

# Table des matières

<b>1 Définitions et préliminaires sur les systèmes dynamique</b>	<b>4</b>
1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamique . . . . .	4
1.1.1 L'espace des phases des systèmes dynamique continu . . . . .	5
1.1.2 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs . . . . .	5
1.2 Les différents types d'attracteurs . . . . .	6
1.3 Étude qualitative des systèmes dynamiques . . . . .	7
1.3.1 Classification des points d'équilibre . . . . .	8
<b>2 Conception des attracteurs chaotiques de type <math>n</math>-double-scroll</b>	<b>10</b>
2.1 Conception par les fonctions quasi-linéaires . . . . .	10
2.2 Attracteurs chaotiques à $n$ -scroll d'un circuit généralisé de Chua . . . . .	17
2.3 Attracteurs chaotiques à $n$ -scroll du circuit déplié de Chua . . . . .	19
2.4 Attracteurs chaotiques multiscroll du système de Brockett modifié . . . . .	23
<b>3 Réalisation d'un circuit avec des attracteurs chaotique de type <math>n</math>-scroll</b>	<b>27</b>
3.1 Un circuit CNN contrôlée par l'état . . . . .	27
3.2 Réalisation des circuits avec des attracteurs chaotiques à 3 et 5 scrolls . . . . .	28
3.3 Une approche de conception systématique pour générer des attracteurs chaotiques de type $n$ -scroll . . . . .	31
3.4 Une approche de conception améliorée pour générer les attracteurs chaotique de type $n$ -scroll . . . . .	32
<b>4 Conception des attracteurs chaotique de type <math>n</math>-scroll via les fonctions non linéaire de modulation</b>	<b>34</b>
4.1 Approche par la fonction sinus . . . . .	34

4.2	Méthode de la fonction de modulation . . . . .	35
4.3	Conception d'un tore chaotiques à plis multiples . . . . .	36
4.4	Les attracteurs hyperchaotique de type multiscroll . . . . .	37
4.5	Attracteurs chaotiques multiscroll du système de Lorenz modifié . . . . .	39
4.6	Attracteurs chaotiques de type multiscroll à partir d'un système chaotique critique .	39

---

# Introduction Générale

Un système chaotique est par nature imprévisible, la difficulté majeure de ce système est d'être capable de synthétiser une loi de commande permettant à un système de reproduire la même trajectoire.

La théorie du chaos a fait l'objet de recherches approfondies dans les sciences depuis plus de 40 ans. Dans le cadre de ce mémoire, on va parler de circuit de Chua, comme un paradigme de chaos et un pont entre les circuits électronique et la théorie du chaos. Cet circuit a été largement étudié et utilisé comme plate-forme d'applications. Les attracteurs chaotiques multiscroll est devenue une recherche très actif. En effet, Suykens et Vandewalle [1991, 1993a, 1993b] ont introduit pour la première fois une famille des attracteurs chaotiques de type  $n$ -double scroll par une approche basé sur les fonctions quasi-linéaires. En même temps, Suykens et Chua [1997] ont également enquêté sur les attracteurs de type  $n$ -double-scroll produits par des hypercubes dans des CNN unidimensionnels.

Le but essentiel de cet mémoire est de présenter quelque exemples et méthodes de génération de ce type d'attracteurs.

# Chapitre 1

## Définitions et préliminaires sur les systèmes dynamique

Un système dynamique est un système classique à la fois **causale** (c.à-d, d'avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent), et **déterministe** (c.à.d, chaque condition initiale correspondre à l'instant présent un et un seul état future). Soit le triplet  $(X, T, f)$  définit un système dynamique d'où : l'espace d'états  $X$ , domaine temporel  $T$ , et l'application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$  qui donne l'état du système à tout instant à partir d'un vecteur de conditions initiales.

### 1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamique

Le système dynamique décrit par une fonction mathématique avec des variables dynamiques (changent avec le temps) et des variables dynamiques statiques (fixes). Dans le cas continue, le système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r \quad (1)$$

Si le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application itérative :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

où  $p$  est un paramètre, et  $t \in T$  : le domaine temporel. Le système est non-autonome si le temps  $t$  ou l'indice  $k$  apparaissent explicitement dans les relations (1) et (2). Dans ce cas, on transforme le système avec  $X \in \mathbb{R}^n$  en un système autonome avec  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$  par un changement de variables approprié pour nous aider à la résolution numérique.

### 1.1.1 L'espace des phases des systèmes dynamique continu

L'espace des phases est un espace fondamental existe dans la formulation de la Mécanique Quantique et la Mécanique Statistique, il a été introduit initialement dans des problèmes de **Mécanique Céleste**, et il est l'outil principale pour présenter mentalement l'évolution d'un système. Cet espace a été utilisé par H. Poincaré pour introduire des raisonnements géométriques en Mécanique Céleste et pour étudier le problème des trois corps. Ses travaux seront au principe de la **théorie du chaos**. L'évolution d'un système dynamique décrit par une représentation géométrique, où chaque état du système associé un vecteur  $\vec{x}$ , et observé son évolution dans un espace vectoriel  $E$  qui est l'espace des phases. L'évolution est décrite par  $n$  équations différentielles munies de conditions initiales.

**Remarque 1.1** *Suivant l'évolution faire un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase et traçant une trajectoire de phase.*

### 1.1.2 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Physiquement, un système **conservatif** est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement. D'autre part un système **dissipatif** est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Un système déterministe est conservatif si et seulement si chaque condition initiale  $x_0$  est associée à un et un seul état final  $x(t)$ , c-à-d, qu'il existe une application bijective (flot) de l'espace des phases  $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow I$  tel que  $(x, t) \rightarrow \phi_t(x, t)$ , qui vérifie les propriétés suivantes :  $\phi_t(x_0) = x_0$  et  $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0)), \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.2** *Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.*

**Définition 1.1** *Un point fixe (ou critique ou singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $x' = F(x)$  est un point  $\bar{x}$  de l'espace des phases vérifiant  $F(\bar{x}) = 0$ .*

**Remarque 1.3** *En modifiant la variable  $z = x - \tilde{x}$ , nous pouvons réduire le point à l'origine 0.*

**Définition 1.2** (Points limites) : *On dit que le point  $a \in I$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tel que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n} = a$ , où  $\varphi_t$  est le flot du système*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^k(I), I \subseteq \mathbb{R}^n$$

*qui admet une solution  $x(x_0, t)$  avec  $x(0) = x_0$ .*

**Définition 1.3** (Ensemble invariant) : Si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associée au champ de vecteurs issu de  $E$  vérifie  $x(t) \in E$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie alors l'ensemble  $E \subset I$  est dit invariant par un champ de vecteur.

**Définition 1.4** (Attracteurs) : Un **attracteur** est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire : Une situation (ou plusieurs états) vers lesquels évolue un système, avec n'importe quelles conditions initiales.

On dit que l'ensemble  $M$  est un attracteur si :

(a) Pour tout voisinage  $U$  de  $M$ , il existe un voisinage  $V$  de  $M$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .

(b)  $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = M, t \geq 0$ .

(c) Il existe une orbite dense dans  $M$ .

Un attracteur a les propriétés suivantes :

1. Tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .
2. Si  $M$  est un sous ensemble borné, il existe un ensemble  $B \supset M$ , tel que pour tout voisinage de  $M$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de  $M$ . Cette **zone d'influence** est le **basin d'attraction**, c'est l'ensemble :  $S = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(V)$ .
3. La réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

## 1.2 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : Les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

**1- Attracteurs réguliers** : Les attracteurs réguliers sont l'outil de caractérisation de l'évolution de systèmes non chaotiques, et ils peuvent prendre trois formes.

(a) *Le point fixe* : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point).

(b) *Le cycle limite périodique* : L'évolution temporelle est alors cyclique, car il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. Le système présentant des oscillations permanentes. Dans un système physique dissipatif, cela exige la présence d'un terme de forçage dans les équations pour compenser en moyenne les pertes par dissipation.

(c) *Le cycle limite pseudo-périodique* : est un cas particulier du précédent, donc la trajectoire de phase s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).

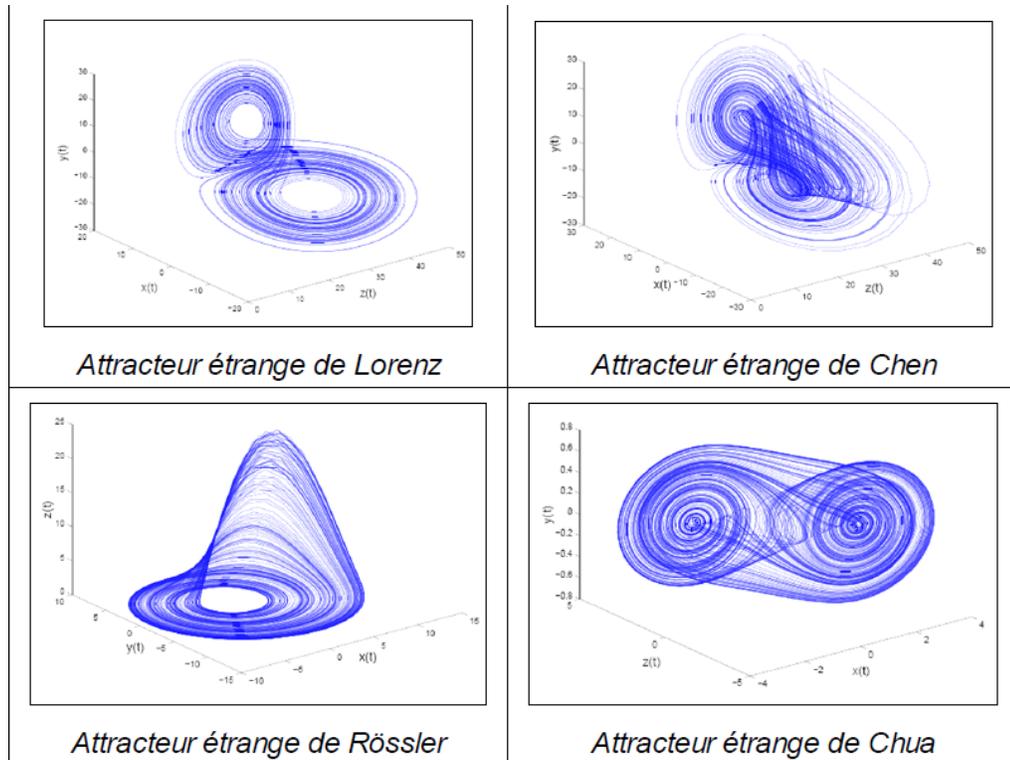


FIG. 1.1 – Quelques attracteurs étranges.

**2-Attracteurs étranges** : Dans l'espace des phases compacts, fermés, on retrouve des trajectoires chaotiques ont une caractéristiques essentielles qui est la **SCI** (les trajectoires issues de conditions initiales proche diffuser exponentielement). La **coexistence** de l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la **SCI**, qui implique leur écartement, s'explique par le concept d'hyperbolicité de  $\mathbb{L}$  attracteur :  $\mathbb{L}$  attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée **variété instable** alors que celle contenant les trajectoires convergentes est appelée **variété stable**. Leur dimension est non entière et leur structure est **fractale**. Par exemple,  $\mathbb{L}$  attracteur de Rössler,  $\mathbb{L}$  attracteur de Lorenz. Voir Figure. 1.1.

### 1.3 Étude qualitative des systèmes dynamiques

Cette étude consiste à analyser le comportement des solutions particulièrement au voisinage de points d'équilibre et permet de s'affranchir de la détermination explicite de la solution. Cette approche (locale) est avérée très féconde surtout lorsqu'elle est appliquée à des systèmes d'équations d'ordre élevé et non linéaires, basé sur la linéarisation au voisinage des points d'équilibre.

Soit le système dynamique non linéaire défini par :

$$x' = F(x), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

et soit  $x_0$  un point fixe (d'équilibre) de ce système. Appliquons une petite perturbation  $\epsilon(t)$  au voisinage du point fixe, et développons  $F$  en **série de Taylor** au voisinage de point  $x_0$  ainsi :

$$\epsilon(t) + \dot{x}_0 = F(\dot{x}_0 + \dot{\epsilon}(t)) \simeq F(x_0) + J_F(x_0) \cdot \epsilon(t) \quad (4)$$

avec  $J_F(x_0)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $F$  définit par :

$$J_G(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0} \quad (5)$$

Comme  $F(x_0) = 0$ , alors l'équation (4) redevient :

$$\dot{\epsilon}(t) = J_F(x_0) \cdot \epsilon(t) \quad (6)$$

L'équation (6) implique que le système (3) est linéarisé.

**Théorème 1.1 (Hatmann-Grobman)** : Soit le système dynamique (3) avec son point d'équilibre  $x_0$ , et soit  $J_F(x_0)$  la matrice Jacobienne au point  $x_0$ , alors on a : Si  $J_F(x_0)$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage  $U$  de  $x_0$ .

Ce théorème apparait la relation entre la dynamique du système non linéaire (3) et l'autre du système linéarisé (6).

### 1.3.1 Classification des points d'équilibre

Il s'agit que la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (5) du système linéarisé (6) associé au système différentiel initial (3) en ce point permet de distinguer ces points fixes. Supposons que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont donnée par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n, j^2 = -1$$

Lorsque  $\omega_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  le point fixe est dit **hyperbolique**. La solution  $\epsilon(t)$  du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes :

$$\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \cdot V^i$$

où  $V^i$  représente le vecteur propre associé à  $i$  et  $C_i \in \mathbb{R}$  dépend des conditions initiales. D'où les valeurs propres  $\lambda_i$  présentent l'état de **stabilité**, et nous aider à étudier les natures des points fixes.

Si  $\omega_i < 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ , le point fixe est **asymptotiquement stable** :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

On dit que le point est un **puits (foyer)** si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Un **noeud** si  $\sigma_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si  $\omega_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , le point fixe est instable.

On dit que le point est une **source** si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , et un **noeud** si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Si  $\omega_i > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, p$  avec  $p < n$  et  $\omega_i < 0$  pour  $i \neq j$ , la solution est **instable** et le point est un **col**. Si n'existe pas de valeur propre nulle alors on a un point **selle**.

# Chapitre 2

## Conception des attracteurs chaotiques de type $n$ -double-scroll

### 2.1 Conception par les fonctions quasi-linéaires

On décrit brièvement la structure du méthode des fonctions quasi linéaire pour crée des attracteurs chaotique à  $n$ -double-scroll. Cette méthode est basée sur le circuit de Chua [Kennedy, 1993, Chua, *et al.*, 1986], comme indiqué par l'équation décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{1}{RC_1}(v_{C_2} - v_{C_1}) - \frac{1}{C_1}g(v_{C_1}) \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{RC_2}(v_{C_1} - v_{C_2}) - \frac{1}{C_2}i_L \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_{C_2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Où

$$g(v_{C_1}) = m_1 v_{C_1} + \frac{1}{2}(m_0 - m_1) \times (|v_{C_1} + b_1| - |v_{C_1} - b_1|) \quad (2)$$

est une fonction PWL, comme elle est présenté dans Fig. 2.2. Soit le **changement de variable** :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{v_{C_1}}{b_1}, y = \frac{v_{C_2}}{b_1}, z = \frac{Ri_L}{b_1}, \tau = \frac{t}{C_2 R} \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2 R^2}{L}, \bar{m}_0 = m_0 R, \bar{m}_1 = m_1 R \end{array} \right.$$

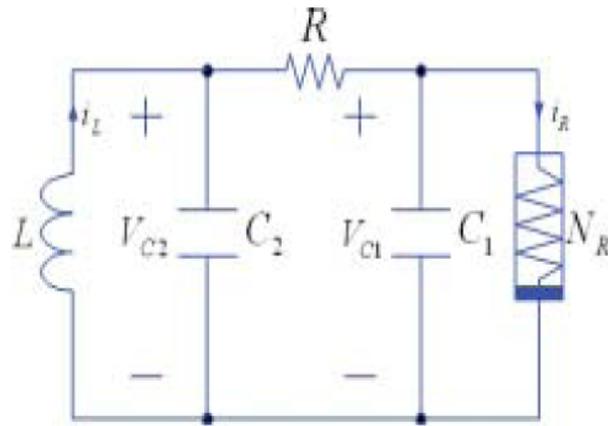


FIG. 2.1 – Circuit de Chua.

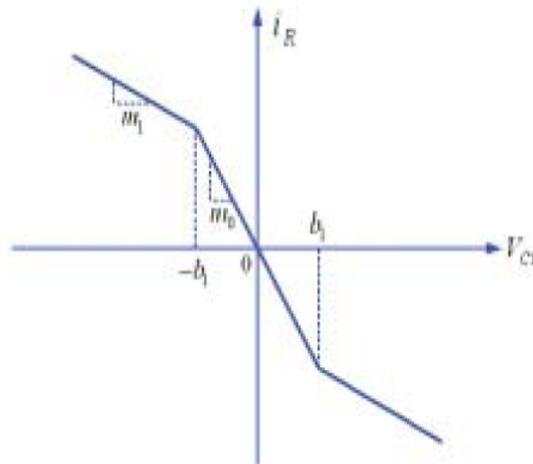


FIG. 2.2 – La fonction PWL.

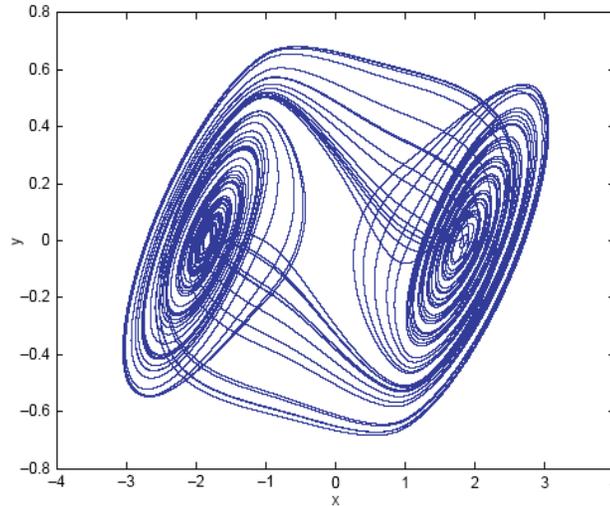


FIG. 2.3 – Attracteur chaotique de type double scroll.

ensuite, le système (1) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} x' = \alpha(-x + y - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y \end{cases} \quad (3)$$

où

$$f(x) = \bar{m}_1 x + \frac{1}{2}(\bar{m}_0 - \bar{m}_1)(|x + 1| - |x - 1|) \quad (4)$$

Lorsque

$$\alpha = 10.0, \beta = 14.87, \bar{m}_0 = -0.68, \bar{m}_1 = -1.27$$

Le système produit un attracteur chaotique à double scroll, comme indiqué dans la Fig. 2.3.

**Points d'équilibre :** On a :

$$\begin{cases} \alpha(-x + y - f(x)) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$-\beta y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -z \Rightarrow -x - f(x) = 0$$

Pour  $x + 1 > 0$  et  $x - 1 > 0$  on a :  $f(x) = \bar{m}_1 x + \frac{1}{2}(\bar{m}_0 - \bar{m}_1)(2)$ , donc le point d'équilibre est :

$$\left( -\frac{\bar{m}_0 - \bar{m}_1}{1 + \bar{m}_1}, 0, \frac{\bar{m}_0 - \bar{m}_1}{1 + \bar{m}_1} \right)$$

avec  $-\frac{\bar{m}_0 - \bar{m}_1}{1 + \bar{m}_1} > 1$ , et la matrice jacobienne est donnée par :

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres :

$$3.8478, -1.0739 + 3.0465i, -1.0739 - 3.0465i.$$

Pour  $x + 1 > 0$  et  $x - 1 < 0$  on a :  $f(x) = \bar{m}_1 x + \frac{1}{2}(\bar{m}_0 - \bar{m}_1)(2x)$ , donc le point d'équilibre est :  $(0, 0, 0)$ , et la matrice jacobienne :

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3.2 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres :

$$0.22983 + 3.1873i, 0.22983 - 3.1873i, -4.6597$$

Pour  $x + 1 < 0$  et  $x - 1 > 0$  on a :  $f(x) = \bar{m}_1 x + \frac{1}{2}(\bar{m}_0 - \bar{m}_1)(-2x)$ , donc le point d'équilibre est :  $(0, 0, 0)$ , et la matrice jacobienne :

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres :

$$3.8478, -1.0739 + 3.0465i, -1.0739 - 3.0465i$$

Pour  $x + 1 < 0$  et  $x - 1 < 0$  on a :  $f(x) = \bar{m}_1 x + \frac{1}{2}(\bar{m}_0 - \bar{m}_1)(-2)$ , donc le point d'équilibre est :

$$\left( \frac{\bar{m}_0 - \bar{m}_1}{1 + \bar{m}_1}, 0, -\frac{\bar{m}_0 - \bar{m}_1}{1 + \bar{m}_1} \right)$$

et la matrice jacobienne :

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres :

$$3.8478, -1.0739 + 3.0465i, -1.0739 - 3.0465i$$

L'approche par une fonction quasi linéaire est une sorte de méthode qualitative, mais elle donne un aperçu global de la comportement dynamique d'un tel système et il peut être considéré comme un complément au conventionnel approche de linéarisation. Suykens et Vandewalle [1991, 1993a, 1993b] a appliqué le principe de la fonction quasi linéaire pour système (1). Tout d'abord, le système est réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - k(x) & a & 0 \\ b & -b & 1 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

Où

$$x = v_{C_1}, y = v_{C_2}, z = i_L, a = \frac{1}{RC_1}$$

$$b = \frac{1}{RC_2}, c = \frac{1}{L}, k(x) = \frac{g(x)}{C_1 x}$$

Ensuite, l'équation caractéristique de la matrice  $A$  est donnée par :

$$1 + \frac{k(x)(\lambda^2 + b\lambda + c)}{\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + c\lambda + ca} = 0 \quad (6)$$

conduit à un locus des racines pour le paramètre  $k(x)$ . Pour générer un attracteur chaotique à 2-double-scroll du système (5), Suykens et Vandewalle [1991, 1993a] modifier  $k(x)$  comme suit :

$$K_2(x) = \begin{cases} -\frac{8}{7}a, & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ \frac{2a(x-\delta_1)}{7(\delta_2-\delta_1)} - \frac{8}{7}a, & \delta_1 \leq x \leq \delta_2 \\ \frac{2a(x-\delta_2)}{7(\delta_3-\delta_2)} - \frac{6}{7}a, & \delta_2 \leq x \leq \delta_3 \\ -\frac{8}{7}a, & \delta_3 \leq x \leq \delta_4 \\ \frac{a(-0.5x-0.15|x+\delta_4|+0.15|x-\delta_4|)}{0.7x}, & x \geq \delta_4 \end{cases}$$

où  $a, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  sont des paramètres de calcul déterminés dans la procédure de conception. Les non linéarités  $k_2(x)$  et  $g_2(x)$  pour créer des attracteurs à double scroll sont représenté en Figure. 2.4 [Suykens & Vandewalle, 1993a].

L'utilisation de la méthode de la fonction quasi-linéaire pour analyser la stabilité des points d'équilibre dans différentes régions, avec  $\delta_1 = 5, \delta_2 = 7, 5, \delta_3 = 10, \delta = 12, a = 7$ , le système (5) produit des attracteurs chaotique à un double scroll, comme le montre la Fig. 2.5 [Suykens & Vandewalle, 1993a]. Pour générer des attracteurs chaotique avec  $n$ -double-scroll ( $n \geq 2$ ), Suykens et Vandewalle [1991, 1993a] modifie le système (5) comme suit :

$$\begin{cases} x' = (-a - K_n(x))x + ay \\ y' = bx - by + z \\ z' = -cy \end{cases} \quad (7)$$

Où

$$K_n = \begin{cases} \alpha_1, & 0 \leq |x| \leq \delta_1 \\ \alpha_2 \frac{|x| - \delta_{1+3(i-2)}}{\delta_{2+3(i-2)} - \delta_{1+3(i-2)}} + \alpha_1 + \alpha_2, & \delta_{1+3(i-2)} \leq |x| \leq \delta_{2+3(i-2)}, 2 \leq i \leq n \\ -\alpha_2 \frac{|x| - \delta_{1+3(i-2)}}{\delta_{3(i-1)} - \delta_{1+3(i-2)}} + \alpha_1 + \alpha_2, & \delta_{2+3(i-2)} \leq |x| \leq \delta_{3(i-1)}, 2 \leq i \leq n \\ \alpha_1, & \delta_{3(i-1)} \leq |x| \leq \delta_{1+3(n-1)}, 2 \leq i \leq n \\ \frac{\alpha_3}{|x|} (\beta_1 |x| + \beta_2 ||x| + \delta_{1+3(n-1)}| + \beta_3 ||x| - \delta_{1+3(n-1)}|), & |x| \geq \delta_{1+3(n-1)} \end{cases}$$

Soit  $a = 7$  et  $\frac{\delta_{2+3(i-2)} + \delta_{1+3(i-2)}}{\delta_{2+3(i-2)} + \delta_{1+3(i-2)}} = 5$ , pour  $2 \leq i \leq n$ . Ensuite, le système (7) peut générer des attracteurs chaotiques avec  $n$ -double-scroll. Par exemple, lorsque

$$\begin{cases} \delta_1 = 4, \delta_2 = 6, \delta_3 = 6.5 \\ \delta_4 = 8, \delta_5 = 12, \delta_6 = 13 \\ \delta_7 = 18, \delta_8 = 27, \delta_9 = 30 \\ \delta_{10} = 32, a = 7 \end{cases}$$

Le système (7) à un attracteur chaotique à 4 doubles scroll, comme indiqué sur la Figure. 2.6 [Suykens & Vandewalle, 1993a]. Les non-linéarités  $k_4(x)$  et  $g_4(x)$  pour générer les 4 attracteurs

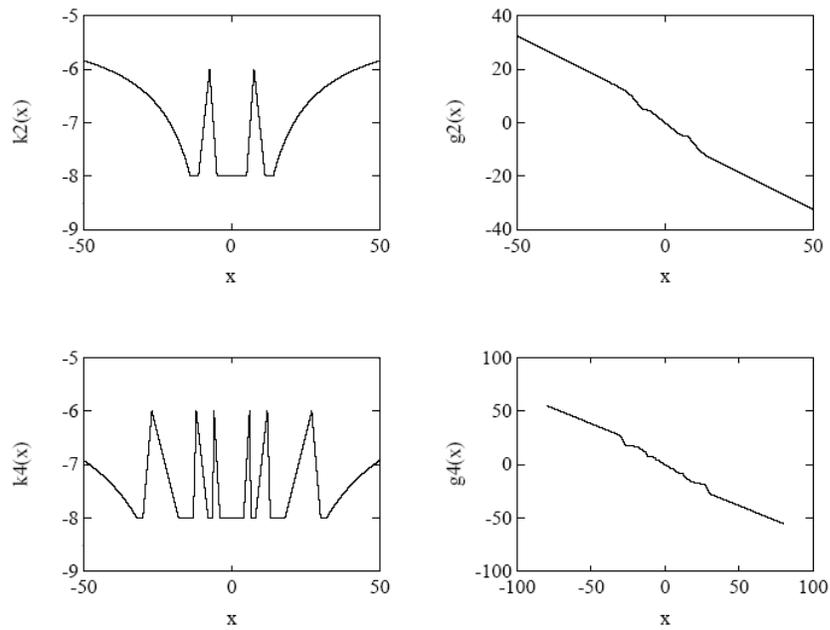


FIG. 2.4 – La fonction  $K_n(x)$  pour les attracteurs chaotique à double scroll ( $n = 2, 4$ ) [Suykens & Vandewalle, 1993a].

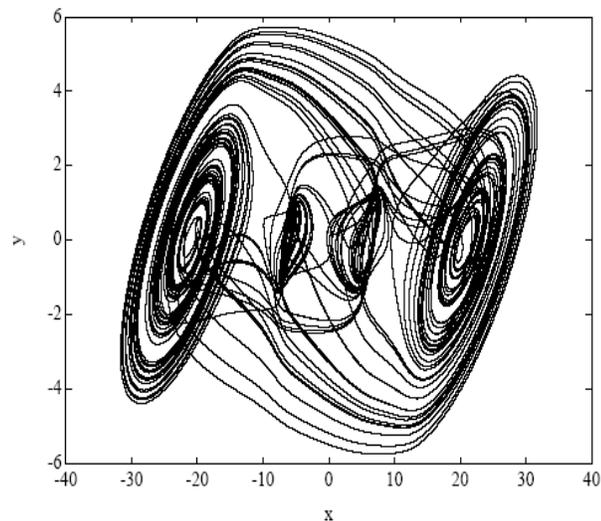


FIG. 2.5 – Un attracteur avec 2-double-scroll.

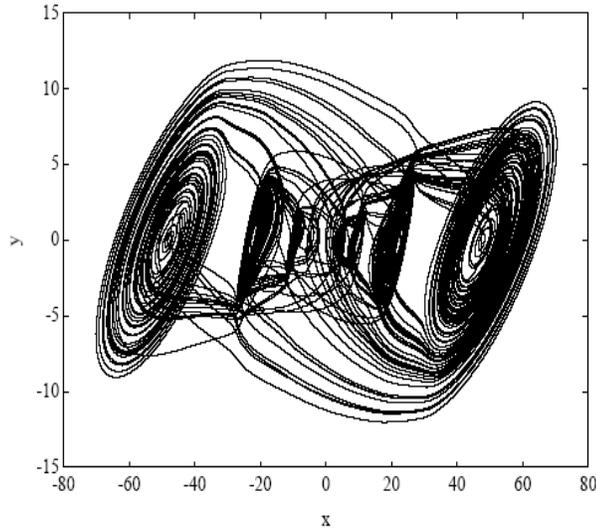


FIG. 2.6 – Un attracteur avec 4-double-scroll.

à double scroll sont montrés dans les deux parties inférieures du Fig. 2.4 [Suykens & Vandewalle, 1993a], respectivement.

## 2.2 Attracteurs chaotiques à $n$ -scroll d'un circuit généralisé de Chua

Dans cette section, un circuit généralisé de Chua est introduit pour générer des attracteurs chaotique à  $n$ -scroll. Suykens, *et al.* [1997] a proposé une approche généralisée de circuit de Chua, décrit par :

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - h(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y, \end{cases} \quad (8)$$

où  $n$  est un nombre naturel, et

$$h(x) = m_{2n-1}x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} \times (m_{i-1} - m_i)(|x + c_i| - |x - c_i|)$$

Le système (8) est déterminé par les paramètres  $\alpha, \beta, m, c$ , où  $m = (m_0 m_1 \dots m_{2n-1})$  et  $c = (c_0 c_1 \dots c_{2n-1})$ .

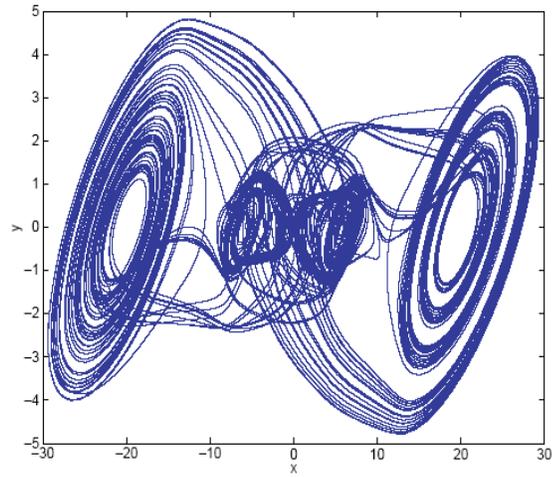


FIG. 2.7 – Un attracteur avec 4 scrolls.

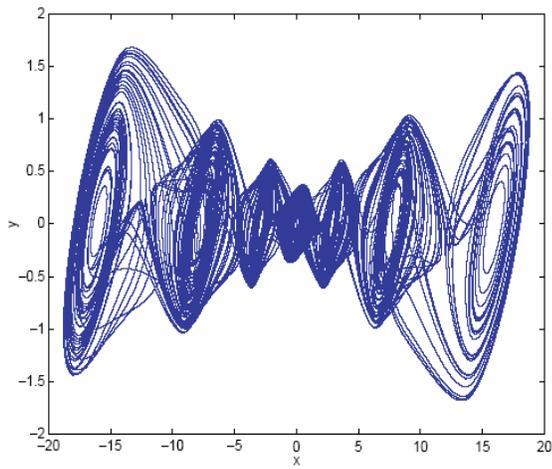


FIG. 2.8 – Un attracteur avec 7 scrolls.

Lorsque

$$\begin{aligned}\alpha &= 9, \beta = 14.286 \\ m &= (-1/7, 2/7, -4/7, 2/7, -4/7, 2/7) \\ c &= (1, 2.15, 3.6, 8.2, 13)\end{aligned}$$

le système (8) à un attracteur à 2-double scroll, comme indiqué sur la Figure .2.7, lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9, \beta = 14.286 \\ m = (0.9/7, -3/7, 3.5/7, -2.4/7, 2.52/7, -1.68/7, 2.52/7, -1.68/7) \\ c = (1 \quad 12.15 \quad 3.6 \quad 6.2 \quad 9 \quad 14 \quad 25) \end{array} \right.$$

Ce système à un attracteur à 7 scroll, comme indiqué sur la Figure. 2.8.

## 2.3 Attracteurs chaotiques à $n$ -scroll du circuit déplié de Chua

Cette section présente une famille des attracteurs chaotiques à  $n$ -scroll générés à partir du Circuit déplié de Chua. La Figure .2.9 montre le circuit de Chua déplié, décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{C_1}(G(v_2 - v_1) - f(v_1)) \\ \frac{dv_2}{d\tau} = \frac{1}{C_2}(G(v_2 - v_1) + i_3) \\ \frac{di_3}{d\tau} = -\frac{1}{L}(v_2 + R_0 i_3), \end{array} \right. \quad (9)$$

Où

$$f(v_1) = G = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|)$$

Soit le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{v_1}{E}, \quad y = \frac{v_2}{E}, \quad z = \frac{i_3}{EG}, \quad t = \frac{\tau G}{C_2} \\ m_0 = \frac{G_a}{G}, \quad m_1 = \frac{G_b}{G} \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{C_2}{LG^2}, \quad \gamma = \frac{C_2 R_0}{GL} \end{array} \right.$$

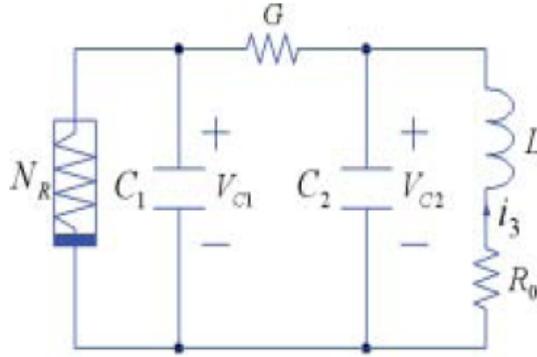


FIG. 2.9 – Circuit de Chua déplié.

Ensuite, les équations correspondant sont donnés par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - f_2(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y - \gamma z \end{cases} \quad (10)$$

Où

$$f_2(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[(|x + 1| + |x - 1|)] \quad (11)$$

Lorsque

$$\alpha = 9.365, \beta = 11.7, \gamma = 0.04, m_0 = -8/7, m_1 = -5/7$$

Le système (10) à un attracteur chaotique, comme indiqué dans la Figure. 2.10. Pour créer des attracteurs chaotiques de type  $n$ -scroll, Aziz- Alaoui [1999] a modifié le circuit déplié de Chua (10) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - f_N(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y - \gamma z \end{cases} \quad (12)$$

Où

$$f_N(x) = \begin{cases} m_k x + \text{sgn}(x)\xi_k, & \text{si } s_{k-1} \leq |x| \leq s_k, k \in I_{N-2} \\ m_{N-1} x + \text{sgn}(x)\xi_{N-1}, & \text{si } |x| \geq s_{k-2}, \end{cases} \quad (13)$$

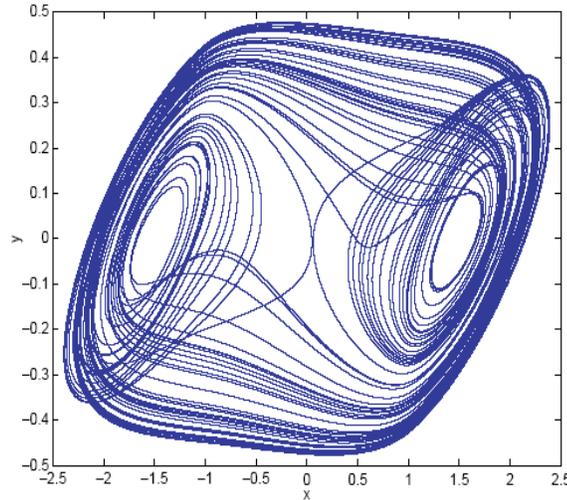


FIG. 2.10 – Un attracteur à double scroll du circuit de Chua déplié.

ou  $N \geq 2$ ,  $I_N = \{0 \dots N\}$ ,  $I_N^* = \{1 \dots N\}$ ,  $(m_k)_{k \in I_{N-1}}$  et  $(\xi_k)_{k \in I_{N-1}}$  sont deux suite finis des réelles,  $(s_k)_{k \in I_{N-2}}$  est une suite des réels positif fini qui augmente strictement. En outre, supposons que  $s_{-1} = 0$ ,  $s_0 = 1$ ,  $s_N = +\infty$ ,  $\xi_0 = 0$ . Les paramètres  $m_k$  pour  $k \in I_{N-1}$  sont les pentes de  $f_N$  dans chacun des segments linéaires  $[-s_0, s_0]$  et  $[-s_{k-1}, s_k]$  pour  $k \in I_{N-1}^*$ .

**Remarque 2.1** La fonction  $f_N$  est continue si les paramètres  $(\xi)_{k \in I_{N-1}}$  satisfont à la condition suivante [Aziz-Alaoui, 1999] :

$$\xi_{k+1} = (m_k - m_{k+1})s_k + \xi_k$$

Pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , et tout  $k \in I_{N-2}^*$ . Donc

$$\xi_k = \xi_0 + \sum_{j=1}^k (m_{j-1} - m_j)s_{j-1}$$

Pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , et tout  $k \in I_{N-2}^*$ .

Le système (12) est déterminé par les paramètres définie par :  $B_N^C = \{\alpha, \beta, \gamma\} \cup B_N \subset \mathbb{R}^{2N+2}$ , où  $B_N = \{(s_k)_{k \in I_{N-2}}, (m_k)_{k \in I_{N-1}}\}$ . Pour obtenir un nombre pair des scroll, on peut utiliser les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9.365, \beta = 11.79, \gamma = 0.04 \\ m_{2j} = m_0 = -8/7 \\ m_{2j+1} = m_1 = -5/7 \text{ pour } j = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Par contre, pour obtenir un nombre impair de scroll, on peut utiliser les paramètres suivants :

$$\alpha = 10.40, \beta = 12.5709, \gamma = 0.005,$$

$$m_{2j} = m_0 = -(8/7) \text{ et } m_{2j+1} = m_1 = -(5/7), \text{ pour } j = 1, 2, \dots$$

Lorsque

$$B_{12}^C = \begin{cases} \alpha = 9.365, \beta = 11.79, \gamma = 0.04 \\ s_0 = 1, s_1 = 1.8, s_2 = 2.7 \\ s_3 = 3.36, s_4 = 5.0, s_7 = 7.15 \\ s_8 = 9.0, s_9 = 9.95, s_{10} = 10.75 \end{cases}$$

Le système (12) à un attracteur chaotique de 12 scroll, comme le montre la Fig. 2.11 [Aziz-Alaoui, 1999].

**Points d'équilibre :** On a :

$$\begin{cases} \alpha(y - x - f_N(x)) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y - \gamma z = 0 \end{cases}$$

Donc on a :  $z = -\frac{\beta}{\gamma}y$  et  $y = \frac{1}{(1+\frac{\beta}{\gamma})}x$ , on obtient l'équation :  $\frac{1}{(1+\frac{\beta}{\gamma})}x - x - f_N(x) = 0$ . On trouve que  $f_N(x)$  est une fonction linéaire par morceau, alors par substitution on cherche l'existence de la solution dans les intervalles données, sinon il y a aucune solutions. Quand

$$B_{21}^C = \begin{cases} \alpha = 10.40, \beta = 12.5709, \gamma = 0.005 \\ s_0 = 1, s_1 = 4.5, s_2 = 5.8, s_3 = 7.8 \\ s_4 = 5.0, s_5 = 11.8, s_6 = 12.9, s_7 = 7.15 \\ s_8 = 9.0, s_9 = 9.95, s_{10} = 10.75, s_{11} = 20.2 \\ s_{12} = 21.5, s_{13} = 23.3, s_{14} = 24.2, s_{15} = 25.8 \\ s_{16} = 26.5, s_{17} = 28.2, s_{18} = 29.12, s_{19} = 31.0 \end{cases}$$

le système (12) à un attracteur chaotique de 21 scroll, comme indiqué dans Fig. 2.12 [Aziz-Alaoui, 1999].

## 2.4 Attracteurs chaotiques multiscroll du système de Brockett modifié

Dans cette section, un système de Brockett modifié est introduit, ce qui peut générer des attracteurs chaotique à  $n$ -scroll. Le système dit de Brockett est décrit par [Aziz-Alaoui, 1999, 2000, 2001] :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = -\beta y - \gamma z + g(x) \end{cases} \quad (14)$$

où

$$g(x) = \begin{cases} -Kx, & \text{si } |x| < 1 \\ 2Kx - 3k \operatorname{sgn}(x), & \text{si } 1 < |x| < 3 \\ 3K \operatorname{sgn}(x), & \text{si } |x| > 3 \end{cases}$$

Lorsque  $K = -1.8$ , le système (14) à un attracteur chaotique avec 12 scroll.

La région  $|x| > 3$  ne joue aucun rôle dans la dynamique du système (14) [Aziz-Alaoui, 1999], on peut remplacer  $g(x)$  par

$$f_2(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[(|x + 1| + |x - 1|)] \quad (15)$$

Lorsque  $m_0 = -K = 1.8$ ,  $m_1 = 2K$ , la modification du système (14) avec (15) affiche un attracteur chaotique à double scroll. Pour générer des attracteurs chaotiques de type  $n$ -scroll, Aziz-Alaoui [1999] consider le système de Brockett modifié :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = -\beta y - \gamma z + f_N(x), \end{cases} \quad (16)$$

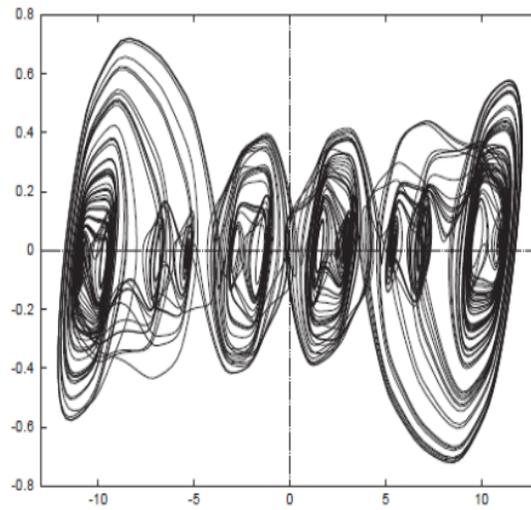


FIG. 2.11 – Un attracteur chaotique avec 12 scroll.

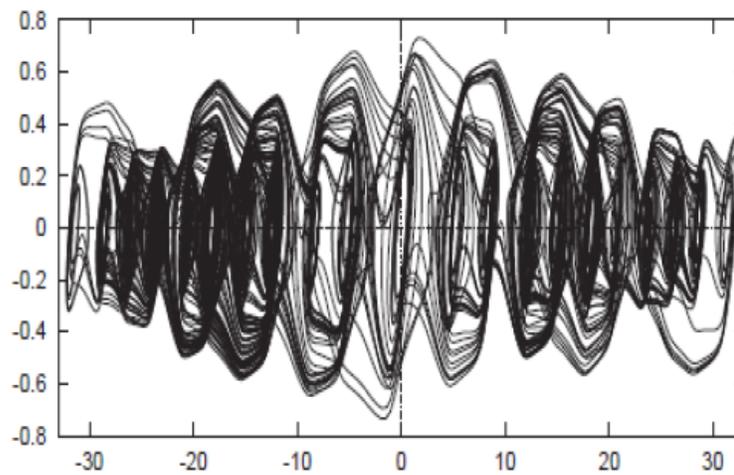


FIG. 2.12 – Un attracteur chaotique avec 21 scroll.

où  $B_N = \{(sk)_{k \in I_{N-2}}, (mk)_{k \in I_{N-1}}\} \subset R_{2N-1}$ , et soient  $m_0 = m_{2i} = -K$  et  $m_1 = m_{2i+1} = 2K$  pour  $i = 1, 2, \dots$ . La Figure. 3.1 représente un attracteur chaotique à 4 scroll [Aziz-Alaoui, 1999], où  $s_0 = 1.0$ ,  $K = -1.99$  et  $B_4^B = \{\beta = 1.06, \gamma = 0.827, s_1 = 1.65, s_2 = 2.1\}$ . La Figure.3.2 montre une suite d'attracteur de 6 scroll [Aziz-Alaoui, 1999], où  $s_0 = 1.0$ ,  $K = -1.99$  et  $B_6^B = B_4^B \cup \{s_3 = 2.5, s_4 = 4.1\}$ .

**Points d'équilibre :** On a :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ -\beta y - \gamma z + g(x) = 0 \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} -Kx, & \text{si } |x| < 1 \\ 2Kx - 3k \operatorname{sgn}(x), & \text{si } 1 < |x| < 3 \\ 3K \operatorname{sgn}(x), & \text{si } |x| > 3. \end{cases}$$

On a  $y = 0$  et  $z = 0 \implies g(x) = 0$ . On a 5 cas : Si  $x < 1 \implies -kx = 0 \implies x = 0$  donc le point d'équilibre est :  $M_1(0, 0, 0)$ . Pour  $1 < |x| < 3$  : Si  $\operatorname{sgn}(x) > 0 \implies 2kx - 3k = 0 \implies x = \frac{3}{2}$ , donc le point d'équilibre est :  $M_2(\frac{3}{2}, 0, 0)$ . Si  $\operatorname{sgn}(x) < 0 \implies 2kx + 3k = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$ , donc le point d'équilibre est :  $M_3(-\frac{3}{2}, 0, 0)$ . Pour  $|x| > 3$  : Si  $\operatorname{sgn}(x) > 0 \implies 3k = 0$  pour  $x$  quelconque  $\implies$  donc le point d'équilibre est :  $M_4(x, 0, 0)$ . Si  $\operatorname{sgn}(x) < 0 \implies -3k = 0$  (avec  $x$  qlq), donc le point d'équilibre est :  $M_5(-x, 0, 0)$ .

**La matrice jacobienne :** Pour  $|x| > 0$  :

$$J_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.99 & -1.06 & -0.827 \end{pmatrix},$$

et les valeurs propres sont :  $(0.82301, -0.825 - 1.3181i, -0.825 + 1.3181i)$ . Pour  $1 < |x| < 3$  et si  $\operatorname{sgn}(x) > 0$  on a :

$$J_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3.98 & -1.06 & -0.827 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont :  $(0.41076 - 1.4985i, 0.41076 + 1.4985i, -1.6485)$ . Pour  $1 < |x| < 3$

et si  $\text{sgn}(x) < 0$  on a :

$$J_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.06 & -1.887 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont :  $(0.0, -0.9435 + 0.41208i, -0.9435 - 0.41208i)$ . Pour  $|x| > 3$  et si  $\text{sgn}(x) > 0$  on choisie  $x = 4$ , donc :

$$J_4(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.06 & -1.887 \end{pmatrix}$$

Et les valeurs propres sont :  $(0.0, -0.9435 + 0.41208i, -0.9435 - 0.41208i)$ . Pour  $|x| > 3$  et si  $\text{sgn}(x) < 0$ , on choisie  $x = -4$ , donc :

$$J_5(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.06 & -1.887 \end{pmatrix}$$

Et les valeurs propres sont :  $(0.0, -0.9435 + 0.41208i, -0.9435 - 0.41208i)$ .

# Chapitre 3

## Réalisation d'un circuit avec des attracteurs chaotique de type $n$ -scroll

Dans cette section, la réalisation des attracteurs chaotiques de type  $n$ -scroll sont examiné et discuté.

### 3.1 Une circuit CNN contrôlée par l' état

Arena, *et al.*, [1996a, 1996b] confirmés expérimentalement un attracteur chaotique à double scroll par une circuit CNN contrôlé par l'état. Considérez le circuit général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y - \gamma z \end{array} \right. \quad (17)$$

où  $h(x)$  est une fonction PWL défini par :

$$h(x) = m_{2n-1}x + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(m_{k-1} - m_k)}{2} (|x + b_k| - |x - b_k|)$$

Dans lequel  $\alpha, \beta, \gamma$ , les  $2n$  coefficients  $m_k$  et le  $2n - 1$  points d'arrêt  $b_k$ , sont tous les paramètres du système. Il a été prouvé [Arena, *et al.*, 1996a, 1996b] que le système (17) est équivalent à un système de type CNN contrôlé par l'état avec les paramètres suivants :

$$C_{1,2} = \alpha, C_{1,1} = 1 - \alpha m_{2n-1}, A_{1,1} = 1, C_{3,3} = 1 - \gamma, C_{2,1} = C_{2,3} = 1, C_{3,2} = -\beta.$$

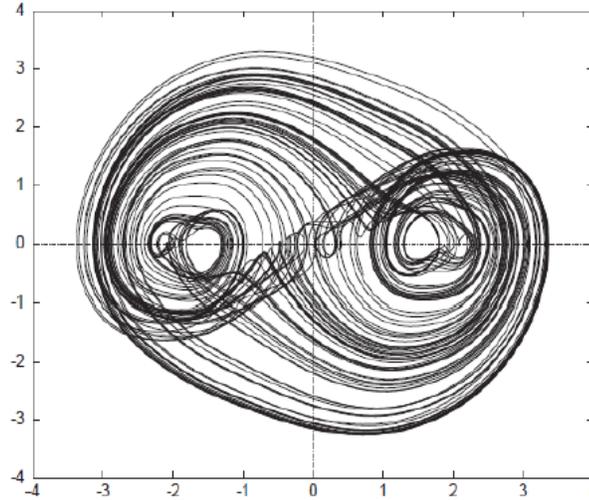


FIG. 3.1 – Un attracteur chaotique avec 4 scroll.

en utilisant la fonction non linéaire suivante :

$$y_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} n_k [ (|x + b_k| - |x - b_k|) ]$$

où

$$n_k = \alpha(m_{k-1} - m_k) \text{ pour } k = 1, \dots, 2n - 1$$

En trouver comme une solution un attracteur chaotique à 2 doubles scroll en utilisant la réalisation CNN contrôlée par l'état [Arena, *et al.*, 1996a, 1996b].

## 3.2 Réalisation des circuits avec des attracteurs chaotiques à 3 et 5 scrolls

Yalcin, *et al.*, [2000b] vérifié expérimentalement les attracteurs chaotiques à 3 et 5 scrolls dans le système généralisé de Chua donnée par (8). Pour ce type de réalisation, les équations d'état correspondantes sont décrites par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \alpha(-(1 + \delta)x + y + f(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y \end{array} \right. \quad (18)$$

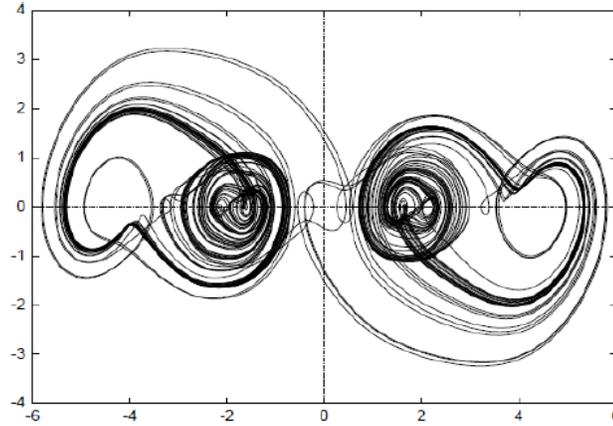


FIG. 3.2 – Un attracteur chaotique avec 6 scroll.

avec

$$f(x) = -h(x) + (1 + \delta)x$$

et  $\delta = 1$ , où  $h(x)$  est défini par (8). Les points d'équilibration sont les racine du système :

$$\begin{cases} h(x) = 0 \\ x = -z \\ y = 0, \end{cases} \quad (19)$$

avec

$$m_0 v_{C_1} + \sum_{j=1}^i m_j (c_{j+1} - c_j) + \dots + m_l (x_{eql} - c_l) = 0, l = 1, \dots, 2n - 1.$$

La matrice de Jacobi, évaluée au premier équilibre point  $O = (0, 0, 0)$  et le  $i^{\text{ème}}$  équilibre point  $eq_i^{\pm} = (x_{eq_i}^{\pm}, 0, -x_{eq_i}^{\pm})$  est donner par :

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha m_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, 2n - 1.$$

et

$$J(eq_i^{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, 2n - 1.$$

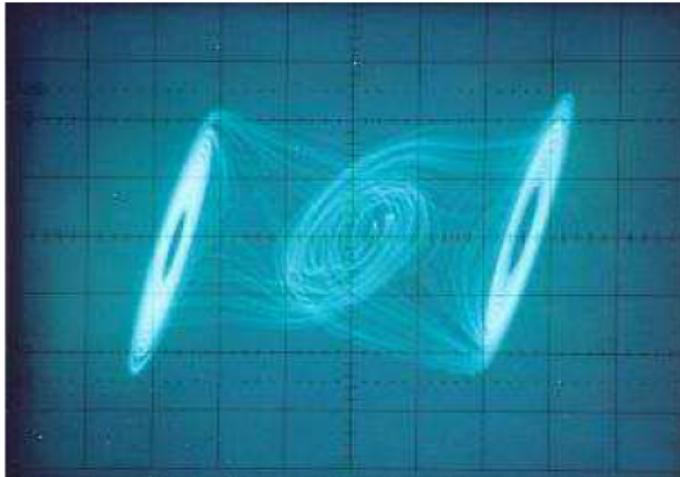


FIG. 3.3 – Attracteur à 3 scroll.

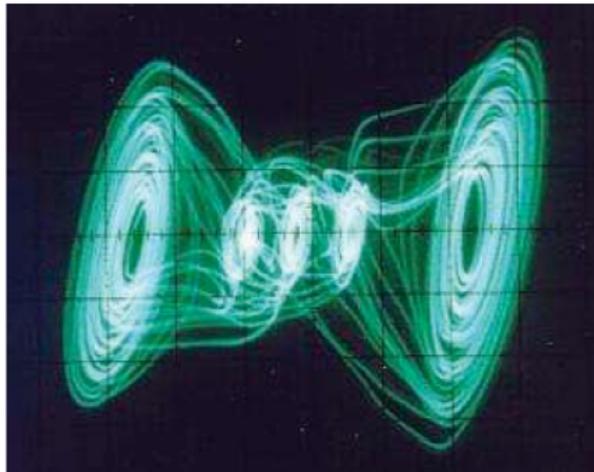


FIG. 3.4 – Attracteur à 5 scroll.

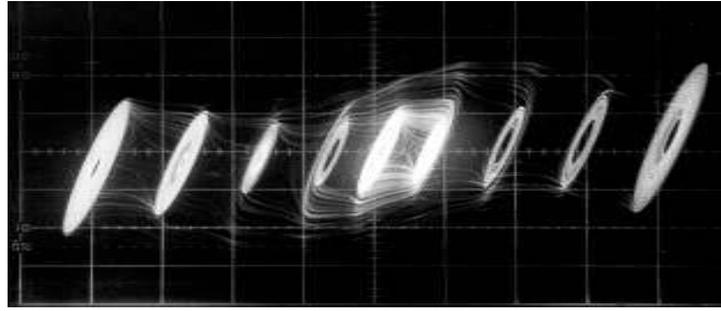


FIG. 3.5 – Attracteur à 9 scroll.

### 3.3 Une approche de conception systématique pour générer des attracteurs chaotiques de type $n$ -scroll

Jusqu'en 2000, le plus grand nombre de scrolls dans un attracteur chaotique qui pourrait être vérifié expérimentalement était seulement 6 [Yalcin, 2004]. Dernièrement, Zhong, *et al.*, [2002] proposé une nouvelle méthode de conception de circuit pour la vérification d'un maximum de 10 scrolls. Considérons à nouveau le circuit de Chua (1). En introduisant les points d'arrêt supplémentaires dans la fonction PWL donnée par (2), la caractéristique  $v - i$  de la résistance non linéaire est modifié comme suit :

$$f(v_{c1}) = m_{2n-1}v_{c1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} (m_{i-1} - m_i) \times (|v_{c1} + b_i| - |v_{c1} - b_i|) \quad (20)$$

Où  $m_i, b_i$  sont les pentes du  $i^{\text{ème}}$  segment et le  $i^{\text{ème}}$  point d'arrêt, respectivement. En outre, attracteurs avec un nombre pair de  $2n$  scrolls peuvent être créé en utilisant la non-linéarité (20) intégrée dans le circuit de Chua (1). De même, les attracteurs avec un nombre impaire  $2n - 1$  de scrolls peut être généré en utilisant la résistance non linéaire suivante :

$$f(v_{c1}) = m_{2n-1}v_{c1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} (m_{i-1} - m_i) \times (|v_{c1} + b_i| - |v_{c1} - b_i|) \quad (21)$$

Zhong, *et al.*, [2002] ont vérifié expérimentalement les attracteurs chaotiques avec 9 et 10 scrolls, respectivement. Voir les Figures. 3.6, et 3.7.

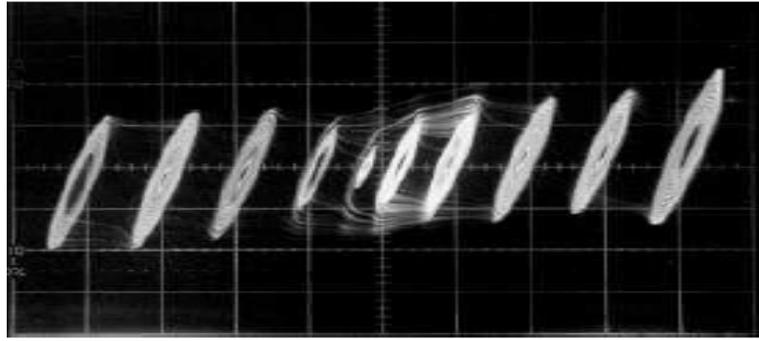


FIG. 3.6 – Attracteur à 10 scroll.

### 3.4 Une approche de conception améliorée pour générer les attracteurs chaotique de type $n$ -scroll

Yu, *et al.*, [2003b] à proposé une méthode améliorée pour générer des attracteurs chaotiques de type  $n$ -scroll. Une formule générale récursive a été dérivée pour déterminer les points d'équilibre. Un attracteur chaotique de 11 scrolls a été expérimentalement observé. Considérons le circuit de Chua (1). Lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 9.3mH, C_1 = 5.06nF, C_2 = 47.9nF \\ G = \frac{1}{R} = 0.6061mS, m_0 = -0.852mS \\ m_1 = -0.32mS, b_1 = 0.2V \end{array} \right.$$

Le système (1) à un attracteur chaotique à double scroll. Pour générer un attracteur chaotique de type multiscroll de (1), on modifie le fonction PWL donnée par (2), comme suit :

$$f(v_{C_1}) = \left\{ \begin{array}{ll} m_0 v_{C_1}, & 0 \leq |v_{C_1}| \leq b_1 \\ m_1 v_{C_1} + \sum_{j=1}^i (m_{j-1} - m_j) b_j, & b_j \leq |v_{C_1}| \leq b_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ m_n v_{C_1} + \sum_{j=1}^n (m_{j-1} - m_j) b_j, & |v_{C_1}| \geq b_n \end{array} \right. \quad (22)$$

Pour créer des scrolls uniformes, supposons que :

$$m_0 = m_2 = \dots \text{ et } m_1 = m_3 = \dots$$

Si les points d'arrêt  $b_i$  sont les points médians de divers segments PWL correspondants, puis

$$b_{i+1} = \frac{2C_1 \sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) b_j}{G + m_i} - b_i, 1 \leq i \leq n-1$$

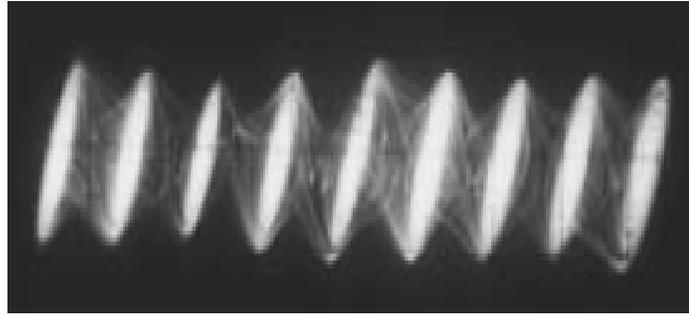


FIG. 3.7 – Attracteur à 9 scroll.

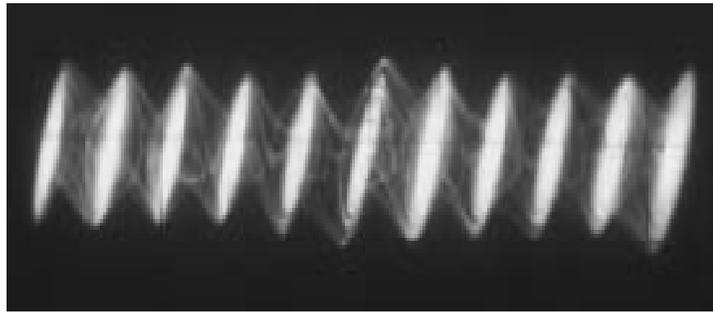


FIG. 3.8 – Attracteur à 11-scrolls.

Si les paramètres  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $b_1$  sont donnés, on peut déduire tous les points d'arrêt  $b_i$ . Si  $n$  est un nombre pair, supposons que  $m_0 = m_2 = \dots = m_n = -0.32mS$  et  $m_1 = m_3 = \dots = m_{n-1} = -0.852mS$ . Ensuite, le système (1) avec (22) peut générer des attracteurs chaotiques avec un nombre  $(n + 1)$  de scrolls. Si  $n$  est un nombre impair, supposons que  $m_0 = m_2 = \dots = m_n = -0,852mS$  et  $m_1 = m_3 = \dots = m_{n-1} = -0,32mS$ . Ensuite, le système (1) avec (22) peut générer des attracteurs chaotiques avec un nombre pair  $2n + 1$  de scrolls. Voir Figures. 3.7, et 3.8.

# Chapitre 4

## Conception des attracteurs chaotique de type $n$ -scroll via les fonctions non linéaire de modulation

Dans la section ci-dessus, l'approche de la fonction PWL a été discuté, qui peut être utilisé pour générer des attracteurs chaotiques multiscroll. L'idée principale ici introduisait des points d'arrêt supplémentaires dans la fonction PWL.

### 4.1 Approche par la fonction sinus

Tang, *et al.*, [2001b] a appliqué la fonction sinus et remplacer la fonction caractéristique non linéaire de Circuit de Chua et a obtenu une circuit modifié de Chua comme suit :

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y, \end{cases} \quad (23)$$

Où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac), & x \geq 2ac \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right), & -2ac < x < 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac), & x \leq -2ac \end{cases}$$

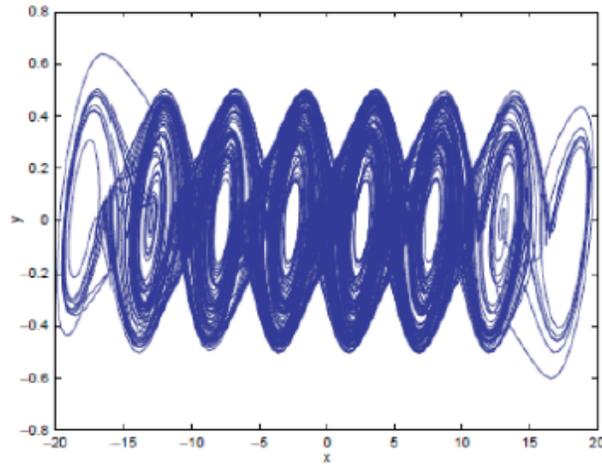


FIG. 4.1 – Attracteur chaotique à 8 scrolls.

et

$$d = \begin{cases} \pi, & \text{pour } c \text{ paire} \\ 0, & \text{pour } c \text{ impaire} \end{cases}$$

Où  $\alpha, \beta, a, b, c, d$  sont des paramètres réels. Notons que le système (23) peut générer des attracteurs chaotiques avec  $(c + 1)$  scroll. Lorsque  $\alpha = 10.814, \beta = 14.00, a = 1.3, b = 0.11$ , le système (23) peut créer un attracteur chaotique à 8 scroll avec  $c = 7$ , comme indiqué sur la Fig. 4.1.

## 4.2 Méthode de la fonction de modulation

Pour créer des attracteurs chaotiques avec  $n$ -scrolls à partir de (29), Yu, *et al.*, [2005a, 2005d] ont construit une fonction décrite par :

$$f(x) = |F(x)| \operatorname{sgn}(x) - x$$

où  $F(\cdot)$  peut être une fonction autonome ou une fonction non autonome produite par des signaux externes. Bien sûr,  $F(\cdot)$  peut être une constante dans le cas le plus simple. Ici, supposons que  $F(\cdot) = |A \times \sin(ax)|$ , où  $A, a > 0$  sont des paramètres. Yu, *et al.*, [2005a, 2005d] ont également appliqué la fonction suivantes :

(1) Nombre pair de scrolls :

$$f_1(x) = A_0 \times \text{sgn}(x) + \sum_{i=1}^M \left[ \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \text{sgn}\left(x - \frac{2}{B} \sum_{j=0}^{i-1} A_j\right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^M \left[ \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \text{sgn}\left(x + \frac{2}{B} \sum_{j=0}^{i-1} A_j\right) \right] - Bx \right]$$

où tous les paramètres  $A_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots$  et  $B \in [0.7, 1.2]$ , qui peut générer  $2M+2, M = 1, 2, 3, \dots$  scrolls dans  $\mathbb{L}$  attracteur.

(2) Nombre impair de scroll :

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^M \left[ \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \times \text{sgn}\left(x - \frac{1}{B} \left(2 \sum_{j=0}^{i-1} A_j - A_0\right)\right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^M \left[ \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \times \text{sgn}\left(x + \frac{1}{B} \left(2 \sum_{j=0}^{i-1} A_j - A_0\right)\right) \right] - Bx \right]$$

où tous les paramètres  $A_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots$  et  $B \in [0.7, 1.2]$ , qui peut créer  $2M + 1, M = 1, 2, 3, \dots$  scrolls dans  $\mathbb{L}$  attracteur.

### 4.3 Conception d'un tore chaotiques à plis multiples

Dans cette section, un tore simple et chaotique avec une non-linéarité PWL est présenté. Matsu-moto, *et al.*, [1987] à introduit le système suivant :

$$\begin{cases} x' = -\alpha g(y - x) \\ y' = -g(y - x) - z \\ z' = \beta y \end{cases} \quad (24)$$

Où

$$g(y - x) = m_1(y - x) + 1/2(m_0 - m_1)(|y - x + x_1| - |y - x - x_1|)$$

est une fonction impaire PWL satisfaisant :

$$g(x - y) = -g(y - x).$$

Où  $\alpha = 15, \beta = 1, m_0 = 0.1, m_1 = -0.07$ , et  $x_1 = 1$ , le système (24) à un attracteur chaotique de type tore à double pli. Pour générer des attracteurs toriques multi-plis, Yu, *et al.*, [2004a, 2005c,

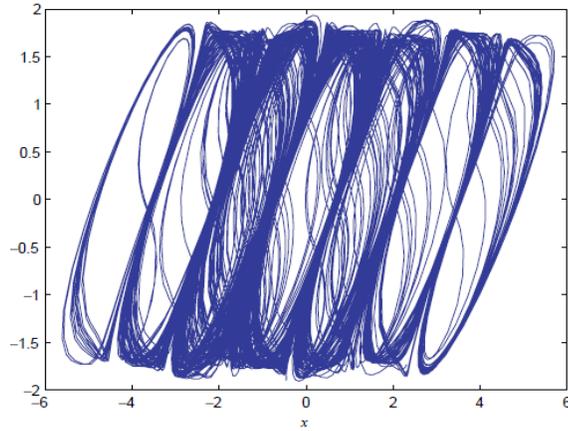


FIG. 4.2 – Attracteur de tore à 7 plis.

2005e] proposé une circuit modifié à tores multiples, décrite par :

$$\begin{cases} x' = -\alpha g(y - x) \\ y' = -g(y - x) - z \\ z' = \beta y, \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta$  sont des paramètres réels et

$$g(y - x) = m_{N-1}(y - x) + 1/2 \sum_{i=1}^{N-1} (m_{i-1} - m_i)(|y - x + x_i| - |y - x - x_i|)$$

est une fonction impaire PWL satisfaisant  $g(x - y) = -g(y - x)$ . Voir Figures. 4.3, et Fig. 4.4.

## 4.4 Les attracteurs hyperchaotique de type multiscroll

Pour générer des attracteurs de type  $n$ -scroll et **hyperchaotic**, considérons le système suivant [Yalcin, 2004] :

$$\begin{cases} x'_i = \alpha(y_i - h(x_i)) \\ y'_i = x_i - y_i + z_i + k_{i-1}(y_i - y_{i-1}) \\ z'_i = -\beta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (25)$$

De plus, supposons que  $y_0 = y_m, k_0 = 0, k_i = k, i = 1, \dots, m - 1$  pour (25). Voir Fig. 4.5.

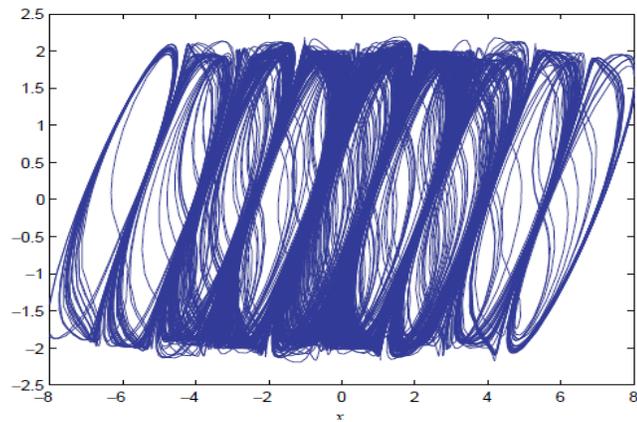


FIG. 4.3 – Attracteur de tore à 9 plis.

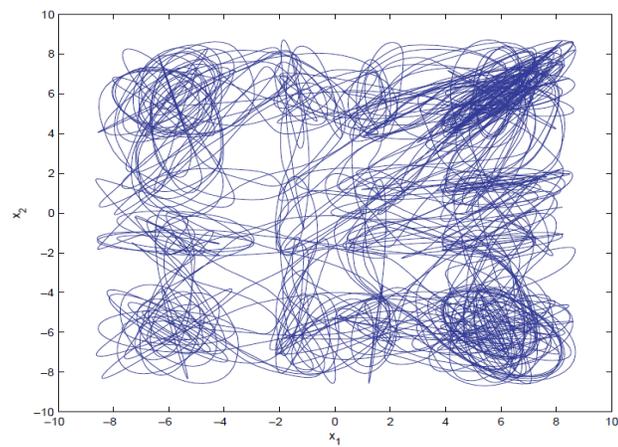


FIG. 4.4 – Un attracteur hyperchaotique de type 2-Double scroll.

## 4.5 Attracteurs chaotiques multiscroll du système de Lorenz modifié

Cette section présente un système de Lorenz modifié [Elwakil, *et al.*, 2002] qui peut créer des attracteur chaotique avec une papillon à quatre ailes. Le système de Lorenz classique [Chen & Lu, 2003] est décrit par :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (26)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes et les termes non linéaires  $xz, xy$  sont responsables de la génération du chaos. Elwakil, *et al.*, [2002] a présenté un système de type Lorenz donné par :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y'_{\mp} = \mp Kz \\ z'_{\pm} = \pm |x| \mp 1 \end{cases}$$

où

$$K = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Ici,  $0 < a < 1$ . Comparaison avec le système original de Lorenz (26), les termes non linéaires  $xy, xz$  ont été remplacé par la fonction valeur absolue  $|x|$  et la fonction de signe  $Kz$ , respectivement. Fig. 4.6 montre l'attracteur chaotique de type papillon à quatre ailes.

## 4.6 Attracteurs chaotiques de type multiscroll à partir d'un système chaotique critique

Cette section présente un système chaotique critique en 3D, qui peut afficher :

(i) deux attracteurs chaotiques à 1 scroll simultanément, avec seulement trois équilibres.

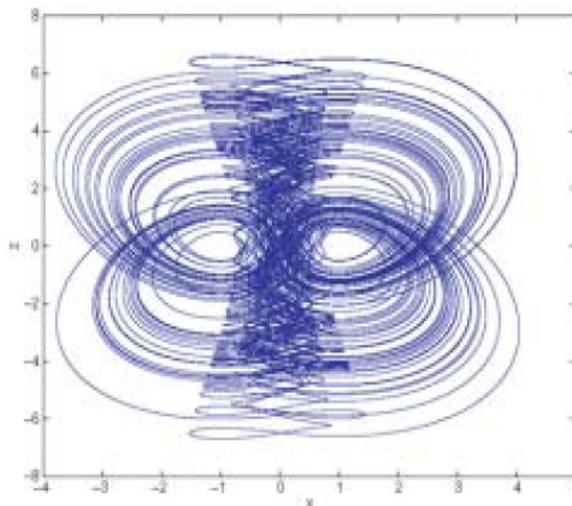


FIG. 4.5 – Attracteur chaotique de type papillon à quatre ailes.

(ii) deux 2-scroll attracteurs chaotiques simultanément, avec cinq équilibres [Lu & Chen, 2002 ; Lu, *et al.*, 2002d, 2004a]. Lu, *et al.*, [2004a] à introduit le système chaotique suivant :

$$\begin{cases} x' = \frac{-ab}{a+b}x - yz + c \\ y' = ay + xz \\ z' = bz + xy \end{cases} \quad (27)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes réelles. Le système (27) est chaotique dans une ensemble des paramètres et à de nombreux comportements complexes [Lu, *et al.*, 2004a]. Quand  $a = -10, b = -4, c = 18.1$ , il affiche deux attracteurs chaotiques coexistants à 1 scroll, comme le montre la Fig. 4.7. De plus, quand  $a = -10, b = -4, c = 0$ , le système (27) affiche deux attracteurs chaotique de type 2 scroll co-existants comme indiqué sur la Figure. 4.8.

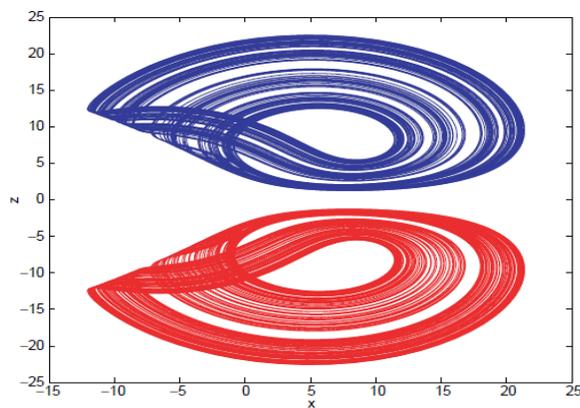


FIG. 4.6 – Deux attracteurs chaotiques coexistants à un scroll.

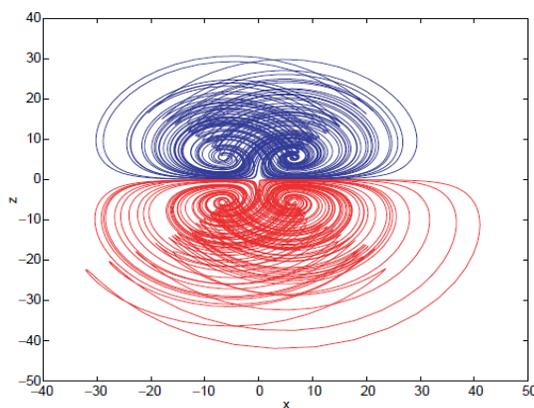


FIG. 4.7 – Deux attracteurs chaotiques coexistants à deux scrolls.

# Bibliographie

- [1] Arena, P., Baglio, S., Fortuna, L. & Manganaro, G. [1996a] “Generation of n-double scrolls via cellular neural networks,” *Int. J. Circuit Th. Appl.* 24, 241–252.
- [2] Arena, P., Baglio, S., Fortuna, L. & Manganaro, G. [1996b] “State controlled CNN : A new strategy for generating high complex dynamics,” *IEICE Trans. Fund.* E79-A, 1647–1657.
- [3] Aziz-Alaoui, M. A. [1999] “Differential equations with multispiral attractors,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 9, 1009–1039.
- [4] Aziz-Alaoui, M. A. [2000] “Multispiral chaos,” *Proc. 2nd Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos 1*, July 5–7, St. Petersburg, Russia, pp. 88–91.
- [5] Aziz-Alaoui, M. A. [2001] “Dynamics of a Hénon–Lozi-type map,” *Chaos Solit. Fract.* 12, 2323–2341.
- [6] Chen, G. & Yu, X. (eds.) [2003] *Chaos Control Theory and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg).
- [7] Elwakil, A. S. [2002] “Nonautonomous pulse-driven chaotic oscillator based on Chua’s circuit,” *Microelectronics J.* 33, 479–486.
- [8] Elwakil, A. S., Özoğuz, S. & Kennedy, M. P. [2002] “Creation of a complex butterfly attractor using a novel Lorenz-type system,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I* 49, 527–530.
- [9] Lü, J. & Chen, G. [2002] “A new chaotic attractor coined,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, 659–661.
- [10] Lü, J., Chen, G. & Zhang, S. C. [2002d] “Dynamical analysis of a new chaotic attractor,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, 1001–1015.
- [11] Lü, J., Chen, G. & Cheng, D. Z. [2004a] “A new chaotic system and beyond : The general Lorenz-like system,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 14, 1507–1537.
- [12] Matsumoto, T. [1987] “Chaos in electronic circuits,” *Proc. IEEE* 75, 1033–1057.

- [13] Suykens, J. A. K. & Chua, L. O. [1997] “ $n$ -Double scroll hypercubes in 1-D CNNs,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 7, 1873–1885.
- [14] Suykens, J. A. K., Huang, A. & Chua, L. O. [1997] “A family of  $n$ -scroll attractors from a generalized Chua’s circuit,” *Int. J. Electron. Commun.* 51, 131–138.
- [15] Yalcin, M. E., Suykens, J. A. K. & Vandewalle, J. [1999a] “On the realization of  $n$ -scroll attractors,” *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems (ISCAS’99)* 5, May 30–June 2, Orlando, Florida, USA, pp. 483–486.
- [16] Yalcin, M. E., Suykens, J. A. K. & Vandewalle, J. [2000b] “Experimental confirmation of 3- and 5-scroll attractors from a generalized Chua’s circuit,” *IEEE Trans. Circuits Syst. -I* 47, 425–429.
- [17] Yalcin, M. E. [2004] *Cellular Neural Networks, Multiscroll Chaos and Synchronization : Theory, Applications and Implementations*, PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- [18] Yu, S. M., Qiu, S. S. & Lin, Q. H. [2003b] “New results of study on generating multiple-scroll chaotic attractors,” *Science in China Series F* 46, 104–115.
- [19] Yu, S. M., Lu, J., Leung, H. & Chen, G. [2005a] “Design and circuit implementation of  $n$ -scroll chaotic attractor from a general Jerk system,” *IEEE Trans. Circuits Syst. -I* 52, 1459–1476.
- [20] Yu, S. M., Lu, J., Leung, H. & Chen, G. [2005d] “ $N$ -scroll chaotic attractors from a general Jerk circuit,” *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems (ISCAS’05)*, May 23–26, Kobe, Japan, pp. 1473–1476.
- [21] Yu, S. M., Lin, Q. H. & Qiu, S. S. [2004a] “A family of multiple-folded torus chaotic attractors,” *Acta Phys. Sin.* 53, 2084–2088.
- [22] Yu, S. M., Lu, J., Leung, H. & Chen, G. [2005c] “Multifolded torus chaos generation : Theoretical design and circuit implementation,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, submitted.
- [23] Yu, S. M., Lu, J., Leung, H. & Chen, G. [2005e] “Generating multi-folded torus chaotic attractors,” *Proc. Int. Conf. Physics and Control*, Saint Petersburg, Russia, August 24–26, pp. 249–253.
- [24] Zhong, G., Man, K. F. & Chen, G. [2002] “A systematic approach to generating  $n$ -scroll attractors,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, 2907–2915.