Table des matières

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier quelques problèmes mixtes non locaux par la méthode des inégalités énergétiques(estimation à priori).

Le premier problème est l'équation hyperbolique de deuxième degré en combinant une condition classique et une autre integrale.

Le deuxième une équation parabolique avec une condition classique.

.

Abstract

The objective of this work is to study some mixed problem non local by the Inequality energy method (priori estimate).

The first problem is an hyperbolic equation of second ordre combining a classical and an integral contraint.

The second is a parabolic equation with classical condition

Notations

E	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
$\rho(.,.)$	La distance.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p\, dx < \infty$.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
H	Un espace de Hilbert.
A	Un opérateur linéaire.
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de définition de A.
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	L'adhérence de $\mathcal{D}(A)$.
$\overline{A}$	La fermeture de A.
$R(A)$	L'ensemble des valeurs Au pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$.
$\mathcal{L}$	Operateur différentiel.
$\dfrac{d}{dx}$	La dérivée ordinaire par-rapport à x.
$D^k u$	La dérivée généralisée.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$, où $\|k\| \leq l$.
$\mathring{W}_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in W_m^l(\Omega)$ à suport compact dans Ω.
$\|.\|_{m,\Omega}^{(l)}$	La norme dans l'espace $W_m^l(\Omega)$.
c_Ω	La constante de Poincaré.
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	La dérivée partielle.
$S = \partial\Omega$	La frontière.
B	Un espace de Banach.
$C(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions continues.
$\hookrightarrow$	L'injection canonique.
Δu	L'opérateur Laplacien.
∇u	Le gradient de u.
$\langle .,. \rangle$	Le crochet de dualité.

Introduction générale

Plusieurs phénomènes physiques aussi que des phénomènes en biologie et en écologie peuvent être modelés par des problèmes mixtes non-locaux (des problèmes avec de contraintes non-locales comme des conditions intégrales). Autrement dit, les problèmes mixtes non-locaux sont généralement inspirés de la physique moderne et des sciences technologiques et évidemment, ils décrivent plusieurs phénomènes biologiques physiques. Dans quelques catégories de problèmes, on ne peut pas mesurer les données à chaque point de la frontière, mais il suffit de connaitre la valeur moyenne de la solution sur le domaine. Les conditions aux limites non-locaux peuvent apparaitre dans des problèmes pour modeler le débit d'eau, la théorie de la transmission, le génie chimique, la théorie de contrôle, les sciences médicales, les sciences de vie, etc. C'est la raison pour laquelle ces problèmes mixtes non-locaux ont beaucoup attiré l'attention ces dernières années,pas seulement en ingénierie, mais aussi en mathématiques.

La résolution des problèmes mixtes ayant des contraintes non-locales a commencé au début des années soixante, où Canon [6] a utilisé la méthode potentielle pour prouver que l'équation parabolique homogène associée à des conditions classiques et non- classique est bien posée.

Ensuite, Kamynin [18] a généralisé les résultats obtenus par Canon en utilisant un système d'équations intégrales. Mouravei et Philinovsku [41] ont utilisé le principe de maximum, en combinant un Neumann et une condition intégrale pour l'équation de chaleur. Lonkin [16] a étudié également d'autres cours de problèmes mixtes avec des conditions intégrales.

L'application des analyses fonctionnelles, la méthode énergétique, la méthode des équations intégrales singulières sont généralement difficiles à appliquer dans la résolution des problèmesde ce type. Notez que l'étude théorique des problèmes non-locaux est liée à de grandes difficultés.

Cette méthode a été utilisée pour la résolution des problèmes mixtes relatifs aux équations différentielles elliptiques [24], paraboliques [16, 24], équations hyperboliques [24, 30, 34, 41, 43], pluri-paraboliques [29], pluri-hyerboliques [33], équations non classiques, équations opérationnelle [18], et les problèmes de transmission .

Un modèle avec une contrainte non-locale dans des problèmes de thermoélasticité a été dérivé de [47]. Ces contraintes non-locales (conditions intégrales) peuvent représenter une moyenne, une énergie totale ou une masse totale.

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode d'estimation à priori (la méthode d'inégalité énergétique) pour certains problèmes linéaires mixtes avec une valeur aux limites non-locale. Nous avons principalement prouvé l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution sur les données fournies (nous avons montré que les problèmes posés sont bien posés).

Le mémoire est organisé comme suit : dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions de la théorie des espaces fonctionnels, la théorie des opérateurs, quelques inégalités importantes que nous utilisons dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions un problème mixte pour des équations hyperboliques de deuxième degré en combinant une condition classique et une autre intégrale. A la base d'une estimation à priori, nous prouvons l'unicité de la solution du problème donné. Pour l'existence de la solution on prouve que l'image de l'opérateur généré par le problème étudié est dense.

Par conséquent, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution forte généralisée du problème donné.

Dans le troisième chapitre, nous investissons une équation parabolique avec une condition classique. Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée du problème donnée.

Pour la résolution des différents problèmes posés, nous suivons le schéma suivant :
Nous écrivons d'abord le problème posé dans un formulaire appelé opérateur formel :

$$Lu = \mathcal{F} \tag{0.1}$$

Où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach B vers un espace de Hilbert H qui est choisi convenablement. Nous établissons ensuite une estimation à priori pour l'opérateur L.

$$||u||_B \leq c||Lu||_H, \forall u \in D(L), \tag{0.2}$$

Où $D(L)$ est le domaine de définition de L.
L'estimation $(0,2)$ peut être obtenue en choisissant un certain multiplicateur Mu qui est en général un opérateur itégro-différentiel et en utilisant des intégrations par parties appropriées.

Nous devons mentionner ici que, jusqu'à présent, il n'y a pas de méthode générale pour la construction de tel opérateur multiplicateur Mu. Nous montrons alors que l'opérateur L est fermable et nous dénotons par $\overline{L}$ sa fermeture.

Nous définissons une solution forte de problème donné comme la solution de l'équation d'opérateur.

$$\overline{L}u = \mathcal{F} \ , \quad \forall u \in D(\overline{L}) \tag{0.3}$$

Nous étendons l'estimation $(0,2)$ à l'ensemble des solutions $u \in D(\overline{L})$ (solution forte) par passage à la limite, nous avons l'estimation à priori.

$$||u||_B \leq c||\overline{L}u||_H \; \forall u \in D(\overline{L}) \tag{0.4}$$

Ainsi, nous prouvons l'unicité d'une solution forte et la fermeture de l'image $R(\overline{L})$ de l'opérateur dans l'espace H et $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}.$

Finalement, la solvabilité de chaque problème donné, nous prouvons la densité de l'image $R(L)$ de l'opérateur L dans $H,$ et par conséquent l'existance de solution du problème considéré.

Chapitre 1

Notations préliminaires

1.1 Espace linéaire

Soit X un ensemble des élèments dénoté : $x, y, ...$ On suppose que chaque paire des élèments (x, y) peut être combiné par un opération nommée addition pour donner un autre élèment z denoté $z = x + y$.

On suppose aussi que chaque nombre réel α et chaque élèment x peut être combiné par une opération notée multiplication pour donner un autre élèment y denoté par $y = \alpha x$.

L'ensemble X avec ces deux opérations est nommé un espace linéaire si les axiomes suivants sont satisfaits :

$$x + y = y + x \tag{1}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z \tag{2}$$

Il y a dans X un élèment unique, denoté par 0 est nommé l'élèment neutre tel que :

$$x + 0 = x \text{ pour chaque } x \tag{3}$$

Pour chaque $x \in X$ correspond un élèment unique, denoté par $-x$ tel que

$$x + (-x) = 0$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \tag{5}$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \tag{6}$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \tag{7}$$

$$1.x = x \tag{8}$$

$$0.x = 0 \tag{9}$$

quelque soient α, β sont des nombres réels et x, y sont des élèments dans X.

Définition 1.1 (Opérateur linéaire) *Soient X et Y deux espaces linéaires (tous les deux réel ou complexes).*

Soit A une fonction de domaine $D(A)$ dans X et image $R(A)$ dans Y.

Alors A est nommé un operateur linéaire si $D(A)$ est un sous espace de X et si

.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}.\ A(x_1 + x_2) &= Ax_1 + Ax_2 \\ \mathbf{2}.A(\alpha x) &= \alpha Ax. \end{aligned}$$

quelque soit α est un scalaire et x_1, x_2, x_3 sont des vecteurs dans $D(A)$.

Si $D(A) = X$, nous disons souvent que A est un operateur linéaire de X dans Y.

Un sous ensemble important du domaine de A est l'espace nul de A, $N(A)$ où

$$N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$$

Théorème 1.1 *Soit A un operateur linéaire sur $D(A)$ dans X et image $R(A)$ dans Y, où X et Y sont des espaces linéaires.*

Alors A^{-1} existe si et seulement si $N(A) = 0$. où A^{-1} existe, il est un operateur linéaire.

Définition 1.2 (Fonctionnelle linéaire) *Soit X un espace linéaire réel (resp complexe) et soit Y un champ scalaire associé avec X. A un operateur linéaire sur X sur Y est nommé alors fonctionelle linéaire.*

1.2 Espace Normé

Définition 1.3 (La norme) *: Soit X un espace véctoriel réel (resp complexe).*

Une norme sur l'espace linéaire X, est (Real-value function) une fonction a valeur réelle $||.|| : X \to [0, \infty[$, dont la valeur à x est denoté par $||x||$ et a les propriétés :

$$\begin{aligned} 1.\ ||x+y|| &\leq ||x|| + ||y|| \\ 2\ .\quad ||\alpha x|| &= |\alpha|.||x|| \end{aligned}$$

pour tous les scalaire α

$$\begin{aligned} 3.\ ||x|| &\geq 0 \\ 4.\ ||x|| &\neq 0 \text{ si } x \neq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.4 (Espace linéaire normé) *Un espace linéaire $(X, ||.||)$ sur lequel une norme est définie est nommé un espace linéaire normé.*

Définition 1.5 (Espace complet) *L'espace normé X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge vers un élèment sur X (i.e) a une limite lequel est un élèment de X.*

1.3 Espace de Banach

Définition 1.6 (Espace de Banach) *Si un espace linéaire normé $X = (X, ||.||)$ est complet, il est nommé un espace de Banach.*

Théorème 1.2 *Soit X un espace linéaire normé. Alors il existe un espace linéaire Y tel que Y est complet et X est un sous ensemble dense de Y. Jusqu'à l'isométrie, l'espace Y est unique.*

Définition 1.7 (Achévement) *: l'espace Y donné par **théorème(1.2)** est nommé achévement (partition) de X.*

1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.8 (Espace préhilbertien) *: Un espace linéaire complexe X est dite espace préhilbertien si pour chaque paire des élèment x, y de X, il existe un nombre complexe associé (x, y) est dit le préhilbertien de x et y avec les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} 1.(x+y+z) &= (x,z)+(y,z), \forall x,y,z \in X \\ 2.(x,y) &= \overline{(y,x)} \end{aligned}$$

dont le bar denoté conjugué complexe.

$$\begin{aligned} 3.(\alpha x,y) &= \alpha(x,y), \forall \alpha \\ 4.\ (x,x) &\geq 0, \forall x \in X, et(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0. \end{aligned}$$

L'espace préhilbertien est un cas special de l'espace linéaire normé. C'est exprimé par le lemme suivant.

Lemme 1.1 *Soit X un espace linéaire muni de produit scalire. Alors l'expression $||x|| = \sqrt{(x,x)}, \forall x \in X$, définie une norme sur X.*

Définition 1.9 (espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien (un espace linéaire normé) complet.*
Une distance sur H est donnée par :

$$||x-y|| = \sqrt{(x-y,x-y)}.$$

Par conséquent, les espaces préhilbertiens sont des espaces normés, et les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach.

1.5 Orthogonalité-Complément Orthogonal

Définition 1.10 (Orthogonalité) *Soit H est un espace de Hilbert (plus généralement un espace préhilbertien). On dit que deux éléments de H, x et y sont orthogonaux (ou x est orthogonal à y) si*

$$(x,y)=0$$

et on écrit $x \perp y$. De même, pour l'inclusion

$$A, B \subset H$$

on écrit

$$x \perp y \ \textit{si}\ x \perp a \quad \forall a \in A$$

Définition 1.11 (Complément orthogonal) *Pour chaque sous-espace M de H, on définit le complément orthogonal par :*

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid (x, y) = 0, \forall y \in M\}$$

lequel est l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à M.
Il est clair que $M^{\perp}$ est un sous-espace fermé. Si M est aussi fermé, alors H est un somme directe de M et $M^{\perp}$:

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Théorème 1.3 *Soit H un espace de Hilbert. Un sous-espace M de H est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.*

Théorème 1.4 (Complétion) *Pour tout espace normé (espace Préhilbertien) X, il existe un espace Banach (Espace de Hilbert) $\widehat{X}$ et une isométrie A de X sur un sous-espace W de $\widehat{X}$ qui est dense dans $\widehat{X}$: l'espace $\widehat{X}$ est unique, sauf pour les isométries.*
Les concepts suivants sont très utiles pour étudier des opérateurs non bornés.

1.6 Opérateurs fermés

Définition 1.12 *Le graphe d'un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est l'ensemble des paires ordonnées :*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

On note que le graphe est un sous-espace de $X \times Y$.

Lemme 1.2 *L'opérateur $\widetilde{A}$ est une extension de A si et seulement si*

$$\Gamma\left(\widetilde{A}\right) \supset \Gamma(A)$$

Définition 1.13 *On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe est fermé dans le sous-ensemble de $X \times Y$.*

Définition 1.14 *On appelle A est fermable s'il possède une extension fermée. Chaque opérateur fermable admet une plus petite extension fermée qu'on appelle sa fermeture et noté par $\overline{A}$.*
Le lemme suivant est une conséquence directe de la définition d'un opérateur fermé.

Lemme 1.3 *Un opérateur A est fermé si et seulement si il a les propriétés suivantes. Si pour toute suite suite $x_n \in D(A)$ tel que*

$$1.\ x_n \to x$$

et

$$2.\ Ax_n \to f$$

alors

$$1.\ \ x \in D(A)$$

et

$$2.\ Ax = f$$

On a une caractérisation similaire d'un opérateur fermable.

Lemme 1.4 *Un opérateur A fermable si pour toute suite $x_n \in D(A)$ tel que $x_n \to 0$, on a soit*

$$1.\ Ax_n \to 0$$

ou

$$2.\ \lim_{n\to\infty} Ax_n\ n'existe\ pas$$

Corollaire 1.1 *Si A est fermable, alors*

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}.$$

1.7 Eespace de Sobolev

Définition 1.15 *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, k un entier non négatif et soit $1 \leq p \leq \infty$, alors on définit $W_p^k(\Omega)$ pour être l'ensemble de toutes les distributions $u \in L^p(\Omega)$ tel que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq k$, où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$*

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D^\alpha \\ &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \end{aligned}$$

et

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \text{mesurable} \mid \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$
$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \text{mesurable} \mid \exists C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \quad \text{sur } \Omega \}.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace complet pour la norme

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

et $L^{\infty}(\Omega)$ est un espace complet pour la norme :

$$L^{\infty}(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

En $W_p^k(\Omega)$, on définit une norme par :

$$\begin{aligned} ||u||^p_{W_p^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^{\alpha}u||^p_{L^p(\Omega)}, p \\ &< \infty \end{aligned}$$

$$||u||^p_{W_{\infty}^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} ||D^{\alpha}u||_{L^{\infty}(\Omega)},$$

et pour $p = 2$, on définit un produit scalaire par :

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx.$$

Pour $W_2^k(\Omega)$ on utilise également la notation $H^k(\Omega)$.

1.8 Formule de Green

On suppose que Ω est un domaine borné de classe C^{∞} dans $\mathbb{R}^n$, et $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. les suivants sont appelés formules de Green :

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial v}dS = \int_{\Omega} (v\triangle u + \nabla v\nabla u)\,dx, \tag{10}$$

$$\int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial v} - u\frac{\partial v}{\partial v})dS = \int_{\Omega} (v\triangle u - u\triangle v)dx, \tag{11}$$

où dS désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

En effet, les formules de Green (10) et (11) tiennent plus généralement pour $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, à condition que les
intégrales sur Ω et $\partial\Omega$ converge.

Cas spéciaux :

1) Si on prend $v = 1$dans (10), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v}dS = \int_{\Omega} \triangle u\, dx,$$

2) Si on prend $u = v$ dans (10), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial v}dS = \int_{\Omega} \left(u\triangle u + |\nabla u|^2\right) dx.$$

1.9 Régularisation des opérateurs

Soit W une fonction de classe C^{∞}, avec les variables ζ tel que :

$$W(\zeta) > 0; W = 0, \quad si \quad |\zeta| \geq 1,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(\zeta)\, d\zeta &= \int_{-1}^{1} W(\zeta)\, d\zeta \\ &= 1. \end{aligned}$$

On dénote par :

$$W_{\varepsilon}(x, x') = \frac{1}{\varepsilon} W\left(\frac{x - x'}{\varepsilon}\right).$$

Pour tout $\varepsilon \succ 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\varepsilon}(x, x')\, dx' &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{\varepsilon}(x, x')\, dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

et

$$W_{\varepsilon}(x, x') = 0, \quad \text{si} \quad |x - x'| \geq \varepsilon.$$

On définit l'opérateur de lissage (smoothing operator) $J_{\varepsilon} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par la formule :

$$\begin{aligned} (J_{\varepsilon} v)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{\varepsilon}(x, x')\, v(x') dx' \\ &= \int_{|x-x'| \prec \varepsilon} W_{\varepsilon}(x, x')\, v(x') dx', \end{aligned}$$

où $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $v \in L^2(\Omega)$. Cet opérateur a les propriétés suivantes :
P1. La fonction $J_{\varepsilon} v \in C^{\infty}$ si $v \in L^2(\Omega)$, et

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}(J_{\varepsilon} v) = J_{\varepsilon}(\frac{\partial^m}{\partial x^m} v), \quad \text{si} \quad v \in \mathbb{C}^m(\Omega).$$

P2. Si $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$||J_\varepsilon v - v||_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,$$

et

$$||J_\varepsilon v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{L^2(\Omega)}.$$

P3. Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$||\alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v)||_{L^2(\Omega)} \to 0 \;\; \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

P4. Si $\alpha \in C^1(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$||\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v)\right)||_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{si} \;\; \varepsilon \to 0$$

1.10 Des inégalités importantes

1.10.1 Lemme de Gronwall :

Si $f_i(\tau)(i = 1, 2, 3)$ sont des fonctions non négatives sur $(0, T)$, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ sont des fonctions intégrables, et $f_3(\tau)$ est une
fonction non décroissante sur $(0, T)$, alors si

$$\Im_\tau f_1 + f_2 \leq f_3 + c\Im_\tau f_2,$$

alors

$$\Im_\tau f_1 + f_2 \leq \exp(c\tau) f_3(\tau),$$

où

$$\Im_\tau f_i = \int_0^\tau f_i(t)\, dt, \qquad (i = 1, 2).$$

1.10.2 Inégalité de l'intégrale Cauchy-Shwartz :

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq \left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

est appelé inégalité de l'intégrale de Cauchy-Shwartz.

1.10.3 Inégalité de Cauchy :

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$ab \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2.$$

1.10.4 Inégalité de Cauchy avec ε :

L'inégalité suivante :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

satisfait pour tout $\varepsilon > 0$.

1.10.5 Inégalité de Young :

La généralisation de l'inégalité de Cauchy-Shwartz est notée inégalité de Young qui est donnée par :

$$ab \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{p-1}{p}|b|^{\frac{p-1}{p}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad p > 1$$

1.10.6 Inégalité deYoung avec ϵ :

Pour tout $\varepsilon \succ 0$, on a l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}|\frac{b}{\epsilon}|^{\frac{p-1}{p}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad p > 1$$

laquel est la généralisation de Cauchy avec ε.

1.10.7 Inégalité de Holder :

Pour tout $u \in L^P(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^{\frac{p-1}{P}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

où $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité de l'integrale de Cauchy-Shwartz.

1.10.8 Inégalité de Poincaré :

Pour tout $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, on a l'inégalité :

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx$$

où C_Ω est une constante dépendant seulement de Ω.

1.10.9 Inégalité Elémentaire

$$\int_0^\ell (\Im_x(\xi u))^2 dx \leq \frac{\ell^3}{2} ||u(.,t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_0^\ell \left(\Im_x^2(\xi u)\right)^2 dx \leq \frac{\ell^2}{2} ||\Im_x(\xi u)||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_0^\ell x(\Im_x(\xi u))^2 dx \leq \ell ||\Im_x(\xi u)||^2_{L^2(\Omega)},$$

Chapitre 2

Sur un problème mixte pour une équation hyperbolique avec une condition intégral

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une équation hyperbolique du seconde ordre en combinant une condition classique et une condition intégrale pondérée. On prouve l'existance et l'unicité d'une solution forte généralisé du problème donné.

2.1 Position du problème

On étudie le problème mixte non locale suivant pour une équation hyperbolique de seconde ordre. On cherche une fonction
$u : Q \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}) = f(x,t) \text{ dans } Q = \Omega \times [0,T]\,, \tag{2.1.1}$$

$$\ell_1 u = u(x,0) = \varphi(x), \quad \ell_2 u = u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.1.2}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{2.1.3}$$

$$\int_0^\ell u dx = 0, \tag{2.1.4}$$

où $\Omega = [0,\ell]$, et $a(x,t)$ est une fonction donnée satisfaisant les conditions :

$$c_0 \leq a \leq c_1,\ \frac{\partial a}{\partial t} \leq c_2,\ \frac{\partial a}{\partial x} \leq c_3, \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \leq c_4, \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} \leq c_5, \tag{2.1.5}$$

et $c_i \;\; i = \overline{0-5}$ sont des constantes positives.
pour étudier $(2.1.1)-(2.1.4)$, on utilise l'espace de Hilbert $L^2(Q)$ et l'espace de sobolev $W_2^{1,1}(Q)$ avec la norme associé :

$$||u||^2_{W_2^{1,1}(Q)} = ||u||^2_{L^2(Q)} + ||u_x||^2_{L^2(Q)} + ||u_t||^2_{L^2(Q)}.$$

Le problème $(2.1.1)-(2.1.4)$ peut être considéré comme résolvant l'équation opérateur

$$\begin{aligned} Lu &= (\mathcal{L}u, \ell_1 u, \ell_2 u) \\ &= (f, \varphi, \psi), \end{aligned}$$

où L est un opérateur non borné défini sur B vers H, où B est un espace de Banach
de fonction $u \in L^2(Q)$ ayant la norme finie définie par :

$$||u||^2_B = \sup_{0 \le \tau \le T} \left\{ ||u(x,\tau)||^2_{L^2(0,\ell)} \right\}$$

et H est l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace $L^2(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ par rapport à la norme définie par :

$$||Lu||^2_H = ||\psi(x)||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi(x)||^2_{L^2(Q)} + ||f||^2_{L^2(Q)}$$

au problème $(2.1.1)-(2.1.4)$, on assigne l'opérateur $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$ avec le domaine de définition :

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(Q), \; tel \; que \;\; u_{tt}, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^2(Q) \\ u_x(0,t) = 0, \; \int\limits_0^\ell u dx = 0 \end{array} \right\},$$

2.2 L'unicité de la solution

Théorème 2.1 *Si la fonction $a(x,t)$ satisfaisant les conditions $(2.1.5)$, alors pour tout $u \in D(L)$ il existe une constante positive K indépendante de u tel que on a l'estimation à priori :*

$$||u||_B \le K ||Lu||_H \tag{2.2.1}$$

Preuve. considérant le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau)$ de l'équation $(2.1.1)$ et l'opérateur integro-différentiel :

$$Mu = -\Im_x^2(u_t), \tag{2.2.2}$$

où

$$\Im_x^2(u_t) = \int_0^x \int_0^\xi u(\eta, t) d\eta d\xi,$$

et $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$ avec $\tau \in (0, T)$, on obtient

$$\begin{aligned} & (Mu, \mathcal{L}u) \\ = \quad & (u_{tt}, -\Im_x^2(u_t))_{L^2(Q_\tau)} - (\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}), -\Im_x^2(u_t))_{L^2(Q_\tau)} \\ = \quad & (-\Im_x^2(u_t), \mathcal{L}u) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

On considére séparément les intégrales de l'égalité $(2.2.3)$. En intégrant par partie et en prenant en compte les conditions $(2.1.2) - (2.1.4)$

$$\begin{aligned} (u_{tt}, -\Im_x^2(u_t))_{L^2(Q_\tau)} &= -\int_{Q_\tau} u_{tt}\Im_x^2(u_t) dx dt \\ &= -\int_0^\tau \left[\Im_x(u_{tt})\Im_x^2(u_t)\right]_0^\ell dt + \int_{Q_\tau} \Im_x(u_{tt})\Im_x(u_t) dx dt \\ &= \int_0^\ell \left[\Im_x(u_t)\Im_x(u_t)\right]_0^\tau dx - \int_{Q_\tau} \Im_x(u_{tt})\Im_x(u_t) dx dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\ell \left[(\Im_x(u_t))^2\right]_0^\tau dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,0))^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x \psi)^2 dx, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), -\Im_x^2(u_t)\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
= & \int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Im_x^2(u_t)dxdt \\
= & \int_0^\tau \left[a(x,t)u_x\Im_x^2(u_t)\right]_0^\ell dt - \int_{Q_\tau} a(x,t)u_x\Im_x(u_t)dxdt \\
= & -\int_0^\tau \left[a(x,t)u\Im_x(u_t)\right]_0^\ell dt + \int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\Im_x(u_t))udxdt \\
= & \int_{Q_\tau} auu_t dxdt + \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt \\
= & \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt + \int_0^\ell \left[au^2\right]_0^\tau dx - \int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial t}(au)udxdt \\
= & \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt + \int_0^\ell \left[au^2\right]_0^\tau dx - \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial t}u^2dxdt - \int_{Q_\tau} auu_t dxdt \\
= & \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\ell \left[au^2\right]_0^\tau dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial t}u^2dxdt \\
= & \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,\tau)u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,0)u^2(x,0)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial t}u^2dxdt + \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt \\
= & \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,\tau)u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,0)\varphi^2dx \\
& -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial t}u^2dxdt + \int_{Q_\tau}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_t)dxdt. \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

La substitution de (2.2.4) et (2.2.5) en (2.2.3), donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,\tau)u^2(x,\tau)dx \\
= \;& \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,0)\varphi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x \psi)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial a}{\partial t} u^2 dxdt \\
& -\int_{Q_\tau} \frac{\partial a}{\partial x} u \Im_x(u_t) dxdt - \int_{Q_\tau} f \Im_x^2(u_t),
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

à l'aide de l'inégalité de cauchy ($ab \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2$) et les conditions sur les coefficients (2.1.5), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \\
\leq \;& \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,\tau)u^2(x,\tau)dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\ell a(x,0)\varphi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x \psi)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \frac{\partial a}{\partial t} u^2 dxdt \\
&-\int_{Q_\tau} \frac{\partial a}{\partial x} u \Im_x(u_t) dxdt - \int_{Q_\tau} f \Im_x^2(u_t) \\
\leq \;& \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x \psi)^2 dx + \frac{c_1}{2}\int_0^\ell \varphi^2 dx + (\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2})\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&+\frac{c_3}{2}\int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |\Im_x^2(u_t)|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \\
\leq \;& \frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x \psi)^2 dx + \frac{c_1}{2}\int_0^\ell \varphi^2 dx + (\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2})\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&+\frac{c_3}{2}\int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |\Im_x^2(u_t)|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

en vertu des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_0^\ell (\Im_x^2(\xi u))^2 dx &\leq \frac{\ell^2}{2}||\Im_x((\xi u))||^2_{L^2(\Omega)},\\ \int_0^\ell (\Im_x(u))^2 dx &\leq \frac{\ell^2}{2}||u(x,t)||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

les premiers et les derniers termes du côté droit de (2.2.7) peuvent être estimés comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\ell (\Im_x(\psi(x)))^2 dx &\leq \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{2}||\psi(x)||^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{\ell^2}{4}\int_0^\ell \psi(x)^2 dx\\ &\text{et} \qquad (2.1)\\ \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} |\Im_x^2(u_t)| dxdt &\leq \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{2}||\Im_x(u_t)||^2_{L^2(Q_\tau)}\\ &\leq \frac{\ell^2}{4}\int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt,\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

la combinaison de (2.2.7) et (2.2.9), donne

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + c_0\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx\\ \leq\ &\frac{\ell^2}{2}\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + c_1\int_0^\ell \varphi^2 dx + (c_2+c_3)\int_{Q_\tau} u^2 dxdt\\ &+(c_3+\frac{\ell^2}{2})\int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt,\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

implique :

$$\begin{aligned}
&\min(1,c_0)\ (\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \int_0^\ell u^2(x,\tau)dx) \\
\leq\ & \int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + c_0 \int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \\
\leq\ & \frac{\ell^2}{2}\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + c_1 \int_0^\ell \varphi^2 dx + (c_2+c_3)\int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
& +(c_3+\frac{\ell^2}{2})\int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt \\
\leq\ & \max(\frac{\ell^2}{2}, c_1, (c_2+c_3), (c_3+\frac{\ell^2}{2}), 1)(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
& + \int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt\ )
\end{aligned}$$

il découle de $(2.2.10)$ que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \\
\leq\ & C(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt) \\
& +C(\int_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt),
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

où

$$C = \frac{\max(\frac{\ell^2}{2}, c_1, (c_2+c_3), (c_3+\frac{\ell^2}{2}), 1)}{\min(1,c_0)}. \tag{2.2.12}$$

Application de Lemme de Gronwalls :

$$\Im_\tau f_{1+} f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c\Im_\tau f_2$$

alors :

$$\Im_\tau f_{1+} f_2(\tau) \leq \exp(c\tau) f_3(\tau)$$

tel que :

$$\Im_\tau f_1 = 0,$$

$$f_2(\tau) = \int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \int_0^\ell u^2(x,\tau)dx,$$

$$f_3(\tau) = C(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt),$$

et

$$\Im_\tau f_2 = \int_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} |\Im_x(u_t)|^2 dxdt,$$

donc

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell (\Im_x u_t(x,\tau))^2 dx + \int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \\ \leq\ & C\exp(C\tau)(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Si on élimine le premier terme du côté gauche de (2.2.13), on obtient :

$$\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx \ \leq C\exp(C\tau)(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} |f|^2 dxdt), \tag{2.2.14}$$

puisque la côté droite de (2.2.14) ne dépend pas de τ, en prenant la borne supérieure de chaque partie en respectant
$\tau \in [0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq\tau\leq T} (\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx) \\ \leq\ & C\exp(CT)(\int_0^\ell \psi(x)^2 dx + \int_0^\ell \varphi(x)^2 dx + \int_{Q_T} |f|^2 dxdt) \end{aligned}$$

implique :

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq\tau\leq T}\{ ||u(x,\tau)||^2_{L^2(0,\ell)}\} \\ \leq\ & M(||\psi(x)||^2_{L^2(\Omega)}dx + ||\varphi(x)||^2_{L^2(\Omega)}dx + ||f||^2_{L^2(Q_T)}dxdt), \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

où
$$M = C\exp(CT).$$

D'où l'éstimation (2.2.1) avec
$$K = \sqrt{C}\exp(\frac{CT}{2}).$$

■

Proposition 2.1 *L'opérateur L de B vers H admet une fermeture.*

Preuve. Soit $u_n \in D(L)$ une suite tel que :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } B, \tag{2.2.16}$$

et
$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \text{ dans } H, \tag{2.2.17}$$

alors il faut montrer que $\mathcal{F} = 0$, (i.e) $f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$.
Puisque (2.2.16) est verifié, on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q), \tag{2.2.18}$$

où $D'(Q)$ est l'espace de distribution sur Q.

En vertu de la continuité de la dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$, (2.2.18) implique que :

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q), \tag{2.2.19}$$

Selon (2.2.17), on a
$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2(Q). \tag{2.2.20}$$

Alors
$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } D$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(Q)$, on conclut de (2.2.19) et (2.2.21) que

$$f = 0.$$

selon (2.2.17), on conclut également que :

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ dans } L^2(0, \ell), \tag{2.2.22}$$

Dès que l'injection canonique de $L^2(0,l)$ dans $D\prime(0,\ell)$ est continue, on déduit que :

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi \text{ dans } D'(0,\ell), \tag{2.2.23}$$

de plus, puisque $(2.2.16)$ est vérifié et

$$||\ell_1 u_n||_{L^2(0,\ell)} \leq ||u_n||_B, \quad \forall n, \tag{2.2.24}$$

on a

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } L^2(0,\ell), \tag{2.2.25}$$

d'où

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } D'(0,\ell). \tag{2.2.26}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(0,\ell)$, on conclut de $(2.2.23)$ et $(2..2.26)$ que $\varphi = 0$.

En utilisant la même procédure, on peut montrer que $\psi = 0$.

Donc $\mathcal{F} = 0$. Cela prouve la proposition (2.1). ■

Définition 2.1 *Soit $\overline{L}$ est la fermeture de L, et $\overline{D(L)}$ son domaine .*

Une solution de l'équation opérateur $\overline{L}u = \mathcal{F}$, $\forall u \in D(\overline{L})$ s'appelle la solution forte du problème $(2.1.1) - (2.1.4)$.

En prenant la limite, l'éstimation $(2.2.1)$ peut être étendu à la solution forte, c'est à dire on a l'inégalité

$$||u||_B \leq C||\overline{L}u||_H, \qquad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{2.2.27}$$

De l'inégalité $(2.2.27)$, on a

Corollaire 2.1 *La solution forte du problème $(2.1.1) - (2.1.4)$ quand elle existe, est unique et dépend continuement du donné*

$$\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in H.$$

Corollaire 2.2 *L'image $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans H et égal à $\overline{R(L)}$, c'est à dire :*

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

Preuve. Tout d'abord, on prouve que $R(\overline{L})$ est fermé.

Soit $\mathcal{F} \in \overline{R(L)}$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(\overline{L})$ tel que :

$$\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \mathcal{F} \quad \text{dans} \quad H,$$

puisque (2.2.27) implique

$$||u_n||_B \leq C||\overline{L}u_n||_H, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

alors on déduit que la convergence de $\overline{L}u_n$ dans H implique la convergence de u_n dans B, dire

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{dans} \ \ B,$$

Puisque $\overline{L}$ est fermé, (u_n) est une suite dans $D(\overline{L})$ et

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{dans} \ \ B,$$

$$\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} \qquad \text{dans} \ \ H,$$

alors $u \in D(\overline{L})$ et $\overline{L}u = \mathcal{F}$ c'est à dire $\mathcal{F} \in R(\overline{L})$. d'où, $R(\overline{L})$ est fermé dans H.

·Maintenant, on prouve :

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}.$$

Puisque $\overline{L}$ est une extension de L, alors

$$\overline{\Gamma(L)} \subseteq \Gamma(\overline{L}),$$

où $\Gamma(L)$ est le graphe de L,

$$\Gamma(L) = \{(u, Lu); u \in D(L)\},$$

d'où,

$$R(\overline{L}) \subseteq \overline{R(L)},$$

ce qui implique

$$\overline{R(L)} \subseteq \overline{R(\overline{L})},$$

mais $R(\overline{L})$ est fermé, d'où

$$\overline{R(L)} \subseteq R(\overline{L})$$

D'autre part, soit

$$\mathcal{F} \in R(\overline{L}),$$

c'est à dire

$$\mathcal{F} = \overline{L}u, \ \ \forall u \in D(\overline{L}),$$

alors

$$(u, \mathcal{F}) \in \Gamma(\overline{L}) = \overline{\Gamma(L)},$$

c'est à dire il existe une suite $(u_n, Lu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\Gamma(L)$ tel que :

$$(u_n, Lu_n) \underset{n\to\infty}{\to} (u, \mathcal{F}), \qquad dans\ H,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & ||(u_n, Lu_n) - (u, \mathcal{F})||_H \\ = \ & ||u_n - u||_B^2 + ||Lu_n - \mathcal{F}||_H^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F} \text{ dans } H,$$

mais

$$u_n \in D(L) \forall n,$$

alors on a

$$\mathcal{F} \in \overline{R(L)},$$

et donc

$$R(\overline{L}) \subseteq \overline{R(L)}$$

D'où

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

■

2.3 La solvabilité du problème

Maintenant, on établit le résultat principal concernant l'existence de la solution du problème donné.

Théorème 2.2 *Pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in H$, il existe une solution unique forte $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ du problème $(2.1.1) - (2.1.4)$ où l'estimation*

$$||u||_B \leq C||\mathcal{F}||_H$$

est satisfait pour une constante C indépendante de u.

Preuve. De $(2.2.27)$ on conclut que l'opérateur $\overline{L}$ agissant de $D(\overline{L})$ dans $R(\overline{L})$ a un inverse $\overline{L}^{-1}$, et de **Corollaire 2.2**, on conclut du l'image $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans H.

Alors, on va prouver la densité de l'ensemble $R(L)$ dans l'espace H (i,e) $\overline{R(L)} = H$. pour cela, on a besoin de la proposition suivante. ■

Proposition 2.2 *Si pour quelque fonction $g \in L^2(Q)$ et pour tout*

$$u \in D_0(L) = \{u \in D(L) : \ell_1 u = 0, \ell_2 u = 0\},$$

nous avons :

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} = 0 \tag{2.3.1}$$

alors g disparait presque par tout dans Q.

Preuve. La relation (2.3.1) est valable pour tout élément de $D_0(L)$. Utilisant ce fait, on peut l'exprimer sous une forme spéciale.

D'abord définir la fonction φ par :

$$\varphi(x,t) = \int_t^T g(x,v)dv \tag{2.3.2}$$

Soit u_{tt} une solution de l'équation :

$$-\Im_x^2(u_{tt}) = \varphi(x,t) \tag{2.3.3}$$

et soit :

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le s, \\ \int_s^t (t-\tau)u_{\tau\tau}d\tau, & s \le t \le T, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

il découle de (2.3.2) et (2.3.3), on a :

$$g(x,t) = \Im_x^2(u_{ttt}) \tag{2.3.5}$$

Maintenant, on montre que $g(x,t) \in L^2(Q)$. ∎

Lemme 2.1 *La fonction $g(x,t)$ définie par (2.3.5) est dans $L^2(Q)$.*

Preuve. On applique les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à (2.3.3), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\Im_x^2(u_{tt})\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\varphi(x,t)\right] \\ -\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\Im_x^2(u_{tt})\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_\varepsilon\Im_x^2(u_{tt}) - \Im_x^2\rho_\varepsilon(u_{tt})\right], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\Im_x^2(u_{tt})\right]\|_{L^2(Q)}^2 \le\ & 2\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left[\varphi(x,t)\right]\|_{L^2(Q)}^2 \\ & +2\|\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_\varepsilon\Im_x^2(u_{tt}) - \Im_x^2\rho_\varepsilon(u_{tt})\right]\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur ρ_ε, on obtient :

$$|| \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \left[\Im_x^2(u_{tt})\right] ||^2_{L^2(Q)} \leq 2|| \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \left[\varphi(x,t)\right] ||^2_{L^2(Q)},$$

puisque $\rho_\varepsilon h \to h$ comme $\varepsilon \to 0$ dans $L^2(Q)$ et la norme $\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \left[\Im_x^2(u_{tt})\right]$ est borné dans $L^2(Q)$, on conclut que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Im_x^2(u_{tt})\right] = \Im_x^2(u_{ttt}) \in L^2(Q).$$

Maintenant, remplaçant g dans $(2.3.1)$ par sa représentation $(2.3.5)$, on a :

$$(u_{tt}, \Im_x^2(u_{ttt}))_{L^2(Q)} - (\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}), \Im_x^2(u_{ttt}))_{L^2(Q)} = 0, \tag{2.3.6}$$

calculant chaque terme dans $(2.3.6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(u_{tt}, \Im_x^2(u_{ttt}))_{L^2(Q)} &= \int\limits_Q u_{tt}\Im_x^2(u_{ttt})dxdt \\
&= \int_s^T \left[\Im_x(u_{tt})\Im_x^2(u_{ttt})\right]_0^\ell dt - \int\limits_Q \Im_x(u_{tt})\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
&= -\int\limits_\Omega \left[\Im_x(u_{tt})\Im_x(u_{tt})\right]_s^T dx \\
&= -\int\limits_\Omega \left[\Im_x(u_{tt})\Im_x(u_{tt})\right]_s^T dx + \int\limits_Q \Im_x(u_{tt})\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left[\Im_x(u_{tt})^2\right]_s^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,T))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,s))^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,s))^2 dx
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

$$
\begin{aligned}
& (-\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}), \Im_x^2(u_{ttt}))_{L^2(Q)} \\
= \ & -\int_Q \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x^2(u_{ttt})dxdt \\
= \ & -\int_s^T \left[a(x,t)u_x\Im_x^2(u_{ttt})\right]_0^\ell dt \\
& + \int_{Q_s} a(x,t)u_x\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \int_s^T \left[au\Im_x(u_{ttt})\right]_0^\ell dt - \int_{Q_s} u\frac{\partial}{\partial x}(a\Im_x(u_{ttt}))dxdt \\
= \ & \int_s^T \left[au\Im_x(u_{ttt})\right]_0^\ell dt - \int_{Q_s} auu_{ttt}dxdt \\
& - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & -\int_\Omega \left[auu_{tt}\right]_s^T dx + \int_{Q_s} u_{tt}\frac{\partial}{\partial t}(au)dxdt \\
& - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & -\int_\Omega \left[auu_{tt}\right]_s^T dx + \int_{Q_s} au_tu_{tt}dxdt \\
& + \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}uu_{tt}dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \int_\Omega \left[au_t^2\right]_s^T dx - \int_{Q_s} u_t\frac{\partial}{\partial t}(au_t)dxdt \\
& + \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}uu_{tt}dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \int_\Omega \left[au_t^2\right]_s^T dx - \int_{Q_s} au_tu_{tt}dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt \\
& + \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}uu_{tt}dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Omega \left[au_t^2\right]_s^T dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt \\
& + \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}uu_{tt}dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Omega \left[au_t^2\right]_s^T dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt + \int_\Omega \left[\frac{\partial a}{\partial t}u_tu\right]_s^T dx \\
& - \int_{Q_s} u_t\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial a}{\partial t}u)dxdt - \int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Omega \left[au_t^2\right]_s^T dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} \frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt + \int_\Omega \left[\frac{\partial a}{\partial t}u_tu\right]_s^T dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt-\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt-\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt\\
= & \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,T)u_t^2(x,T)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega a(x,s)u_t^2(x,s)dx\\
& -\frac{3}{2}\int_{Qs}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt+\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx\\
& -\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,s)u_t(x,s)u(x,s)dx\\
& -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt-\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{ttt})dxdt\\
= & \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,T)u_t^2(x,T)dx-\frac{3}{2}\int_{Qs}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt\\
& +\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx-\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_\Omega\left[\frac{\partial a}{\partial x}u\Im_x(u_{tt})\right]_s^T dx+\int_{Q_s}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial a}{\partial x}u)\Im_x(u_{tt})dxdt\\
= & \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,T)u_t^2(x,T)dx-\frac{3}{2}\int_{Qs}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt\\
& +\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx-\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt\\
& -\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial x}(x,T)u(x,T)\Im_x(u_{tt}(x,T))dx\\
& +\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt\\
= & \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,T)u_t^2(x,T)dx-\frac{3}{2}\int_{Qs}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt\\
& +\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx-\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt\\
& +\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt+\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

La substitution de (2.3.7) et (2.3.8) en (2.3.6) donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(x,T)u_t^2(x,T)dx \\
& -\frac{3}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt + \int_{\Omega}\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx \\
& -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt + \int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt \\
& +\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt \\
= \; & 0, \qquad (2.3.9)
\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(x,T)u_t^2(x,T)dx \\
= \; & \frac{3}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt + \int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt \\
& -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt - \int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt \\
& -\int_{\Omega}\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx, \qquad (2.3.10)
\end{aligned}$$

où $Q_s = \Omega \times [s,T]$.

En utilisant les conditions sur les coefficients de (2.3.5), et utilisant l'inégalité de $Cauchy - \varepsilon$, on estime les quatres
derniers termes dans (2.3.10) comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt &\leq c_4\int_{Q_s}uu_tdxdt \\
&\leq c_4\frac{\varepsilon_1}{2}\int_{Q_s}u^2dxdt + c_4\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{Q_s}u_t^2dxdt, \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt &\leq c_5\int_{Q_s}u\Im_x(u_{tt})dxdt \\
&\leq c_5\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{Q_s}u^2dxdt + c_5\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt, \qquad (2.3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt &\leq c_3\int_{Q_s}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt \\
&\leq c_3\frac{\varepsilon_3}{2}\int_{Q_s}u_t^2dxdt + c_3\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt, \qquad (2.3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx &\leq c_2\int_\Omega u_t(x,T)u(x,T)dx\\ &\leq c_2\frac{\varepsilon_4}{2}\int_\Omega u^2(x,T)dx + c_2\frac{1}{2\varepsilon_4}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx, \quad (2.3.14)\end{aligned}$$

Maintenant, en combinant les inégalités $(2.3.11)-(2.3.14)$ et en prenant $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1, \varepsilon_4=\frac{2c_2}{c_0}$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx\\ \leq\ & \frac{1}{2}\int_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,T)u_t^2(x,T)dx\\ =\ & \frac{3}{2}\int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial t}u_t^2dxdt + \int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}uu_tdxdt\\ & -\int_{Q_s}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial t}u\Im_x(u_{tt})dxdt - \int_{Q_s}\frac{\partial a}{\partial x}u_t\Im_x(u_{tt})dxdt\\ & -\int_\Omega\frac{\partial a}{\partial t}(x,T)u_t(x,T)u(x,T)dx\\ \leq\ & \frac{3}{2}c_2\int_{Q_s}u_t^2dxdt + c_4\frac{1}{2}\int_{Q_s}u^2dxdt + c_4\frac{1}{2}\int_{Q_s}u_t^2dxdt\\ & +c_5\frac{1}{2}\int_{Q_s}u^2dxdt + c_5\frac{1}{2}\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt\\ & +c_3\frac{1}{2}\int_{Q_s}u_t^2dxdt + c_3\frac{1}{2}\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt\\ & +\frac{c_2^2}{c_0}\int_\Omega u^2(x,T)dx + \frac{c_0}{4}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega (\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx + \frac{c_0}{4}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx\\ \leq\ & (\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2})\int_{Q_S}u_t^2dxdt + (\frac{c_4}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_S}u^2dxdt \quad (2.2)\\ & +(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt + \frac{c_2^2}{c_0}\int_\Omega u^2(x,T)dx. \quad (2.3.15)\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise l'inégalité de *Poincaré* et les inégalités élementaires ci-dessous :

$$\int_\Omega u^2(x,T)dx \leq \int_{Q_S}u^2dxdt + \int_{Q_S}u_t^2dxdt, \quad (2.3.16)$$

$$\int_Q u^2dxdt \leq 4T^2\int_Q u_t^2dxdt, \quad (2.3.17)$$

pout transformer (2.3.15) a

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\frac{c_0}{4}\int_{\Omega}u_t^2(x,T)dx \\
\leq\ & (\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2})\int_{Q_S}u_t^2dxdt+4(\frac{c_4}{2}+\frac{c_5}{2})T^2\int_{Q_S}u_t^2dxdt \\
& +(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\frac{c_2^2}{c_0}(\int_{Q_S}u^2dxdt+\int_{Q_S}u_t^2dxdt) \\
\leq\ & (\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2}+\frac{c_2^2}{c_0}+2(c_4+c_5)T^2)\int_{Q_S}u_t^2dxdt \\
& +T\frac{c_2^2}{c_0}\int_{Q_S}u_t^2dxdt+(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt,
\end{aligned}
$$

sachant que :

$$\int_{Q_S}u^2dxdt\leq C_\Omega^2\int_{Q_S}u_t^2dxdt,$$

où

$$C_\Omega^2=T,$$

alors :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\frac{c_0}{4}\int_{\Omega}u_t^2(x,T)dx \\
\leq\ & (\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2}+\frac{c_2^2}{c_0}+T(\frac{c_2^2}{c_0}+2Tc_4+2Tc_5))\int_{Q_S}u_t^2dxdt \\
& +(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt
\end{aligned} \tag{2.3.18}
$$

implique

$$
\begin{aligned}
& \min(\frac{1}{2},\frac{c_0}{4})\,(\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}u_t^2(x,T)dx) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx\ +\frac{c_0}{4}\int_{\Omega}u_t^2(x,T)dx \\
\leq\ & (\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2}+\frac{c_2^2}{c_0}+T(\frac{c_2^2}{c_0}+2Tc_4+2Tc_5))\int_{Q_S}u_t^2dxdt \\
& +(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt \\
\leq\ & \max(\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2}+\frac{c_2^2}{c_0}+T(\frac{c_2^2}{c_0}+2Tc_4+2Tc_5),(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2})) \\
& (\int_{Q_S}u_t^2dxdt+\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt),
\end{aligned}
$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2 dx \ + \int_{\Omega} u_t^2(x,T)dx \\
\leq \ &\gamma(\int_{Q_S} u_t^2 dxdt + \int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2 dxdt), \qquad (2.3.19)
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \frac{\max(\frac{3c_2}{2}+\frac{c_4}{2}+\frac{c_3}{2}+\frac{c_2^2}{c_0}+T(\frac{c_2^2}{c_0}+2Tc_4+2Tc_5),(\frac{c_3}{2}+\frac{c_5}{2}))}{\min(1,\frac{c_0}{4})}$$

Maintenant, on introduit la nouvelle fonction $v(x,t)$ définie par :

$$v(x,t) = \int_t^T u_{\tau\tau} d\tau$$

alors

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= u_t(x,T) - u_t(x,t) \\
u_t(x,t) &= v(x,s) - v(x,t)
\end{aligned}$$

car :

$$v(x,t) = u_t(x,T) - u_t(x,t),$$

donc

$$v(x,s) - v(x,t) = u_t(x,t) - u_t(x,s)$$

implique

$$\begin{aligned}
v(x,s) &= u_t(x,T) - u_t(x,s) \\
&= u_t(x,t)
\end{aligned}$$

et

$$v(x,s) = u_t(x,T)$$

car :

$$u_t(x,s) = 0$$

donc l'inégalité (2.3.19) devient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2 dx \ + \int_{\Omega} v^2(x,s)dx \\
\leq \ &\gamma(\int_{Q_S}(v(x,s)-v(x,t))^2 dxdt + \int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2 dxdt),
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ &\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,s)dxdt\\
&+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt-2\int_{Q_s}v(x,s)v(x,t)dxdt).
\end{aligned}$$

Si on applique l'inégalité de $Cauchy$ sur les derniers termes à droit de $(2.3.20)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ &\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,s)dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt\\
&+\int_{Q_S}v^2(x,s)dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt)\\
\leq\ &2\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,s)dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt)
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx\ +\int_{\Omega}v^2(x,s)dx-2\gamma\int_{Q_S}v^2(x,s)dxdt\\
\leq\ &2\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt)
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+(1-2\gamma(T-s))\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ &2\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt).
\end{aligned}\tag{2.3.21}$$

Si $s_0\geq 0$ satisfait $1-2\gamma(T-s_0)=\frac{1}{2}$, alors $(2.3.21)$ implique

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx\ +\frac{1}{2}\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ &2\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt),
\end{aligned}$$

imlique

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ & 2\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ & 4\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
\leq\ & 4\gamma(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt),
\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

pour tout $s\in[T-s_0,T]$

Si on note la somme des inégalités à droit de $(2.3.22)$ par $L(s)$,(i,e)

$$L(s)=\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{ds} &= \frac{d}{ds}(\int_{Q_s}(\Im_x u_{tt})^2dxdt+\int_{Q_S}v^2(x,t)dxdt)\\
&= \frac{d}{ds}\int_s^T(\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt})^2dx)dt+\frac{d}{ds}\int_s^T(\int_{\Omega}v^2(x,t)dx)dt\\
&= \int_s^T\frac{d}{ds}(\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt})^2dx)dt+\frac{dT}{ds}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,T))^2dx\\
&\quad -\frac{d}{ds}\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx\\
&\quad +\int_s^T\frac{d}{ds}(\int_{\Omega}v^2(x,t)dx)dt+\frac{dT}{ds}\int_{\Omega}v^2(x,T)dx\\
&\quad -\frac{ds}{ds}\int_{\Omega}v^2(x,s)dx\\
&= -\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx-\int_{\Omega}v^2(x,s)dx,
\end{aligned}$$

implique

$$\int_{\Omega}(\Im_x u_{tt}(x,s))^2dx+\int_{\Omega}v^2(x,s)dx=-\frac{dL}{ds},$$

ce qui implique que :

$$-\frac{dL}{ds}\leq 4\gamma L(s)\tag{2.3.23}$$

implique

$$0 \leq 4\gamma L(s) + \frac{dL}{ds}$$

d'où

$$\exp(4\gamma s)\frac{dL}{ds} + 4\gamma \exp(4\gamma s)L(s) \geq 0$$

c'est à dire

$$\frac{d}{ds}\left(\exp(4\gamma s)L(s)\right) \geq 0, \tag{2.3.24}$$

en intégrant $(2.3.24)$ sur $[s, T]$, on obtient :

$$\exp(4\gamma s)L(s) \leq 0, \tag{2.3.25}$$

si suite alors de $(2.3.25)$ que

$$g(x,t) = 0$$

presque par tout dans Q_{T-s_0}

Procédant de cette manière étape par étape, on prouve que $g = 0$ presque par tout dans Q.

Maintenant, on retourne au théorème de preuve $(2.3.1)$. on va prouver que

$$\overline{R(L)} = H$$

Depuis H est l'espace de Hibert, et si

$$\begin{aligned} (Lu, G)_H &= (\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} + (\ell_1 u, g_1)_{L^2(0,\ell)} + (\ell_2 u, g_2)_{L^2(0,\ell)} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

où

$$G = (g, g_1, g_2) \in R(L)^{\perp},$$

il faut montrer que

$$\begin{aligned} G &= (g, g_1, g_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

en mettant $u \in D_0\,(L)$ dans $(2.3.26)$, on a

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} = 0, \tag{2.3.27}$$

en vertu de la **proposition 2.2,** on conclut que

$$g \equiv 0,$$

Alors (2.3.26) prend la forme

$$(\ell_1 u, g_1)_{L^2(0,\ell)} + (\ell_2 u, g_2)_{L^2(0,\ell)} = 0.$$

Puisque les quantités $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ peut disparaître indépendamment et les images des opérateurs de trace ℓ_1 et ℓ_2 sont
denses dans l'espace de Hilbert $L^2(Q)$, respectivement, alors

$$g_1 = g_2 = 0.$$

Donc

$$G = 0,$$

et ce donne

$$R(L)^{\perp} = \{0\},$$

D'où

$$\overline{R(L)} = H.$$

ceci termine la preuve du théorème (2.2). ■

Chapitre 3

Sur un problème mixte pour une équation parabolique avec conditions classiques

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une équation parabolique linéaire du quatriéme ordre avec les conditions classiques. Nous prouvons l'existance et l'unicité d'une solution forte généralisée du problème donné.

3.1 Position du problème

On étudie le problème mixte suivant pour une équation parabolique du quatriéme ordre. On cherche pour une fonction $u : Q \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ &= f(x,t) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\ell u = u(x,0) = \varphi(x), \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) &= 0, \\ u(\ell,t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\ell,t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Dans ce domaine borné

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times [0,T] \\ &= (0,l) \times [0,T], \end{aligned}$$

et où f, φ sont des fonctions et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont des constantes positives.

Pour étudier le probléme $(3.1.1) - (3.1.3)$, nous utilisons l'espace de Hilbert $L^2(Q)$, et l'espace de Sobolev $W_2^{2,0}(Q)$ avec la
norme associée :

$$||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} = ||u||^2_{L^2(Q)} + ||u_x||^2_{L^2(Q)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q)}.$$

le probléme $(3.1.1) - (3.1.3)$ peut etre considéré comme résolvant l'équation opérateur

$$\begin{aligned} Lu &= (\mathcal{L}u, \ell u) \\ &= (f, \varphi), \end{aligned}$$

où L est un opérateur non borné défini sur B vers H, où B est un espace de Banach de fonction $u \in L^2(Q)$ ayant la norme finie définie par :

$$||u||^2_B = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \left\{ ||u(x,\tau)||_{L^2(0,\ell)} \right\} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)},$$

et H est l'espace de Hilbert $L^2(0,\ell) \times L^2(Q)$ avec une norme :

$$||Lu||^2_H = ||\varphi||^2_{L^2(0,\ell)} + ||f||^2_{L^2(Q)} p$$

pour le probléme $(3.1.1) - (3.1.3)$, on assigne l'operateur $L = (\mathcal{L}, \ell)$ avec un domaine de définition

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(Q), \text{ tel que} \\ u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxt}, u_{xxx}, u_{xxxx} \in L^2(Q) \end{array} \right\},$$

satisfaisant les conditions aux limites $(3.1.3)$.

3.2 L'unicité de la solution

Théorème 3.1 *Pour toutes fonctions $u \in D(L)$, il existe une constante positive K indépendante de u tel que*

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\left\{||u(x,\tau)||^2_{L^2(0,\ell)}\right\}+||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)}\leq K(||\varphi(x)||^2_{L^2(Q)}+||f||^2_{L^2(Q)}) \tag{3.2.1}$$

Preuve. Considérant le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau)$ de l'equation $(3.1.1)$ et l'opérateur

$$Mu=u, \tag{3.2.2}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_\tau &= \Omega\times(0,\tau)\\ &= (0,l)\times(0,\tau),\tau\in(0,T)\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}(Mu,\mathcal{L}u)_{L^2(Q_\tau)} &= (u_t,u)_{L^2(Q_\tau)}-(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x},u)_{L^2(Q_\tau)}\\ &\quad-(\alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u)_{L^2(Q_\tau)}+(\alpha_3 u,u)_{L^2(Q_\tau)}\\ &\quad+(\alpha_4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},u)_{L^2(Q_\tau)},\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

on considére séparément les intégrales de l'égalité $(3.2.3)$.on intégrant par partie et on prenant en compte les conditions
aux bord $(3.1.3)$,on obtient :

$$
\begin{aligned}
(u_t, u)_{L^2(Q_\tau)} &= \int_{Q_\tau} u_t u dx dt \\
&= \int_0^l \int_0^\tau u_t u dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^\tau 2u_t u dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l (\int_0^\tau 2u_t u dt) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \left[u^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau) dx - \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau) dx - \frac{1}{2}\int_0^l \varphi^2(x,0) dx \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}, u)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int_{Q_\tau} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} u dx dt \\
&= -\alpha_1 \int_0^l \int_0^\tau u_x . u dx dt \\
&= \frac{-\alpha_1}{2} \int_0^\tau (\int_0^l 2u_x . u dx) dt \\
&= \frac{-\alpha_1}{2} \int_0^\tau \left[u^2\right]_0^l dt \\
&= \frac{-\alpha_1}{2} \int_0^\tau u^2(l,t) dt + \frac{\alpha_1}{2}\int_0^\tau u^2(0,t) dt \\
&= 0 \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int\limits_{Q_\tau}\alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udxdt \\
&= -\alpha_2\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udxdt \\
&= -\alpha_2\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau u_{xx}udxdt \\
&= \alpha_2\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau u_x^2dxdt-\alpha_2\int\limits_0^\tau\left[u_xu\right]_0^l dt \\
&= \alpha_2\int\limits_{Q_\tau}u_x^2dxdt-\alpha_2\int\limits_0^\tau(u(\ell,t)u_x(\ell,t) \\
&\quad -u(0,t)u_x(0,t))dt \\
&= \alpha_2\int\limits_{Q_\tau}u_x^2dxdt \\
&= \alpha_2||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)},
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha_3u,u)_{L^2(Q_\tau)} &= \alpha_3\int\limits_{Q_\tau}uudxdt \\
&= \alpha_3||u||^2_{L^2(Q_\tau)},
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, u)_{L^2(Q_\tau)} &= \alpha_4\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.udxdt \\
&= \alpha_4\int\limits_{Q_\tau}u_{xxxx}.udxdt \\
&= \alpha_4\int\limits_0^\tau\left[u_{xxx}.u\right]_0^l dt-\alpha_4\int\limits_{Q_\tau}u_x u_{xxx}dxdt \\
&= -\alpha_4\int\limits_{Q_\tau}u_x u_{xxx}dxdt \\
&= -\alpha_4\int\limits_0^\tau\left[u_x u_{xx}\right]_0^l dt+\alpha_4\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{xx}^2\right]dxdt \\
&= \alpha_4\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{xx}^2\right]dxdt \\
&= \alpha_4||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)}.
\end{aligned}$$

Substitution $(3.2.4)-(3.2.8)$ dans $(3.2.3)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l\varphi^2(x)dx+\alpha_2||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)} \\
&+\alpha_3||u||^2_{L^2(Q_\tau)}+\alpha_4||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\
=&\int\limits_{Q_\tau}fudxdt.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy

$$ab\leq\frac{1}{2}|a|^2+\frac{1}{2}|b|^2$$

On obtient :

$$\int\limits_{Q_\tau}fudxdt\leq\frac{1}{2}||f||^2_{L^2(Q_\tau)}+\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(Q_\tau)} \tag{3.2.10}$$

a partir de $(3.2.9)$ et $(3.2.10)$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)}+\alpha_2||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)}+\alpha_3||u||^2_{L^2(Q_\tau)}+\alpha_4||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\
\leq\;&\frac{1}{2}||f||^2_{L^2(Q_\tau)}+\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(Q_\tau)}+\frac{1}{2}||\varphi||^2_{L^2(Q_\tau)}
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Il découle de(3.2.11) que :

$$\begin{aligned} & ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\ \leq \; & c(||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{1}{2\min(1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}.$$

Application de Lemme de Gronwalls :

$$\Im_\tau f_{1+} f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c\Im_\tau f_2,$$

alors

$$\Im_\tau f_{1+} f_2(\tau) \leq \exp(c\tau) f_3(\tau),$$

a (3.2.12), donne :

$$\begin{aligned} ||u(x,\tau)||_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q_\tau)} \;\; & \leq \;\; c||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + c||\varphi||^2_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + c\int_0^\tau ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

implique :

$$||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q_\tau)} \leq c\exp(c\tau)(||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}), \tag{3.2.13}$$

tel que

$$\begin{aligned} \Im_\tau f_1 &= ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q_\tau)}, f_2(\tau) \\ &= ||u(x,\tau)||_{L^2(\Omega)}, f_3(\tau) \\ &= ||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

comme le coté droit de (3.2.14) ne dépend pas de τ, en prenant la limite supérieure des deux cotés et en respectant
$\tau \in [0,T]$, on obtient :

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\left[||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q_\tau)}\right] \leq c\exp(cT)(||f||^2_{L^2(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)})$$

implique

$$\begin{aligned} & \sup_{0\leq\tau\leq T}\left\{ ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\right\} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \\ \leq \; & c\exp(cT)(||f||^2_{L^2(Q_T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & ||u(x,\tau)||^2_{C(0.T,L^2(0,\ell))} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \\ \leq \; & K(||f||^2_{L^2(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}) \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

où

$$K = c\exp(cT).$$

■

Proposition 3.1 *L'opérateur L de B vers H est fermable.*

Preuve. *Soit $u_n \in D(L)$ une suite tel que :*

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } B \tag{3.2.16}$$

et

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F} = (f,\varphi) \text{ dans } H. \tag{3.2.17}$$

On montre que

$$\mathcal{F} = 0,$$

(i.e)

$$f = 0, \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

Puisque (3.2.16) est verifié, on a :

$$u_n \to 0 \text{ dans } D'(Q) \tag{3.2.18}$$

où $D'(Q)$ est l'espace de distribution sur Q.

En vertu de la continuité de derivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$, (3.2.18) implique que

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } D'(Q) \tag{3.2.19}$$

Selon (3.2.17), on a

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} f \text{ dans } L^2(Q), \tag{3.2.20}$$

alors

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} f \text{ dans } D'(Q), \tag{3.2.21}$$

en vertu de l'unicité de la limite dans $D\prime(Q)$*, on conclut de* $(3.2.19)$ *et* $(3.2.21)$ *que*

$$f = 0,$$

selon $(3.2.17)$*, on conclut également que*

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi \text{ dans } L^2(0,l), \tag{3.2.22}$$

du fait que l'injection canonique $L^2(0,l) \hookrightarrow D\prime(0,l)$ *est continue, on en déduit que :*

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi \; dans \; D'(0,l), \tag{3.2.23}$$

de plus, puisque $(3.2.16)$ *est satisfé et*

$$||\ell u_n||_{L^2(\grave{a},l)} \leq ||u_n||_B, \quad \forall n, \tag{3.2.24}$$

on a

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \;\; dans \; L^2(0,l), \tag{3.2.25}$$

de la

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \;\; dans \; D'(0,l). \tag{3.2.26}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D\prime(0,l)$*, on conclu de* $(3.2.23)$ *et* $(3.2.26)$ *que* $\varphi = 0$.
donc $\mathcal{F} = 0$*.Cela prouve* ***la poposition 3.1.*** $\blacksquare$
Soit $\overline{L}$ *la fermeture de* L*, et* $\overline{D(L)}$ *son domaine.*

Définition 3.1 *la solution de l'équation*

$$\overline{L}u = \mathcal{F},$$

pour tout $u \in D(\overline{L})$
est appelée solution forte de probléme $(3.1.1) - (3.1.3)$.
Par passage à la limite, on prolonge l'estimation $(3.2.1)$ *aux solutions fortes*

$$||u||_B \leq c||\overline{L}u||_H, \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{3.2.27}$$

A partir de cette inégalité on a

Corollaire 3.1 *La solution de probléme* $(3.1.1) - (3.1.3)$ *quand elle existe est unique et depend continument du données.*

$$\mathcal{F} = (f, \varphi) \in H$$

Preuve. L'unicité de solution est due à l'inégalité $(3.2.1)$.

Pour la dépendance continue de la solution forte du données

$$F = (f, \varphi) \in H.$$

On suppose qu'il existe une solution forte

$$u = (\overline{L})^{-1}F,$$

du probléme

$$\overline{L}u = F,$$

et si de plus

$$u_1 = (\overline{L})^{-1}F,$$

est une autre solution du meme probléme, avec second membre F_1, On a :

$$||u - u_1||^2 \leq c||\overline{L}(u - u_1)||^2 = c||F - F_1||^2,$$

Ce qui signifie qu'une faible variation du second membre F n'entraine qu'une faible variation de solution. ■

Corollaire 3.2 *L'image $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans H est égal à $\overline{R(L)}$, (i.e)*

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

3.3 Solvabilité du problème

Maintenant, on est en une position de situer le resultat générale du problème posé $(3.1.1) - (3.1.3)$.

Théorème 3.2 *Pour tout*

$$\mathcal{F} = (f, \varphi) \in H,$$

il existe une seul solution forte

$$\begin{aligned} u &= (\overline{L})^{-1}\mathcal{F} \\ &= \overline{L^{-1}}\mathcal{F}, \end{aligned}$$

de problème $(3.1.1)-(3.1.3)$ *où l'estimation*

$$||u||_B \leq c||F||_H,$$

est satisfé,et c *est une constante positive ne depent pas de* u.

Preuve. *De* $(3.2.27)$ *on conclut que l'operateur* $\overline{L}$ *de domaine* $D(\overline{L})$ *dans* $R(\overline{L})$ *a un inverse* $\overline{L}^{-1}$, *et de* ***corollaire 3.2.5 ,*** *on conclut que l'image* $R(\overline{L})$ *de l'opèrateur* $\overline{L}$ *est fermé dans* H.

Alors on va prouver la densité de l'ensemble R(L) dans l'espace H. (i.e)

$$\overline{R(L)} = H.$$

pour ça on a besoin la proposition suivante : ■

Proposition 3.2 *Si pour certain fonction* $g \in L^2(Q)$ *et pour tout*

$$\{u \in D_0(L) = u \in D(L) : \ell u = 0\},$$

on a

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} = 0, \tag{3.3.1}$$

Alors g *s'annulent presque partout dans* Q.

Preuve. *La relation* $(3.3.1)$ *est verifié pour chaque élèment de* $D_0(L)$*.En utilisant ce fait, on peut l'exprimer sous une forme spéciale.*

Premièrement, on définit la fonction φ *par*

$$\varphi(x,t) = \int_t^T g(x,\upsilon)d\upsilon, \tag{3.3.2}$$

Soit

$$u_t = \int_t^T g(x,\upsilon)d\upsilon, \tag{3.3.3}$$

Et soit

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t u_\tau d\tau, & s \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.3.4}$$

il découle de $(3.3.3), (3.3.4)$, *que*

$$g(x,t) = -u_{tt} \tag{3.3.5}$$

■

Lemme 3.1 *La fonction $g(x,t)$ définit par $(3.3.5)$ est dans $L^2(Q)$.*

Preuve. *La preuve peut etre établie comme dans le chapitre 2 .*

Maintenant, remplaçant g dans $(3.3.1)$ par son representation $(3.3.5)$, les relations $(3.3.2)-(3.3.4)$

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_3 u+\alpha_4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},-u_{tt})_{L^2(Q)}\\ =\ &0\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Calculant chaque terme dans $(3.3.6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(u_t,-u_{tt})_{L^2(Q)} &= -\int_Q u_t u_{tt}dxdt\\ &= -\int_0^l\int_0^T u_t u_{tt}dxdt\\ &= \int_0^l\int_s^T u_t u_{tt}dxdt\\ &= \int_{Q_s} u_t u_{tt}dxdt-\int_0^l\left[u_t^2\right]_s^T,\end{aligned}$$

alors

$$-2\int_Q u_t u_{tt}dxdt=-\int_0^l\left[u_t^2\right]_s^T,$$

d'où

$$\begin{aligned}-\int_Q u_t u_{tt}dxdt &= -\frac{1}{2}\int_\Omega\left[(u_t^2)\right]_s^T dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t(x,T))^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t(x,s))^2dx\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega(u_t(x,s))^2dx\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 u_x, -u_{tt})_{L^2(Q)} &= \int\limits_{Q} \alpha_1 u_x u_{tt} dx dt \\
&= \alpha_1 \int\limits_0^l \int\limits_0^T u_x u_{tt} dx dt \\
&= \alpha_1 \int\limits_0^l [u_x u_t]_s^T dx - \alpha_1 \int\limits_{Q_s} u_t u_{xt} dx dt \\
&= \alpha_1 \int\limits_0^l [u_x u_t]_s^T dx - \alpha_1 \int\limits_{Q} u_t u_{xt} dx dt \\
&= \alpha_1 \int\limits_0^l [u_x(T,x)u_t(T,x) - u_x(s,x)u_t(s,x)] dx - \alpha_1 \int\limits_{Q} u_t u_{xt} dx dt \\
&= -\alpha_1 \int\limits_{Q} u_t u_{xt} dx dt \\
&= -\alpha_1 \int\limits_s^T [u_t^2]_0^l dt + \alpha_1 \int\limits_{Q} u_t u_{xt} dx dt \\
&= -\alpha_1 \int\limits_s^T [u_t^2]_0^l dt + \alpha_1 \int\limits_0^l [u_t u_x]_0^T dx - \alpha_1 \int\limits_{Q} u_x u_{tt} dx dt
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
2\int\limits_{Q} \alpha_1 u_x u_{tt} dx dt &= -\alpha_1 \int\limits_s^T [u_t^2]_0^l dt \\
\int\limits_{Q} \alpha_1 u_x u_{tt} dx dt &= \frac{-\alpha_1}{2} \int\limits_s^T [u_t^2]_0^l dt \\
&= \frac{-\alpha_1}{2} \int\limits_s^T [u^2(t,l) - u^2(t,l)] dt \\
&= \frac{-\alpha_1}{2} [2u_t(t,l)u(t,l) - 2u_t(t,0)u(t,0)]_s^T \\
&= 0 \qquad (3.3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-\alpha_2 u_{xx}, -u_{tt}) &= \int\limits_Q \alpha_2 u_{xx} u_{tt} dx dt \\
&= \alpha_2 \int\limits_0^l \int\limits_s^T u_{xx} u_{tt} dx dt \\
&= \alpha_2 \int\limits_0^l \left[u_t u_{xx}\right]_s^T - \alpha_2 \int\limits_{Q_s} u_t u_{xxt} dx dt \\
&= -\alpha_2 \int\limits_{Q_s} u_t u_{xxt} dx dt \\
&= -\alpha_2 \int\limits_s^T \left[u_{xt} u_t\right] dt + \alpha_2 \int\limits_{Q_s} u_{tx} u_{xt} dx dt \\
&= \alpha_2 \int\limits_{Q_s} u_{tx} u_{xt} dx dt \\
&= \alpha_2 \int\limits_{Q_s} u_{xt}^2 dx dt, \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha_3 u, -u_{tt})_{L^2(Q)} \\
&= \alpha_3 \int\limits_Q u.u_{tt} dx dt \\
&= -\alpha_3 \int\limits_0^l \left[u.u_t\right]_s^T dx + \alpha_3 \int\limits_{Q_s} u_t.u_t dx dt \\
&= \alpha_3 \int\limits_{Q_s} u_t^2 dx dt, \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_4 u_{xxxx}, -u_{tt})_{L^2(Q)} &= -\int_Q \alpha_4 u_{xxxx} u_{tt} dxdt \\ &= \alpha_4 \int_s^T [u_{xxx} u_{tt}]_0^l \, dt + \alpha_4 \int_{Q_s} u_{xxx} u_{ttx} dxdt \\ &= \alpha_4 \int_s^T [u_{xx} u_{ttx}]_0^l \, dt - \alpha_4 \int_{Q_s} u_{xx} u_{ttxx} dxdt \\ &= \alpha_4 \int_0^l [u_{txx} u_{xx}]_s^T \, dx + \alpha_4 \int_{Q_s} u_{txx}^2 dxdt \\ &= \alpha_4 \int_{Q_s} u_{txx}^2 dxdt. \qquad (3.3.11)\end{aligned}$$

Substitution de $(3.3.7) - (3.3.11)$ *dans* $(3.3.6)$ *donne*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t(x,s))^2 dx + \alpha_2 \int_{Q_s} u_{xt}^2 dxdt \\ &+\alpha_3 \int_{Q_s} u_t^2 dxdt + \alpha_4 \int_{Q_s} u_{txx}^2 dxdt \\ = \ & 0 \qquad (3.3.12)\end{aligned}$$

Il suit de $(3.3.12)$ *que*

$$\begin{aligned}g(x,t) &= -u_{tt} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pour tout $(x,t) \in Q_s = \Omega \times [s,T]$.
Procédant de cette façon étape par étape le long des cylindres de hauteurs on prouve que $g = 0$ *p.p dans* Q.
Pour completer la preuve de théoreme $(3.3.1)$, *on suppose que pour certains élèment*

$$G = (g, g_1) \in R(L)^\perp,$$

$$
\begin{aligned}
(Lu, G)_H &= (\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} + (\ell u, g_1)_{L^2(0,l)} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

On doit prouver que

$$G = 0$$

. *Si on supose que* $u \in D_0(L)$ *dans* $(3.3.13)$, *on a*

$$(Lu, g)_{L^2(Q)} = 0, \quad \forall u \in D_0(L). \tag{3.3.14}$$

En vertu de proposition $(3.3.2)$, *on conclut que*

$$g \equiv 0.$$

Ainsi $(3.3.13)$ *prend la forme*

$$(\ell u, g_1)_{L^2(0,l)} = 0. \tag{3.3.15}$$

Puisque l'image $R(L)$ *de l'opérateur trace* ℓ *est dense dans* $L^2(0,l)$, *alors la relation* $(3.3.15)$ *implique que*

$$g_1 = 0.$$

Par conséquent

$$G = 0,$$

et cela donne

$$R(L)^{\perp} = \{0\}.$$

de la

$$\overline{R(L)} = H.$$

cela complete la preuve de théorème (3.2). ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode de l'estimation à priori pour montrer l'unicité de deux problème pour une équation hyperbolique du seconde ordre en combinant une condition classique et une condition intégrale et 'une équation parabolique linéaire du quatriéme ordre avec les conditions classiques.

Notre objectif ultime aprés ce travail de ce mémoire est de traiter d'autres problèmes mixtes non locaux plus compliqués non linéaires avec conditions non locales.

Bibliographie

[1] Assila M, Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system, Applied Math Letters. **13** (2000), 71-76.

[2] Beilin SA. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. Electron. J. Diff. Eqns. 2006 ; **103 :** 1-10.

[3] Bouziani, A. : Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. J. Appl.Math. Stoch. Anal. 9, 323–330 (1996).

[4] Bouziani A, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, Nonlinear Analysis 55 (2003) 883-904.

[5] Bouziani A, Strong solution for a mixed problem with a nonlocal condition for certain pluriparabolic equations. Horishima. Math. J. 27 (1997), 373-390.

[6] Cannon, R. : The solution of heat equation subject to the specification of energy. Q. Appl. Math. 21(2),155–160 (1963).

[7] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Ferreira, J. : Existence and uniform decay for nonlinearviscoelastic equation with strong damping. Math. Methods Appl. Sci. 24, 1043–1053 (2001).

[8] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. : Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. 2002(44).

[9] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003).

[10] Choi. Y.S and Chan. K.Y. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electro-chemestry. Nonlinear Anal. 18 (1992), 317-331.

[11] Dafermos C. M and L. Hsiao, Development of singularities in solutions of the equations on nonlinear thermoelasticity system, Q. Appl. Math **44** (1986), 463-474.

[12] Dezin A.A., Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes auxlimites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh.Math. Naouk. 14. N 3. (37). 22-73. 1959.

[13] Ewing. R.E and Lin. T. A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media. Adv. water resour. 14 (1991), 89-97.

[14] Garding L., Cauchy problem for hyperbolic equations, Lecture notes, University of Chicago, 1957.

[15] Hrusa W. J. and S. A. Messaoudi, On formation of singularities on one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal **3** (1990), 135-151.

[16] Ionkin, N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundaryconditions. Differ. Uravn. 13(2), 1177–1182 (1977).

[17] Ionkin, N.I., Moiseev, E.I. : A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition.Differ. Uravn. 15(7), 1284–1295 (1979).

[18] Kamynin, N.I. : A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition. TH. Vychisl. Mat. Fiz. 43(6), 1006–1024 (1964).

[19] Kartynnik, A.V. : Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second order parabolic equation. Differ. Equ. 26, 1160–1162 (1990).

[20] Kirane, M., Tatar, N.E. : A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 6, 1–7 (1999).

[21] Kirane M. and Tatar N., A nonexistence result to a Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl. **254** (2001), 71-86.

[22] LadyzenskayaO.A., Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obš. 7, 1958.

[23] Ladyzenskaya O.A., On solution of nonstationary operator equations, Mat. Sbornik 39(1956), No 4.

[24] Ladyzhenskaya O.A., The boundary value problems of Mathematical physics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[25] Leray J., Lectures on hyperbolic dierential equations with variable coefficients, Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[26] Mesloub S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. J. Math. Anal. Appl. 2006 ; **316** : 189-209.

[27] Mesloub S. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. 2008 ; **68** : 2594-2607.

[28] Mesloub S. Mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation. Math. Meth. Appl. Sci. 2010, 33 57–70, DOI : 10.1002/mma.1150.

[29] Mesloub S, On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 203-219.

[30] Mesloub S and Bouziani A, On a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol **22** N°**3** (1999), 511-519.

[31] Mesloub, S., Bouziani, A. : Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equationwith Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch. Anal. 15(3), 291–300 (2002).

[32] Mesloub, S., Bouziani, A. : Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classed'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. 6, 59–69 (1998).

[33] Mesloub S, Lekrine N. On a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta. Sci. Math. (Szeged). 2004 ; **70** : 65-75.

[34] Mesloub S, Messaoudi SA. A three point boundary value problem with a nonlocal condition for a hyperbolic equation. Elect. J. Diff. Eqns. 2002 ; **62** : 1-13.

[35] Mesloub S, Messaoudi SA. A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Elect. J. Diff. Eqns. 2003 ; **30** : 1-17.

[36] Messaoudi, S.A., Tatar, N.E. : Global existence asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem. Math. Methods Sci. Res. J. 7(4), 136–149 (2003)

[37] Messoudi S. A, On weak solutions of semilinear thermoelastic equations, Magreb math. Review, Vol **1** No 1 (1992), 31-40.

[38] Messoudi S. A, A blow up result in a multidimensional semilinear thermoelasticity system, Electron. J. Differential. Equations,Vol. **2001** No. 30 (2001) 1-9.

[39] Munoz Rivera J. E. and R. K. Barreto, Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity, Nonlinear Analysis **31** No. **1/2** (1998), 149-162.

[40] Munoz Rivera J. E. and R. Racke, Smoothinfg properties, decay, and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelasticity type, SIAM J. Math. Anal, **26** (1995), 1547-1563.

[41] Muravei LA, Philinovskii AV. On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation. Matem. zametki. 1993 **54** : 98-116.

[42] Nakushev AM. On certain approximate method for boundary value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics. Differenentsialnie Uravnenia. 1982 ; **18** : 72-81.

[43] Pulkina LS. *A* nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. Electron. J. Diff. Eqns. 1999 ; **45** : 1-6.

[44] Racke R, blow up in nonlinear three dimensional thermoelasticity, Math. Methods Appl. Sci. **12** No **3** (1990), 273-276.

[45] Racke R, and Y. Shibata, Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **116** (1991), 1-34.

[46] Racke R, and Y. G. Wang, Propagation of singularities in one-dimensional thermoelasticity, J. Math. Anal. Appl, **223** (1998), 216-247.

[47] Shi. p. and Shilor. Design of contact patterns in one dimensional Termoelasticity, in theoretical aspects of industrial design. SIAM, Philadelphia (1992).

[48] Slemrod M. Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical solutions in one-dimensional thermoelasticity, Arch. rational. Mech. Anal. **76** (1981), 97-133.Théorème 4.3 donne le résultat.

[49] Yurchuk N. I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differential Equations, 22, (1986), pp. 1457-1463.

[50] D. Bahuguna, S. Abbas, J. Dabas, Partial functional dierential equation with an integral boundary condition and application to population dynamics, Nonlinear Anal. TMA 69 (2008) 2623 2635.