République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et appliqué

Thème

Sur quelques systèmes dynamique à temps discret

Présenté Par :
..............Louahche Nassima...................
...............Boukhatem Loubna......................

Devant le jury :

Mr Boukhalfa El-hafsi	MCB	Univérsité Larbi Tébessa	Président
Mr Hannachi Fareh	MCB	Univérsité Larbi Tébessa	xaminateur
Mr Zeraoulia Elhadj	Prof	Univérsité Larbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance :19/06/2019

Remerciements

Tout d’abord, je remercie Dieu le tout puissant, de m’avoir donné le courage, la santé et la patience durent toute le temps que j’ai consacré à la réalisation de ce travail.

Je tiens également à exprimer ma plus profonde gratitude à mon encadreur prof:Zeraoulia Elhadj pour son suivi et conseils. Sans oublier les enseignants du département de Mathématique et Informatique qui ont contribué à ma formation.

Mes sincères remerciements aux membres du jury Mr: Boukhalfa El-hafsi et Mr: Hannachi Fareh pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'honneur qu'ils m’ont fait de bien vouloir le juger.

Je termine par remercier tous mes amis et collègues qui m’ont soutenu durant l’élaboration de mon travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents « Mabouka Ramdani et ALI Louahche » qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

A mes frères: Tayeb et Amine à mes sœurs : Nadjet et Wahiba à mes nièces: Zohoure et Tasnime et à ma grande famille.

A tous mes amis.

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

A vous.

Nassima

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents «Ibrahim Boukhatem et Louiza Benzine »

qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

A mon frère: Lotfi à mes sœurs: Awatef et Fadila, Leilaet Nawel à

ma grande famille ma tante Sabah, Nassira, Mahria

A tous mes amis.

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

A vous.

Loubna

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les systèmes dynamique à temps discret à travers les étapes suivantes:

1) La notion d’un système dynamique à temps discret et quelques autres notions comme: les points fixes, la stabilité autour ces points, les orbites et leurs stabilité.
2) Chaos topologique observé dans ce type des systèmes.

3) Chaos dans l'application du produit: Chaos au sens de Devaney et ses conditions.

4) Application mélangée, faiblement mélangée et universalité.

Mots clés:

Chaos, système dynamique discret, transitivité, sensibilité, entropie positif, application mélangée, universalité.

Abstract

In this memory, we study dynamical systems in the discrete time through the following steps:

1) Gives the general concepts of dynamical systems in the discrete case and some other concepts such as: fixed points, stability around these points, the orbits and their stability.

2) Topological chaos observed in this system type.

3) Chaos in the product maps: Chaos in the sens of Devaney and its conditions.

4) Mixing map, weakly mixing map and universality.

Key words:

Chaos, discrete dynamical system, transitivity, sensibility, positive entropy, mixing map, universality.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الانظمة الديناميكية في الزمن المتقطع من خلال المراحل التالية:

1) مفهوم النظام الديناميكي ذو زمن متقطع وبعض المفاهيم الأخرى مثل النقاط الثابتة، الاستقرار حول هذه النقاط، المدارات واستقرارها.

2) الفوضى الطوبولوجية الملاحظة في هذا النوع من الانظمة الديناميكية.

3) الفوضى في جداء الخرائط: الفوضى في معنى دفاناي وشروطها.

4) الخرائط المختلطة، الخرائط المختلطة بشكل ضعيف و الخاصية العامة.

الكلمات المفتاحية:

الفوضى، أنظمة حركية ذات زمن متقطع، التعدية، الطاقة الموجبة، الحساسية، الخرائط المختلطة، الخاصية العامة.

Table des matières

Introduction Générale

Un système dynamique déterministe est une structure qui évolue au cours de temps peut alors se modéliser de deux façon distinctes : Une évolution continue dans le temps représentée par des équations diffirentielles ordinaires et une évolution discrète dans le temps. L' étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle générale des équations aux différence finie.

Historiquement, la notion du temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques a été établie par Galilée, qui le premier adoptait cette notion dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cette insertion du temps dans l'étude des équations est ce qui se nommera l'étude des systèmes dynamiques. Les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique, une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Les systèmes dynamiques sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle. En effet, vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en exergue le phénomène de **la sensibilité aux conditions initiales**, il montra dans son étude du système solaire qu'il existe des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets. Toujours au XIXe siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur **la stabilité du mouvement**. Il introduit l'idée de mesurer de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales **voisines**, lorsque cet écart évolue exponentiellement, on parle de sensibilité aux conditions initiales. En 1963, le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une **modification minime des données initiales** pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant a cette propriété seront, à partir de 1975, dénommés **systèmes chaotiques**. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Evidemment, les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été trés importants pour la compréhension du chaos, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques : L' ordinateur. En effet, les systèmes régissant un comportement chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

Finallement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se refère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L' ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases", cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires sur les systèmes dynamique

1.1 Définition mathématique d'un système dynamique

Soient X un espace métrique (généralement $X = \mathbb{R}^n$), T est l'ensemble ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$) et f une application continue $f : X \times T \to X$ tel que $(x,t) \to f(x,t)$. Le triplet (X, T, f) est appelé système dynamique si :

$$\begin{cases} f(x,0) = x, \forall x \in X \\ \\ f(f(x,t_1),t_2) = f(x,t_1+t_2), \forall t_1,t_2 \in T \end{cases}$$

avec :

X : Espace de phases. L' espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable...etc.

T : Espace temporel.

f : Le flot du système dynamique ou encore (fonction d'évolution).

Dans le cas où le temps T est continu, le système (X, T, f) est dit continu. Dans le cas où le temps T est discret, le système (X, T, f) est dit discret.

1.1.1 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.1 *Un système dynamique discret est un système d'équations algèbriques récurrentes définis par :*

$$x_{k+1} = f(x_k, c), \ k \in \mathbb{N}$$

Où $x_k \in \mathbb{R}^n$, le vecteur d'état à l'instant t_k, c le vecteur des paramètres, f la fonction de récurrence qui définit la dynamique du système discret. Si nous associons à cette dynamique un état initial x_0, nous pourrons avoir une solution unique.

Etant donnée une condition initiale x_0 de l'état du système, le premier état suivant est : $x_1 = f(x_0)$, le second état, qui suit immédiatement le premier, est : $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$, et ainsi de suite, de telle sorte que le n-ième état est donné par : $x_n = f(x_{n-1}) = ... = f^n(x_0)$.

Exemple 1.1 *Soit x_0 un capital placé à un taux d'interet r composé annuellement et pour $n \geq 1$ désignons par x_n le capital aprés n années. Alors on a :*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + rx_0 = (1+r)\,x_0 \\ x_2 &= x_1 + rx_1 = (1+r)\,x_1 \\ &\dots \\ x_n &= (1+r)^n\,x_0 \end{aligned}$$

on obtient le système dynamique discret : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donné par :

$$(x, n) \to (1+r)^n\,x$$

Il est obtenu en itérant la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to (1+r)\,x \end{aligned}$$

1.1.2 Notion d'orbites (ou trajectoire)

L' orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_+^f = \left\{ f^k(x),\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par :

$$O^f = \left\{ f^k(x),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_-^f = \left\{ f^{-k}(x),\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

1.1.3 Points fixes

Définition 1.2 *Soit* $f : D \to D, D \subset \mathbb{R}^n$ *une application continue. Un point* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *est point fixe du système dynamique* (X, T, f) *si*

$$f(x^*) = x^*$$

Les deux théorèmes suivantes donnent respictivement l'existence et l'unicité des points fixes :

Théorème 1.1 *(de Brouwer) : Toute applicatoin continue* $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ *avec* $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ *admet un point fixe, c'est-à-dire : l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution dans* $\bar{B}^n$.

Théorème 1.2 *(de contraction de Banach) : Soit* $f : \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ *une application continue, où* $\bar{B}^2$ *est le disque unitaire fermé* $\bar{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ *, et supposons que :*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| < \lambda \|x_1 - x_2\|$$

pour tout vecteur $(x_1, x_2) \in \bar{B}^2$ *et un certain* $0 < \lambda < 1$. *Alors il existe un point fixe unique* $x^* \in \bar{B}^2$. *De plus on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x^*, \ \forall x \in \bar{B}^2$$

1.1.4 Points périodiques et p-cycles

S'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est un point périodique. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que

$$f^n(x) = x$$

Un ensemble de p points $\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p ou encore un p-cycle) si :

$$\begin{cases} x_{i+1} = f(x_i), \ i = 0, ..., p-1 \\ x_p = f(x_{p-1}) = x_0 \\ x_i = f^p(x_i), \ i = 0, ..., p-1 \\ x_i \neq f^h(x_i), \ i = 0, ..., p-1, 1 \leq h < p \end{cases}$$

1.1.5 Etude de la stabilité

Définition 1.3 *Un point fixe* ***attractif*** *(ou stable) de* $f : I \to I,\ I \subset \mathbb{R}$ *est un point fixe* x^* *de* f *tel qu'il existe un voisinage de* x^* *tel que pour tout* u_0 *dans ce voisinage la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* u_0 *et* $u_{n+1} = f(u_n)$, *converge vers* x^*.

Définition 1.4 *Un point fixe* x^* *de* $f : I \to I,\ I \subset \mathbb{R}$ *est* ***répulsif*** *(ou instable) si*

$$\forall x_0 \in I,\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \textit{tel que pour } |x^* - x_0| < \varepsilon \ \textit{ alors } |x^* - f(x_0)| >> 0.$$

Pour résumer, un point fixe x^* est attractif si la suite $(f^n(x))_{\mathbb{N}}$ dans un voisinage de x^*, converge vers x^* tandis qu'il est répulsif si cette suite s'en éloigne.

Définition 1.5 *Considérons une application non-linéaire* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on définit le multiplicateur* m *de* f *au point fixe* x^* *comme suit :*

$$m = f'(x^*)$$

Il est clair que m *est la pente de la tangente au point fixe* x^* *de* f *qui détermine le type (ou la nature) de point fixe.*

Théorème 1.3 *Supposons que* x^* *est un point fixe de* $x_{t+1} = f(x_t)$, *alors le point fixe est :*
1. Attractif si $|m| < 1$.
2. Répulsif si $|m| > 1$.
3. Indifférent si $|m| = 1$.
4. Super stable si $m = 0$.

Preuve. Nous utilisons la formule de Taylor au voisinage de x^* :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ &= x^* + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(f(x^*)) + m(m(x - x^*)) + O(2) \\ &= x^* + m^2(x - x^*) + O(2) \\ &\quad \ldots \\ f^p(x) &= x^* + m^p(x - x^*) + O(2) \end{aligned}$$

Ainsi l'éloignement par rapport à x^* est multiplié par m à chaque itération (d'où le nom **multiplicateur** donné à m). Après p itérations, le point x voisin de x^* se trouve à la distance $m^p\left(x-x^*\right)$.
1. Par hypothèse, nous avons :

$$|m|=\lim_{x_0\longrightarrow x^*}\left|\frac{f\left(x^*\right)-f\left(x_0\right)}{x^*-x_0}\right|<1$$

Pour x_0 suffisamment proche de x^*, on a

$$\left|f\left(x^*\right)-f\left(x_0\right)\right|<\left|x^*-x_0\right|$$

Comme x^* est fixe nous obtenons

$$\left|x^*-f\left(x_0\right)\right|<\left|x^*-x_0\right|$$

Pour un x_0 proche de x^*, $f\left(x_0\right)$ est encore plus proche de x^*, en répétant cet argument, $f^2\left(x_0\right)$ sera encore plus proche de x^* etc. Ainsi, la suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ converge vers p, le point p est donc attractif.
2. Au contraire, le point fixe x^* peut être répulsif, la preuve de cette assertion est une adaptation évidente de l'assertion précédente.
3. Si $|m|=1$ la nature de x^* dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor et nous ne pouvons pas conclure la nature du point fixe.
4. Si $m=0$ le terme du premier ordre disparaît complètement donc l'attraction est plus forte d'où le nom super attractif. ■

Théorème 1.4 *Soit* $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$, *pour déterminer la nature de point fixe* x^* *il faut falloir trouver les valeurs propres de la matrice Jacobienne* $Df\left(x^*\right)=J\left(x^*\right)$.
Le point fixe x^* *est :*
1. Stable si toutes les valeurs propres de $J\left(x^*\right)$ *sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieurs à* 1*).*
2. Instable si l'une de ces valeurs propres de $J\left(x^*\right)$ *à un module supérieur à* 1.

Comme les points fixes peuvent être attractifs ou répulsifs, de même, une orbite périodique est soit attractive soit répulsive et le théorème suivant décrit la stabilité d'une orbite périodique. En dimension 1, le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de chaîne. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$\left(f^p\right)'\left(x_p\right)=f'\left(x_{p-1}\right)...f'\left(x_1\right)f'\left(x_0\right)$$

Mais $x_0=x_p$ on en déduit que la valeur $\left(f^p\right)'\left(x_p\right)$ est la même pour toutes les dérivées et $\left(f^p\right)'\left(x_i\right)$,

$i = 0, 1, 2, ..., p-1,$ notée m_p. On définit le multiplicateur du cycle m_p par :

$$m_p = (f^p)'(x_0)$$

Théorème 1.5 *Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$ est :*
1- super attractif (ou super stable) si $m_p = 0$,
2- attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$,
3- répulsif (ou instable) si $|m_p| > 1$,
4-indifférent si $|m_p| = 1$,

Exemple 1.2 *Soit $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, le point 0 est 3-périodique car $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ on a $f'(0) = \frac{5}{2}$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(2) = -\frac{7}{2}$ et $(f^3)'(0) = f'(0)f'(1)f'(2) = \frac{35}{8} > 1$ ainsi 0 est un point 3-périodique répulsif.*

En général, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on calcule les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$ de la matrice jacobienne de f^p. Si λ_i sont réelles :
(1) $\forall i = 1, 2, ..., n,\ |\lambda_i| < 1,$ il s'agit d'un noeud attractif.
(2) $\forall i = 1, 2, ..., n,\ |\lambda_i| > 1,$ il s'agit d'un noeud répulsif.
(3) $\exists i, j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ tel que $|\lambda_i| < 1$ et $|\lambda_j| > 1,$ il s'agit d'un noeud col.
Si λ_i sont complexes :
(1) $\forall i = 1, 2, ..., n,\ |\lambda_i| < 1,$ il s'agit d'un foyer attractif.
(2) $\forall i = 1, 2, ..., n,\ |\lambda_i| > 1,$ il s'agit d'un foyer répulsif.

Définition 1.6 *Un point fixe x^* de $x_{t+1} = f(x_t)$ est un point hyperbolique si $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\right| \neq 1$. Plus généralement, en dimension n, x^* est un point hyperbolique si aucune des valeurs propres de $Df(x^*)$ à un module égal à 1.*

Définition 1.7 *Le bassin d'attraction d'un point fixe x^* d'une application f est formé par l'ensemble des conditions initiales u_0 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point d'équilibre x^*.*

Voyons maintenant un exemple qui montre bien l'utilité des définitions précédentes.

Exemple 1.3 *Prenons un exemple linéaire des systèmes dynamiques de la forme :*

$$x_{k+1} = ax_k + b \qquad (*)$$

où a *et* b *sont des constants. L' application definie par* $(*)$ *a un point fixe* $x^* = \frac{b}{1-a}$, $a \neq 1$. *Supposons que* $b = 0$; *i.e.,* $x_{k+1} = ax_k \Longleftrightarrow x_k = a^k x_0$: *Si* $|a| < 1$ *alors* $a^k \to 0$ *quand* $k \to \infty$, *donc* $x_k \to 0$. *Si* $|a| > 1$ *alors* $a^k \to \infty$ *quand* $k \to \infty$, *donc* $x_k \to \infty$. *Si* $a = 1$ *alors* $x_0 = x_1 = x_2 = ...$; *donc* $x_k = x_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Si* $a = -1$ *alors* $x_0 = -x_1 = x_2 = ...$; *donc* $x_k = (-1)^k x_0$, *d'où la solution oscille. Maintenant, pour* $b \neq 0$ *on a*:

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b \\
&= a(ax_0 + b) + b \\
&= a^2 x_0 + b(a+1) \\
x_3 &= ax_2 + b \\
&= a(a^2 x_0 + b(a+1)) + b \\
&= a^3 x_0 + b\left(a^2 + a + 1\right) \\
x_4 &= ax_3 + b \\
&= a(a^3 x_0 + b\left(a^2 + a + 1\right)) + b \\
&= a^4 x_0 + b\left(a^3 + a^2 + a + 1\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$x_k = a^k x_0 + b \sum_{j=0}^{k-1} a^j$$

En appliquant la formule de série géométrique on obtient :

$$x_k = \begin{cases} a^k x_0 + b\left(\frac{a^k - 1}{a-1}\right), \text{ si } a \neq 1, \\ \\ a^k x_0 + kb, \text{ si } a = 1 \end{cases}$$

(1) Pour $|a| < 1 : a^k \to 0$ *quand* $k \to \infty$, *donc*

$$x_k \to x^* = \frac{b}{1-a}$$

Donc x^* *est un point fixe stable (i.e., un attracteur), voir Fig.* 1 *et Fig.* 2.

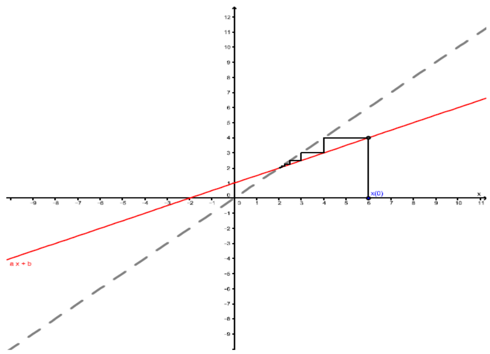

Figure 1. L' évolution des itérées de l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $0 < a < 1$

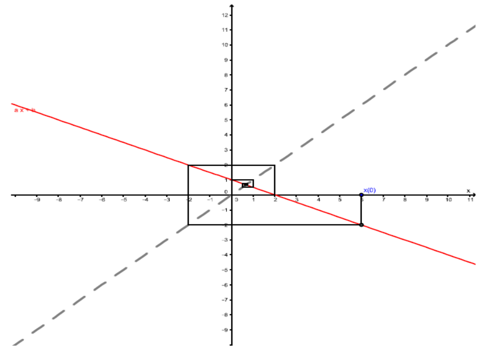

Figure 2. L' évolution des itérées de l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $-1 < a < 0$.

(2) Si $|a| > 1,$ alors $a^k \to \infty$ quand $k \to \infty,$ donc

$$x_k = a^k \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \left(\frac{b}{1-a} \right)$$

si $x_0 \neq \frac{b}{1-a}$ alors $|x_k| \to \infty.$ Voir Fig. 3 et Fig. $4.$

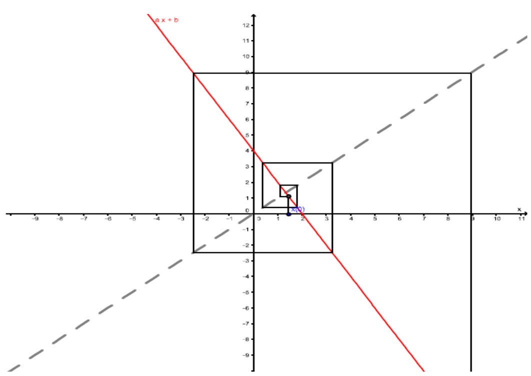

Figure 3. L' évolution des itérées de l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $a > 1$

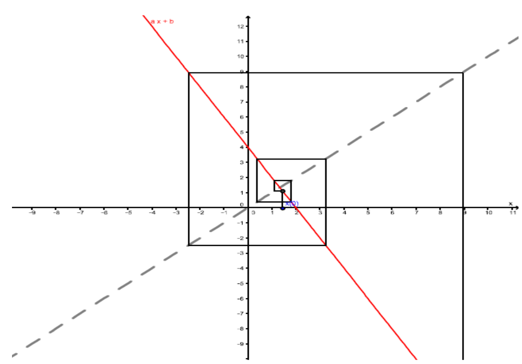

Figure 4. L' évolution des itérées de l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $a < -1.$

(3) Si $a = 1$ alors

$$x_k = a^k x_0 + kb = x_0 + kb$$

Si $b \neq 0$ alors $|x_k| \to \infty.$ Voir Fig. 5, sinon $x_k = x_0, \forall k.$

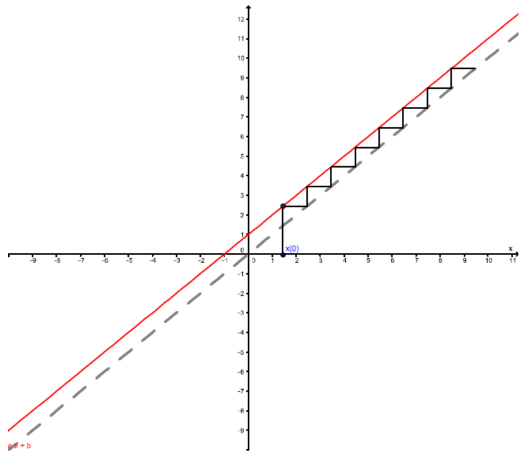

Figure 5. L' évolution des itérées de l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $a = 1$

(4) Si $a = -1$ alors

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 + b \\ x_2 &= x_0 + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = x_0 \\ x_3 &= -x_0 + b \\ x_4 &= x_0 \end{aligned}$$

Donc x_k oscille entre x_0 et $-x_0 + b$. Il y a un cas particulière qui implique que

$$x_0 = \frac{b}{2} = \frac{b}{1-(-1)} = \frac{b}{1-a} = x^*$$

C'est le même point fixe qu'on avait déjà vu, voir Fig. 6.

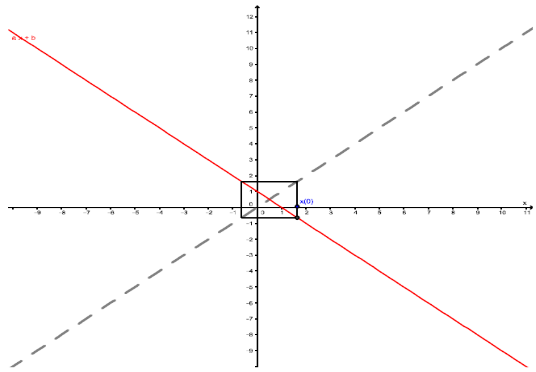

Figure 6. L' évolution des itérées de
l'application $x_{k+1} = ax_k + b$ pour $a = -1$

Chapitre 2

Chaos topologique

2.1 Définitions existantes du chaos et d'autres propriétés

On appelle définition du chaos une définition qui a été explicitement ou implicitement inventé comme tel par quelqu'un. Cela ne signifie pas qu'il faut automatiquement accepte-le. Le choix des autres propriétés définies dans cette section est plus arbitraire, mais certaines explications sont donnés en temps voulu, il peut s'agir de propriétés dites chaotiques, ou de propriétés déterministes, ou de propriétés dont le caractère doit être examiné. Ici, quelques-uns sont présentés et discutés. Pour qu'ils soient valables techniquement, il suffit de considérons un système dynamique topologique (X, f) et supposons que X est un espace métrisable muni de la métrique d, et que f est une auto-application continue de X, aucune hypothèse de compacité ou de surjectivité n'est strictement nécessaire. Néanmoins, quand on veut explorer les liens entre les diverses propriétés, il est utile supposer que X est compact. C'est ce que nous ferons pratiquement tout le temps. Dans toutes les classes particulières des systèmes dynamiques que nous considérons, l'espace est compact.

Soit donc (X, f) un système dynamique (pour lequel X est simplement un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ est continu). Par une application factorielle de (X, f) à (Y, g), on entend une application continue $\phi : X \longrightarrow Y$ telle que $\phi \circ f = g \circ \phi$, comme habituel dans la théorie, dans cette situation (X, f) est appelée une **extension** de (Y, g).

2.1.1 Définitions du chaos

Examinons d'abord les cinq définitions du chaos ci-dessus :

Chaos aux sens de Li-Yorke *:* La première définition topologique du chaos était celle de Li et Yorke. Un sous-ensemble S de X contenant au moins deux points est appelé un **ensemble**

brouillé si pour tout $x, y \in S$ avec $x \neq y$, on a :

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \tag{1}$$

et

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0, \tag{2}$$

L' origine de la définition est dans l'article [1] de Li et York. Le premier argument proviennent de la théorie de la transformation d'intervalle, à la lumière de laquelle elle a probablement été introduite. Pour de telles application, l'existence d'une paire brouillée implique l'existence d'un ensemble incompréhensible [2] et il est pas trés loin d'impliquer toutes les autres propriétés que ont été qualifiés chaotiques dans ce contexte. Pour un aperçu des résultats connus, voir [3]. Comme nous le verrons dans la section suivante, en général, la propriété de Li-York passe plusieurs tests théoriques en tant qu'exigence élémentaire du chaos : Le chaos de Li-York a été adopté et être une condition nécessaire à de nombreuse autres propriétés chaotiques.

Sensibilité : La dépendance sensible aux conditions initiales est plutôt intuitivement une propriété chaotique. De nos jours, il est généralement défini comme suit : (X, f) est dit sensible s'il existe une constante de sensibilité $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, et tout $\epsilon > 0$, on puisse trouver y avec $d(x, y) < \epsilon$ et n tel que $(d(f^n(x), f^n(y)) \geq \eta)$. L' idée initiale est due à Lorenz. A l'origine dans [4], Guckenheimer à introduit cette définition pour les applications d'intervalle, avec une exigence supplémentaire que la propriété conserve un ensemble avec une mesure positive de Lebesgue. Plus tard, les auteurs ont préféré la définition plus forte ci-dessus, qui s'étend à tous les espaces métriques et ne contient aucune hypothèse probabiliste. Comme le chaos de Li-Yorke, la sensibilité est une conséquence de plusieurs autres propriétés chaotiques, mais ce n'est pas équivalent de loin.

Heuristiquement, l'idée est très intéressante. Voici une relation élémentaire entre métrique et prévisibilité. Dans un système sensible avec une sensibilité constante η, aussi proche qu'un point x se trouve à un point y, même si on peut calculer l'orbite de y précisément, il est impossible de prédire avec une précision meilleure que η comment **l'orbite** de x se comporte à long terme sous les itérations de l'application. Même parmi les non-scientifiques, cette propriété est largement connu sous le nom **effet papillon**, certainement en partie à cause de la saveur poétique de la phrase.

Chaos aux sens d'Auslander-Yorke : Plus tard, Auslander et Yorke [5] ont emprunté la version forte, purement topologique, de la sensibilité et de déduit leur définition du chaos en l'associant à la transitivité. C'est ce qu'on appelle le chaos de Auslander-Yorke. Par transitivité de (X, f), on entend que pour deux sous-ensembles ouverts non vides U et V de X, on peut trouver un

entier $n > 0$ tel que $U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing$. La transitivité est équivalente à l'existence d'une orbite dense, c'est-à-dire celle d'un point $x \in X$ tel que $\{x, f(x), ..., f^n(x), ...\}$ est dense en X.
La définition d'Auslander et York associe une propriété, la sensibilité qui évoque fortement l'indétermination ou le désordre, est une autre transitivité qui ne l'est pas.

Chaos aux sens de Devaney : Encore plus tard, Devaney introduisit sa propre définition du chaos [6], dans la suite, il s'appelle Devaney Chaos. Il repose sur trois hypothèses. Une application est dite chaotique dans son sens si elle est sensible, transitive et si X contient un ensemble dense de points f-périodiques : autrement dit, s'il est chaotique aux sens d'Auslander-Yorke avec des orbites périodiques denses. Pas beaucoup plus tard Banks [7] ont remarqué que la transitivité et les orbites périodiques denses impliquent la sensibilité. Le même à été prouvé à nouveau, en supposant la compacité, par Glasner et Weiss [8].

Entropie positive : Dans [9], sans utiliser le mot chaos, Furstenberg à choisi d'appeler **déterministe** tous système dynamique compact à une entropie topologique 0. Ultérieurement, Glasner et Weiss [8], l'entropie positive est proposée comme un critère essentiel du chaos.

L' entropie topologique positive est une propriété forte. Considérons un système dynamique topologique (X, f) avec X compact. Pour toute couverture finie $\mathcal{C}$ de X, prenons $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ la cardinalité minimale d'une sous-couverture de $\mathcal{C}$. Soit

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \mathcal{C} \vee f^{-1}\mathcal{C} \vee ... \vee f^{-(n-1)}\mathcal{C} \\ \\ c_f(\mathcal{C}, n) = \mathcal{N}(\mathcal{C}^n) \end{cases}$$

Le taux de croissance exponentiel de la fonction $c_f(\mathcal{C}, n)$ est l'entropie topologique de $\mathcal{C}$, et l'entropie topologique $h(X, f)$ de (X, f) est le supremum de l'entropies topologiques de couvertures ouvertes finies. Bowen à introduit d'autres définitions dans le cadre non compact [10], ils sont équivalents à celui ci-dessus dans le cas compact.

2.1.2 Autres propriétés et une première discussion

Une théorie très convaincante de la dynamique topologique existe seulement en partant du principe que l'espace X, en plus d'être métrique, est également compact. Les résultats concernant les propriétés chaotiques, mais pas tous, sont obtenus dans cette hypothèse. La surjectivité intuitive évoque la notion physique d'équilibre. La surjectivité ne semble pas être une hypothèse essentielle s'agissant du chaos. Gardez à l'esprit le fait que la transitivité implique surjectivité. Au contraire, le chaos, la sensibilité, l'entropie de Li-Yorke ont un sens même lorsque la transformation n'est pas continue. Dans les dynamiques topologiques, il est nécessaire de supposer que l'action est surjective, mais il faut toujours la possibilité de restreindre l'action de f à l'ensemble $\underline{\omega}$-limite de (X, f), ce qui entraîne la perte de certaines informations sur le comportement général de la transformation.

Cependant, quand f n'est pas continue on doit s'assurer que le chaos ou la sensibilité de Li-Yorke se produit également dans l'ensemble de ω-limite, ce qui n'est pas toujours le cas. Il serait non possible d'appeler la transitivité une propriété chaotique. Ceci est mieux illustré par les rotations irrationnelles du cercle : Ce sont des applications transitives, tout en étant des isométries, ce qui les empêche de satisfaire les critères populaires de la chaoticité. De plus, ils sont des modèles adéquats pour le mouvement d'une roue de bicyclette autour de son centre, qui est l'un des phénomènes les plus ordonnés que l'on puisse observer. Quoi qu'il en soit, transitivité ainsi que des orbites périodiques denses impliquent une sensibilité, ce qui est une propriété chaotique, même si elle est très faible. Notez que si la transitivité est à peine liée au chaos, la non-transitivité implique intuitivement un certain degré d'ordre [11].

La minimalité : Est une propriété plus forte. Un système dynamique (X, f) est appelé minimal s'il n'existe pas de sous-ensemble fermé et f-invariant $S \subset X$ sauf X et l'ensemble vide. Cette propriété a un sens surtout dans le cas compact : N'importe quel point d'un système compact minimal à une orbite dense. La minimalité semble être transversale au chaos. Son principal intérêt pour nous est qu'il interdit l'existence de toute orbite périodique lorsque X n'a pas de points isolés, il joue également un rôle essentiel dans la disjonction de deux systèmes.

En résumé, avoir des orbites périodiques denses n'est pas beaucoup plus chaotique que la transitivité, ce est illustré dans la dynamique symbolique dans [12] et [13].

Ici, nous devons examiner une propriété classique qui n'a jamais été choisie comme définition du chaos : **Mélange faible**, elle implique à la fois le chaos de Li-Yorke [14] et, trivialement, la sensibilité, c'est beaucoup plus forte que la transitivité et plus faible que l'entropie positive. Enfin, il joue un rôle dans certains théorèmes de disjonction impliquant également des propriétés déterministes. Il est défini en tant que transitivité du système de produit cartésien $(X \times X, f \times f)$.

Il y a longtemps, Furstenberg à découvert que cette propriété est équivalente à la transitivité de toutes les puissances cartésiennes finies $(X \times X \times ... \times X, f \times f \times ... \times f)$ [9] : Ce n'est pas simplement une propriété de paires d'applications, mais concerne conjointement un certain nombre de fonctions. Cela illustre le fait que le mélange faible est vraiment beaucoup plus fort que la transitivité. La plupart de ses signification et conséquences disparaissent quand on supprime l'hypothèse de compacité sur X. Ensuite, cela implique toujours la sensibilité.

Définissons enfin deux propriétés déterministes fortes : Le premier est l'**équicontinuité**, contredit la sensibilité et le chaos de Li-Yorke, l'autre, est la **distalité**, ne contredit que le chaos de Li-Yorke et les deux jouent un rôle important dans la dynamique topologique générale.

Définition 2.1 *Un point d'équicontinuité x de (X,f) est tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $y \in X$ avec $d(x,y) \leq \eta$ puis $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$ pour toute puissance $n \geq 0$. Le système (X,f) est appelé équicontinu si, pour tout $x \in X$, tout $\varepsilon > 0$ il y a $\eta > 0$ tel que $d(x,y) < \eta$ implique que $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ pour tout entier n. Sur un espace compact, un système est équicontinu si et seulement si tous ses points sont des points d'équicontinuité.*

Il y a des systèmes à points d'équicontinuité, même transitifs, qui ne sont pas équicontinus $[8, 15, 16]$.

Définition 2.2 *(X,T) est appelé distal si, chaque fois que $x \neq y$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ pour tout n.*

Équicontinuité implique la distalité, ce n'est pas complètement évident. Les deux propriétés ont été étudiées de manière approfondie. Leur importance dans la théorie est développée dans $[17, 18]$. L'equicontinuité interdit toute sorte de sensibilité. Plus précisément, dans un système équicontinu, il n'existe aucun points de sensibilité, c'est-à-dire aucun point x tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\eta > 0$ on puisse trouver $y \in X$ et n avec $d(x,y) < \eta$ et $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$. Intuitivement, équicontinuité est déterministe ainsi que sa version la plus faible, ayant des points d'équicontinuité.

Un autre problème est celui des attracteurs et des ensembles ω-limites. Lorsque X est compact, l'ensemble ω-limite de (X,f) est juste l'intersection $\cap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, c'est-à-dire **l'attracteur maximal**. Un petit ensemble de limite, ou l'existence d'un ou plusieurs petits attracteurs à l'intérieur de X, peuvent être considérés comme des caractéristiques d'ordre. Les propriétés topologiques des ensembles de limites sont importants dans certains contextes particuliers, par exemple dans les dynamiques à une dimension où le système soit attiré par un ensemble de Cantor est corrélé à des propriétés chaotiques.

2.2 Résultats généraux

Tous les résultats indiqués dans cette section ne sont valables que lorsque X est compact. Alors prenons la compacité comme hypothèse permanente.

2.2.1 Chaos au sens de Li-Yorke

Comparaison de définition de Yorke avec d'autres définitions existant sur le terrain, la renforçant et l'affaiblissant, trouvant le contraire propriétés, et refaire la même chose avec les propriétés nouvellement introduites, mais pas trop systématiquement.

La condition de Li-Yorke est évidemment faible. On ne peut pas s'attendre à ce que des ensembles brouillés en disent long sur la dynamique de transformation : leur définition repose sur le brouillage ou non de couples, c'est-à-dire sur le comportement des orbites, indépendamment de ce qui se passe dans l'application. Des propriétés plus fortes comme un mélange faible ou entropie positif peut être exprimée en termes de comportement des voisinages de paires, et certainement des propriétés des orbites articulaires ne peuvent pas suffire à les caractériser.
Le chaos de Li-Yorke est une propriété partielle. Selon la liste des exigences de la section précédente, il serait utile être mieux si une extension d'un système chaotique aus sens de Li-Yorke était également chaotique, en fait c'est faux :

Exemple 2.1 *1 (Blanchard et Huang) : L' article* [19] *décrit un système symbolique minimal* (Z, σ) *qui est borné et il ne contient que des ensembles brouillés liés, et en particulier une paire brouillée récurrente* (z, z') *. Soit* $(Y, \sigma \times \sigma) \subset (Z \times Z, \sigma \times \sigma)$ *la fermeture de l'orbite de* (z, z') *sous* $\sigma \times \sigma$ *: On voit facilement qu'il s'agit d'un système transitif n'ayant que des ensembles brouillés, et il n'est pas minimal car il contient la diagonale* $\triangle_z$*. Définir une application de facteurs* $\pi : (Y, \sigma \times \sigma) \longrightarrow (X, f)$ *en réduisant tous les points de* $\triangle_z$ *en un point fixe.* (X, f) *est transitive en tant que facteur de* $(Y, \sigma \times \sigma)$*, et contient un point périodique : Cela implique un chaos de Li-Yorke* [20]*. Ainsi* $(Y, \sigma \times \sigma)$ *est une extension chaotique et non-Li-Yorke du système chaotique* (X, f)*.*

Comparons le chaos de Li-Yorke avec d'autres définitions. Il est prouvé dans [20] que le chaos de Devaney implique Li-Yorke chaos. En fait, le chaos de Li-Yorke résulte de la transitivité et de l'existence d'un seul orbite périodique. Le chaos d'Auslander-Yorke ne implique le chaos Li-Yorke. Dans l'autre sens, le chaos de Li-Yorke, qui n'est pas une définition globale, ne peut impliquer la propriété globale de la sensibilité : L' union d'un système chaotique de Li-Yorke et d'un système équicontinu en dimension un. Un contre-exemple est donne dans [15] :

Exemple 2.2 *Le théorème 4.2 de* [15] *énonce l'existence d'un système transitif* (X, f) *équicontinuité, selon le théorème 4.1 du même article, contiennent un point fixe, l'existence de l'équicontinuité des points dans* (X, f) *empêchent la sensibilité, alors par* [20] *la transitivité est un point fixe impliquent un chaos de Li-Yorke.*

Un autre test de la valeur de l'hypothèse de Li-Yorke est que tous les systèmes pour lesquels il est connu de ne pas détenir ont de fortes caractéristiques déterministes : Pour ne citer que les plus remarquables, leur entropie est 0 et ils ne peuvent pas mélanger faiblement. Lorsqu'il n'y a pas de jeu brouillé indénombrable, quelques autres propriétés chaotiques peuvent être conservées.
Le **chaos distributionnel** a été introduit dans [21] comme un autre moyen de renforcer le chaos de Li-Yorke en une propriété importante. D'autres versions non équivalentes ont été proposées

ultérieurement. La conclusion est que le chaos de Li-Yorke empêche un système d'être essentiellement ordonné, mais ne garantir qu'il est plus que superficiellement chaotique.

2.2.2 Sensibilité

La sensibilité est l'une des hypothèses d'Auslander-Yorke et Devaney chaos, et nous savons déjà que cela ne peut pas être comparé au chaos de Li-Yorke. C'est une propriété globale, et il n'est pas difficile de formuler des propriétés partielles correspondantes significatives. L' équicontinuité est un évident contraire de la sensibilité, comme nous l'avons vu plus haut. En outre un système transitive qui n'est pas sensible à des points d'équicontinuité [8]. La distalité n'est pas une hypothèse contraire, puisque tout système distal minimal qui n'est pas équicontinu est sensible [15]. Mélange faible implique la sensibilité : Une conséquence immédiate de la densité de paires brouillées dans l'application cartésien.

2.2.3 Mélange faible

Un mélange faible est une propriété globale. Cela implique le chaos de Li-Yorke et plus encore un système de mélange faible contient toujours un ensemble brouillé dense et incalculable [14] : Ce résultat est le premier qui a été prouvé sur le chaos de Li-Yorke dans le cadre général. Un mélange faible contredit fortement la distalité, puisqu'un système distal n'a pas de paires brouillées.
Il serait utile d'afficher une propriété chaotique partielle correspondante à un mélange faible. Dans [13] , la notion d'ensemble faiblement mélangé, dérivée d'un résultat dans [22], est introduite :

Définition 2.3 *A est un sous-ensemble faiblement mélangé de X si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout choix de sous-ensembles ouverts non vides $V_1, \cdots, V_k$ de A et $U_1, \cdots, U_k$ de X avec $A \cap U_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \cdots, k,$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $T^m(V_i) \cap U_i \neq \varnothing$ pour chaque $1 \leq i \leq k.$*

Ce définition est assez compliquée. Des versions plus simples peuvent être trouvées un jour. Un système (X, f) est appelé **partiellement mélange faible** si X contient un sous-ensemble de mélange faible. Un mélange faible est équivaut au fait que l'ensemble X est un ensemble faiblement mélangé. Il est également prouvé que l'entropie positive implique un mélange faible partiel, ce qui implique à son tour le chaos de Li-Yorke. Le mélange faible partiel est un bon candidat pour être la notion partielle correspondante au mélange faible. Il est encore inconnu si elle est conservée sous les extensions. Mais la notion d'ensembles sensibles définie dans [31] est un autre candidat. Les deux notions ont été introduites assez récemment et leurs relations ne sont pas encore connues.

2.2.4 Entropie positive

Un système à entropie positive est généralement considéré comme chaotique par les mathématiciens. Les systèmes dynamiques topologiques à entropie 0 ont été appelés déterministes dans [9].

2.2.5 Degrés de chaos

Il y a tellement de relations entre les propriétés chaotiques énumérées ci-dessus (peut-être mettant de côté le chaos d'Auslander-Yorke) et leurs contraires qui fondent une théorie abstraite du chaos semble raisonnable :

– **Entropie positive** $\Longrightarrow$ **Mélange faible partiel** $\Longrightarrow$ **Chaos de Li-Yorke**,

et l'autre ne contenant que des notions générales, chacune impliquant la notion correspondante dans la première échelle :

– **Entropie positive uniforme** $\Longrightarrow$ **Mélange faible** $\Longrightarrow$ **Ensemble dense et brouillé**.

L' existence d'un ensemble dense et embrouillé est une propriété globale très faible, mais on ne peut pas la remplacer par l'existence d'un ensemble résiduel brouillé, qui n'est pas impliqué par un mélange faible et peut ne pas être vraiment une propriété chaotique. Une tentative d'échelle inverse du déterminisme serait

– **Equicontinuité** $\Longrightarrow$ **Distalité** $\Longrightarrow$ **Entropie** 0.

Comme la distalité, ainsi que l'équicontinuité, exclut le chaos de Li-Yorke, cette échelle inverse ne suit pas celle des propriétés partielles de manière symétrique. En ce qui concerne l'incohérence. Avec la sensibilité comme hypothèse la plus faible, on peut tracer une échelle globale de chaos :

– **Entropie positive uniforme** $\Longrightarrow$ **Mélange faible** $\Longrightarrow$ **Sensibilité**,

puis une hypothétique d'échelle partielle du chaos :

– **Entropie positive** $\Longrightarrow$ **Mélange faible partiel** $\Longrightarrow$ **Sensibilité partielle**,

où la seconde implication est facilement vérifiée à condition de choisir une définition suffisamment faible de sensibilité, et enfin

– **Equicontinuité** $\Longrightarrow$ **Distalité** $\Longrightarrow$ **Entropie** 0

2.3 Applications d'intervalle en dimensions 1 et 2

Il est frappant de voir comment le chaos peut revêtir différentes caractéristiques lorsque l'on se limite à certaines classes de systèmes dynamiques. L' existence d'un ensemble dense de points périodiques est implicitement ou explicitement considéré comme une propriété chaotique dans de nombreux articles. Comme expliqué ci-dessus, cela ne peut pas être considéré comme vrai en théorie.

C'est dans le domaine des applications d'intervalle que la transition au chaos à été observé pour la première fois dans des familles à un paramètre de transformations unimodales $f(x) = ax(1-x)$. Comme le paramètre a augmente, il à apparaît des points avec période 2, puis 4, et ainsi de suite jusqu'à ce que soudainement à une valeur ou le système à une infinité des points périodiques et devient chaotique aux sens de Li-Yorke. Juste après cette valeur la transformation devient sensible avec une entropie positive et un certain degré de transitivité. Le comportement des transformations unimodales sont extrêmement utiles pour comprendre l'apparition soudaine d'un désordre dans les systèmes. Néanmoins, en termes abstraits, la conception selon laquelle toutes les caractéristiques du chaos apparaissent simultanément certains seuils sont trompeurs. En considérant tout le domaine de la dynamique topologique, on a le sentiment qu'il existe des moyens de progresser moins brutalement dans les échelles de la chaoticité.

Dans la classe relativement large des applications d'intervalles, la dynamique varie dans des limites étroites et diverses situations chaotiques. Les propriétés topologiques sont fortement corrélées. Ils ont fait l'objet d'enquêtes approfondies depuis les années soixante, comme on peut le voir dans [23], et les relations fortes existants entre les propriétés chaotiques sont passées en revue dans [3] en raison de la littérature existante, et comme les propriétés des applications d'intervalles sont assez largement connues.

Dans de nombreux exemples d'attracteurs étranges, chaotiques et non chaotiques, l'espace sous-jacent a la dimension 2, applications triangulaires du carré, c'est-à-dire : des applications continues de la forme $F(x,y) = (f(x), g(x,y)), x, y \in [0,1]$, ont été utilisés pour obtenir des exemples avec diverses propriétés. Souvent, le but est de montrer que les propriétés qui ne se produisent jamais simultanément parmi les applications d'intervalle peuvent le faire dans la dimension 2.

Chapitre 3

Chaos dans les applications des produits

Dans ce chapitre, nous discutons les conditions sur les applications se répercutent sur leurs produits. Nous donnons d'abord un contre exemple montrant que le produit de deux applications chaotique (au sens de Devaney) ne doit pas nécessairement être chaotique. Nous remarquons ensuite que si deux applications (ou même l'une d'entre elles) présentent une dépendance sensible aux conditions initiales, leur produit en fait de même propriété. Si deux applications possèdent des points périodiques denses, leur produit le fait également. De l'autre côté, le produit de deux applications topologiquement transitives ne doit pas nécessairement être topologiquement transitif. Nous donnons alors des conditions suffisantes dans lesquelles le produit de deux applications chaotiques est chaotique au sens de Devaney [24].

Soit X et Y deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ deux applications que nous supposons non pas continues en général, mais chaotiques au sens de Devaney. Il est naturel de demander si leur produit $f \times g$ est également chaotique (dans le même sens), nous montrons par un contre exemple que la réponse est négative. Nous discutons ensuite le transfert des sous-conditions du chaos et enfin donnons quelques conditioins simples et suffisantes rendant le produit chaotique. Ces conditions sont remplies pour de nombreuses applications chaotiques connues.

Rappelons maintenant les conditions du chaos pour une application pas nécessairement continue $f : X \longrightarrow X,$ X étant un espace métrique avec distance d. Le système dynamique discret (X, f) et l'application f sont utilisés comme synonymes dans cet mémoire, de sorte que des expressions telles que "l'application f est chaotique" ou "le système dynamique discret (X, f) présentent le chaos" sont utilisés dans le même sens.

Définition 3.1 *(Dependance sensible aux conditions initiales) : Une application $f : X \longrightarrow X$ (pas nécessairement continue) est applée sensiblement dépendre aux conditions initiales s'il existe $\varepsilon > 0$ telle* *que, pour toute* $x \in X$, *et pour toute voisinage* U *de* x, *il existe* $x' \in U$ *et un entier* $n > 0$ *tel que* $d\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) > \varepsilon$.

Définition 3.2 *(Transitivité topologique) : Une application* $f : X \longrightarrow X$ *(pas nécessairement continue) est applée topologiquement transitive si pour toute paire de sous- ensemble ouverts non vides* U *et* V *de* X, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $f^{\,n}(U) \cap V \neq \varnothing$.

Définition 3.3 *(Chaos au sens Devaney* [24]*) : Une application* $f : X \longrightarrow X$ *(pas nécessairement continue) est applée chaotique si elle est sensiblement dépendre aux conditions initiales, elle est topologiquement transitive et, en outre ses points périodiques sont denses dans* X, *i.e., chaque sous-ensemble ouvert non vide contient un point périodique.*

Remarque 3.1 *Pour un espace métrique* X *non fini (c'est à dire,* $card(X) = \infty$ *) et une application* $f : X \longrightarrow X$, *la transitivité topologique et la densité des points périodiques impliquent la dépendance sensible aux conditions initiales (voir* [25], [26]*).*

Remarque 3.2 *La condition "transitivité topologique" est parfois remplacée par ou utilisée faussement comme synonyme de la condition "existence d'une orbite dense". Elles ne sont jamais équivalentes pour des espaces métriques séparables complets sans points isolés. Pour une discussion à ce sujet voir* [27]. *Il existe une vaste littérature sur la transitivité et environ une douzaines de notions connexes, dont nous n'utiliserons que quelques-unes dans la suite.*

Maintenant, étant donné deux applications $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ sur les espaces métriques $X,\ Y$ avec les métriques d_1 et d_2 respictivement, consédirons leur produit :

$$f \times g \quad : \quad X \times Y \rightarrow X \times Y$$

$$(f \times g)(x, y) \quad = \quad (f(x), g(y))$$

avec la métrique de produit sur $X \times Y$, i.e.,

$$d\left((x, y), (x', y')\right) = d_1(x, x') + d_2(y, y'))$$

L' exemple suivant montre que le produit de deux applications chaotiques ne doit pas nécessairement être chaotique.

Exemple 3.1 *Soit* $f : [0,2] \longrightarrow [0,2]$ *avec*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \\ -2x+3, \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \\ -x+2, \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Alors l'application f *est chaotique mais* $f \times f : [0,2] \times [0,2] \longrightarrow [0,2] \times [0,2]$ *est non chaotique.*

Preuve. Sur la Figure 7, les graphes de f et $f^{\,2} = f \circ f$ sont montrés.

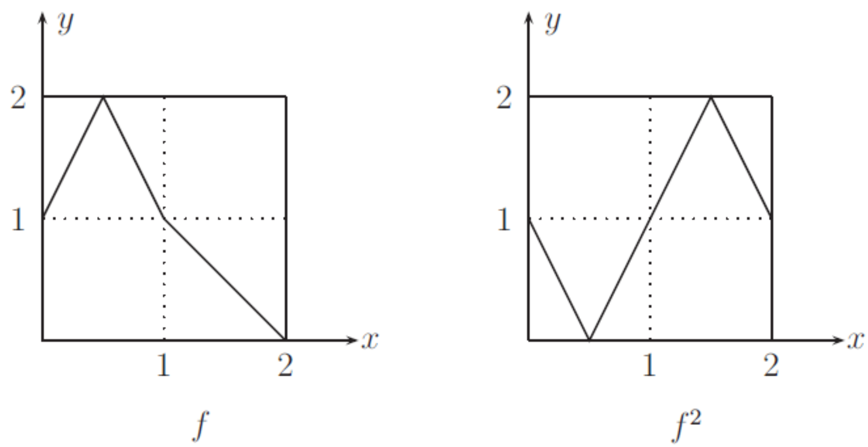

Figure 7. Le graphe de f et $f \times f$ respictivement.

Premièrement, montrons que l'application f est chaotique. Comme $(card\,[0,2] = \infty)$ et l'application f est continue donc d'aprés $[25]$ il suffit de montrer qu'elle est topologiquement transitive et admet des points périodiques denses. Posons

$$\begin{cases} g_1 = f^2\big|_{[0,1]} = \begin{cases} 4x+3, \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \\ 4x-3, \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \\ \\ g_2 = f^2\big|_{[1,2]} = x \end{cases}$$

Utilisons le fait que g_1, g_2 sont des applications chaotiques (ce sont des applications de tente).
Transitivité topologique : On a $f(U) \subset [0,2]$, $f^2(U) \subset [0,2]$..., $f^k(U) \subset [0,2]$, alors $f^{\,k}(U) \cap V \neq \varnothing$ pour toute paire d'ensemble ouvert non vide $U, V \subset [0,2]$ et pour toute entier $K > 0$.

Densité des points périodiques : Soit (a,b) un intervale quelconque tel que $(a,b) \subset [0,2]$, 1 est un point périodique dans (a,b) si $1 \in (a,b)$, sinon $(a,b) \subset (0,1)$ ou $(1,2)$. Dans le premier cas il y a un point périodique de g_1 dans (a,b) qui est aussi un point périodique de f dans l'autre cas utilisez g_2. Donc l'application est montrée comme chaotique, mais $f \times f$ non chaotique car elle n'est pas topologiquement transitive. Si on prends $U = (0,1) \times (0,1)$ et $V = (0,1) \times (1,2)$, il n'existe aucune entier $k > 0$ tel que $f^{\,k}(U) \cap V \neq \varnothing$, car $f\ (U) \subset (1,2) \times (1,2)$,

$$f^{\,2}(U) \subset (0,1) \times (0,1),$$

$f^{\,3}(U) \subset (1,2) \times (1,2)$, $f^{\,4}(U) \subset (0,1) \times (0,1)$..... , nous concluons que :

$$\begin{cases} f^{\,k}(U) \subset (0,1) \times (0,1) \text{ si } k \text{ paire} \\ \\ f^{\,k}(U) \subset (1,2) \times (1,2) \text{ si } k \text{ impaire} \end{cases}$$

donc $(f \times f)^k(U)$ ne croise jamais avec $V = (0,1) \times (1,2)$ $, \forall k > 0.$ ■

Dans la section suivante, nous discuterons des sous-conditions du chaos et dans la dernière section, nous donnerons quelques conditions suffisantes pour qu'une application de produit soit chaotique :

3.1 Sous-conditions de chaos

Dans cette section, nous discutons de la manière dont les sous-conditions du chaos se préserve sur les produits et inversement.

Lemme 3.1 *Soit X et Y deux espaces métriques avec les métriques d_1 et d_2 respictivement, $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ être pas nécessairement des applications continues.*
i) Si f ou g est sensiblement dépendre aux conditions initiales alors $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est sensiblement dépendre aux conditions initiales.
ii) Si $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est sensiblement dépendre aux conditions initiales alors au moins l'un des facteurs f ou g est sensiblement dépendre aux conditions initiales.

Preuve. *i)* Supposons que f est sensiblement dépendre aux conditions initiales alors nous allons montrer que même est vrai pour $f \times g$. Soit $p = (x,y) \in X \times Y$ un point quelconque et W n'importe quel voisinage de p. Alors il existe un voisinage ouvert U de x dans X et V de y dans Y tel que $U \times V \subset W$. Comme f est sensiblement dépendre aux conditions initiales, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour un certain $x' \in U$ et un entier $n > 0$ l'inégalité $d_1\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) > \varepsilon$ est vrai. Pour toute $y' \in V$, $p' = (x', y')$ appartient à W et

$$\begin{aligned} d\left((f \times g)^n(p), (f \times g)^n(p')\right) &= d_1\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) + d_2\left(g^{\,n}(y), g^n(y')\right) \\ &\geq d_1\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) > \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela signifie que $f \times g$ est sensiblement dépendre aux conditions initiales.
ii) Supposons que f et g, toute les deux ne sont pas sensiblement dépendre aux conditions initiales, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que pour un certain ensemble ouvert $U \subset X$ contenant x l'inégalité

$$d_1\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

est vrai pour toute $x' \in U$ et toute entier positif n. De même, il existe $y \in Y$ tel que pour un certain ensemble ouvert $V \subset Y$ contenant y, l'inégalité

$$d_2\left(g^{\,n}(y), g^n(y')\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

est vrai pour toute $y' \in V$ et toute entier positif n. Alors nous obtenons

$$d\left((f \times g)^n(p), (f \times g)^n(p')\right) = d_1\left(f^{\,n}(x), f^{\,n}(x')\right) + d_2\left(g^{\,n}(y), g^n(y')\right) < \varepsilon$$

pour $(x', y') \in U \times V$. Cela signifie que $f \times g$ n'est pas sensiblement dépendre aux conditions initiales, contredire l'hypothèse. ■
Maintenant, nous montrons que la densité des points périodiques se préserve sur les produits et inversement :

Lemme 3.2 *Soit X et Y deux espaces métriques avec les métriques d_1 et d_2 respictivement, $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ des applications (pas nécessairement continue). L' ensemble des points périodiques de $f \times g$ est dense dans $X \times Y$ si seulement si pour f et g toute les deux, les ensembles des points périodiques dans X et Y sont denses (dans X, resp. Y).*

Preuve. Supposons que l'ensemble des points périodiques de f est dense dans X et l'ensemble des points périodiques de g est dense dans Y. Nous allons voir que l'ensemble des points périodiques de $f \times g$ est dense dans $X \times Y$. Soit $W \subset X \times Y$ un ouvert non vide quelconque. Alors il existe des ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$ avec $U \times V \subset W$. Par supposition, il existe un point $x \in U$ tel que $f^{\,n}(x) = x$ avec $n > 0$. De même, il existe $y \in V$ tel que $g^m(y) = y$

avec $m > 0$. Pour $p = (x, y) \in W$ et $k = mn$ nous obtenons :

$$(f \times g)^k (p) = (f \times g)^k (x, y) = (f^k(x), g^k(y)) = (x, y).$$

cela signifie que W contient un point périodique et l'ensemble des points périodiques de $f \times g$ est dense dans $X \times Y$. Réciproquement, soit $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux ouverts non vides alors $U \times V$. est un sous-ensemble ouvert non vide de $X \times Y$. Comme l'ensemble des points périodiques de $f \times g$ est dense dans $X \times Y$, il existe un point $p = (x, y) \in U \times V$ tel que $(f \times g)^n (x, y) = (f^n (x), g^n (y)) = (x, y)$ pour un certain n. De cette dernière inégalité nous obtennons : $f^n (x) = x$ pour $x \in U$ et $g^n (y) = y$
pour $y \in Y$. ■

D'après les lemmes 3.1 et 3.2, dépendance sensible aux conditions initiales et densité des points périodiques reportent des facteurs aux produits. Cependant, la transitivité topologique ne peut pas être reportée sur les produits comme dans l'exemple 3.1. L'inverse de cette situation est cependant vrai :

Lemme 3.3 *Soient $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ des applications (pas nécessairement continues) et supposons que le produit $f \times g$ est topologiquement transitif sur $X \times Y$. Alors les applications f et g sont toutes les deux topologiquement transitives sur X et Y respectivement.*

Preuve. Nous montrons la transitivité de f, la transitivité de g peut être montrée de la même manière. Soit U_1, V_1 ensembles ouverts non vides dans X. Les ensembles $U = U_1 \times Y$ et $V = V_1 \times Y$ sont ouverts dans $X \times Y$. Comme $f \times g$ est transitif, il existe un entier positif k tel que $(f \times g)^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Les égalités

$$\begin{aligned}(f \times g)^k(U) \cap V &= \left[f^k(U_1) \times g^k(Y)\right] \cap [V_1 \times Y] \\ &= \left[f^k(U_1) \cap V_1\right] \times \left[g^k(Y) \cap Y\right]\end{aligned}$$

implique que $\left[f^k(U_1) \cap V_1\right] \times \left[g^k(Y) \cap Y\right] \neq \varnothing$, donc $\left[f^k(U_1) \cap V_1\right] \neq \varnothing$. Ainsi, f est topologiquement transitif. ■

D'après les lemmes 3.1 et 3.2, à partir de deux applications chaotiques f et g, leur produit $f \times g$ est sensible-dépendant dans les conditions initiales, il possède des points périodiques denses, mais on peut avoir des problèmes de transitivité topologique comme nous l'avons vu dans l'exemple 3.1. Nous donnons maintenant quelques conditions suffisantes pour la transitivité topologique du produit. Nous rappelons d'abord une définition :

Définition 3.4 *Soit $f : X \longrightarrow X$ une application (non nécessairement continue) sur l'espace métrique X. Si pour tout sous-ensembles ouverts non vides $U, V \subset X$, il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$, alors f est appelé mélange topologique.*

Il est clair que le mélange topologique implique la transitivité topologique. Il existe une notion encore plus forte qui implique le mélange topologique.

Définition 3.5 *Soit $f : X \longrightarrow X$ une application (pas nécessairement continue) sur l'espace métrique X. Si pour tout sous-ensemble ouvert non vide $U \subset X$, il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $f^n(U) = X$, alors f est appelé **localement éventuellement onto**.*

Remarque 3.3 *Les applications chaotiques les plus connues sont localement éventuellement onto et par conséquence topologiquement mélangées.Voici quelques exemples de telles applications :*
(1) l'application logistique : $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\,,\ f(x) = 4x(1-x)$.
(2) l'application du boulanger :

$$B : [0,1] \longrightarrow [0,1]\,,\ B(x) = \begin{cases} 2x, \ \textit{si} \ \ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ 2x-1, \ \textit{si} \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(3) l'application doublant de cercle :

$$D : S^1 \longrightarrow S^1,\ D(\theta) = 2\theta$$

(4) l'application de décalage :

$$S : \sum\nolimits_2 \longrightarrow \sum\nolimits_2,\ S(s_0 s_1 s_2 \ldots) = s_1 s_2 \ldots.$$

(5) Plus généralement, tout polynôme complexe sur son ensemble de Julia (voir [24] *à la page 288).*

Lemme 3.4 *Le produit de deux applications topologiquement mélangées est un mélange topologique.*

Preuve. Soit $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ deux mélanges topologiques des applications.
Soit $W_1, W_2 \subset X \times Y$, il existe des ensembles ouverts $U_1, U_2 \subset X$ et $V_1, V_2 \subset Y$, tels que $U_1 \times V_1 \subset W_1$ et $U_2 \times V_2 \subset W_2$. Par hypothèse, il existe n_1 et n_2 tels que $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$ pour $n \geq n_1$ et $g^n(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ pour $n \geq n_2$. Pour $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ on a :

$$\begin{aligned} & \left[(f \times g)^n (U_1 \times V_1)\right] \cap (U_2 \times V_2) \\ \\ = \ & \left[f^n (U_1) \times g^n (V_1)\right] \cap (U_2 \times V_2) \\ \\ = \ & \left[f^n (U_1) \cap U_2\right] \times \left[g^n (V_1) \cap V_2\right] \neq \varnothing. \end{aligned}$$

ce qui signifie que $f \times g$ se mélange topologiquement. ■

3.2 Chaos dans les produits

Dans cette section, nous donnons quelques conditions suffisantes pour qu'une application de produit soit chaotique.

Théorème 3.1 *Soit $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ deux mélanges pas nécessairement continus, chaotiques sur les espaces métriques X et Y. Alors $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est chaotique.*

Preuve. L'application $f \times g$ dépend avec sensibilité des conditions initiales par le lemme 3.1, elle à un point périodique dense par le lemme 3.2 et il se mélange topologiquement par le lemme 3.4 et donc topologiquement transitif. Ainsi, les trois conditions du chaos au sens de Devaney sont remplies. ■

Exemple 3.2 *Multipliez deux applications quelconques sous la remarque 3.1 (Elles sont localement éventuellement onto et par conséquent mélange topologique).*

Remarque 3.4 *L'application du produit $D \times D : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$, où $D : S^1 \longrightarrow S^1$ est l'application de doublage $D(\theta) = 2\theta$, est utilisé pour construire la* ***fonction Lattes-Betcher*** *sur la sphère de Riemann, dont l'ensemble de Julia est la sphère entière [28]. On définit $R : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ par $R = P \circ (D \times D) \circ P^{-1}$, où $P : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ est* ***la fonction elliptique de Weierstrass*** *par rapport au réseau entier. Il se trouve que R est la fonction rationnelle $R(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$.*

Nous pouvons exiger la propriété de mélange topologique pour une seule des fonctions, au prix d'exiger continuité pour l'autre :

Théorème 3.2 *Soit X un espace métrique $f : X \longrightarrow X$, une application continue et chaotique, $g : Y \longrightarrow Y$ une application pas-nécessairement chaotique et topologiquement mélangée sur l'espace métrique Y. Alors $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est chaotique.*

Preuve. Il suffit de montrer que $f \times g$ est topologiquement transitif. Il suffit évidemment de montrer cela pour ensembles ouverts de la forme $U \times V$. Alors, donnons deux ensembles $U_1 \times V_1$ et $U_2 \times V_2$ avec U_1, U_2 ouverts dans X et V_1, V_2 ouverts dans Y. Comme g se mélange topologiquement, il existe $n_0 > 0$ avec $g^n(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ pour tout $n \geq n_0$. Sur l'autre part, il existe un point périodique $x \in U_1$ dont l'orbite entre dans U_2 (voir par exemple [29]). Ainsi, si on dénote la période de x par p, il existe k avec $0 \leq k < p$ et $f^k(x) \in U_2$.
Cela implique que $f^{mp+k}(x) \in U_2$ pour tout positif entier m. Choisissez maintenant m tel que

$l = mp + k \geq n_0$. Alors nous avons $g^l(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ et il existe un point $y \in V_1$ avec $g^l(y) \in V_2$. Maintenant, pour le point $(x, y) \in U_1 \times V_1$, on obtient $(f \times g)^l(x, y) \in U_2 \times V_2$. Donc $f \times g$ est topologiquement transitif. ■

Nous pouvons donner encore une autre condition suffisante (pour que le produit soit chaotique) à l'aide de la propriété suivante (utilisé dans la preuve ci-dessus).

Définition 3.6 *Soit X un espace métrique et une application pas nécessairement continue $f : X \longrightarrow X$, on dit que f a* ***la propriété Touchey*** *sur X si on donne U et V, sous-ensembles ouverts non vides de X, il existe un point périodique $x \in U$ et un k non négatif tel que $f^k(x) \in V$, c'est-à-dire si chaque paire de sous-ensembles ouverts non vides de X partage une orbite périodique. (Si f est continu et X non fini, alors cette propriété implique un chaos au sens de Devaney [25]).*

Théorème 3.3 *Soit X un espace métrique et supposons que l'application (non nécessairement continue)*
$f : X \longrightarrow X$ à la propriété Touchey. Soit $g : Y \longrightarrow Y$ une application non nécessairement continue, chaotique et topologiquement mélangée sur l'espace métrique Y. Alors $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est chaotique.

Preuve. Comme g dépend avec sensibilité aux conditions initiales, il en va de même de $f \times g$. De l'autre côté, la propriété Touchey implique la densité des points périodiques de f, par conséquent, comme les points périodiques de g sont également denses, nous avons une densité des points périodiques de $f \times g$. La transitivité de $f \times g$ peut être vue comme dans la preuve précédente. ■

Remarque 3.5 *Nous notons que les applications de produits sont une source simple et utile pour des exemples et des contre-exemples dans le chaos. En fait, dans [30] le contre-exemple montrant cette densité de points périodiques et la dépendance sensible aux conditions initiales n'impliquent pas que la transitivité topologique soit définie dans la forme du produit. L'autre contre-exemple dans [30] qui montre que la transitivité topologique et la dépendance sensible aux conditions initiales n'impliquent pas une densité des points périodiques pourraient plus facilement et naturellement être construits de cette manière aussi : Soit $T_\lambda : S^1 \longrightarrow S^1, T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ mod 2π soit rotation irrationnelle du cercle et $D : S^1 \longrightarrow S^1$, $D(\theta) = 2\theta$ mod 2π, l'application doublant le cercle. Puis l'application du produit*

$$T_\lambda \times D : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$$

n'a pas de points périodiques, mais il est topologiquement transitif et dépend aux conditions initiales avec sensibilité.

Chapitre 4

Applications de mélange

Nous revenons à la discussion sur les applications topologiquement transitives. L' application de tente et l'application de doublage ont une forme forte de transitivité : $T^n(U)$ intersects V pas seulement pour certains valeurs de n mais pour tous n suffisamment grands $n \in \mathbb{N}$. Cette propriété porte un nom spécial.

Définition 4.1 *Un système dynamique $T : X \longrightarrow X$ est appelé **mélange** si pour toute paire U, V de sous-ensembles d'ouverts non vides de X, il existe un certain $N \geq 0$ tel que*

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing \text{ pour toute } n \geq N.$$

Exemple 4.1 *Comme indiqué ci-dessus, l'application de tente et l'application de doublage se mélangent. Un exemple de système topologiquement transitif qui ne mélange pas sera donné dans l'exemple 4.2.*

Comme dans le cas de la transitivité topologique, on obtient :

Proposition 4.1 *La propriété de mélange est préservée sous la quasiconjugaison.*

Les applications de mélange ont une propriété de parmanence remarquable. Pour décrire cela, nous devons définir des produits des applications. Soient $S : X \longrightarrow X$ et $T : Y \longrightarrow Y$ des systèmes dynamiques, le produit certesien $X \times Y$ est muni de la topologie de produit qui est induite par la métrique

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

où d_X et d_Y désignant les métriques en X et Y respictivement. Une base pour la topologie est formée par les produits $U \times V$ de sous-ensembles ouverts non vides $U \subset X$ and $V \subset Y$.

Définition 4.2 *Soient $S : X \longrightarrow X$ et $T : Y \longrightarrow Y$ des systèmes dynamiques. Alors l'application $S \times T$ est définie par :*

$$S \times T \ : X \times Y \ \longrightarrow X \times Y, \ (S \times T)(x, y) = (Sx, Ty)$$

et $S \times T$ est clairement continue, et pour les itérées nous avons que :

$$(S \times T)^n = S^n \times T^n$$

Le produit de plus de deux espaces où applications sont définis de manière similaire.

Proposition 4.2 *Soitent $S : X \longrightarrow X$ et $T : Y \longrightarrow Y$ des systèmes dynamiques. Alors nous avons ce qui suit :*
$i)$_Si $S \times T$ à une orbite dense alors S et T aussi ;
$ii)$_Si $S \times T$ est topologiquement transitif alors S et T aussi ;
$iii)$ Si $S \times T$ est chaotique alors S et T aussi ;
$iv)$ Si S et T sont topologiquement transitifs et qu'aumoins l'un d'entre eux se mélange alors $S \times T$ est topologiquement transitif ;
$v)$ $S \times T$ se mélange si et seulement si S et T sont tous les deux mélange.

Preuve. Evidemment, S et T sont quasiconjugués à $S \times T$ selon les applications $(x, y) \rightarrow x$ et $(x, y) \rightarrow y$ respictivement. Ainsi les résultats de conservation obtenus jusqu'ici impliquent (i), (ii) et (iii). Les affirmations (iv) et (v) découlent directement de l'identité :

$$(S \times T)^n (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (S^n (U_1) \cap V_1) \times (T^n (U_2) \cap V_2)$$

et le fait que la transitivité topologique et la propriété de mélange peut être testé sur une base de la topologie. ■
En général, il n'est pas nécessaire que le produit de deux applications topologiquement transitives soit topologiquement transitif, même si $S = T$, comme le montrent les exemples suivants, il est donc nécessaire d'ajouter des conditions supplémentaires, comme dans les versions précédentes.

Exemple 4.2 *Soit $T \ : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \ z \rightarrow e^{i\alpha} z$ une rotation de cercle. Puis $(T \times T)^n (z_1, z_2) = (e^{in\alpha} z_1, e^{in\alpha} z_2)$, et nous observons que le quotient de deux coordonneés est $\frac{z_1}{z_2}$ indépendant de n. On voit facilement que $T \times T$ ne peut pas être topologiquement transitif. D'autre parts, on sait que toute rotation irrationnelle est topologiquement transitive. Cela montre également qu'aucune rotation irrationnelle se mélange .*

4.1 Applications faiblement mélangées

Aprés avoir examiné la question de savoir si un produit de deux systèmes topologiquement transitifs est topologiquement transitif, on peut se demander quand le produit d'une application topologiquement transitive avec lui-même est encore topologiquement transitif. Nous avons vu dans l'exemple 4.2 que ce n'est pas toujours le cas. Par contre, pour toute application de mélange T, le produit $T \times T$ est topologiquement transitif. Cela nous amène à la notion suivante :

Définition 4.3 *Un système dynamique $T : X \to X$ est appelé **mélange faible** si $T \times T$ est topologiquement transitif.*

Puisque les produits $U \times V$ des ensembles ouverts non vides $U, V \subset X$ forment une base de la topologie de $X \times X$, T se mélange faiblement si et seulement si pour tout ensemble de 4-tuple U_1,U_2, V_1, V_2 d'ensembles ouverts non vides, il existe un certain $n \geq 0$ tel que

$$T^n (U_1) \cap V_1 \neq \varnothing \text{ and } T^n (U_2) \cap V_2 \neq \varnothing.$$

Remarque 4.1 *Pour tout système dynamique on a :*

Mélange $\Longrightarrow$ Mélange faible $\Longrightarrow$ Transitivité topologique

Remarque 4.2 *Par Exemple 4.2, toute rotation de cercle irrationnelle est topologiquement transitive, mais ne se mélange pas faiblement. D'autre part, il n'est pas facile de construire des exemples des applications faiblement mélangées qui ne mélangent pas.*

Proposition 4.3 *La propriété de mélange faible est préservée sous la quasiconjugaison.*

Preuve. Si $\phi : Y \to X$ définit une quasiconjugaison de $S : Y \to Y$ à $T : X \to X$ alors $\phi \times \phi$ définit une quasiconjugaison de $S \times S$ à $T \times T$. ■

Proposition 4.4 *Soient $S : X \to X$ et $T : Y \to Y$ des systèmes dynamiques. Si $S \times T$ se mélange faiblement, il en est de même pour S et T.*

Afin de formuler les arguments impliquant un mélange des applications, nous introduisons les concepts utiles suivants :

Définition 4.4 *Soit $T : X \to X$ un système dynamique. Alors, pour tous les ensembles $A, B \subset X$, l'ensemble de retour de A à B est défini comme suit :*

$$N_T (A, B) = N (A, B) = \{n \in \mathbb{N} \ ; T^n (A) \cap B \neq \varnothing\}.$$

On supprime habituellement l'indice T quand cela ne crée aucune ambiguité. Dans cette notation T est topologiquement transitif (ou mélange) si est seulement si pour toute paire U, V de sous ensembles ouverts non vides de X, l'ensemble de retour N est non vide (ou cofinite respictivement) et T mélange faiblement si et seulement si pour tout quadruplet $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ des ouverts non vides on a :

$$N\left(U_1, V_1\right) \cap N\left(U_2, V_2\right) \neq \varnothing$$

Notez également que si T est topologiquement transitif, les ensembles de retour N même infinis pour tout ensemble ouvert non vide U, V. Incidemment, nous observons que plus les ensembles A et B sont grands, plus le retour $N\left(A, B\right)$ est grand également.
Notre objectif est de donner plusieurs caractérisations de la propriété de mélange faible. Pour ce faire, nous allons fournir un lemme utile qui, en raison de sa forme, appelle l'astuce à 4-ensembles. Nous notons que les ensembles de retour $N\left(A, B\right)$ font référence à T.

Lemme 4.1 *(Astuce à 4-ensembles) : Soit $T : X \to X$ un système dynamique, et soit $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ des ouverts non vides,*
(a) S'il existe une application continue faisant la navette avec T telle que :

$$S\left(U_1\right) \cap U_2 \neq \varnothing \text{ et } S\left(V_1\right) \cap V_2 \neq \varnothing,$$

Alors, il existe des ensembles ouverts non vides $U_1^{'} \subset U_1, V_1^{'} \subset V_1$ tels que

$$N(U_1^{'}, V_1^{'}) \subset N\left(U_2, V_2\right) \text{ and } N(V_1^{'}, U_1^{'}) \subset N\left(V_2, U_2\right).$$

Si, de plus, T est topologiquement transitif alors $N(U_1, V_1) \cap N\left(U_2, V_2\right) \neq \varnothing$.
b) Si T est topologiquement transitif, alors

$$N(U_1, U_2) \cap N\left(V_1, V_2\right) \neq \varnothing \Longrightarrow N(U_1, V_1) \cap N\left(U_2, V_2\right) \neq \varnothing.$$

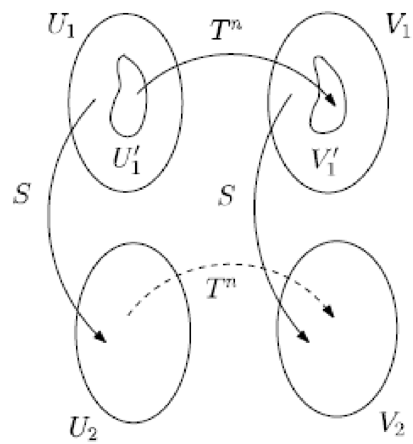

Figure 8. Astuce à 4-ensembles.

L'astuce 4-ensembles, si simple soit-elle, implique déjà un résultat important, à première vue assez surprenant : Dés que le produit $T \times T$ est topologiquement transitif, tout produit $T \times \cdots \times T$ supérieur l'est également.

Théorème 4.1 *(Furstenberg) : Soit $T : X \to X$ un système dynamique faiblement mélangé. Ensuite, le produit de n fois $T \times ... \times T$ se mélange faiblement pour chaque $n \geq 2$.*

Preuve. Etant donné que le produit de n fois se mélangeant faiblement équivaut à ce que le produit de $2n$ fois soit topologiquement transitifs, il suffit de montrer que chaque produit de n fois $T \times \cdots \times T$ est topologiquement transitif pour $n \geq 2$. Nous procédons par induction, le cas de $n = 2$ étant trivial par définition. Ainsi, supposons que le produit n fois $T \times \ldots \times T$ soit topologiquement transitif. Pour prouver la transitivité topologique du produit correspondant $(n+1)$, nous devons montrer que, étant donné que les ensembles ouverts ne sont pas vides $U_k, V_k \subset X,\ k = 1, ..., n+1$, Nous avons :

$$\cap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \neq \varnothing \qquad (**)$$

En effet, depuis que T mélange faiblement, il y a quelques $m \in \mathbb{N}$ tels que $T^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \varnothing$ et $T^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \varnothing$. L' astuce de 4-ensembles donne alors l'existence d'ensembles ouverts non vides $U_n' \subset U_n,\ V_n' \subset V_n$ avec $N(U_n', V_n') \subset N(U_n, V_n) \cap N(U_{n+1}, V_{n+1})$. D'autre part, l'hypothèse d'induction implique que

$$\cap_{k=1}^{n-1} N(U_k, V_k) \cap N(U_n', V_n') \neq \varnothing,$$

ce qui implique (**). ■

Les résultats suivants montrent que, dans la définition du mélange faible, on peut réduire les quatre ensembles ouvertes à trois, puis à deux ensembles ouvertes.

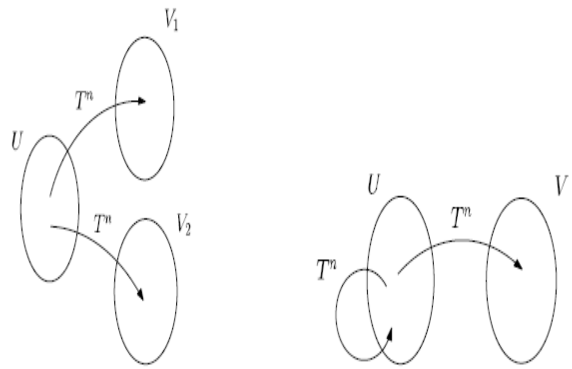

Figure 9. Mélange faible (Proposition 4.5 et 4.6)

Proposition 4.5 *Un système dynamique $T : X \longrightarrow X$ mélange faiblement si et seulement si pour tout ensembles ouverts non vides $U, V_1, V_2 \subset X$, nous avons*

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \varnothing.$$

Preuve. Il suffit de montrer la suffisance de la condition. Ainsi, laissez $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ être des ensembles ouverts arbitraires. Par hypothèse il y a certain $n \in N(U_1, V_1) \cap N(U_1, V_2)$. En particulier, $U = U_1 \cap T^{-n}(U_2)$ et $T^{-n}(V_2)$ sont des ensembles ouverts non vides. Par une autre application de l'hypothèse, nous trouvons $m \in N(U, V_1) \cap N(U, T^{-n}(V_2))$. En particulier, il existe certain $x \in U$ avec $T^m x \in T^{-n}(V_2)$. Nous concluons alors que $T^m T^n x = T^n T^m x \in V_2$ et $T^n x \in U_2$, ce qui rapporte que $m \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. ■

Proposition 4.6 *Un système dynamique $T : X \longrightarrow X$ mélange faiblement si et seulement si pour les ensembles ouverts non vides $U, V \subset X$, nous avons*

$$N\left(U, U\right) \cap N\left(U, V\right) \neq \varnothing.$$

Preuve. Il suffit de montrer que la condition énoncée implique la condition de la Proposition 4.5. Ainsi que, $U, V_1, V_2 \subset X$ soient des ensembles ouverts arbitraires et non vides. Par hypothèse, il existe certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_1 = U \cap T^{-n}\left(V_1\right)$ soit un ensemble ouvert non vide. Puisque les applications topologiquement transitives ont une point dense, l'hypothèse implique également que $T^{-n}\left(V_2\right)$ est non vide et ouvert, donc il existe un $m \in N\left(U_1, U_1\right) \cap N\left(U_1, T^{-n}\left(V_2\right)\right)$. Donc, il y a $x, y \in U_1$ avec $T^m x \in U_1$ et $T^n T^m y \in V_2$. Nous avons alors cela $T^n T^m x \in V_1$, qui implique que $n + m \in N\left(U, V_1\right) \cap N\left(U, V_2\right)$, comme nous le souhaitons. ■

Nous caractérisons enfin la propriété de mélange faible en termes de taille des ensembles de retour $N(U,V)$ ou, de manière équivalente, en termes de transitivité topologique de certaines sous-suite $(T^{n_k})_k$, pour la notion de transitivité topologique pour une suite d'applications. Nous renvoyons à la section suivante :

Définition 4.5 *Une suite strictement croissante $(n_k)_k$ des entiers positifs est appelé **syndétique** si :*

$$\sup_{k\geq 1}(n_{k+1}-n_k)<\infty.$$

*De même, un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est appelé **syndétique** si la séquence croissante d'entiers positifs se forme A est syndétique, ou de manière équivalente, si son complément ne contient pas d'intervalles arbitrairement longs.*

Théorème 4.2 *Soit $T:X\longrightarrow X$ un système dynamique. Ensuite, les assertions suivantes sont équivalentes :*

$i)$ T mélange faiblement ;

$ii)$ pour toute paire $U,V\subset X$ d'ensembles ouverts non vides, $N(U,V)$ contient des intervalles arbitrairement longs,

$iii)$ pour toute suite syndétique $(n_k)_k$, la suite $(T^{n_k})_k$ est topologiquement transitive.

Preuve. $i)\Longrightarrow ii)$: Soient $U,V\subset X$ des ouverts non vides, et soit $m\in\mathbb{N}$. Comme dans la preuve de la Proposition 4.6, chaque ensemble $T^{-k}(V), k=1,...,m,$ est non vide et ouvert. D'après le théorème de Furstenberg, l'application de produit de m fois $T\times\cdots\times T$ est topologiquement transitive, il existe un certain $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$T^n(U)\cap T^{-k}(V)\neq\varnothing \text{ for } k=1,...,m.$$

Cela implique que $T^{n+k}(U)\cap V\neq\varnothing$ pour $k=1,...,m.$

$ii)\Longrightarrow i)$: Par la Proposition 4.5, il suffit de montrer que, étant donné les sous-ensembles ouverts non vides $U,V_1,V_2\subset X,\quad N(U,V_1)\cap N(U,V_2)\neq\varnothing.$ Tout d'abord, par (ii) il y a un certain $m\in N(V_1,V_2)$ et il existe un ensemble ouvert non vide $V_3\subset V_1$ tel que $T^m(V_3)\subset V_2$. Aussi par (ii) il y a un certain $k\in\mathbb{N}$ tel que $k+j\in N(U,V_3)$ pour $j=0,1,...,m.$ En particulier, nous avons $k+m\in N(U,V_1)$ et

$$T^{k+m}(U)\cap V_2\supset T^{k+m}(U)\cap T^m(V_3)\supset T^m\left(T^k(U)\cap V_3\right)\neq\varnothing.$$

Nous concluons que $k+m\in N(U,V_1)\cap N(U,V_2)$.

$ii)\iff iii)$: Cela découle immédiatement des définitions et du fait qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contient des intervalles arbitrairement longs si et seulement si elle répond à toutes les suites syndétiques. La condition (ii) dans ce résultat montre bien à quel point le mélange est faible entre la transitivité topologique et le mélange. ■

4.2 Universalité

Les concepts de base introduits jusqu'à présent dans ce chapitre permettent une généralisation. L'orbite d'un point x sous une application T s'obtient en appliquant les itérés T^n, $n = 0, 1, 2, ...,$ de T à x. Au lieu de cela, on pourrait penser à appliquer des applications arbitraires T_n, $n = 0, 1, 2, ...,$ à x, dans ce cas nous n'avons même pas besoin que T_n sont des auto-applications.

Définition 4.6 *Soit X et Y des espaces métriques, et soit $T_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, des applications continues. Ensuite, l'orbite de x sous $(T_n)_n$ est défini comme suit :*

$$orb\,(x, (T_n)) = \{T_n x\ ; n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Un élément $x \in X$ s'appelle universel pour $(T_n)_n$ s'il y a une orbite dense sous $(T_n)_n$.

Un exemple intéressant et non trivial est fourni par la série universelle de Taylor : On peut montrer qu'il existe une fonction infiniment différentiable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f\,(0) = 0$ tel que, pour toute fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $g\,(0) = 0,$ il existe une suite croissante $(n_k)_k$ des entiers positifs tels que :

$$\sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{f^{(\nu)}\,(0)}{\nu!} x^\nu \longrightarrow g\,(x)$$

uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, T_n est l'application qui associe à f son polynôme de Taylor de degré n à 0.

Nous pensons qu'il existe une différence de philosophie entre universalité et dynamique topologique : Dans le premier, on s'intéresse aux éléments universels et à leurs propriétés, tandis que dans le second, l'accent est mis sur plutot une application et ses propriétés.

Cependant, l'étude de la dynamique d'une seule application nécessite parfois de regarder les orbites sous des suites générales des applications, le Théoréme 4.2 en a déjà fourni un exemple. Pour cette raison, nous examinons brièvement ici la manière dont les concepts et les résultats de ce chapitre peuvent être généralisés la notion de l'universalité.

Définition 4.7 *Soient $T_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ des applications continues entre les espaces matriciels X et Y. Puis $(T_n)_n$ est appelé topologiquement transtif si pour toute paire $U \subset X$ and $V \subset Y$ des ensembles ouverts non vides, il y a $n \geq 0$ tel que :*

$$T_n\,(U) \cap V \neq \varnothing,$$

il se mélange si la même chose est vraie pour tous les n suffisamment grands, et il se mélange faiblement si $(T_n \times T_n)_n$ est topologiquement transitif sur $X \times X$.

Maintenant, bon nombre des résultats de ce chapitre s'étendent, du moins sous des hypothèses appropriées, à des suite générales.

Théorème 4.3 *(Critère d'universalité)* **:** *Soit X un espace métrique complet, Y un espace métrique séparable et $T_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, des applications continues. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
$i)$ $(T_n)_n$ est topologiquement transitif.
$ii)$ Il existe un ensemble dense des points $x \in X$ tel que $orb\,(x, (T_n))$ est dense en Y.
Si l'une de ces conditions est vérifiée alors l'ensemble des points de X dont l'orbite est dense est un G_δ-ensemble dense.

Preuve. Supposons que (ii) soit valable. Si U et V sont des ensembles ouverts non vides de X et Y, respectivement, alors il existe $x \in U$ avec une orbite dense sous $(T_n)_n$, alors qu'il en existe $n \geq 0$ avec $T_n x \in V$. Cela implique (i).
L'implication inverse et le fait que l'ensemble des points à une orbite dense est un G_δ-ensemble dense peut être prouvé exactement comme dans la preuve du théorème de transitivité de Birkhoff.
■
En général, les résultats sur les itérations des applications ont de bonnes chances de s'étendre aux suites $(T_n)_n$ si elles consistent à faire la navette pour les auto-applications $T_n : X \longrightarrow X$ avec des points dense. Par exemple, pour telles suite, le théorème de transitivité de Birkhoff à une analogue parfait.

Remarque 4.3 *Si nous définissons les ensembles de retour*

$$N\,(A, B) = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ T_n\,(A) \cap B \neq \varnothing\}$$

alors la partie (a) de l'astuce de 4-ensembles reste valable pour les suite $(T_n)_n$ d'auto-applications si l'application S bascule avec tous T_n, $n \geq 0$, ainsi que la partie (b) pour les navetteurs d'auto-applications. En conséquence, le théorème de Furstenberg s'applique également aux suite de navetteurs (T_n), de même que la Proposition 4.5.

4.3 Conclusion

La notion du chaos reste très utile à nos jours dans plusieurs domaines. En effet, en physique, en mathématique et en météorologie évidemment, mais aussi en biologie et chimie, en astrophysique, en économie et sciences sociales..., bref dans une diversité de domaines. Par exemple, en biologie, dans l'étude de populations, les savants ont remarqué que la croissance présente un comportement chaotique. Bien qu'en chimie pour l'étude des gaz et des particules comme le mouvement brownien. D'autre part, en astrophysique, lors d'intégrations numériques (pour de grandes durées mais qui sont toujours largement inférieures à l'âge du système solaire) des mouvements des planètes proches du Soleil comme Mercure, Vénus, la Terre et Mars, il a été remarqué que ces systèmes sont très sensibles aux conditions initiales et que par conséquent la prévision de l'emplacement de celles-ci dans le futur lointain est tout simplement impossible. De plus, des physiciens ont récemment remarqué que la Terre, si elle n'avait pas de lune, aurait une rotation chaotique. Ce qui signifierait que sur Terre, il n'y aurait plus ce système régulier des saisons tel que nous le connaissons. En outre, en économie, l'étude de marché montre que la bourse est un système chaotique (au sens technique...). Enfin, et surtout, dans la cryptographie, la découverte des signaux chaotiques, ces signaux de nature très imprévisibles et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler, ils sont déterministes mais fortement sensibles aux conditions initiales et présentent une allure pseudo-aléatoire. Ces propriétés peuvent être affinées pour simuler les caractéristiques d'un bruit blanc ou d'un autre signal aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

Bibliographie

[1] T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos,* Amer. Math. Monthly 82 (1975), 985–992.

[2] M. Kuchta, J. Smítal, *Two-points crambled set implies chaos,* Proceedings of the European Conference on Iteration Theory ECIT 87 (Caldes de Malavella (Spain), 1987), World. Sci. Publishing, Singapore 1989, 427–430.

[3] S. Ruette, Chaos for continuous interval maps : A survey of relationship between the various sorts of chaos. Preprint, available electronically.

[4] J. Guckenheimer, *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps,* Commun. Math. Phys 70 (1979), 133–160.

[5] J. Auslander, J. A. Yorke, *Interval maps, factors of maps and chaos,* Tohoku Math. J. 32 (1980), 177–188.

[6] R. Devaney, *Chaotic dynamical systems*, 2d edn. New York, Addison-Wesley, 1989.

[7] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos,* Am. Math. Mon. 99 (1992), 332–334.

[8] E. Glasner, B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions,* Nonlinearity 6 (1993), 1067–1075.

[9] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets and aproblem in diophantine approximation,* Math. Systems Th. 1 (1967), 1–55.

[10] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973),125–136.

[11] S. Kolyada, L. Snoha, *Some aspects of topological transitivity-a survey,* Grazer Math. Ber., **334** (1997), 3–35.

[12] B. Weiss, *Topological transitivity and ergodic measures.* Math. Systems Th. **5** (1971), 71-75.

[13] F. Blanchard, W. Huang, *Entropy sets, weakly mixing sets and entropy capacity.* To appear in Discrete Continuous Dyn. Sys.

[14] A. Iwanik, *Independence and scrambled sets for chaotic mappings,* in : The Mathematical Heritage of C. F. Gauss, WorldSci. Publishing, River Edge, (1991), 372–378.

[15] E. Akin, J. Auslander, K. Berg, *When is a transitive map chaotic ?,* in : Convergence in ergodic theory and probability, Bergelson, March, Rosenblatt, eds, de Gruyter, Berlin-New York, 1996, 25–40.

[16] P. Kůrka, *Topological and symbolic dynamics*. Cours spécialisés, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[17] J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*. North-Holland Mathematics Studies, **153**. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[18] J. de Vries, *Elements of topological dynamics*. Kluwer, Dordrecht, Holland, 1993.

[19] F. Blanchard, F. Durand, A. Maass, *Constant-length substitutions and countable scrambled sets,* Nonlinearity **17** (2004), no. 3, 817–833.

[20] W. Huang, X. Ye, *Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos,* Topology Appl. **117** (2002), No. 3, 259–272.

[21] B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval,* Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754.

[22] J. Xiong, Z. Yang, *Chaos caused by a topologically mixing map*, Advanced Series in Dynamical Systems, World Scientific 9 (1990), 550–572.

[23] L. Block, W. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. 1513, Springer Verlag, 1992.

[24] Devaney. R, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Addisson-Wesley, 1989.

[25] Banks, J., Brooks, J., Chairs, G. Davis, G., Stacey, P, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Mothly 99, (1992), 332-334.

[26] Elaydi, S. N, *Discrete Chaos,* Chapman & Halll, 2000.

[27] Değirmenci, N., Kocak, S, *Existence of a Dense Orbit and Topological Transitivity : When Are They Equivalent ?,* Acta Math. Hungar. 99 (3) (2003), 185-187.

[28] Barnes, J., Koss, L, *A Julia set that is everything,* Mathematics Magazine 76(4) (2003), 255-263.

[29] Touchey, P, *Yet Another Definition of Chaos,* Amer. Math. Monthly 104, (1997), 411-415.

[30] Assaf, D., Godbois, S. *Definition of Chaos,* Amer. Math. Monthly 99, (1992), 865-870.

[31] X. Ye, R. F. Zhang, *On sensitive sets in topological dynamics,* preprint, 2006.