espace de Hilbert

$$H = B_1 \times B_2, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q), \\ B_2 &= L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q), \end{aligned} \tag{3.12}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|G\|_H^2 &= \|JU\|_H^2 = \|\phi_1(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_1(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \|\phi_2(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_2(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3 Estimation a priori et ses conséquences (Unicité de solution)

Théorème 3.1 *Pour toute $U = (u, v) \in D(J)$, on a l'estimation a priori*

$$\|U\|_B^2 \leq C \|JU\|_H^2 , \tag{3.14}$$

où C est une constante positive indépendante de U.

Preuve. On considére le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau)$ de l'equation (3.1) et les opérateurs : $-\Im_x^2(u_t)$ et $-\Im_x^2(v_t)$ respectivement, où $Q_\tau = (0, l) \times (0, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$,on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_1(u, v), -\Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(\mathcal{L}_2(u, v), -\Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ = & -\left(u_{tt}, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left((a(x,t)\,u)_{xx}, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ & + \left(h(x,t)\,v, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} - \left(v_{tt}, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ & + \left((b(x,t)\,v)_{xx}, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(k(x,t)\,u, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ = & \left(f(x,t), \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(g(x,t), \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant les conditions aux limites (3.2) et (3.3) et intégration par parties, on peut évaluer les termes sur le côté gauche de (3.15) comme suit

$$
\begin{aligned}
&-\left(u_{tt},\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)}\\
&= -\int\limits_{Q_\tau} u_{tt}\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt\\
&= -\underbrace{\int\limits_0^\tau \left[\Im_x^2\left(u_t\right)\Im_x\left(u_{tt}\right)\right]_0^l dt}_{=0}+\int\limits_{Q_\tau}\Im_x\left(u_t\right)\Im_x\left(u_{tt}\right)dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2\right]_0^\tau dx\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(\psi_1\left(x\right)\right)\right)^2dx,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(a\left(x,t\right)u\right)_{xx},\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)}\\
&= \int\limits_{Q_\tau}\left(a\left(x,t\right)u\right)_{xx}\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt\\
&= \underbrace{\int\limits_0^\tau\left[\Im_x^2\left(u_t\right)\left(a\left(x,t\right)u\right)_x\right]_0^l dt}_{=0}-\underbrace{\int\limits_{Q_\tau}\left(a\left(x,t\right)u\right)_x\Im_x\left(u_t\right)dxdt}_{\text{integ par partie}}\\
&= \underbrace{\int\limits_0^\tau\left[\Im_x\left(u_t\right)a\left(x,t\right)u\right]_0^l dt}_{=0}+\int\limits_{Q_\tau}a\left(x,t\right)uu_t dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(x,t\right)u^2\right)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[a\left(x,t\right)u^2\left(x,t\right)\right]_0^\tau dx-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^l a\left(x,\tau\right)u^2\left(x,\tau\right)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l a\left(x,0\right)\phi_1^2\left(x\right)dx\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2dxdt\ ,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$$\begin{aligned}
&\left(h(x,t)\,v, \Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&= \int_{Q_\tau} h(x,t)\,v \Im_x^2(u_t)\,dxdt \\
&= \int_0^\tau \underbrace{\left[h(x,t)\,\Im_x^2(u_t)\,\Im_x(v)\right]_0^l}_{=0} dt - \int_{Q_\tau} h(x,t)\,\Im_x(v)\,\Im_x(u_t)\,dxdt \\
&\quad - \int_{Q_\tau} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \Im_x(v)\,\Im_x^2(u_t)\,dxdt \\
&= -\int_{Q_\tau} h(x,t)\,\Im_x(v)\,\Im_x(u_t)\,dxdt - \int_{Q_\tau} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \Im_x(v)\,\Im_x^2(u_t)\,dxdt, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\left(v_{tt}, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&= -\int_{Q_\tau} v_{tt} \Im_x^2(v_t)\,dxdt \\
&= -\int_0^\tau \underbrace{\left[\Im_x^2(v_t)\,\Im_x(v_{tt})\right]_0^l}_{=0} dt + \int_{Q_\tau} \Im_x(v_t)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Im_x(v_t)\right)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\Im_x(v_t)\right)^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x(v_t(x,\tau))\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x(\psi_2(x))\right)^2 dx, \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left((b(x,t)v)_{xx}, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&= \int_{Q_\tau} (b(x,t)v)_{xx}\, \Im_x^2(v_t)\, dxdt \\
&= \underbrace{\int_0^\tau \left[\Im_x^2(v_t)(b(x,t)v)_x\right]_0^l dt}_{=0} - \underbrace{\int_{Q_\tau} (b(x,t)v)_x\, \Im_x(v_t)\, dxdt}_{\text{integ par partie}} \\
&= \underbrace{\int_0^\tau \left[\Im_x(v_t)\, b(x,t)\, v\right]_0^l dt}_{=0} + \int_{Q_\tau} b(x,t)\, v v_t dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(b(x,t)v^2\right) dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \left[b(x,t)v^2(x,t)\right]_0^\tau dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l b(x,\tau)v^2(x,\tau)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^l b(x,0)\phi_2^2(x)\, dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v^2 dxdt\,,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(k(x,t)u, \Im_x^2(v_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&= \int_{Q_\tau} k(x,t)\, u \Im_x^2(v_t)\, dxdt \quad \text{(integ par partie)} \\
&= \underbrace{\int_0^\tau \left[k(x,t)\, \Im_x^2(v_t)\, \Im_x(u)\right]_0^l dt}_{=0} - \int_{Q_\tau} k(x,t)\, \Im_x(u)\, \Im_x(v_t)\, dxdt \\
&\quad - \int_{Q_\tau} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \Im_x(u)\, \Im_x^2(v_t)\, dxdt \\
&= -\int_{Q_\tau} k(x,t)\, \Im_x(u)\, \Im_x(v_t)\, dxdt - \int_{Q_\tau} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \Im_x(u)\, \Im_x^2(v_t)\, dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

En substituant les inégalités $(3.16)-(3.21)$ en (3.15), on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_1\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,\tau\right)u^2\left(x,\tau\right)dx \\
& -\frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,0\right)\phi_1^2\left(x\right)dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u^2 dxdt \\
& -\int_{Q_\tau} h\left(x,t\right)\Im_x\left(v\right)\Im_x\left(u_t\right)dxdt - \int_{Q_\tau}\frac{\partial h\left(x,t\right)}{\partial x}\Im_x\left(v\right)\Im_x^2\left(u_t\right)dxdt \\
& +\frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_2\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l b\left(x,\tau\right)v^2\left(x,\tau\right)dx \\
& -\frac{1}{2}\int_0^l b\left(x,0\right)\phi_2^2\left(x\right)dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial b\left(x,t\right)}{\partial t}v^2 dxdt \\
& -\int_{Q_\tau} k\left(x,t\right)\Im_x\left(u\right)\Im_x\left(v_t\right)dxdt - \int_{Q_\tau}\frac{\partial k\left(x,t\right)}{\partial x}\Im_x\left(u\right)\Im_x^2\left(v_t\right)dxdt \\
= & \left(f\left(x,t\right),\Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(g\left(x,t\right),\Im_x^2\left(v_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,\tau\right) u^2\left(x,\tau\right) dx \\
& + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l b\left(x,\tau\right) v^2\left(x,\tau\right) dx \\
= \; & \left(f\left(x,t\right), \Im_x^2\left(u_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \left(g\left(x,t\right), \Im_x^2\left(v_t\right)\right)_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,0\right)\phi_1^2\left(x\right) dx \\
& + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t} u^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_1\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l b\left(x,0\right)\phi_2^2\left(x\right) dx \\
& + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial b\left(x,t\right)}{\partial t} v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_2\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \int_{Q_\tau} k\left(x,t\right)\Im_x\left(u\right)\Im_x\left(v_t\right) dxdt \\
& + \int_{Q_\tau} \frac{\partial k\left(x,t\right)}{\partial x}\Im_x\left(u\right)\Im_x^2\left(v_t\right) dxdt + \int_{Q_\tau} h\left(x,t\right)\Im_x\left(v\right)\Im_x\left(u_t\right) dxdt \\
& + \int_{Q_\tau} \frac{\partial h\left(x,t\right)}{\partial x}\Im_x\left(v\right)\Im_x^2\left(u_t\right) dxdt. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

En utilisant les conditions (3.4), l'inégalité de Cauchy et l'inégalité de Poincaré

$$
\left\|\Im_x u\right\|_{L^2(Q)} \leq \frac{l^2}{2}\left\|u\right\|_{L^2(Q)}. \qquad (3.23)
$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_\tau} (\Im_x(u))^2\,dxdt &= \int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\underbrace{\int\limits_0^x u\,d\xi}_{cauchy-schwartz} \Bigg)^2 dxdt \\
&\leq \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\int\limits_0^x d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^x (u)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\int\limits_0^x d\xi \right) \left(\int\limits_0^x (u)^2 d\xi \right) \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \int\limits_0^x (u)^2 d\xi \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \left\| u \right\|^2_{L^2(0,x)} \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left[x \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} \right] dxdt \\
&= \int\limits_0^\tau \left\| u \right\|^2_{L^2(0,x)} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l dt \\
&= \int\limits_0^\tau \frac{l^2}{2} \left\| \Im_\xi(u) \right\|^2_{L^2(0,x)} dt \\
&\leq \int\limits_0^\tau \frac{l^2}{2} \left\| u \right\|^2_{L^2(0,l)} dt \\
&= \frac{l^2}{2} \int\limits_{Q_\tau} (u)^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_0^l u^2\left(x,\tau\right)dx \\
& +\frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx + \frac{c_2}{2}\int_0^l v^2\left(x,\tau\right)dx \\
\leq\ & \frac{c_1}{2}\int_0^l \phi_1^2\left(x\right)dx + \frac{c_4}{2}\int_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_1\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \frac{c_3}{2}\int_0^l \phi_2^2\left(x\right)dx \\
& +\frac{c_5}{2}\int_{Q_\tau} v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(\psi_2\left(x\right)\right)\right)^2 dx + \frac{c_6}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{c_6}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt + \frac{c_7}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2 dxdt + \frac{c_7 l^2}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{c_8}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2 dxdt + \frac{c_8}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \frac{c_9}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{c_9 l^2}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} f^2\left(x,t\right)dxdt + \frac{l^2}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} g^2\left(x,t\right)dxdt + \frac{l^2}{2}\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités suivantes,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{l} \left(\Im_x \left(\psi_1 \left(x\right)\right)\right)^2 dx \leq \frac{l^2}{4}\int\limits_{0}^{l} \left(\psi_1 \left(x\right)\right)^2 dx, \\ \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{l} \left(\Im_x \left(\psi_2 \left(x\right)\right)\right)^2 dx \leq \frac{l^2}{4}\int\limits_{0}^{l} \left(\psi_2 \left(x\right)\right)^2 dx, \\ \frac{c_6}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x \left(u\right)\right)^2 dxdt \leq \frac{c_6 l^2}{4}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt, \\ \frac{c_7}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x \left(u\right)\right)^2 dxdt \leq \frac{c_7 l^2}{4}\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt, \\ \frac{c_8}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x \left(v\right)\right)^2 dxdt \leq \frac{c_8 l^2}{4}\int\limits_{Q_\tau} v^2 dxdt, \\ \frac{c_9}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left(\Im_x \left(v\right)\right)^2 dxdt \leq \frac{c_9 l^2}{4}\int\limits_{Q_\tau} v^2 dxdt. \end{cases} \tag{3.25}$$

on transforme (3.24) a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{0}^{l}\left(\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx+\frac{c_0}{2}\int_{0}^{l}u^2\left(x,\tau\right)dx \\
& +\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\left(\Im_x\left(v_t\left(x,\tau\right)\right)\right)^2 dx+\frac{c_2}{2}\int_{0}^{l}v^2\left(x,\tau\right)dx \\
\leq\ & \frac{c_1}{2}\int_{0}^{l}\phi_1^2\left(x\right)dx+\frac{c_3}{2}\int_{0}^{l}\phi_2^2\left(x\right)dx+\frac{l^2}{4}\int_{0}^{l}\left(\psi_1\left(x\right)\right)^2 dx \\
& +\left(\frac{c_4}{2}+\frac{c_6 l^2}{4}+\frac{c_7 l^2}{4}\right)\int_{Q_\tau}u^2 dxdt+\frac{l^2}{4}\int_{0}^{l}\left(\psi_2\left(x\right)\right)^2 dx \\
& +\left(\frac{c_5}{2}+\frac{c_8 l^2}{4}+\frac{c_9 l^2}{4}\right)\int_{Q_\tau}v^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7 l^2}{4}+\frac{l^2}{2}\right)\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9 l^2}{4}+\frac{l^2}{2}\right)\int_{Q_\tau}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}f^2\left(x,t\right)dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}g^2\left(x,t\right)dxdt. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.26) peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
& \left\|u\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|v\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} \\
& +\left\|\Im_x\left(u_t\left(x,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\Im_x\left(v_t\left(x,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} \\
\leq\ & \delta(\left\|\phi_1\left(x\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\phi_2\left(x\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\psi_1\left(x\right)\right\|^2_{L^2(0,l)}+\left\|\psi_2\left(x\right)\right\|^2_{L^2(0,l)} \\
& +\left\|u\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\left\|v\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\left\|\Im_x\left(u_t\right)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\left\|\Im_x\left(v_t\right)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)} \\
& +\left\|f\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\left\|g\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}), \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

où

$$\delta=\frac{\max\left\{\frac{l^2}{4},\frac{c_1}{2},\frac{c_3}{2},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\frac{1}{2}\right\}}{\min\left\{\frac{c_0}{2},\frac{c_2}{2},\frac{1}{2}\right\}}, \qquad (3.28)$$

et

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(\frac{c_4}{2}+\frac{c_6 l^2}{4}+\frac{c_7 l^2}{4}\right), \\
\alpha_2 &= \left(\frac{c_5}{2}+\frac{c_8 l^2}{4}+\frac{c_9 l^2}{4}\right), \\
\beta_1 &= \left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7 l^2}{4}+\frac{l^2}{2}\right), \\
\beta_2 &= \left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9 l^2}{4}+\frac{l^2}{2}\right). \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

On applique maintenant le lemme de Gronwall a (3.27) pour obtenir

$$
\begin{aligned}
& \|u(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} + \|v(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} \\
& + \|\Im_x(u_t(x,\tau))\|^2_{L^2(0,l)} + \|\Im_x(v_t(x,\tau))\|^2_{L^2(0,l)} \\
\leq \; & \delta e^{\delta T}\left[\begin{array}{c} \|\phi_1(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|\phi_2(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi_1(x)\|^2_{L^2(0,l)} \\ + \|\psi_2(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|f\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|g\|^2_{L^2(Q_\tau)} \end{array}\right]. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Si on écarte $3^{ème}$ et $4^{ème}$ termes du côté gauche de (3.30), on a les deux inégalités

$$\|u(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} \leq \lambda \|JU\|^2_H \;, \qquad (3.31)$$

$$\|v(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} \leq \lambda \|JU\|^2_H \;, \qquad (3.32)$$

où $\lambda = \delta e^{\delta T}$,

$$
\begin{aligned}
JU &= \|\phi_1(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|\phi_2(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|\psi_1(x)\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\quad + \|\psi_2(x)\|^2_{L^2(0,l)} + \|f\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|g\|^2_{L^2(Q_\tau)}.
\end{aligned}
$$

En prenant la borne supérieure par rapport à τ dans $(0.T)$ dans (3.31), (3.32) et les ajouter côte à côte, on obtient :

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} + \sup_{0\leq\tau\leq T}\|v(x,\tau)\|^2_{L^2(0,l)} \leq 2\lambda\|JU\|^2_H \;, \qquad (3.33)$$

donc

$$
\begin{aligned}
\|U(x,\tau)\|^2_B &= \|u(x,\tau)\|^2_{(0,T;L^2(0,l))} + \|v(x,\tau)\|^2_{(0,T;L^2(0,l))} \qquad (3.34) \\
&\leq C\|JU\|^2_H \;.
\end{aligned}
$$

■

Proposition 3.1 *L'opérateur $J : B \to H$ admet une fermeture $\overline{J}$.*

Preuve. La preuve peut être présentée comme dans le chapitre 2. ■

Corollaire 3.1 *Une solution forte du problème* (3.1), (3.2) *et* (3.3) *est unique et dépend continuement des données* $G = (\{f, \phi_1, \psi_1\}, \{g, \phi_2, \psi_2\}) \in H$.

Corollaire 3.2 *L'image $R(\overline{J})$ de l'opérateur $\overline{J}$ est fermé dans H et égal a la fermeture $\overline{R(J)}$ de $R(J)$, c'est $R(\overline{J}) = \overline{R(J)}$.*

Preuve. La preuve presentée comme dans le chapitre 2. ■

3.4 Existence de la solution

Proposition 3.2 *Si, pour certaint fonctoin $W = (\omega_1, \omega_2) \in (L^2(Q))^2$ et pour toute elements*

$$U \in D_0(J) = \{U \;/\; U \;\in D(J) : l_1 u = l_2 u = l_1 v = l_2 v = 0\},$$

on a

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_1 u, \omega_1)_{L^2(Q)} + \;(\mathcal{L}_2 v,\; \omega_2)_{L^2(Q)} \;+\; (l_1 u, \omega_3)_{L^2(\Omega)} \\ & + (l_2 u, \omega_4)_{L^2(\Omega)} + (l_1 v\;, \omega_5)_{L^2(\Omega)} + (l_2 v\;, \omega_6)_{L^2(\Omega)} \\ = \;& 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

puis W égal a zéro presque partout dans Q.
où les fonctions $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h(x,t)$, $k(x,t)$ satisfont les conditions

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \geq c_{10},\; \frac{\partial^3 b}{\partial t^3} \geq c_{11},\; \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \leq c_{12}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} \leq c_{13},\; \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \leq c_{14},\; \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \leq c_{15}, \\ \frac{\partial k}{\partial t} \leq c_{16},\; \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial t} \leq c_{17}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Preuve. D'aprés la relation (4.1) retient pour toute élément de $D_0(J)$, on prend un élément $U = (u, v)$ sous la forme suivant

Soit

$$U = \begin{cases} (0,0), & 0 \leq t \leq s \\ \left(\int\limits_s^T (t-\tau)\; u_{\tau\tau} d\tau,\; \int\limits_s^T \int\limits_s^t (t-\tau)\; v_{\tau\tau}\; d\tau \right), & s \leq t \leq T, \end{cases}$$

tel que (u_{tt}, v_{tt}) est la solution de systéme

$$\begin{cases} -\Im_x^2 (u_{tt}) = E_1(x,t), \\ -\Im_x^2 (v_{tt}) = E_2(x,t), \end{cases} \tag{4.3}$$

où

$$E_1(x,t) = \int_t^T \omega_1(x,s)\,ds,$$

et

$$E_2(x,t) = \int_t^T \omega_2(x,s)\,ds.$$

Il est claire que

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt}), \\ \omega_2 = \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt}), \end{cases} \tag{4.4}$$

car de (4.3) on a :

$$\begin{aligned} -\Im_x^2(u_{tt}) &= \int_t^T \omega_1(x,s)\,ds \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x^2(u_{tt})\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_T^t \omega_1(x,s)\ ds\right) \\ \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt}) &= \omega_1(x,s)\,|_T^t \\ \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt}) &= \omega_1(x,t) \end{aligned}$$

et le même pour $\omega_2(x,t)$.

Lemme 3.1 *La fonction $W = (\omega_1, \omega_2)$ defini par (4.4) et en $\left(L^2(Q)\right)^2$.*

Preuve. *On utilise l'opérateur de régularisation J_ε de la forme*

$$(J_\varepsilon u)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right)\ u(x,s)\ ds,$$

où

$$W \in C_0^\infty(0,T), W(t) \geq 0,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\,dt = 1.$$

on applique l'opérateur J_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ sur la premiére équation dans (4.3), on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(-\Im_x^2(u_{tt})\right) \\ = \ &\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\Im_x^2(u_{tt}) - J_\varepsilon\left(-\Im_x^2(v_{tt})\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial t}J_\varepsilon\left(E_1(x,t)\right), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(E(x,t)) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right) E_1(x,t)\,ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right)\left(-\Im_x^2(u_{tt})\right)ds \\ &= J_\varepsilon\left(-\Im_x^2(u_{tt})\right). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right) \right\|_{L^2(Q)}^2 \\
\leq \quad & 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right) - J_\varepsilon \left(-\Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right) \right\|_{L^2(Q)}^2 \\
&+2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon E_1 \left(x,t \right) \right\|_{L^2(Q)}^2 .
\end{aligned}$$

On utilise les propréties de l'opérateur J_ε,

$$\left\| J_\varepsilon u - u \right\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(i.e)} \quad J_\varepsilon u \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u \textit{ dans } L^2 \left(\Omega \right),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right) \right\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left[J_\varepsilon \left(E_1 \left(x,t \right) \right) \right] \right\|_{L^2(Q_T)}^2 .$$

$$J_\varepsilon u \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u \quad \textit{dans} \quad L^2 \left(Q_T \right)$$

et la norme de $\frac{\partial}{\partial t} \left(-\Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right)$ *dans* $L^2 \left(Q_T \right)$ *est borné, on conclure que*

$$\omega_1 \in L^2 \left(Q_T \right).$$

De même façont on applique J_ε *et* $\frac{\partial}{\partial t}$ *sur la deuxiéme équation dans* (4.3), *on conclure que*

$$\omega_2 \in L^2 \left(Q_T \right).$$

Par conséquence

$$W = \left(\omega_1, \omega_2 \right) \in \left(L^2 \left(Q \right) \right)^2 .$$

■

Maintenant on remplaçent (ω_1, ω_2) donneé par (4.4) en (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{L}_1 \left(u,v \right), \omega_1 \right)_{L^2(Q)} + \left(\mathcal{L}_2 \left(u,v \right), \omega_2 \right)_{L^2(Q)} \\
= \quad & \left(u_{tt}, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} - \left(\left(a \left(x,t \right) u \right)_{xx}, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} \\
& - \left(h \left(x,t \right) v, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} + \left(v_{tt}, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(u_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} \\
& - \left(\left(b \left(x,t \right) v \right)_{xx}, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(v_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} - \left(k \left(x,t \right) u, \frac{\partial}{\partial t} \Im_x^2 \left(v_{tt} \right) \right)_{L^2(Q)} \\
= \quad & 0. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Intégration par partie de chacun terme de (4.5) :

$$\begin{aligned}
\left(u_{tt}, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\right)_{L^2(Q)} &= \int_Q u_{tt}\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\ dxdt \\
&= \int_s^T \left[\Im_x(u_{tt})\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\right]_0^l dt - \int_Q \frac{\partial}{\partial t}\Im_x(u_{tt})\Im_x(u_{tt})\ dxdt \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{integrale par part} \\
&= -\int_0^l (\Im_x(u_{tt}))^2 |_s^T dx + \int_Q \Im_x(u_{tt})\frac{\partial}{\partial t}\Im_x(u_{tt})\, dxdt \\
&= -\int_0^T (\Im_x(u_{tt}))^2 |_s^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(\Im_x(u_{tt}))^2\, dxdt \\
&= -\int_0^l (\Im_x(u_{tt}))^2 |_s^T dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x(u_{tt})^2\right)|_s^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_{tt}))^2 |_s^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,T))^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\, dx, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left((a(x,t)\,u)_{xx}, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\right)_{L^2(Q)} \leq\ & \int_0^l \frac{\partial a(x,T)}{\partial t}u(x,T)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial^2 a(x,T)}{\partial t^2}u^2(x,T)\, dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial^3 a(x,t)}{\partial t^3}u^2(x,t)\, dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a(x,t)}{\partial t}u_t^2(x,t)\, dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_s} a(x,T)\, u_t^2(x,T)\, dxdt \\
&-\frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial a(x,t)}{\partial t}u_t^2(x,t)\, dxdt, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left(h(x,t)\,v,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\right)_{L^2(Q)} &= -\int_Q h(x,t)\,v\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&\qquad \text{integration par partie} \\
&= -\int_s^T h(x,t)\,\Im_x(v)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\ \Big|_0^l dt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Im_x(v)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s} h(x,t)\,\Im_x(v)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&= \int_0^l h(x,t)\,\Im_x(v)\,\Im_x(u_{tt})\ \Big|_s^T dx\ -\int_{Q_s} h(x,t)\,\Im_x(v_t)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\Im_x(v)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad +\int_0^l\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Im_x(v)\,\Im_x^2(u_{tt})\ \Big|_s^T dt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Im_x(v_t)\,\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x\partial t}\Im_x(v)\,\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&= -\int_{Q_s} h(x,t)\,\Im_x(v_t)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\Im_x(v)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Im_x(v_t)\,\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x\partial t}\Im_x(v)\,\Im_x^2(u_{tt})\ dxdt\ , \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(v_{tt}, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} &= \int\limits_{Q_s} v_{tt}\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&\overset{\text{integration par partie}}{=} \int\limits_s^T \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\Im_x\left(v_{tt}\right)\ |_0^l dt - \int\limits_{Q_s}\Im_x\left(v_{tt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)^2\right)dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \Im_x\left(v_{tt}\right)^2\ |_s^T\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,T)\right)^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2dx, \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\left(b\left(x,t\right)v\right)_{xx}, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} &= -\int\limits_{Q_s}\left(b\left(x,t\right)v\right)_{xx}\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&= -\int\limits_s^T\frac{\partial}{\partial x}\left(b\left(x,t\right)v\right)\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\ |_0^l dt \\
&\quad + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial}{\partial x}\left(b\left(x,t\right)v\right)\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&= \int\limits_s^T\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(v_{tt}\right)b\left(x,t\right)v\ |_0^l dt - \int\limits_{Q_s}b\left(x,t\right)v\frac{\partial}{\partial t}v_{tt}dxdt \\
&= -\int\limits_0^l b\left(x,t\right)vv_{tt}\ |_s^T dx + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial b\left(x,t\right)}{\partial t}vv_{tt}dxdt \\
&\quad + \int\limits_{Q_s}b\left(x,t\right)v_tv_{tt}dxdt,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
-\left((b(x,t)\,v)_{xx}, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt})\right)_{L^2(Q_s)} &= \int_0^l \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v v_t \,|_s^T dx - \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial t^2} v v_t \, dxdt \\
&\quad - \int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 \, dxdt + \int_{Q_s} b(x,t)\, v_t v_{tt} \, dxdt \\
&= \int_0^l \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v v_t \,|_s^T dx - \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial t^2} v v_{tt} \, dxdt \\
&\quad - \int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} b(x,t)\,(v_t)^2 \, dxdt \\
&= \int_0^l \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v v_t \,|_s^T dx - \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial t^2} v v_{tt} dxdt \\
&\quad - \int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l b(x,t)\, v_t^2 |_s^T dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 dxdt \\
&= \int_0^l \frac{\partial b(x,T)}{\partial t} v(x,T)\, v_t(x,T)\, dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial^2 b(x,T)}{\partial t^2} v^2(x,T)\, dx + \int_{Q_s} \frac{\partial^3 b(x,t)}{\partial t^3} v^2 dxdt \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l b(x,T)\, v_t^2(x,T)\, dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2 dxdt, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\left(k(x,t)\,u,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt})\right)_{L^2(Q_s)} &= -\int_{Q_s} k(x,t)\,u\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\
&= -\int_s^T k(x,t)\,\Im_x(u)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt})\,|_0^l dt \\
&\quad +\int_{Q_s}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\Im_x(u)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad +\int_{Q_s} k(x,t)\,\Im_x(u)\,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\
&= \int_0^l k(x,t)\,\Im_x(u)\,\Im_x(v_{tt})\,|_s^T dx-\int_{Q_s}\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\Im_x(u)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s} k(x,t)\,\Im_x(u_t)\,\Im_x(v_{tt})\ dxdt \\
&\quad +\int_0^l\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\Im_x(u)\,\Im_x^2(v_{tt})\,|_s^T dx \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\Im_x(u_t)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x\partial t}\Im_x(u)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\
&= -\int_{Q_s} k(x,t)\,\Im_x(u_t)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\Im_x(u)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\Im_x(u_t)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\
&\quad -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x\partial t}\Im_x(u)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt, \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

En substituant les inégalités $(4.6)-(4.11)$ en (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial^3 a\left(x,t\right)}{\partial t^3}u^2dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_0^l a\left(x,T\right)u_t^2\left(x,T\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial^3 b\left(x,t\right)}{\partial t^3}v^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l b\left(x,T\right)v_t^2\left(x,T\right)dx \\
=\;& -\int_0^l \frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u\left(x,T\right)u_t\left(x,T\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial^2 a\left(x,T\right)}{\partial t^2}u^2\left(x,T\right)dx \\
&+\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u_t^2dxdt \\
&+\int_{Q_s}h\left(x,t\right)\Im_x\left(v_t\right)\Im_x\left(u_{tt}\right)dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial h\left(x,t\right)}{\partial t}\Im_x\left(v\right)\Im_x\left(u_{tt}\right)dxdt \\
&+\int_{Q_s}\frac{\partial h\left(x,t\right)}{\partial x}\Im_x\left(v_t\right)\Im_x^2\left(u_{tt}\right)dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial^2 h\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}\Im_x\left(v\right)\Im_x^2\left(u_{tt}\right)dxdt \\
&-\int_0^l \frac{\partial b\left(x,T\right)}{\partial t}v\left(x,T\right)v_t\left(x,T\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial^2 b\left(x,T\right)}{\partial t^2}v^2\left(x,T\right)dx \\
&+\int_{Q_s}\frac{\partial b\left(x,t\right)}{\partial t}v_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial b\left(x,t\right)}{\partial t}v_t^2dxdt \\
&+\int_{Q_s}k\left(x,t\right)\Im_x\left(u_t\right)\Im_x\left(v_{tt}\right)dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial k\left(x,t\right)}{\partial t}\Im_x\left(u\right)\Im_x\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&+\int_{Q_s}\frac{\partial k\left(x,t\right)}{\partial t}\Im_x\left(u_t\right)\Im_x^2\left(v_{tt}\right)dxdt \\
&+\int_{Q_s}\frac{\partial^2 k\left(x,t\right)}{\partial x\partial t}\Im_x\left(u\right)\Im_x^2\left(v_{tt}\right)dxdt. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions (3.4) et (4.2) sur les coefficients et l'inégalité de Cauchy avec ε,

$$c_{10}\leq\frac{\partial^3}{\partial t^3}a\left(x,t\right),$$

alors

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^3}{\partial t^3}a\left(x,t\right)u^2dxdt \geq \frac{c_{10}}{2}\int\limits_{Q_s}u^2dxdt,$$

$$\frac{c_{10}}{2}\int\limits_{Q_s}u^2dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^3 a\left(x,t\right)}{\partial t^3}u^2dxdt, \tag{a.1}$$

comme

$$c_0 \leq a\left(x,t\right)$$

donc

$$\frac{c_0}{2}\int\limits_0^l u_t^2\left(x,T\right)dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^l a\left(x,T\right)u_t^2\left(x,T\right)dx, \tag{a.2}$$

comme

$$c_{11} \leq \frac{\partial^3 b\left(x,t\right)}{\partial t^3}$$

donc

$$\frac{c_{11}}{2}\int\limits_{Q_s}v^2dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial^3 b\left(x,t\right)}{\partial t^3}v^2dxdt, \tag{a.3}$$

comme

$$c_2 \leq b\left(x,t\right) \leq c_3$$

donc

$$\frac{c_2}{2}\int\limits_0^l v_t^2\left(x,T\right)dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^l b\left(x,T\right)v_t^2\left(x,T\right)dx, \tag{a.4}$$

on a

$$\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t} \leq c_4$$

donc

$$\begin{aligned}\int\limits_0^l \frac{\partial a\left(x,T\right)}{\partial t}u\left(x,T\right)u_t\left(x,T\right)dx &\leq c_4\int\limits_0^l u\left(x,T\right)u_t\left(x,T\right)dx \\ &\leq \frac{c_4\varepsilon_1}{2}\int\limits_0^l u^2\left(x,T\right)dx + \frac{c_4}{2\varepsilon_1}\int\limits_0^l u_t^2\left(x,T\right)dx, \end{aligned}\tag{a.5}$$

$$\int\limits_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u_t^2\left(x,t\right)dxdt \leq c_4\int_{Q_s}u_t^2\left(x,t\right)dxdt, \tag{a.6}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_s}\frac{\partial a\left(x,t\right)}{\partial t}u_t^2\left(x,t\right)dxdt \leq \frac{c_4}{2}\int\limits_{Q_s}u_t^2\left(x,t\right)dxdt, \tag{a.7}$$

on a

$$\frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial t^2} \leq c_{12}$$

donc

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial^2 a(x,T)}{\partial t^2} u^2(x,T)\,dx \leq \frac{c_{12}}{2}\int_0^l u^2(x,T)\,dx, \tag{a.8}$$

on a

$$h(x,t) \leq c_8$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} h(x,t)\Im_x(v_t)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt &\leq c_8\int_{Q_s}\Im_x(v_t)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_8\varepsilon_2}{2}\int_{Q_s}(\Im_x(v_t))^2\,dxdt + \frac{c_8}{2\varepsilon_2}\int_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt, \end{aligned} \tag{a.9}$$

on a

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \leq c_{13}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\Im_x(v)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt &\leq c_{13}\int_{Q_s}\Im_x(v)\,\Im_x(u_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_{13}\varepsilon_3}{2}\int_{Q_s}(\Im_x(v))^2\,dxdt + \frac{c_{13}}{2\varepsilon_3}\int_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt, \end{aligned} \tag{a.10}$$

comme

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \leq c_9$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Im_x(v_t)\,\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt &\leq c_9\int_{Q_s}\Im_x(v_t)\,\Im_x^2(u_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_9\varepsilon_4}{2}\int_{Q_s}(\Im_x(v_t))^2\,dxdt + \frac{c_9}{2\varepsilon_4}\int_{Q_s}\left(\Im_x^2(u_{tt})\right)^2\,dxdt, \end{aligned} \tag{a.11}$$

et

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} \leq c_{14}$$

donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} \Im_x(v)\, \Im_x^2(u_{tt})\, dxdt &\leq c_{14} \int\limits_{Q_s} \Im_x(v)\, \Im_x^2(u_{tt})\, dxdt \\ &\leq \frac{c_{14}\varepsilon_5}{2} \int\limits_{Q_s} (\Im_x(v))^2\, dxdt + \frac{c_{14}}{2\varepsilon_5} \int\limits_{Q_s} \left(\Im_x^2(u_{tt})\right)^2 dxdt, \end{aligned} \quad \text{(a12)}$$

et

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} \leq c_5$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^l \frac{\partial b(x,T)}{\partial t} v(x,T) v_t(x,T)\, dx &\leq c_5 \int_0^l v(x,T)\, v_t(x,T)\, dxdt \\ &\leq \frac{c_5\varepsilon_6}{2} \int_0^l (v(x,T))^2\, dx + \frac{c_5}{2\varepsilon_6} \int_0^l (v_t(x,T))^2\, dx, \end{aligned} \quad \text{(a.13)}$$

$$\int\limits_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2(x,t)\, dxdt \leq c_5 \int\limits_{Q_s} v_t^2(x,t)\, dxdt, \quad \text{(a.14)}$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{Q_s} \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} v_t^2(x,t)\, dxdt \leq \frac{c_5}{2} \int\limits_{Q_s} v_t^2(x,t)\, dxdt, \quad \text{(a.15)}$$

et on a

$$\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial t^2} \leq c_{15}$$

alors

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial^2 b(x,T)}{\partial t^2} v^2(x,T)\, dx \leq \frac{c_{15}}{2} \int_0^l v^2(x,T)\, dx, \quad \text{(a.16)}$$

et

$$k(x,t) \leq c_6$$

donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_s} k(x,t)\, \Im_x(u_t)\, \Im_x(v_{tt})\, dxdt &\leq c_6 \int\limits_{Q_s} \Im_x(u_t)\, \Im_x(v_{tt})\, dxdt \\ &\leq \frac{c_6\varepsilon_7}{2} \int\limits_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\, dxdt + \frac{c_6}{2\varepsilon_7} \int\limits_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2\, dxdt, \end{aligned} \quad \text{(a.17)}$$

et

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \leq c_{16}$$

donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_s} \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \Im_x(u)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt &\leq c_{16}\int\limits_{Q_s} \Im_x(u)\,\Im_x(v_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_{16}\varepsilon_8}{2}\int\limits_{Q_s} (\Im_x(u))^2\,dxdt + \frac{c_{16}}{2\varepsilon_8}\int\limits_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt, \quad \text{(a.18)}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \leq c_7$$

alors

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_s} \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \Im_x(u_t)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt &\leq c_7\int\limits_{Q_s} \Im_x(u_t)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_7\varepsilon_9}{2}\int\limits_{Q_s} (\Im_x(u_t))^2\,dxdt + \frac{c_7}{2\varepsilon_9}\int\limits_{Q_s} \left(\Im_x^2(v_{tt})\right)^2 dxdt, \quad \text{(a.19)}\end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x \partial t} \leq c_{17}$$

donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x\partial t} \Im_x(u)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt &\leq c_{17}\int\limits_{Q_s} \Im_x(u)\,\Im_x^2(v_{tt})\,dxdt \\ &\leq \frac{c_{17}\varepsilon_{10}}{2}\int\limits_{Q_s} (\Im_x(u))^2\,dxdt + \frac{c_{17}}{2\varepsilon_{10}}\int\limits_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt, \quad \text{(a.20)}\end{aligned}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{0}^{l}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx+\frac{c_{10}}{2}\int_{Q_s}u^2dxdt+\frac{c_0}{2}\int_{0}^{l}u_t^2\left(x,T\right)dx \\
& +\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx+\frac{c_{11}}{2}\int_{Q_s}v^2dxdt+\frac{c_2}{2}\int_{0}^{l}v_t^2\left(x,T\right)dx \\
\leq\ & \frac{c_4\varepsilon_1}{2}\int_{0}^{l}u^2\left(x,T\right)dx+\frac{c_4}{2\varepsilon_1}\int_{0}^{l}u_t^2\left(x,T\right)dx+\frac{c_{12}}{2}\int_{0}^{l}u^2\left(x,T\right)dx \\
& +c_4\int_{Q_s}u_t^2dxdt+\frac{c_4}{2}\int_{Q_s}u_t^2dxdt+\frac{c_8\varepsilon_2}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_8}{2\varepsilon_2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2dxdt+\frac{c_{13}\varepsilon_3}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_{13}}{2\varepsilon_3}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2dxdt+\frac{c_9\varepsilon_4}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_9}{2\varepsilon_4}\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)^2dxdt+\frac{c_{14}\varepsilon_5}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_{14}}{2\varepsilon_5}\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)^2dxdt+\frac{c_5\varepsilon_6}{2}\int_{0}^{l}v^2\left(x,T\right)dx \\
& +\frac{c_5}{2\varepsilon_6}\int_{0}^{l}v_t^2\left(x,T\right)dx+\frac{c_{15}}{2}\int_{0}^{l}v^2\left(x,T\right)dx \\
& +c_5\int_{Q_s}v_t^2dxdt+\frac{c_5}{2}\int_{Q_s}v_t^2dxdt \\
& +\frac{c_6\varepsilon_7}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2dxdt+\frac{c_6}{2\varepsilon_7}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_{16}\varepsilon_8}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2dxdt+\frac{c_{16}}{2\varepsilon_8}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_7\varepsilon_9}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2dxdt+\frac{c_7}{2\varepsilon_9}\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\right)^2dxdt \\
& +\frac{c_{17}\varepsilon_{10}}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2dxdt+\frac{c_{17}}{2\varepsilon_{10}}\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\right)^2dxdt. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

De plus on a :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx + \frac{c_{10}}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt \\
&+\frac{c_0}{2}\int_0^l u_t^2(x,T)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx \\
&+\frac{c_{11}}{2}\int_{Q_s} v^2 dxdt + \frac{c_2}{2}\int_0^l v_t^2(x,T)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{c_4\varepsilon_1}{2}+\frac{c_{12}}{2}\right)\int_0^l u^2(x,T)\,dx + \frac{c_4}{2\varepsilon_1}\int_0^l u_t^2(x,T)\,dx \\
&+\left(c_4+\frac{c_4}{2}\right)\int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \left(\frac{c_8\varepsilon_2}{2}+\frac{c_9\varepsilon_4}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_8}{2\varepsilon_2}+\frac{c_{13}}{2\varepsilon_3}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_{13}\varepsilon_3}{2}+\frac{c_{14}\varepsilon_5}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_9}{2\varepsilon_4}+\frac{c_{14}}{2\varepsilon_5}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_5\varepsilon_6}{2}+\frac{c_{15}}{2}\right)\int_0^l v^2(x,T)\,dx + \frac{c_5}{2\varepsilon_6}\int_0^l v_t^2(x,T)\,dx \\
&+\left(c_5+\frac{c_5}{2}\right)\int_{Q_s} v_t^2 dxdt + \left(\frac{c_6\varepsilon_7}{2}+\frac{c_7\varepsilon_9}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_6}{2\varepsilon_7}+\frac{c_{16}}{2\varepsilon_8}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_{16}\varepsilon_8}{2}+\frac{c_{17}\varepsilon_{10}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2 dxdt \\
&+\left(\frac{c_7}{2\varepsilon_9}+\frac{c_{17}}{2\varepsilon_{10}}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x^2\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned}
\int_0^l u^2(x,T)\,dx &= \int_0^l \left[u^2(x,T) - u^2(x,s)\right] dx = \int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
\text{donc} \quad \int_0^l u^2(x,T)\,dx &= \int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
\text{alors} \quad \int_0^l u^2(x,T)\,dx &\leq \int_{Q_s} u^2(x,t)\,dxdt + \int_{Q_s} u_t^2(x,t)\,dxdt \ ,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

est le méme pour $\int_0^l v^2(x,T)\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^l v^2(x,T)\,dx &= \int_0^l \left[v^2(x,T) - v^2(x,s)\right] dx = \int_{Q_s} v_t^2 dxdt \\
\text{donc} \quad \int_0^l v^2(x,T)\,dx &= \int_{Q_s} v_t^2(x,t)\,dxdt \\
\text{alors} \quad \int_0^l v^2(x,T)\,dx &\leq \int_{Q_s} v^2(x,t)\,dxdt + \int_{Q_s} v_t^2(x,t)\,dxdt,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

par l'utilisation de l'inégalités (4.15), (4.16) et on choisie $\varepsilon_1 = \frac{c_1}{2c_4}$, $\varepsilon_6 = \frac{c3}{2c_{10}}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = \varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = 1$,et aussi l'inegalité de Poincarre

$$\int_{Q_s} \left(\Im_x^2(u)\right)^2 dxdt \leq \frac{l^2}{2} \int_{Q_s} \left(\Im_x(u)\right)^2 dxdt.$$

(4.14) devient :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx + \frac{c_{10}}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt \\
& +\frac{c_0}{4}\int_0^l u_t^2(x,T)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx \\
& +\frac{c_{11}}{2}\int_{Q_s} v^2 dxdt + \frac{c_2}{4}\int_0^l v_t^2(x,T)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{c_0}{4}+\frac{c_{12}}{2}\right)\left(\int_{Q_s} u^2 dxdt + \int_{Q_s} u_t^2 dxdt\right) \\
& +\left(\frac{3c_4}{2}\right)\int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_{13}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_9}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(\int_{Q_s} v^2 dxdt + \int_{Q_s} v_t^2 dxdt\right) \\
& +\left(\frac{3c_5}{2}\right)\int_{Q_s} v_t^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_{16}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_7}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Maintenant on utilise l'inégalité de Poincaré :

$$\int_{Q_s} u^2 dxdt \leq 4T^2 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt, \tag{4.18}$$

preuve de cet inégalité

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^2}{\partial t} &= 2uu_t \\
\int_s^t \frac{\partial u^2}{\partial t} dt &= 2\int_s^t uu_t dt \\
u^2(x,t) - u^2(x,s) &= 2\int_s^t uu_t dt \quad \text{(on applique Cauchy avec } \varepsilon) \\
u^2(x,t) &\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_s^t u^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_s^t u_t^2 dt\right) \\
u^2(x,t) &\leq \varepsilon \int_s^t u^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t u_t^2 dxdt \quad \text{(on integrant sur } Q_s) \\
\int_s^T \int_0^l u^2 dxdt &\leq \varepsilon \int_s^T \left(\int_s^t \int_0^l u^2 dxdt\right) dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^T \left(\int_s^t \int_0^l u_t^2 dxdt\right) dt \\
&\leq \varepsilon \int_s^T dt \int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^T dt \int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
&\leq \varepsilon (T-s) \int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{T-s}{\varepsilon}\int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
\int_{Q_s} u^2 dxdt &\leq \varepsilon T \int_{Q_s} u^2 dxdt + \frac{T}{\varepsilon}\int_{Q_s} u_t^2 dxdt \quad \text{on prend } \varepsilon = \frac{1}{2T} \\
\int_{Q_s} u^2 dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt + 2T^2 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt, \qquad (4.19) \\
\left(1 - \frac{1}{2}\right)\int_{Q_s} u^2 dxdt &\leq 2T^2 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
\int_{Q_s} u^2 dxdt &\leq 4T^2 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt
\end{aligned}$$

en utilisant (4.18) et (4.17), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c_0}{4}+\frac{c_{12}}{2}\right)\left(\int\limits_{Q_s} u^2 dxdt+\int\limits_{Q_s} u_t^2 dxdt\right) &\leq \left(\frac{c_0}{2}+\frac{c_{12}}{2}\right)\left(4T^2\int\limits_{Q_s} u_t^2 dxdt+\int_{Q_s} u_t^2 dxdt\right)\\
&\leq \left(\frac{c_0}{2}+\frac{c_{12}}{2}\right)\left(4T^2+1\right)\int\limits_{Q_s} u_t^2 dxdt, \qquad \text{(b.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(\int\limits_{Q_s} v^2 dxdt+\int\limits_{Q_s} v_t^2 dxdt\right) &\leq \left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(4T^2\int\limits_{Q_s} v_t^2 dxdt+\int_{Q_s} v_t^2 dxdt\right)\\
&\leq \left(\frac{c_4}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(4T^2+1\right)\int\limits_{Q_s} v_t^2 dxdt, \qquad \text{(b.2)}
\end{aligned}$$

en remplaçant dans (4.17) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx + \frac{c_{10}}{2}\int_{Q_s} u^2 dxdt \\
& +\frac{c_0}{4}\int_0^l u_t^2\left(x,T\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2 dx \\
& +\frac{c_{11}}{2}\int_{Q_s} v^2 dxdt + \frac{c_2}{4}\int_0^l v_t^2\left(x,T\right) dx \\
\leq\ & \left[\left(4T^2+1\right)\left(\frac{c_0}{4}+\frac{c_{12}}{2}\right)\right]\int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
& +\left(\frac{3c_4}{2}\right)\int_{Q_s} u_t^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_{13}}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(v\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_9}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left[\left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(4T^2+1\right)\right]\int_{Q_s} v_t^2 dxdt \\
& +\left(\frac{3c_5}{2}\right)\int_{Q_s} v_t^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_{16}}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt \\
& +\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)_{Q_s} \left(\Im_x\left(u\right)\right)^2 dxdt \\
& +\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_7}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int_{Q_s} \left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2 dxdt. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

En collectant des termes similaires et en utilisant l'inégalité de Poincaré et nous négligeons la deuxiéme et le cinquiéme termes dans le coté gauche de (4.20), on a:

$$\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right)\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_t\right)\right)^2dxdt \leq \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right)\int\limits_{Q_s}v_t^2dxdt, \tag{c.1}$$

$$\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_t\right)\right)^2dxdt \leq \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)\int\limits_{Q_s}u_t^2dxdt, \tag{c.2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(u\right)\right)^2dxdt &\leq \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}u^2dxdt \\ &\leq \frac{4T^2l^2}{2}\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}u_t^2dxdt,\end{aligned} \tag{c.3}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(v\right)\right)^2dxdt &\leq \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}v^2dxdt \\ &\leq \frac{4T^2l^2}{2}\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\int\limits_{Q_s}v_t^2dxdt,\end{aligned} \tag{c.4}$$

(4.20) devient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)(x,s)\right)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)(x,s)\right)^2dx \\ &+\frac{c_0}{4}\int\limits_0^l u_t^2(x,T)\,dx+\frac{c_2}{4}\int\limits_0^l v_t^2(x,T)\,dx \\ \leq\ &\left[\begin{array}{c}\left(4T^2+1\right)\left(\frac{c_0}{4}+\frac{c_{12}}{2}\right)+\frac{3c_4}{2} \\ +\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)+\frac{l^2}{2}4T^2\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\end{array}\right]\int\limits_{Q_s}u_t^2dxdt \\ &+\left[\begin{array}{c}\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right)+\frac{l^2}{2}4T^2\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right) \\ +\left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(4T^2+1\right)+\frac{3c_5}{2}\end{array}\right]\int\limits_{Q_s}v_t^2dxdt \\ &+\left[\frac{c_8}{2}+\frac{c_{13}}{2}+\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_9}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right)\right]\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(u_{tt}\right)\right)^2dxdt \\ &+\left[\frac{c_6}{2}+\frac{c_{16}}{2}+\frac{l^2}{2}\left(\frac{c_7}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right)\right]\int\limits_{Q_s}\left(\Im_x\left(v_{tt}\right)\right)^2dxdt.\end{aligned} \tag{4.21}$$

On introduise maintenant la nouvelle fonction δ définie par

$$\delta\left(x,t\right)=\int\limits_{t}^{T}u_{\tau\tau}d\tau, \tag{4.22}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
u_{t}\left(x,t\right) &= \delta\left(x,s\right)-\delta\left(x,t\right) \\
&= \int\limits_{s}^{T}u_{\tau\tau}d\tau-\int\limits_{t}^{T}u_{\tau\tau}d\tau \\
&= \int\limits_{s}^{T}u_{\tau\tau}d\tau+\int\limits_{T}^{t}u_{\tau\tau}d\tau \\
&= u_{t}\left(x,t\right)-u_{s}\left(x,s\right) \\
&= u_{t}\left(x,t\right) \\
(i.e)\quad u_{t}\left(x,t\right) &= \delta\left(x,s\right)-\delta\left(x,t\right),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

et

$$\begin{aligned}
u_{t}\left(x,T\right) &= \delta\left(x,s\right) \\
&= \int\limits_{s}^{T}u_{\tau\tau}d\tau \\
&= u_{t}\left(x,T\right)-u_{t}\left(x,s\right) \\
&= u_{t}\left(x,T\right) \\
(i.e)\qquad u_{t}\left(x,T\right) &= \delta\left(x,s\right),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Et la fonction :

$$\gamma\left(x,t\right)=\int_{t}^{T}v_{\tau\tau}d\tau, \tag{4.25}$$

telle que

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \gamma(x,s)-\gamma(x,t) \\ &= \int\limits_s^T v_{\tau\tau}\,d_\tau - \int_t^T v_{\tau\tau}\,d\tau \\ &= \int\limits_s^T v_{\tau\tau}d\tau + \int_T^t v_{\tau\tau}\,d\tau \\ &= \int\limits_s^T v_{\tau\tau}d\tau \\ &= v_t(x,t)-v_t(x,s) \\ &= v_t(x,t) \\ (i.e)\quad v_t(x,t) &= \gamma(x,s)-\gamma(x,t), \end{aligned} \tag{4.26}$$

et

$$\begin{aligned} v_t(x,T) &= \gamma(x,s) \\ &= \int\limits_s^T v_{\tau\tau}d\tau \\ &= v_t(x,T)-v_t(x,s) \\ &= v_t(x,T) \\ (i.e)\qquad v_t(x,T) &= \gamma(x,s), \end{aligned} \tag{4.27}$$

d'apres (4.24) et (4.27) on a :

$$\frac{c_0}{4}\int\limits_0^l u_t^2(x,T)\,dx = \frac{c_0}{4}\int\limits_0^l \delta^2(x,s)\,dx, \tag{*}$$

$$\frac{c_2}{4}\int\limits_0^l v_t^2(x,T)\,dx = \frac{c_2}{4}\int\limits_0^l \gamma^2(x,s)\,dx, \tag{**}$$

d'apres (4.23) on a :

$$\begin{aligned} u_t^2(x,t) &= (\delta(x,s)-\delta(x,t))^2 \\ &= \delta^2(x,s)+\delta^2(x,t)-2\delta(x,s)\,\delta(x,t) \\ &\leq 2\left(\delta^2(x,s)+\delta^2(x,t)\right), \\ \text{donc } \int\limits_{Q_s} u_t^2dxdt &\leq 2\left[\int\limits_{Q_s}\delta^2(x,s)\,dxdt + \int\limits_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt\right], \end{aligned} \tag{***}$$

de méme façont on obtient :

$$\int_{Q_s} v_t^2 dxdt \leq 2\int_{Q_s} \gamma^2(x,s)\,dxdt + 2\int_{Q_s} \gamma^2(x,t)\,dxdt, \tag{****}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\,dx \\
&+\frac{c_0}{4}\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx + \frac{c_2}{4}\int_0^l \gamma^2(x,s)\,dx \\
\leq\;& \alpha_1\left[2\int_{Q_s} \delta^2(x,s)\,dxdt + 2\int_0^l \delta^2(x,t)\,dxdt\right] \\
&+\alpha_2\left[2\int_{Q_s} \gamma^2(x,s)\,dxdt + 2\int_{Q_s} \gamma^2(x,t)\,dxdt\right] \\
&+\beta_1\left[\int_{Q_s} (\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt\right] + \beta_2\left[\int_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt\right],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

où

$$\alpha_1 = \left(4T^2+1\right)\left(\frac{c_0}{4}+\frac{c_{12}}{2}\right) + \frac{3c_4}{2} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right) + \frac{l^2}{2}4T^2\left(\frac{c_{16}}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_8}{2}+\frac{c_9}{2}\right) + \frac{l^2}{2}4T^2\left(\frac{c_{13}}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right) + \left(\frac{c_2}{4}+\frac{c_{15}}{2}\right)\left(4T^2+1\right) + \frac{3c_5}{2},$$

$$\beta_1 = \frac{c_8}{2} + \frac{c_{13}}{2} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_9}{2}+\frac{c_{14}}{2}\right),$$

et

$$\beta_2 = \frac{c_6}{2} + \frac{c_{16}}{2} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{c_7}{2}+\frac{c_{17}}{2}\right),$$

l'inégalité (4.28) devient :

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\frac{1}{2},\frac{c_0}{4},\frac{c_2}{4}\right\}\left[\begin{array}{c}\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\,dx+\int_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\,dx\\ +\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx+\int_0^l \gamma^2(x,s)\,dx\end{array}\right]\\
\leq\ &\max\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}\left[\begin{array}{c}2\int_{Q_s}\delta^2(x,s)\,dxdt+2\int_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt\\ +2\int_{Q_s}\gamma^2(x,s)\,dxdt+2\int_{Q_s}\gamma^2(x,t)\,dxdt\\ +\int_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt+\int_{Q_s}(\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt\end{array}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\,dx+\int_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\,dx\\
&+\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx+\int_0^l \gamma^2(x,s)\,dx\\
\leq\ & k\left[\begin{array}{c}2\int_{Q_s}\delta^2(x,s)\,dxdt+2\int_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt\\ +2\int_{Q_s}\gamma^2(x,s)\,dxdt+2\int_{Q_s}\gamma^2(x,t)\,dxdt\\ +\int_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt+\int_{Q_s}(\Im_x(v_{tt}))\,dxdt\end{array}\right],
\end{aligned}\tag{4.29}$$

où

$$k=\frac{\max\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}}{\min\left\{\frac{1}{2},\frac{c_0}{4},\frac{c_2}{4}\right\}}.$$

Pour continuer, on utilise les inégalités

$$\begin{aligned}
2\int_{Q_s}\delta^2(x,s)\,dxdt &= 2\int_s^T\int_0^l \delta^2(x,s)\,dxdt=2\int_s^T dt\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx\\
2\int_{Q_s}\delta^2(x,s)\,dxdt &= 2(T-s)\int_0^l \delta^2(x,s)\ dx,
\end{aligned}\tag{4.30}$$

et

$$\begin{aligned}
2\int\limits_{Q_s}\gamma^2(x,s)\,dxdt &= 2\int\limits_s^T\int\limits_0^l\gamma^2(x,s)\,dxdt \\
2\int\limits_{Q_s}\gamma^2(x,s)\,dxdt &= 2\int\limits_s^T dt\int\limits_0^l\gamma^2(x,s)\,dx \\
2\int\limits_{Q_s}\gamma^2(x,s)\,dxdt &= 2(T-s)\int\limits_0^l\gamma^2(x,s)\,dx,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ainsi, l'inégalité (4.29) devient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^l(\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\,dx+\int\limits_0^l(\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\,dx \\
&+\int\limits_0^l\delta^2(x,s)\,dx+\int\limits_0^l\gamma^2(x,s)\,dx \\
\leq\ & k\left[\begin{array}{c}
2(T-s)\int\limits_0^l\delta^2(x,s)\,dx+\int\limits_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt \\
+2(T-s)\int\limits_0^l\delta^2(x,s)\,dx+\int\limits_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt \\
+\int\limits_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt+\int\limits_{Q_s}(\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt
\end{array}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^l(\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\,dx+\int\limits_0^l(\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\,dx \\
&+[1-2k(T-s)]\left[\int\limits_0^l\delta^2(x,s)\,dx+\int\limits_0^l\gamma^2(x,s)\,dx\right] \\
\leq\ & 2k\left[\begin{array}{c}
\int\limits_{Q_s}\delta^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_{Q_s}\gamma^2(x,t)\,dx \\
+\int\limits_{Q_s}(\Im_x(u_{tt}))^2\,dxdt+\int\limits_{Q_s}(\Im_x(v_{tt}))^2\,dxdt
\end{array}\right],
\end{aligned} \tag{4.32}$$

En choisissant $s_0 > 0$, pour que $s \in [T - s_0, T]$ et $1 - 2K(T - s) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2 dx + \int_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\left[\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx + \int_0^l \gamma^2(x,s)\,dx\right] \\
\leq\ & 2k\left[\begin{array}{c} \int_{Q_s} \delta^2(x,t)\,dxdt + \int_{Q_s} \gamma^2(x,t)\,dxdt \\ +\int_{Q_s} (\Im_x(u_{tt}))^2 dxdt + \int_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2 dxdt \end{array}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2 dx + \int_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2 dx \\
&+\int_0^l \delta^2(x,s)\,dx + \int_0^l \gamma^2(x,s)\,dx \\
\leq\ & 4k\left[\begin{array}{c} \int_{Q_s} \delta^2(x,t)\,dxdt + \int_{Q_s} \gamma^2(x,t)\,dxdt \\ \int_{Q_s} (\Im_x(u_{tt}))^2 dxdt + \int_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2 dxdt \end{array}\right],
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$\forall s \in [T - s_0, T]$.

Soit

$$\begin{aligned}
H(s) =\ & \int_{Q_s} (\Im_x(u_{tt}))^2 dxdt + \int_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2 dxdt \\
&+\int_{Q_s} \delta^2(x,t)\,dxdt + \int_{Q_s} \gamma^2(x,t)\,dxdt,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

tellque

$$\begin{aligned}
H'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\begin{array}{c} \int\limits_{Q_s} (\Im_x(u_{tt}))^2\, dxdt + \int\limits_{Q_s} (\Im_x(v_{tt}))^2\, dxdt \\ +\int\limits_{Q_s} \delta^2(x,t)\, dxdt + \int\limits_{Q_s} \gamma^2(x,t)\, dxdt \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \int\limits_0^l \delta^2(x,t)\,|_s^T dx + \int\limits_0^l \gamma^2(x,t)\,|_s^T dx \\ +\int\limits_0^l (\Im_x(u_{tt}))^2\,|_s^T dx + \int\limits_0^l (\Im_x(v_{tt}))^2\,|_s^T dx \end{array}\right],
\end{aligned}$$

on prend $H(T) = 0$

$$H'(s) = -\left[\begin{array}{c} \int\limits_0^l (\Im_x(u_{tt})(x,s))^2\, dx + \int\limits_0^l (\Im_x(v_{tt})(x,s))^2\, dx \\ +\int\limits_0^l \delta^2(x,s)\, dx + \int\limits_0^l \gamma^2(x,s)\ dx \end{array}\right],$$

et d'apres (4.33) on a :

$$-\frac{\partial H}{\partial s} \leq 4KH,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial s}e^{4Ks} \leq 4KHe^{4Ks},$$

$$0 \leq 4KHe^{4Ks} + \frac{\partial H}{\partial s}e^{4Ks},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(He^{4Ks}\right) \geq 0. \tag{4.35}$$

Intégration de (4.35) sur (s,T) et $H(T) = 0$, donne

$$\begin{aligned}
\int\limits_s^T \frac{\partial}{\partial s} H(s)\, e^{4ks} &\geq 0 \\
H(s)\, e^{4ks}|_s^T &\geq 0 \\
H(T)\, e^{4kT} - H(s)\, e^{4ks} &\geq 0 \\
-H(s)\, e^{4ks} &\geq 0,
\end{aligned}$$

donc

$$H(s)\, e^{4ks} \leq 0, \tag{4.36}$$

(i.e)

$$H(s) = 0, \quad \forall s \in [T - s_0, T].$$

Ainsi

$$\Im_x(u_{tt}) = \Im_x(v_{tt}) = \delta(x,t) = \gamma(x,t) = 0. \tag{4.37}$$

Donc, $\omega = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}.Suivez cette méthode étape par étape, on prouve que $\omega = 0$ presque partout dans Q.Ceci réalise la preuve de la proposition 3-2. ■

Théorème 3.2 *Pour tout* $(f,g) \in \left(L^2(Q)\right)^2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in L^2(0,l)$, *il existe une solution unique et forte* $U = \overline{J}^{-1}(\mathcal{F}) = \overline{J^{-1}}(\mathcal{F})$ *du problème* (3.1)*tel que*

$$\|U\|_B \leq C\,\|JU\|_H\,,$$

où C *est une constante positive indépendante de* U. *et*

$$\mathcal{F} = (\{f, \varphi_1, \psi_1\}, \{g, \varphi_2, \psi_2\})\ ,\ U = (u,v)\,.$$

Preuve. Pour prouver $\overline{R(J)} = H$ il suffait montrer que $R(J)^{\perp} = \{0\}$.
Suppose que

$$\begin{aligned} \Psi &= (G_1, G_2) \\ &= (\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}) \in R(J)^{\perp}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (JU, \Psi)_H &= \begin{pmatrix} (\{\mathcal{L}_1(u,v), l_1u, l_2u\}, \{\mathcal{L}_2(u,v), l_1v, l_2v\}) \\ +(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}) \end{pmatrix} \\ &= (\mathcal{L}_1(u,v), \omega_1)_{L^2(Q)} + (\mathcal{L}_2(u,v), \omega_2)_{L^2(Q)} + (l_1u, \omega_3)_{L^2(0,l)} \\ &\quad + (l_2u, \omega_4)_{L^2(0,l)} + (l_1v, \omega_5)_{L^2(0,l)} + (l_2v, \omega_6)_{L^2(0,l)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Il faut prouver que $\Psi = 0$.
Si on prend $U \in D_0(J)$ dans (4.38), on obtient :

$$(\mathcal{L}_1U, \omega_1)_{L^2(Q)} + (\mathcal{L}_2U, \omega_2)_{L^2(Q)} = 0, \tag{4.39}$$

qui déja montrée dans la proposition 3-2, telle que $\omega_1 = \omega_2 = 0$ et (4.38) devient

$$\begin{aligned} & (l_1u, \omega_3)_{L^2(0,l)} + (l_2u, \omega_4)_{L^2(0,l)} \\ & + (l_1v, \omega_5)_{L^2(0,l)} + (l_2v, \omega_6)_{L^2(0,l)} \\ = {} & 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

depuis la quantité dans (4.40) est independante, les ranges $R(l_1)$ et $R(l_2)$ d'opérateurs de trace l_1, l_2 sont respectivement dense dans $L^2(0,l)$
(ie)

$$\overline{R(l_1)} = \overline{R(l_2)} = L^2(0,l),$$

$\Leftrightarrow$

$$R(l_1)^{\perp} = R(l_2)^{\perp} = \{0\}$$

alors

$$\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0,$$

dans (4.40) et par consequence

$$\Psi = (G_1, G_2)(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}) = 0,$$

d'ou

$$R(J)^{\perp} = \{0\},$$

alors

$$\overline{R(J)} = H,$$

Donc U est une solution unique et forte du problème (3.1) .

■

Conclusion

Le but de notre travail a été l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de deux problèmes aux limites. Le premier étant un problème initial de valeur limite avec des conditions intégrales pour une équation parabolique et le deuxième un problème initial de valeur limite pour un système unidimensionnel d'équations hyperbolique.

La méthode utilisée pour le traitement de ces problèmes est la méthode des inégalités de l'énérgie (dite : méthode des éstimations à priori ou méthode d'analyse fonctionnelle) qui est considèrée comme une méthode éfficace pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution.

Bibliographie

[1] Assila M, Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system, Applied Math Letters. **13** (2000), 71-76.

[2] Beilin SA. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. Electron. J. Diff. Eqns. 2006 ; **103 :** 1-10.

[3] Bouziani, A. : Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. J. Appl.Math. Stoch. Anal. 9, 323–330 (1996).

[4] Bouziani A, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, Nonlinear Analysis 55 (2003) 883-904.

[5] Bouziani A, Strong solution for a mixed problem with a nonlocal condition for certain pluriparabolic equations. Horishima. Math. J. 27 (1997), 373-390.

[6] Cannon, R. : The solution of heat equation subject to the specification of energy. Q. Appl. Math. 21(2),155–160 (1963).

[7] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Ferreira, J. : Existence and uniform decay for nonlinearviscoelastic equation with strong damping. Math. Methods Appl. Sci. 24, 1043–1053 (2001).

[8] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. : Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. 2002(44).

[9] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003).

[10] Choi. Y.S and Chan. K.Y. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electro-chemestry. Nonlinear Anal. 18 (1992), 317-331.

[11] Dafermos C. M and L. Hsiao, Development of singularities in solutions of the equations on nonlinear thermoelasticity system, Q. Appl. Math **44** (1986), 463-474.

[12] Dezin A.A., Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes auxlimites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh.Math. Naouk. 14. N 3. (37). 22-73. 1959.

[13] Ewing. R.E and Lin. T. A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media. Adv. water resour. 14 (1991), 89-97.

[14] Garding L., Cauchy problem for hyperbolic equations, Lecture notes, University of Chicago, 1957.

[15] Hrusa W. J. and S. A. Messaoudi, On formation of singularities on one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal **3** (1990), 135-151.

[16] Ionkin, N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundaryconditions. Differ. Uravn. 13(2), 1177–1182 (1977).

[17] Ionkin, N.I., Moiseev, E.I. : A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition.Differ. Uravn. 15(7), 1284–1295 (1979).

[18] Kamynin, N.I. : A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition. TH. Vychisl. Mat. Fiz. 43(6), 1006–1024 (1964).

[19] Kartynnik, A.V. : Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second order parabolic equation. Differ. Equ. 26, 1160–1162 (1990).

[20] Kirane, M., Tatar, N.E. : A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 6, 1–7 (1999).

[21] Kirane M. and Tatar N., A nonexistence result to a Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl. **254** (2001), 71-86.

[22] LadyzenskayaO.A., Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obš. 7, 1958.

[23] Ladyzenskaya O.A., On solution of nonstationary operator equations, Mat. Sbornik 39(1956), No 4.

[24] Ladyzhenskaya O.A., The boundary value problems of Mathematical physics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[25] Leray J., Lectures on hyperbolic dierential equations with variable coefficients, Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[26] Mesloub S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. J. Math. Anal. Appl. 2006 ; **316** : 189-209.

[27] Mesloub S. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. 2008 ; **68** : 2594-2607.

[28] Mesloub S. Mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation. Math. Meth. Appl. Sci. 2010, 33 57–70, DOI : 10.1002/mma.1150.

[29] Mesloub S, On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 203-219.

[30] Mesloub S and Bouziani A, On a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol **22** N°**3** (1999), 511-519.

[31] Mesloub, S., Bouziani, A. : Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equationwith Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch. Anal. 15(3), 291–300 (2002).

[32] Mesloub, S., Bouziani, A. : Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classed'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. 6, 59–69 (1998).

[33] Mesloub S, Lekrine N. On a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta. Sci. Math. (Szeged). 2004 ; **70** : 65-75.

[34] Mesloub S, Messaoudi SA. A three point boundary value problem with a nonlocal condition for a hyperbolic equation. Elect. J. Diff. Eqns. 2002 ; **62** : 1-13.

[35] Mesloub S, Messaoudi SA. A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Elect. J. Diff. Eqns. 2003 ; **30** : 1-17.

[36] Messaoudi, S.A., Tatar, N.E. : Global existence asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem. Math. Methods Sci. Res. J. 7(4), 136–149 (2003)

[37] Messoudi S. A, On weak solutions of semilinear thermoelastic equations, Magreb math. Review, Vol **1** No 1 (1992), 31-40.

[38] Messoudi S. A, A blow up result in a multidimensional semilinear thermoelasticity system, Electron. J. Differential. Equations,Vol. **2001** No. 30 (2001) 1-9.

[39] Munoz Rivera J. E. and R. K. Barreto, Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity, Nonlinear Analysis **31** No. **1/2** (1998), 149-162.

[40] Munoz Rivera J. E. and R. Racke, Smoothinfg properties, decay, and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelasticity type, SIAM J. Math. Anal, **26** (1995), 1547-1563.

[41] Muravei LA, Philinovskii AV. On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation. Matem. zametki. 1993 **54** : 98-116.

[42] Nakushev AM. On certain approximate method for boundary value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics. Differenentsialnie Uravnenia. 1982 ; **18** : 72-81.

[43] Pulkina LS. *A* nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. Electron. J. Diff. Eqns. 1999 ; **45** : 1-6.

[44] Racke R, blow up in nonlinear three dimensional thermoelasticity, Math. Methods Appl. Sci. **12** No **3** (1990), 273-276.

[45] Racke R, and Y. Shibata, Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **116** (1991), 1-34.

[46] Racke R, and Y. G. Wang, Propagation of singularities in one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl, **223** (1998), 216-247.

[47] Shi. p. and Shilor. Design of contact patterns in one dimensional Termoelasticity, in theoretical aspects of industrial design. SIAM, Philadelphia (1992).

[48] Slemrod M. Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical solutions in one-dimensional thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **76** (1981), 97-133.Théorème 4.3 donne le résultat.

[49] Yurchuk N. I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differential Equations, 22, (1986), pp. 1457-1463.

[50] D. Bahuguna, S. Abbas, J. Dabas, Partial functional dierential equation with an integral boundary condition and application to population dynamics, Nonlinear Anal. TMA 69 (2008) 2623 2635.