



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de *MASTER*
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : *EDP et Applications*

Thème

Analyse et dynamiques de quelques 3D systèmes chaotiques

Présenté Par :

KAMEL Zina
BOUALI Amel

Devant le jury :

<i>Mr. OUANNASSE Adel</i>	<i>MCA</i>	<i>Université Larbi Tébessa</i>	<i>Président</i>
<i>Mr. BOUGHERARA Liazid</i>	<i>MAA</i>	<i>Université Larbi Tébessa</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr. FAREH Hannachi</i>	<i>MCA</i>	<i>Université Larbi Tébessa</i>	<i>Encadreur</i>

Date de soutenance : 20/06/2019

شكر و تقدير

بعد رحلة بحث و جهد تكلفت بإنجاز هذا البحث, نحمد الله عز و جل على نعمه التي من بها علينا فهو العلي القدير, و الصلاة و السلام على رسول الله و على اله و صحبه اجمعين.

كما لا يسعنا الا ان نخص بأسمى عبارات الشكر و التقدير الدكتور "فارح حناشي" لما قدمه لنا من توجيه و نصح و معرفة طيلة انجاز هذا البحث.

كما نتقدم بالشكر الجزيل لكل من اسهم في تقديم يد العون لإنجاز هذا البحث.

ونتقدم بالشكر للذين كانوا عوننا لنا في بحثنا هذا و نورا يضيء الظلمة التي كانت تقف احيانا في طريقنا.

و نشكر كل من زرعوا التفاؤل في دربنا و قدموا لنا المساعدات و التسهيلات, و نخص بالذكر اهلنا الكرام لهم منا كل الحب و الاحترام.

كما نتقدم بالشكر و العرفان للسادة الافاضل في لجنة المناقشة.

ولا ننسى ان نتوجه بالشكر لكل اساتذة و استاذات جامعة تبسة و على وجه الخصوص اساتذتنا في قسم الرياضيات و الاعلام الالي.

وفي النهاية نشكر كل طلبة الرياضيات اللذين كانوا بجانبنا طيلة ايام الدراسة.

شكرا.

Remerciement

Après un voyage de recherche et d'effort qui a abouti à l'achèvement de cette recherche, nous Dieu Tout-Puissant pour les bénédictions que nous avons sur lui est le Tout-Puissant, et la prière et la paix sur le Messager d'Allah, sa famille et ses compagnons.

Nous ne pouvons pas ne pas exprimer nos remerciements et notre reconnaissance au Dr. Fareh Hannachi pour ses conseils, ses connaissances tout au long de cette recherche.

Nous voudrions également remercier toutes les personnes qui ont contribué à cette recherche.

Nous remercions ceux qui nous ont aidés dans notre recherche, et la lumière illumine les ténèbres qui se dressaient parfois sur notre chemin.

Nous remercions tous ceux qui ont semé l'optimisme sur notre voie et nous ont fourni assistance et installations, en particulier nos proches ont tout notre amour et notre respect.

Nous adressons également nos remerciements et également nos remerciements et notre gratitude au distingué président Nous voudrions remercier tous les professeurs et professeurs de l'Université de Tébessa, en particulier nos professeurs du Département de mathématiques et d'informatique.

Enfin, nous remercions tous les étudiants en mathématiques qui nous ont accompagnés tout au long de leur scolarité.

Merci

الاهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الهي لا يطيب الليل الا بشكرك.. ولا يطيب النهار الا بطاعتك.. ولا تطيب اللحظات الا بذكرك.. ولا تطيب الاخرة الا بعفوك.. ولا تطيب الجنة الا برويتك..

الله عز وجل

الى من بلغ الرسالة.. و ادى الامانة.. و نصح الامة.. الى نبي الرحمة و نور العالمين..

سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم

الى من علمني العطاء بدون انتظار.. الى من احمل اسمه بكل افتخار.. الى مصدر قوتي.. و سندي في الحياة.. الى من رباني صغيرة.. و رعاني شابة.. الى من تهمة ابتسامتي.. الى بدر التمام..

ابي العزيز

الى ملاكي في الحياة.. الى معنى الحب و التفاني.. الى بسمه الحياة و سر الوجود.. الى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي.. الى من سهرت الليالي و نسيت الغوالي و حملت همي غير مبالية.. الى اعلى الحبايب..

امي الحبيبة

الى من ساندتني منذ ان حملت حقيبة صغيرة و ما تزال تساندني حتى الان.. الى نبض قلبي و بحر الحنان.. الى نبع الامل و الامان.. الى من رفعت الايادي دعاء و ايقنت بالله املا.. الى اعلى الغوالي و احب الاحباب..

جنتي الثالية مباركة

الى الوردة الجميلة ذات القلب الطيب.. الى الشمعة التي انارت دربي.. الى توأمي ورفيقة دربي

اختي نواره

الى اصغر عائلتنا و منبع فرحنا.. الى اجمل الماسة.. الى احلى بنوته..

اختي اسراء

الى اخي الغالي تاج راسي.. و سندي في الحياة

اخي علي

الى من ارى التفاؤل بعينه و السعادة في ضحكته

اخي باشا

الى امي الثانية **برنية**.. الى اختي **سمرة**.. الى اولاد اختي **اسامة, ايمن, كمال,** و الزهرة الجميلة **احلام.**

الى كل اخوالي و خالاتي و اخص بالذكر **خالي عبد الوهاب**

الى كل اعمامي و عماتي

الى جدتي **تركية** و جدتي **العارفة**

الى الاخوات. الى من تحلو بالإخاء و تميزوا بالوفاء و العطاء.. الى ينابيع الصدق الصافي.. الى من معهم سعدت و برقتهم في دروب الحياة الحلوة و الحزينة سرت.. الى من كانوا معي على طريق النجاح و الخير.. الى من عرفت كيف اجدهم و علموني ان لا اضيعهم.. الى صديقاتي

سناء, سميرة, كريمة, رندة, بية, رحيمة, هاجر, هناء, سارة, اية, عبير, احلام, حورية, غنية, دليلة, مريم

الى رفيقة دربي و زميلتي في اعداد البحث

امال بوعلی

الى اساتذتي في الرياضيات

دويشين حبيبة و طاهر الهادي

الى جميع اساتذة قسم الرياضيات و الاعلام الالي و لا انسى ان اخص بالذكر الاستاذ القدير **فراح حناشي** من كان لنا مؤطرا و عوننا لإتمام هذا العمل

الى **ي ح**

الى كل من اعرفهم

كامل زينة

الاهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده سيدنا: **محمد صلى الله عليه**

وسلم

إلى بؤرة النور التي عبرت بي نحو الأمل و الأمان الجميلة، إلى من فتح قلبه ليحوي حلمي، إلى من روض الصعاب من أجلي، إلي من غرس معاني العلم والنور في قلبي...

أبي الغالي

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها، إلى التي تمتهن الحب وتغزل الأمل في قلبي، إلى التي كانت دعواتها عنوان دربي، إلى من تخطف التعب و الألم من قلبي، إلى سيدة القلب و الحياة

أمي الحبيبة.. أهديك الرسالة لتهديني الرضا و الدعاء

إلى من احتضنتني و علمتني العطاء و الإخلاص و الصفاء و التفاني، إلى من تحرص على مصلحة الجميع و تسدينا النصح: **جدي شريفة**

إلى تاج الرأس و عمود البيت ...إلى أعلى الناس: **جدي الرشيد**

إلى اخوتي و سندي في الحياة ... إلى مصدر قوتي **جابر** إلى أعلى الغوالي **بشير** إلى أحب الاحباب **خليل** إلى المشاكس الحيوي **عبد القادر**

إلى أخواتي العزيزات **نوال. منام. منعية. فوى.** إلى الشمعة المضيئة **منار**

إلى كل العمات و الخالات اللواتي شجعوني ودعموني **الزهرة. الشهبه. جمعة. شرادة. حدة. برنية** **منيرة** و خاصة من كانت سنداً لي: عمتي **ليلى**

إلى كل بنات العمات و ابناء العمات خاصة **هناء جوملة هدى ندى ناعية ليلى لؤي مروان هيثم فكي** **عمر** إلى ابن أختي **انس** إلى جدي **بشطورة** إلى أخواي

إلى الصديقات الوفيات اللواتي سأذكرهن بصدق وبإخلاص ما حييت **رندة. بية. هاجر. سمية.** **منام. ليلى. بسمة. رحمة**

إلى الغالية الحنونة صاحبة الإحساس المرهف: **كامل زينة**

إلى جميع أساتذة قسم الرياضيات والإعلام الآلي، إلى من كان لنا مؤطرا و داعما: **الأستاذ فرح**

حناني

بوعلى أمال

ملخص

في هذا العمل اهتمنا بدراسة الجمل الديناميكية الفوضوية ذات 3 ابعاد من خلال تحليلها و ابراز بعض الخصائص الهامة لها مثل ايجاد النقاط الثابتة و نقاط الاستقرار. و اثبات الفوضوية لهذه الجمل الديناميكية من اجل قيم معينة لوسائط التشعب, من خلال ايجاد قيم ليابونوف للجملة, و من جهة اخرى تم التحليل الديناميكي لهذه الجمل اعتمادا على مخططات و قيم ليابونوف او القيمة العظمى من بين قيم ليابونوف للجملة الديناميكية و ايضا مخططات التشعب حسب قيم الوسائط لهذه الجملة. ثم التحقق من النتائج باستعمال المحاكاة العددية من خلال برنامج ماتلاب.

الكلمات المفتاحية

الجمل الديناميكية, الفوضى, نقاط الاستقرار, ليابونوف, التشعب, ماتلاب.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des phrases dynamiques chaotiques tridimensionnelles en les analysant et en mettant en évidence certaines caractéristiques importantes telles que la recherche de points fixes et de points de stabilité. Et pour prouver l'anarchisme de ces phrases dynamiques pour certaines valeurs des modes de complexité, en trouvant des valeurs pour le Lyapunov de la phrase, D'autre part, l'analyse dynamique de ces phrases était basée sur les diagrammes et les valeurs de Lyapunov, ou sur la valeur maximale des valeurs de Lyapunov pour la phrase dynamique, ainsi que sur les schémas en cascade correspondant aux valeurs de média de cette phrase. Et ensuite, vérifiez les résultats en utilisant une simulation numérique via Matlab.

Mots clés

Phrases dynamiques, chaos, Points de stabilité, Lyapunov, Bifurcation, Matlab.

Abstract

In this work we are interested in studying the three-dimensional chaotic dynamic sentences by analyzing them and highlighting some important characteristics such as finding fixed points and points of stability. And to prove the anarchism of these dynamic sentences for certain values of the diffuse modes, by creating values for the Lyapunov of the sentence, And the dynamic analysis of these sentences was based on Lyapunov's diagrams and values, or the maximum value of the Yabonov values for the dynamic sentence, as well as the cascading schemes according to the media values of this sentence. And then verify the results using numerical simulation through Matlab.

Key words

Dynamic sentences, Chaos, Stability points, Lyapunov, Bifurcation, Matlab.

Table des matières

1	Généralités sur les systèmes dynamiques discrets et continus	8
1.1	Les systèmes dynamiques	8
1.1.1	Système dynamique à temps discret	8
1.1.2	L'espace des phases	9
1.1.3	Le portrait de phases	9
1.1.4	Système dynamique à temps continu	10
1.2	Chaos	12
1.2.1	Définitions du chaos	12
1.2.2	La section de Poincaré	14
1.3	Théorie de bifurcation	15
1.3.1	Diagramme de bifurcation	15
1.3.2	Scénario de transition vers le chaos	15
1.4	Conclusion	18
2	Attracteurs et exposants de Lyapunov	19
2.1	Attracteurs et ensembles attractants	19
2.1.1	Ensemble invariant	19
2.1.2	Ensemble attractant	19
2.1.3	Attracteurs	20
2.2	Les exposants de Lyapunov	22
2.2.1	Cas d'une application discrète unidimensionnelle	22
2.2.2	Cas d'une application discrète multidimensionnelle	23
2.2.3	Cas d'une application continue multidimensionnel	25
2.2.4	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	26
2.2.5	Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur	26

2.3	Conclusion	27
3	Quelques exemples de $3D$ systèmes chaotiques	28
3.1	Cas continu	28
3.2	Cas discret	33
4	Analyse et dynamique de quelques $3D$ systèmes chaotiques continus	34
4.1	Analyse et dynamiques du système chaotique (3.3)	34
4.1.1	Analyse du système chaotique (3.3)	34
4.1.2	Dynamiques du système (3.3)	39
4.2	Analyse et dynamiques du système chaotique (3.4)	43
4.2.1	Analyse du système chaotique (3.4)	43
4.2.2	Dynamique du système (3.4)	46
4.3	Conclusion	53

Liste des figures

Fig. 1.1-Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler	12
Fig. 1.2-Évolution de x, y, z par rapport a t pour le système de Rössler avec: $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, -2, 1)$	13
Fig. 1.3-Section de Poincaré du système (1.5) pour $c = 1.5$	14
Fig. 1.4-Section de Poincaré du système (1.5) pour $c = 0.8$	15
Fig. 1.5-Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \in [0, 3[$ et $x_0 = 0.2$	17
Fig. 1.6-Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \in [3, 3.45[$	17
Fig. 1.7-Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour la valeur $a \in [3.45, 3.57[$	18
Fig. 1.8-Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \geq 3.57$	18
Fig. 2.1-Bassin d'attraction (en bleu) de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ l'attracteur est représenté en (jaune).....	20
Fig. 2.2-L'attracteur étrange de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$	21
Fig. 2.3-L'attracteur étrange de Lorenz pour $a = 10$ et $r = 28$ et $b = \frac{8}{3}$	22
Fig. 2.4-Variations des exposants de Lyapunov pour le système de Vaidynathan (2, 6).....	26
Fig. 3.1-Diagramme de l'attracteur de Lorenz pour les valeurs $a = 10, r = \frac{8}{3}, b = 28$	29
Fig. 3.2-Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (x, z) pour $a = 16, b = 5, c = 10, d = 6, e = 18, m = 0.5$	29
Fig. 3.3-Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (x, y) pour $a = 16, b = 5, c = 10, d = 6, e = 18, m = 0.5$	30
Fig. 3.4- Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (y, z) pour $a = 16, b = 5, c = 10, d = 6, e = 18, m = 0.5$	30
Fig. 3.5-Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plan (x, y) pour $a = 10, b = 28, c = 2$	31
Fig. 3.6-Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plan (x, z) pour $a = 10, b = 28, c = 2$	31
Fig. 3.7- Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plan (z, y) pour $a = 10, b = 28, c = 2$	31
Fig. 3.8-Projection sur plan $z - y$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15 ; b = 8/3 ; c = 10$	32
Fig. 3.9-Projection sur plan $x - z$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15 ; b = 8/3 ; c = 10$	32

Fig. 3.10-Attracteur chaotique tridimensionnel de Hénon avec $\alpha = 0.002, \beta = 0.7, \gamma = 0.87$**33**

Fig. 4.1-Portraits de phase du système (3.3), $a = 10, b = 28, c = 2$. (a) : Vue 3D sur les plans $x - y - z$. (b) : Projection sur plan $x - y$. (c) : Projection sur plan $x - z$. (d) : Projection sur plan $y - z$**38**

Fig. 4.2-Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $c \in [0.200]$ avec $a = 10, b = 28$**39**

Fig. 4.3-Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $c \in [0.30]$ avec $a = 10, b = 28$**40**

Fig. 4.4-Portraits de phase du système (3.3), $a = 10, b = 28$. (a) : Projection sur plan $x - z, c = 6$. (b) : Projection sur plan $x - z, c = 16$. (c) : Projection sur plan $x - z, c = 50$. (d) : Vue 3D sur les plans $x - y - z, c = 158$**40**

Fig. 4.5-Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $b \in [0.200]$ avec $a = 10, c = 2$**41**

Fig. 4.6-Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $b \in [0.200]$ avec $a = 10, c = 2$**41**

Fig. 4.7-Portraits de phase du système (3.3), $a = 10, c = 2$. (a) : Vue 3D sur les plans $x - y - z, b = 6$. (b) : Projection sur plan $x - y, b = 9$. (c) : Projection sur plan $x - z, b = 106$. (d) : Projection sur plan $y - z, b = 190$**41**

Fig. 4.8-Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $a \in [0.50]$ avec $c = 2, b = 28$**42**

Fig. 4.9-Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $a \in [0.45]$ avec $c = 2, b = 28$**42**

Fig. 4.10- Portraits de phase du système (3.3), $c = 2, b = 28$. (a) : Projection sur plan $x - z, a = 4$. (b) : Projection sur plan $x - z, a = 15$. (c) : Projection sur plan $x - z, a = 17.5$. (d) : Projection sur plan $x - z, a = 30$ (e) : Vue 3D sur les plans $x - y - z, a = 44$**43**

Fig. 4.11-Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.4) pour : $a = 15; b = 8/3; c = 10$**46**

Fig. 4.12-Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $a \in [12, 22]$; and $b = 8/3; c = 10$**47**

Fig. 4.13-L'attracteur étrange du nouveau système (3.4) lorsque : $a = 15, b = 8/3, c = 10$**47**

Fig. 4.14- L'orbite périodique du nouveau système (3.4) lorsque $a = 16.5; b = 8/3; c = 10$**48**

Fig. 4.15-Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $a \in [12, 22]$; and $b = 8/3; c = 10$**48**

Fig. 4.16-Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $b \in [0, 20]$; et $a = 15; c = 10$**49**

<u>Fig. 4.17</u> -Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $b \in [0, 20]$; et $a = 15$; $c = 10$	49
<u>Fig. 4.18</u> -Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $c \in [5, 13]$; and $a = 15$; $b = 8/3$	50
<u>Fig. 4.19</u> -Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $c \in [5, 13]$; et $a = 15$; $b = 8/3$	50
<u>Fig. 4.20</u> -Vue 3D sur l'espace $x-y-z$ de l'attracteur chaotique du nouveau système (3.4).....	51
<u>Fig. 4.21</u> -Vue 3D sur l'espace $y-z-x$ de l'attracteur chaotique du nouveau système (3.4).....	51
<u>Fig. 4.22</u> -Projection sur plan $x-y$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$	51
<u>Fig. 4.23</u> -Projection sur plan $y-x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$	52
<u>Fig. 4.24</u> -Projection sur plan $x-z$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$	52
<u>Fig. 4.25</u> -Projection sur plan $z-x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$	53
<u>Fig. 4.26</u> -Projection sur plan $z-x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$	53

Notations

X^*	un point fixe.
Σ_p	un hyperplan.
∇	le gradient.
lim	la limite.
exp	la fonction exponentielle.
ln	la fonction logarithme.
max	le maximum.
inf	borne inférieure.
sup	borne supérieure.
det	le déterminant
$\ \cdot\ $	la norme.
$ \cdot $	la valeur absolue
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit scalaire.
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	les dérivées partielles.
\forall	quel que soit
\exists	il existe.
$\varphi(t, x_0)$	la trajectoire.
$DT(x)$	la matrice jacobienne.
\prod	le produit
\sum	la somme.
L_i	les exposants de Lyapunov.
D	la dimension de Mori.
D_{KY}	la dimension de Kaplan et Yorke.

Introduction Générale

En mathématiques et en physique, la théorie du chaos traite du comportement de certains systèmes dynamiques non linéaires qui, dans certaines conditions, présentent un phénomène appelé chaos, caractérisé par une sensibilité aux conditions initiales. Le chaos en tant que phénomène non linéaire important a été étudié en mathématiques, en génie et dans de nombreuses autres disciplines.

En général, un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales.

Depuis que Lorenz a découvert le premier système chaotique autonome tridimensionnel [1], de nombreux autres systèmes chaotiques ont été introduits et analysés, nous mentionnons les systèmes de Rössler, Chen et Lü [2, 3, 4]. En raison de la grande puissance des trois dimensions dans les applications technologiques, physiques, la cryptologie, synchronisation, et ainsi de suite [5–9], la recherche de l'attracteur chaotique du système dynamique chaotique en trois dimensions à devenir un sujet central.

Enfin ce mémoire présente l'analyse et la dynamique de quelques systèmes chaotiques tridimensionnels [10, 11]. Pour l'analyse de ces systèmes nous cherchons les points d'équilibre de ces systèmes et leurs stabilités selon la matrice Jacobéenne et les valeurs propres correspondantes, et nous étudions la dissipativité de ces systèmes. Les comportements dynamiques de ces systèmes sont étudiés en utilisant les diagrammes des variations des exposants de Lyapunov et les diagrammes de bifurcations selon les paramètres de bifurcations de ces systèmes.

Ce mémoire contient les quatre chapitres suivants :

le premier chapitre a pour principal objectif d'introduire quelques notions sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux attracteurs et exposants de Lyapunov.

Le troisième chapitre contient quelques exemples de $3D$ systèmes chaotiques continus et discrets.

Dans **le quatrième chapitre** nous contrerons à l'analyse et la dynamique de quelque $3D$ systèmes chaotiques continus.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques discrets et continus

Le premier chapitre présente quelques notions préliminaires sur les systèmes dynamiques (discrets et continus) et leurs propriétés caractéristiques.

1.1 Les systèmes dynamiques

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent dans l'espace et /ou de temps. Ils sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables.

Un tel système dynamique présente deux aspects, son état et sa dynamique;c'est-à-dire son évolution en fonction du temps [12]. Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Système dynamique à temps discret :

$$x_{k+1} = F(x_k; \mu); x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r, r \in \mathbb{N}, k = 1; 2; 3; \dots$$

- Système dynamique à temps continu :

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, v) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^r, n \text{ et } r \in \mathbb{N}$$

1.1.1 Système dynamique à temps discret

Un système dynamique discret est un système d'équations algébriques récurrences définies :

$$x_{k+1} = F(x_k, \mu), k \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Où $x(k) = x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k , $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres. F la fonction de récurrence définit la dynamique du système discret. Si nous associons à cette dynamique un état initial $x_0 = x(0)$ nous pourrions avoir une solution unique de F .

Exemple 1.1 (*Le système de Hénon*) ce modèle provient d'une simplification du système de Lorenz sur deux dimensions. Il s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = y + 1 - ax^2 \\ y = bx \end{cases} \quad (1.2)$$

Où a et b deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a , b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

1.1.2 L'espace des phases

Étant donné l'implémentation possible d'un modèle décrivant l'évolution temporelle d'un système à partir des équations caractéristiques, nous pouvons donc construire un ensemble de variables d'état associé à ce système. Un espace mathématique, appelé espace des phases est affecté à l'ensemble des variables d'états précédemment introduits. Cet espace mathématique est donc multidimensionnel et constitue toutes les valeurs possibles que peut prendre la sortie d'un système en fonction de ses paramètres.

1.1.3 Le portrait de phases

C'est une représentation géométrique de la dynamique d'un système. Il peut s'agir d'une représentation unie, bi, ou tridimensionnelle, voire même multidimensionnelle. Chaque axe compris dans le portrait de phase correspond à une variable d'état à un instant donné. L'ensemble de points représentant l'évolution du système génère des trajectoires caractéristiques du système. En utilisant le portrait de phase nous pouvons identifier l'attracteur correspondant à un système.

Définition 1.1 Un point fixe X^* est un point de l'espace d'état vérifiant $X^* = T(X^*)$.

Cycle d'ordre k

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après k applications de T notées $T^{(k)}$.

Les k points X_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$ avec $k > 1$, appartenant à un cycle d'ordre k vérifiant les deux relations :

$$\begin{aligned} X_i^* &= T^{(k)}(X_i^*) \\ X_i^* &\neq T^{(s)}(X_i^*) \text{ si } 0 < s < k \end{aligned}$$

avec :

$$T^{(k)} = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ fois}}$$

En dimension $N = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est $\lambda = T'(X^*)$ avec $T' = \frac{dT}{dx}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre k

$$(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*) \text{ est } \lambda = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*)$$

Un point fixe ou un cycle est dit :

- attractif (ou stable) si $|\lambda| < 1$.
- répulsif (ou instable) si $|\lambda| > 1$.

Exemple 1.2 (*La fonction logistique*).

On considère l'équation définie par la relation suivante :

$$x(n+1) = \lambda x(n)(1 - x(n)), \quad \lambda \in]0, 4[$$

On a $f(x) = \lambda x(1 - x)$ et $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$. Cette équation a deux points fixes :

- $\alpha = 0$. Il est attractif si $0 < \lambda < 1$.
- $\alpha = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$. Il est attractif si $1 < \lambda < 3$.

Si $\lambda > 3$, ces deux points fixes sont répulsifs.

Remarque 1.1 *En dimension $N > 1$, pour discuter si un point fixe (ou un cycle) est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne $DT(x) = J(x)$.*

- Si toutes les valeurs propres sont à l'intérieur du disque unité, le point fixe (ou le cycle) est stable.
- Si une de ces valeurs propres a un module plus grand qu'un, le point fixe (ou le cycle) est instable.

1.1.4 Système dynamique à temps continu

Un système dynamique à temps continu est décrit par un système d'équations différentielles :

$$X'(t) = G(t, X(t)) \tag{1.3}$$

Où G de classe $C^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit la dynamique du système continu.

Définition 1.2 Une solution de l'équation (1.3) est une application dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} x & : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t & \longmapsto x(t) \end{aligned}$$

et vérifiant, pour tout $t \in I$,

$$(t, x(t)) \in I \times \mathbb{R}^n$$

et

$$x'(t) = G(t, x(t)).$$

- À chaque couple $(X(0), t_0)$, nous pouvons associer une solution unique du système défini à l'aide de l'équation (1.3).
- Lorsque G dépend explicitement du temps (1.3) est dit non autonome, dans le cas contraire on dit que (1.3) est autonome.

Dans un système à N variables, l'expression (1.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = G_1(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \frac{dx_2}{dt} = G_2(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = G_N(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Dans ce système, x_1, \dots, x_N possèdent des conditions initiales connues.

Définition 1.3 Soit x_0 une condition initiale et $X(t, x_0)$ la solution de (1.3), l'ensemble des points $\{\forall t \in \mathbb{R}; (t, x_0)\}$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au x_0 à l'instant initial.

Définition 1.4 On appelle orbite du système (1.3) l'ensemble $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 1.3 (Le système de Rössler)

C'est un système de 3 équations différentielles non linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique continu et tridimensionnel qui présente des caractéristiques chaotiques. Les équations de ce système sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Où x, y est z sont les variables d'état du système, a, b et c sont des paramètres réels. Les paramètres et les conditions initiales de l'équation (1.5) ont été choisis de la manière suivante: $a = 0, 2$, $b = 0, 2$, et $c = 5, 7$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -2)$. Ce système est autonome car l'équation (1.5) n'a pas de dépendance explicite par rapport au temps t .

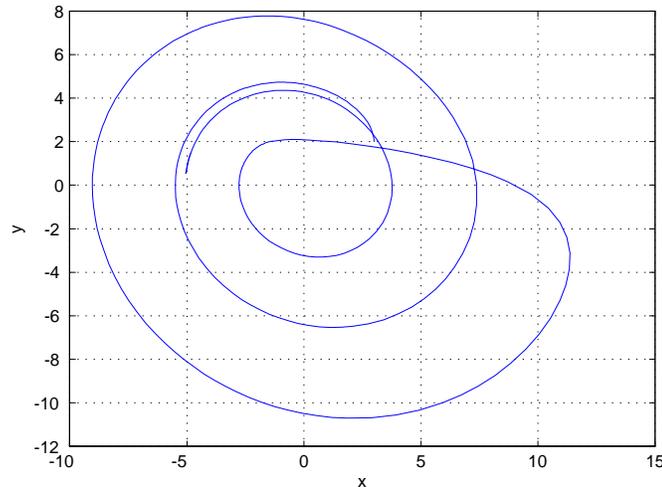


Fig 1.1 : Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler.

Définition 1.5 Un point fixe (ou critique, ou singulier, ou stationnaire) de l'équation $x' = F(x)$ et un point X^* de l'espace de phase vérifiant $F(X^*) = 0$.

1.2 Chaos

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme. Le chaos est défini généralement comme un comportement semblant aléatoire (ou imprévisible) d'un système dynamique défini par des équations déterministes.

1.2.1 Définitions du chaos

Il n'y a aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent :

- **La non-linéarité.** Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- **Le déterminisme.** Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- **La sensibilité aux conditions.** De très changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

- **L'imprévisible.** En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **L'irrégularité.** Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

Définition 1.6 Soit un ensemble V . L'application $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si :

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topologiquement transitif.
3. Les points périodiques sont denses dans V .

Définition 1.7 (Devaney, 1989). L'application $f : J \rightarrow J$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in J$ et un certain voisinage $V \subset J$ de x , il existe $y \in V$ tel que : $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.

Définition 1.8 $f : V \rightarrow V$ est dite topologiquement transitive si pour n'importe quelles paires d'ensembles ouverts $U, J \subset V$ il existe un nombre entier $k > 0$ tel que : $f^k(U) \cap J \neq \emptyset$.

Définition 1.9 Un sous-ensemble U de V est dense dans V si : $\overline{U} = V$.

Définition 1.10 Un système dynamique a une dépendance sensible aux valeurs initiales si, quand on considère 2 valeurs initiales $x(0)$ et $y(0)$ qui sont proches l'une de l'autre, alors $x(k)$ et $y(k)$ peuvent être éloignés l'une de l'autre, i.e., pour chaque $\varepsilon > 0$, tel que : $|x(0) - y(0)| < \varepsilon$ alors : $\limsup_t |x(k) - y(k)| > \varepsilon$.

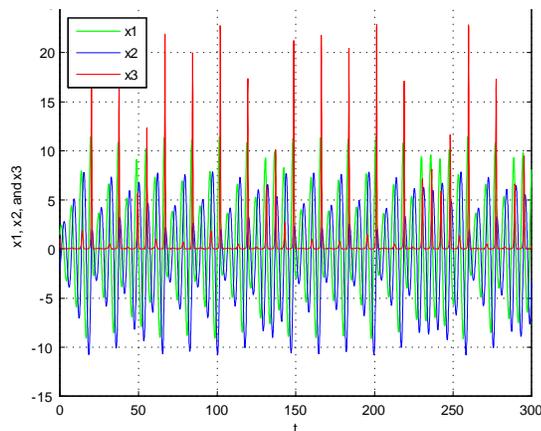


Fig 1.2 : L'évolution de x, y, z par rapport à t pour le système de Rössler avec : $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, -2, 1)$.

1.2.2 La section de Poincaré

Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Elle est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire (en dimension trois, par exemple), avec un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie.

La méthode de Poincaré permet simultanément de discrétiser le système et de réduire sa dimension en conservant les mêmes propriétés topologiques, plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension n par celle de la suite des points d'intersection successifs : p_0, p_1, p_2, \dots d'une trajectoire $\varphi(t, x_0)$ avec un hyperplan \sum_p de dimension $(n - 1)$, ce dernier peut être quelconque. Mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan \sum_p est appelé la section de Poincaré.

Exemple 1.4 *La section de Poincaré la plus naïve est de couper la trajectoire dans l'espace des phases par un plan (en dimension trois) ou par une droite (en dimension deux).*

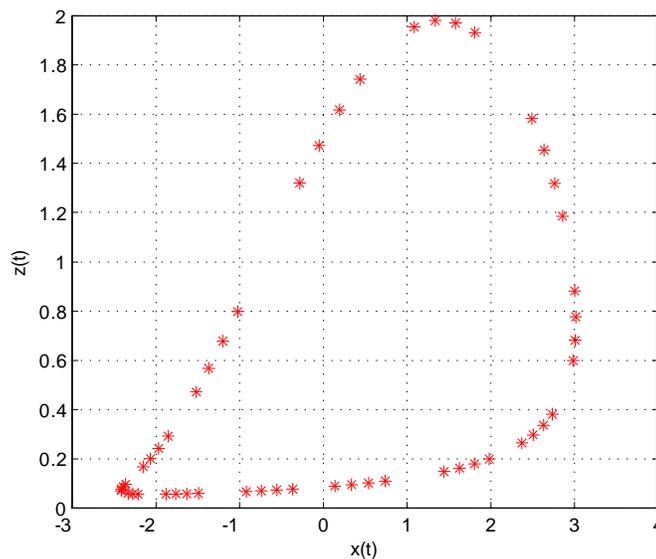


Fig 1.3 : Section de poincaré du système (1.5) pour $c = 1.5$.

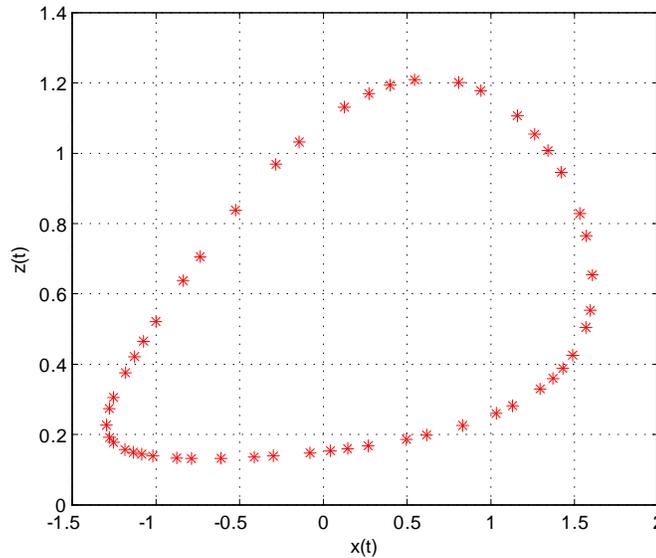


Fig 1.4 : Section de Poincaré du système (1.5) pour $c = 0.8$.

1.3 Théorie de bifurcation

Un système est dit structurellement stable sur une portion de l'espace de paramètres si une petite perturbation du système ne modifie pas son comportement global sur cette portion. À la valeur particulière du paramètre où la solution change subitement de nature, le système est dit structurellement instable ce qui autorise un brusque changement au niveau de la nature de la solution. Ce phénomène est appelé bifurcation et les points où il se produit sont les points de bifurcation.

1.3.1 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et les valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime permanent est atteint.

1.3.2 Scénario de transition vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain

d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

- L'intermittence vers le chaos :

un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouxoées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouxoées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

- Le doublement de période :

il est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. À mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les bruides peut apparaître suivant ce scénario.

- La quasi-périodicité :

elle intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi périodique.

Pour illustrer les comportements d'un système dynamique nous prenons comme exemple l'application définie par l'expression suivante :

$$x_{k+1} = f(x_k) = x_k(a - x_k) \quad (1.6)$$

Pour construire le diagramme de bifurcation de ces figures on a choisi pour chaque valeur de $a \in [0, 4]$ une séquence de 500 échantillons avec une période de transition de 50 échantillons. Suivant la valeur de a (paramètre de bifurcation) et la valeur initiale de x_0 de la suite x_k , celle-ci présente des comportements très différents :

-Pour $a \in [0, 3[$ et $x_0 = 0.2$ l'évolution de suite x_k converge rapidement vers un point fixe et stable du plan (x_k, x_{k+1})

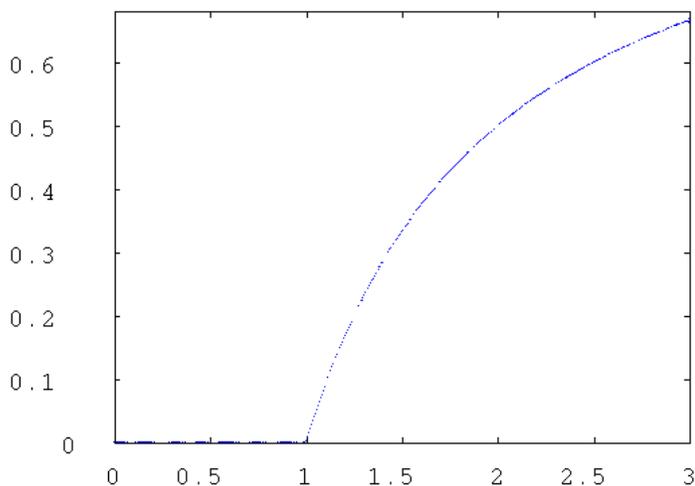


Fig 1.5 : Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \in [0, 3[$ et $x_0 = 0.2$

-Pour $a \in [3, 3.45[$ nous remarquons que la suite converge vers une solution périodique. Dans ce cas, la trajectoire converge vers un cycle d'ordre 2.

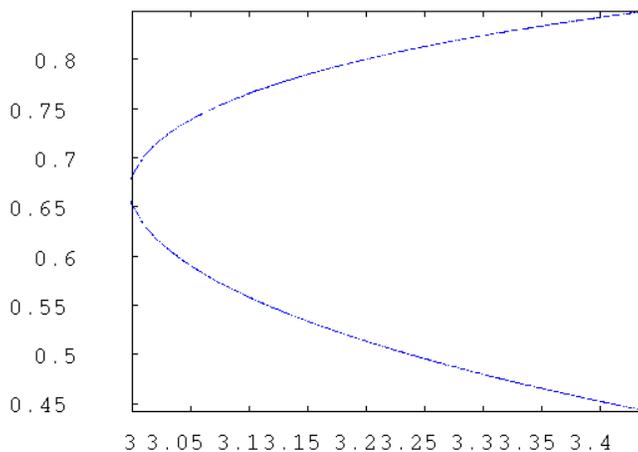


Fig 1.6 : Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \in [3, 3.45[$

-On augmentant la valeur de a la nouvelle suite converge vers une solution périodique avec doublement de période.

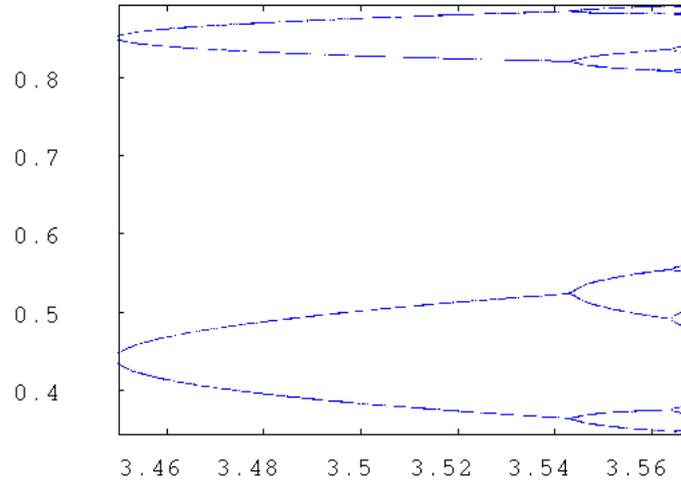


Fig 1.7 : Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour la valeur $a \in [3.45, 3.57[$

-Pour $a \geq 3,57$ la suite x_k ne représente plus une structure ordonnée. Donc le système devient chaotique.

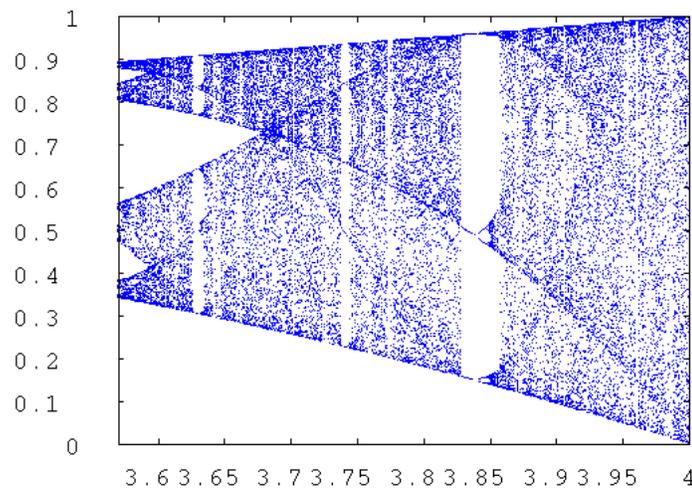


Fig 1.8 : Diagramme de bifurcation de la suite (1.6) pour $a \geq 3.57$

1.4 Conclusion

Ce chapitre contient quelques notions fondamentales qui caractérisent les systèmes dynamiques dont nous présentons les différents types des systèmes dynamiques (discrets et continus) et leurs propriétés caractéristiques, puis nous parlerons sur la théorie du chaos et ces dispositifs, la section de Poincaré avec quelques exemples, la théorie des bifurcations et les routes vers le Chaos.

Chapitre 2

Attracteurs et exposants de Lyapunov

Ce chapitre est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov. Dans la première partie, nous donnons quelques définitions sur les ensembles attractants et les différents types d'attracteurs et particulièrement aux attracteurs étranges (chaotiques), celles qui sont caractérisés l'évolution des systèmes chaotiques. La deuxième partie est consacrée aux exposants de Lyapunov qui sont souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

2.1 Attracteurs et ensembles attractantes

2.1.1 Ensemble invariant

Définition 2.1 *Un ensemble $M \subset I$ est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution $x(t)$ du système différentiel associé au champ de vecteurs issus de M vérifie $x(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

2.1.2 Ensemble attractant

Définition 2.2 *Un ensemble invariant fermé A est un ensemble attractant s'il existe un voisinage U tel que :*

$$\begin{cases} F(U) \subset U \\ \forall x \in U, F^{(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.3 *Le bassin d'attraction (ou simplement le bassin) d'un ensemble attractif A est l'ensemble ouvert de tous les points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$F^{(k)}(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$$

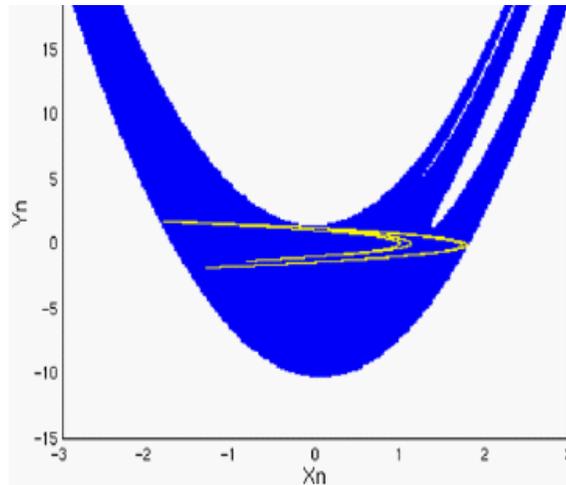


Fig 2.1 : Bassin d'attraction (en bleu) de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$
l'attracteur est représenté en jaune

2.1.3 Attracteurs

Définition 2.4 Un ensemble attractif est appelé attracteur lorsqu'il est topologiquement transitif.

Définition 2.5 Un ensemble A est un attracteur si :

- 1) pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- 2) $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.
- 3) Il existe une orbite dense dans A .

Différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs :

1-Attracteur régulier Ils caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques.

2-Attracteurs étranges (chaotiques) Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. L'attracteur étrange se caractérise par :

1. la sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension D de l'attracteur est fractale (non entière) avec $2 < D < n$ (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

Définition 2.6 Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A ; c'est-à-dire que pour tout point de A il existe une bille contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :

- attraction R : est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R ; est entièrement contenu dans R : de plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.
- Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement aperiodique.
- Deux trajectoires proches l'instant t voient localement leur distance augmenter une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

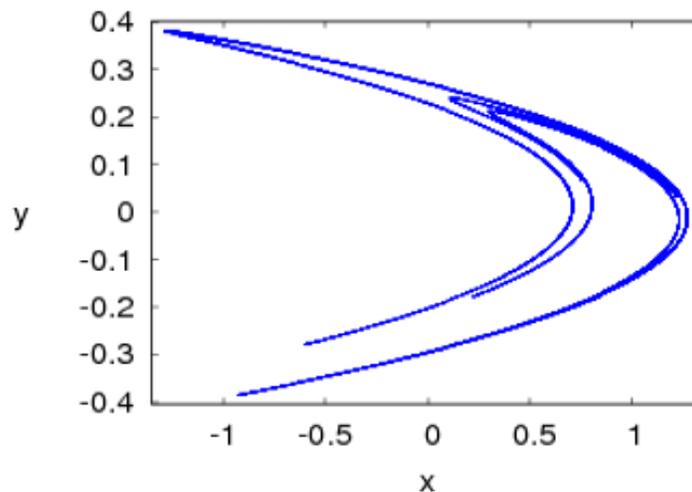


Fig 2.2 : L'attracteur étrange de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

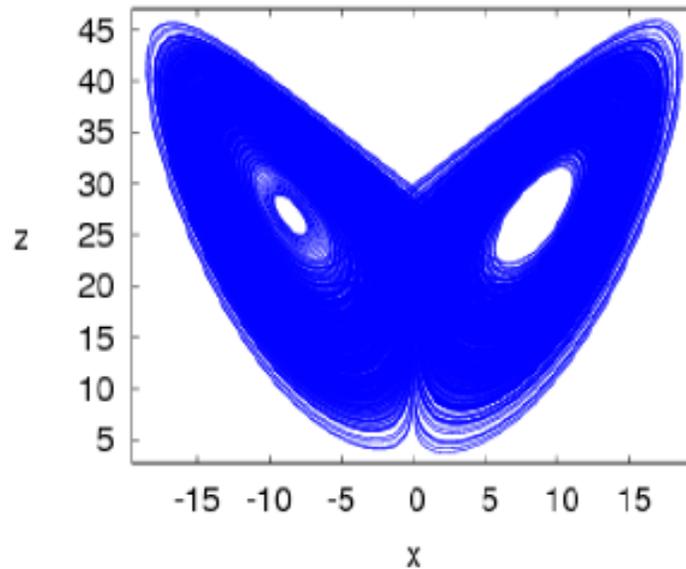


Fig 2.3 : L'attracteur étrange de Lorenz pour $a = 10$ et $r = 28$ et $b = \frac{8}{3}$.

2.2 Les exposants de Lyapunov

L'évolution d'un système chaotique est difficile à quantifier, vu la divergence entre les trajectoires sur un attracteur. Une méthode utilisée pour mesurer la vitesse de la divergence ou convergence dans un système, consiste au calcul des exposants de Lyapunov. Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisins au départ, cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

2.2.1 Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra trouver un réel λ tel qu'après n itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon e^{n\lambda} \text{ d'ou } n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\cong \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ \lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ \lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

Finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.2)$$

avec la notation $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx_i}$.

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence :

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que $\lambda = \ln |f'(x^*)|$.

Exemple 2.1 (L'application logistique)

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i); \quad x_i \in [0, 4]$$

En appliquant la formule (2.2) pour calculer l'exposant de Lyapunov de f .

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |4(1 - 2x_i)| \end{aligned}$$

Soit $\lambda = \ln 4 > 0$ d'où le comportement est chaotique.

2.2.2 Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système m -dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hypervolume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négatif. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0} (x_0 - x'_0) \\ &\approx J(x_0) J(x_1) \dots J(x_n) (x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=1}^n J(x_i) (x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=1}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0) (x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f^n au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, \dots, m$ de J^n .

On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Pour le point d'équilibre x^* la formule (2.3) devient :

$$\lambda_i = \ln |u_i(x^*)|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

2.2.3 Cas d'une application continue multidimensionnel

Pour un système différentiel de dimension n défini par f tel que :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donné par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|x_i(t) - x_i^*(t)\|}{\|x_0(t) - x_0^*(t)\|} \quad (2.5)$$

Différents algorithmes ont été développés pour calculer les exposants de Lyapunov, l'un des algorithmes utilisés pour le calcul est celui-ci appelé algorithme de Wolf.

Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la dévergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle,
2. Choix aléatoire d'une condition initiale,
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir courante à laquelle on ajoute une perturbation,
4. Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires,
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence,
6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné,
7. Retour au point (1),
8. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

Exemple 2.2 (*Le système de Vaidyanathan*)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) + yz \\ \frac{dy}{dt} = -cxz + py^2 \\ \frac{dz}{dt} = xy - b \end{cases} \quad (2.6)$$

Les exposants de Lyapunov du système (2.6) pour $a = 40$, $b = 26$, $c = 160$, $p = 0.3$ et une condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ avec $\Delta t = 0.5$; le nombre de pas 1000 sont :

$$\lambda_1 \simeq 11.301265, \lambda_2 \simeq 0, \lambda_3 \simeq -48.078110.$$

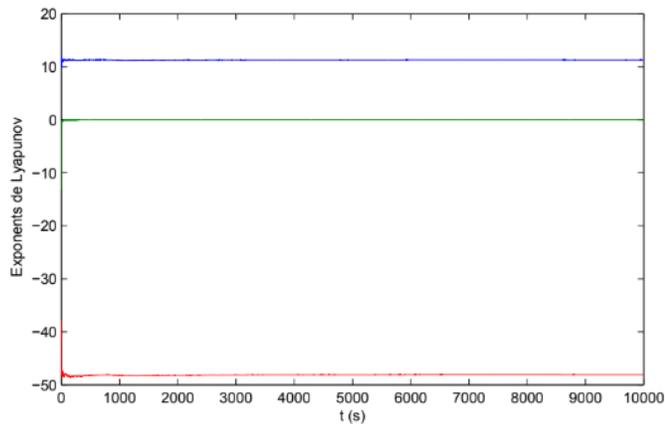


Fig 2.4 : Variations des exposants de Lyapunov pour le système de Vaidynathan (2.6)

2.2.4 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Les différents types d'attracteurs d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous.

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 > 0, \sum \lambda_i < 0$

Table.(1). Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

2.2.5 Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur

Le terme de dimension est souvent implicitement associé à celui de coordonnée, c'est-à-dire de variable nécessaire pour décrire la position d'un élément d'un ensemble. La dimension par définition est un nombre entier.

-Le point est un attracteur de dimension 0.

-La dimension d'une courbe fermée ou une ligne est 1.

Il ya un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'ils sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

(a) **Dimension de Mori** : Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positif et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs. La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right)$$

(b) **Dimension de Kaplan et Yorke** : soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Exemple 2.3 pour le système de Vaidyanathan (2.6)

La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par :

$$D_{KY} = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} = 2.23769$$

Il existe aussi d'autres dimensions fractales comme la dimension de Lyapunov, la dimension d'Hausdorff, la dimension de corrélation.

Tous ces dimensions sont très proches les unes des autres et satisferont les propriétés suivantes :

- 1- Si $A \subset B$ alors $d(A) < d(B)$.
- 2- Si $A = \phi$ alors $d(A) = 0$.
- 3- $d(A \times B) = d(A) \times d(B)$.
- 4- Si f est une application différentiable sur A alors $d(f(A)) = d(A)$.

2.3 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov. Dans la première partie, nous donnons quelques définitions sur les ensembles attractants et les différents types d'attracteurs et particulièrement aux attracteurs étranges (chaotiques), celles qui sont caractérisées l'évolution des systèmes chaotiques. La deuxième partie est consacrée aux exposants de Lyapunov qui sont souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

Chapitre 3

Quelques exemples de 3D systèmes chaotiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples de systèmes chaotiques tridimensionnels.

3.1 Cas continu

Exemple 3.1 (*Système de Lorenz*)

En 1963, Edward Lorenz a proposé un système différentiel à comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (3.1)$$

Ci-dessous l'attracteur de Lorenz pour les valeurs suivantes $a = 10$, $r = 8/3$, $b = 28$.

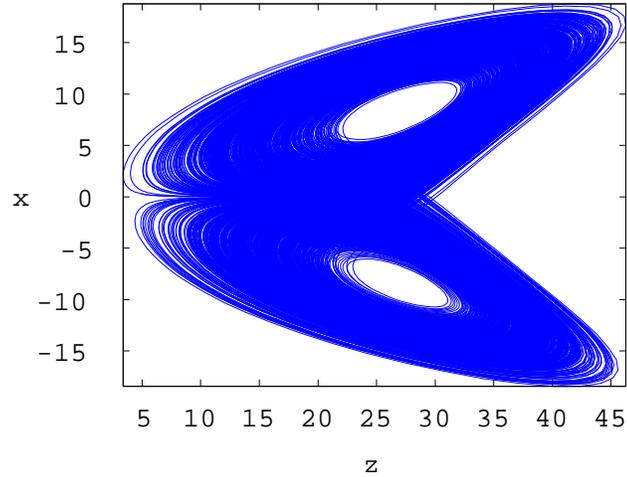


Fig 3.1 : Digramme de l'attracteur de Lorenz pour les valeurs $a = 10$, $r = \frac{8}{3}$, $b = 28$.

Exemple 3.2 *Considérons le système tridimensionnel chaotiques défini par :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + myz \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + ey^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ici, x, y, z sont les variables d'état et a, b, c, d, e, m sont des paramètres constants positifs. Le nouveau système (3.2) Comprends deux termes de produit croisé quadratiques et un terme carré. Lorsque $a = 16$, $b = 5$, $c = 10$, $d = 6$, $e = 18$ et $m = 0.5$, le système (3.2) est chaotique avec les exposants de Lyapunov $L_1 = 1.86852 > 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = -17.73664 < 0$. Les portraits de phase correspondantes sont représentés sur les figures 3.2.

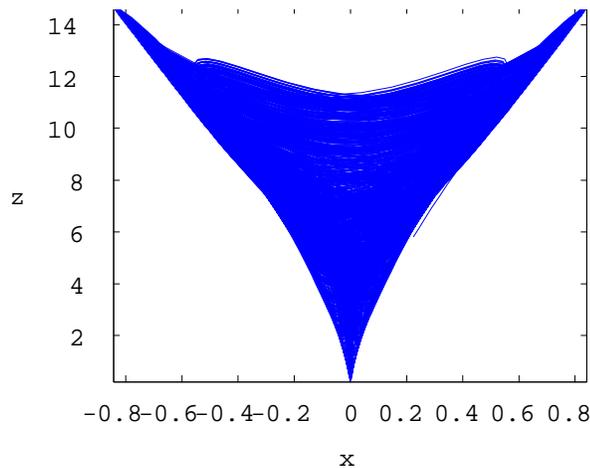


Fig. 3.2 : Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (x, z) pour $a = 16$, $b = 5$, $c = 10$, $d = 6$, $e = 18$, $m = 0.5$.

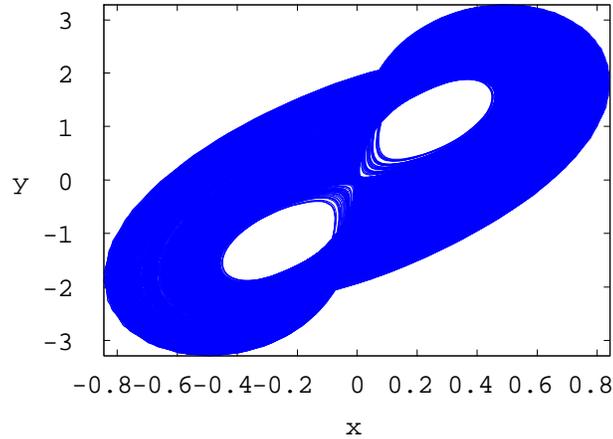


Fig.3.3 : Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (x, y) pour $a = 16, b = 5, c = 10,$
 $d = 6, e = 18, m = 0.5.$

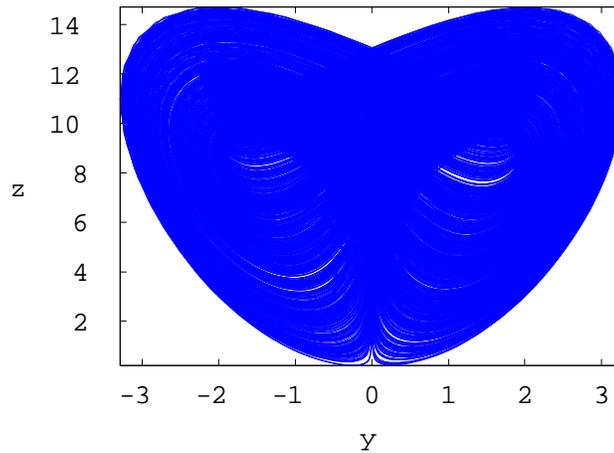


Fig. 3.4 : Projection de l'attracteur du système (3.2) dans le plan (y, z) pour $a = 16, b = 5, c = 10,$
 $d = 6, e = 18, m = 0.5.$

Exemple 3.3 Nous considérons *système chaotique tridimensionnel présenté par Xuebing Zhang, Honglan Zhu et Hongxing Yao*[13]. Les équations différentielles autonomes qui décrivent le système sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by - yz \\ \frac{dy}{dt} = x + xz, \\ \frac{dz}{dt} = -cz + y^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

ou x, y, z sont des variables d'état, a, b, c sont des paramètres constants du système (3.3). Le système est chaotique pour : $a = 10, b = 28, c = 2$

Les portraits de phase correspondantes sont représentés sur les figures 3.5, 3.6, 3.7

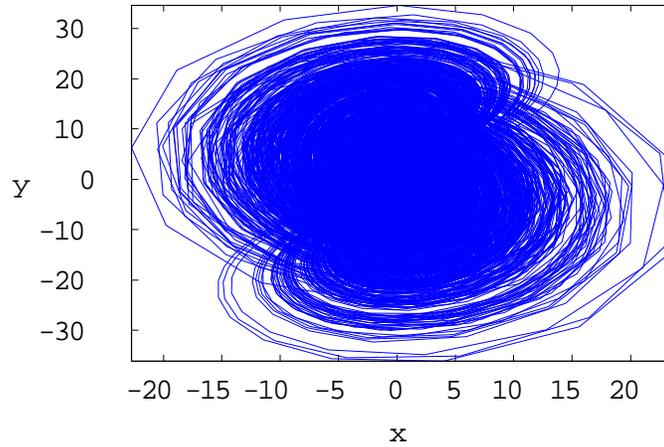


Fig 3.5 : Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plans (x, y) pour $a = 10, b = 28, c = 2$.

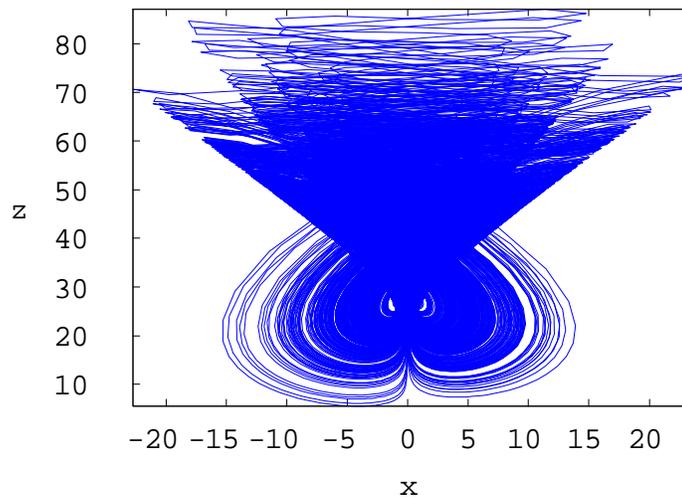


Fig 3.6 : Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plans (x, z) pour $a = 10, b = 28, c = 2$.

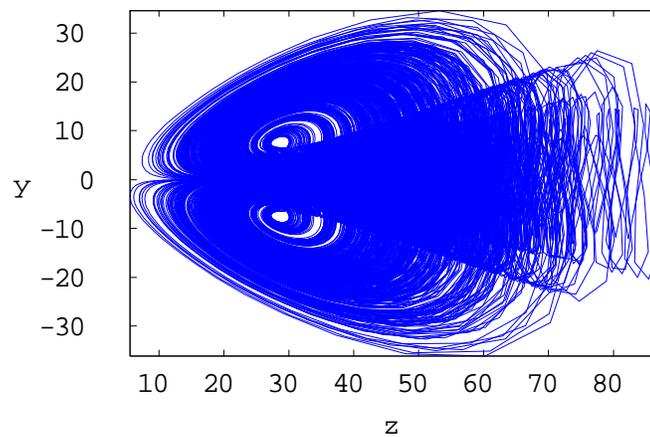


Fig 3.7 : Projection de l'attracteur du système (3.3) dans le plans (z, y) pour $a = 10, b = 28, c = 2$.

Exemple 3.4 Nous proposons un nouveau système chaotique tridimensionnel obtenu par simple modification du système introduit dans [14], qui se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) + byz, \\ \frac{dy}{dt} = (c - a)x + cy - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - z. \end{cases} \quad (3.4)$$

où a, b, c sont des paramètres réels positifs avec $b \neq 1$. Dans ce mémoire, nous montrerons que le système (3.4) est chaotique lorsque les paramètres du système a, b et c prennent les valeurs $a = 15$, $b = 8/3$, $c = 10$.

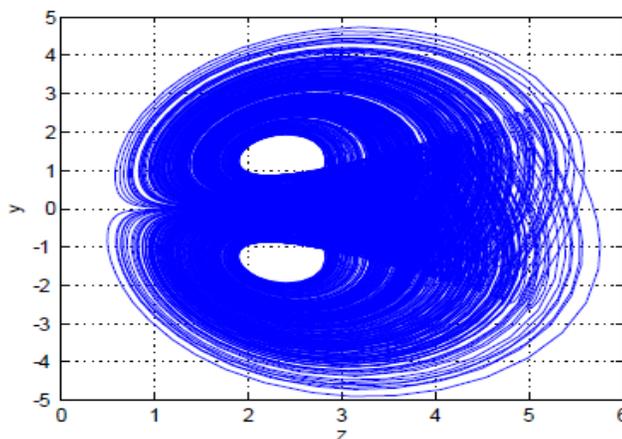


Fig 3.8 : Projection sur plan $z - y$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

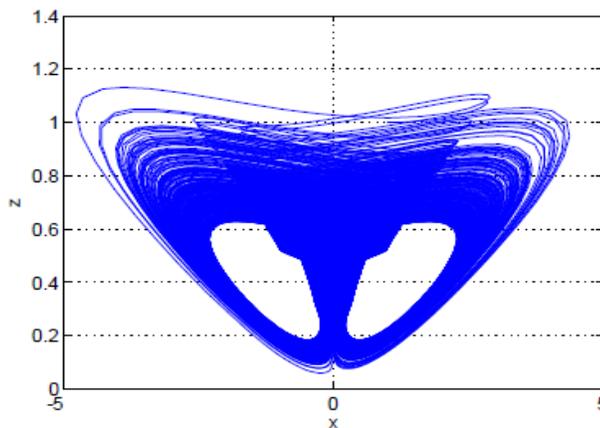


Fig 3.9 : Projection sur plan $x - z$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$.

3.2 Cas discret

Exemple 3.5 (*système de Hénon*) [15] ces dernières années Hénon a proposé un système chaotique tridimensionnel ; ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = \alpha + \beta x_n + \gamma y_n + z_n^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

lorsque $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ est l'espace d'état, et $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont des paramètres de bifurcations.

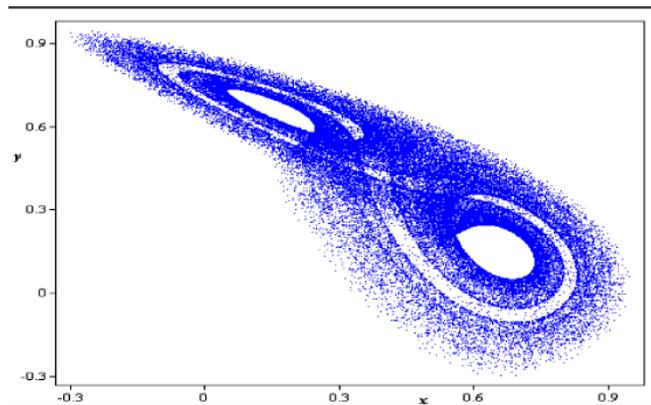


Fig 3.10 : Attracteur chaotique tridimensionnel de Hénon avec $\alpha = 0.002$, $\beta = 0.7$, $\gamma = 0.87$.

Chapitre 4

Analyse et dynamique de quelques $3D$ systèmes chaotiques continus

Ce chapitre a pour objectif principal d'introduire l'analyse et la dynamique de quelques systèmes autonomes tridimensionnels continus qui possèdent des comportements dynamiques extrêmement complexes pouvant générer un attracteur chaotique par analyse théorique et simulation numérique détaillée. Nous analysons ces systèmes au moyen de portraits de phase, du spectre des exposants de Lyapunov et du diagramme de bifurcation du système.

4.1 Analyse et dynamiques du système chaotique (3.3)

4.1.1 Analyse du système chaotique (3.3)

De toute évidence, le système (3.3) n'est pas topologiquement équivalent au système Lorenz original ou à un autre système du type Lorenz. En effet, selon les efforts de Celikovsky et Chen [16 – 18], le système de Lorenz généralisé a la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (4.1)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ et A sont 2×2 matrices réels.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

avec les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ et satisfaisant $\lambda_{2,3} < 0$ et $\lambda_1 > 0$ alors que notre système (3.3) Prends cette forme de manière correspondante :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (4.3)$$

il n'est immédiatement clair que le système (3.3) ne soit pas topologiquement équivalent au système de Lorenz généralisé.

-Points fixes et leurs stabilités

Les points fixes du système (3.3) sont par définition tel que $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0$ i.e.,

$$\begin{cases} -ax_1 + bx_2 - x_2x_3 = 0 \\ x_1 + x_1x_3 = 0 \\ -cx_3 + x_2^2 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

De l'équation 2 on obtient : $x_1 = 0$ ou $x_3 = -1$

pour $x_1 = 0$ on a :

$$\begin{aligned} (4.4) &\Rightarrow \begin{cases} x_2(b - x_3) = 0 \\ -cx_3 + x_2^2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \vee x_3 = b \\ -cx_3 + x_2^2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Alors :

$S_1 = (0, 0, 0)$, $S_2 = (0, \sqrt{bc}, b)$, $S_3 = (0, -\sqrt{bc}, b)$ sont des points fixes du système (3.3).

pour $x_3 = 0$ on a :

$$\begin{aligned} (4.4) &\Rightarrow \begin{cases} -ax_1 + (b+1)x_2 = 0 \\ c + x_2^2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{(b+1)x_2}{a} \\ x_2 = \sqrt{-c} \vee x_2 = -\sqrt{-c} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alors :

$S_4 = \left(-\frac{(b+1)\sqrt{-c}}{a}, -\sqrt{-c}, -1\right)$, $S_5 = \left(\frac{(b+1)\sqrt{-c}}{a}, \sqrt{-c}, -1\right)$ deux points fixes du système (3.3).

En conclusion :

le système (3.3) À cinq points fixes comme suit :

$$\begin{cases} S_1 = (0, 0, 0), \\ S_2 = (0, \sqrt{bc}, b), \\ S_3 = (0, -\sqrt{bc}, b), \\ S_4 = \left(-\frac{(b+1)\sqrt{-c}}{a}, -\sqrt{-c}, -1 \right), \\ S_5 = \left(\frac{(b+1)\sqrt{-c}}{a}, \sqrt{-c}, -1 \right). \end{cases} \quad (4.7)$$

Pour plus de simplicité, nous fixons les paramètres :

$$a = 10, b = 28, c = 2 \quad (4.8)$$

Nous obtenons trois points d'équilibre réels :

$$S_1 = (0, 0, 0), S_2 = (0, 7.4833, 28), S_3 = (0, -7.4833, 28) \quad (4.9)$$

La stabilité des points d'équilibres est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice Jacobéenne en ces points.

Pour le système (3.3) La matrice Jacobéenne s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} -a & b-z & -y \\ 1+z & 0 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 28-z & -y \\ 1+z & 0 & x \\ 0 & 2y & -2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Pour S_1 , la matrice Jacobéenne est :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 28 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

et comme $\det(J_1 - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$\lambda^3 + (a+c)\lambda^2 + (ac-b)\lambda - bc = \lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda - 56 = 0 \quad (4.12)$$

à pour racines les trois valeurs propres :

$$\lambda_1 = -12,2801 < 0, \lambda_2 = 2,2801 > 0, \lambda_3 = -2 < 0 \quad (4.13)$$

Ici λ_2 est un nombre réel positif et λ_1, λ_3 sont deux nombres réels négatifs. Par conséquent, l'équilibre $S_1(0, 0, 0)$ est un point de selle. Donc ce point $S_1(0, 0, 0)$ est instable.

Ensuite, la linéarisation du système (3.3) autour de l'autre équilibre tel que S_2, S_3 donne l'opération caractéristique suivante.

Pour l'équilibre $S_2 = (0, 7.4833, 28)$, il a une matrice Jacobéenne donnée par :

$$J_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -7.4833 \\ 29 & 0 & 0 \\ 0 & 15.9666 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J_2 - \lambda I) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 20\lambda + 3465 \quad (4.15)$$

Alors, les valeurs propres correspondant au point d'équilibre $S_2 = (0, 7.4833, 28)$ sont :

$$\lambda_1 = -19.5088 < 0, \lambda_2 = 3.7544 + 12.3448i, \lambda_3 = 3.7544 - 12.3448i \quad (4.16)$$

Ici λ_1 est un nombre réel négatif, λ_2 et λ_3 une paire de valeurs propres de conjugués complexes avec des parties réelles positives. Donc, le point d'équilibre S_2 est un point focal de selle instable.

Pour le point d'équilibre S_3 , la matrice Jacobéenne devient :

$$J_3 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 7.4833 \\ 29 & 0 & 0 \\ 0 & -15.9666 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$\lambda^3 + 12\lambda^2 + 20\lambda + 3465 = 0 \quad (4.18)$$

Par conséquent, les valeurs propres correspondantes de S_3 sont :

$$\lambda_1 = -19.5088 < 0, \lambda_2 = 3.7544 + 12.3448i, \lambda_3 = 3.7544 - 12.3448i \quad (4.19)$$

Le résultat montre que λ_1 est un nombre réel négatif λ_2 et λ_3 est un couple conjugué complexe et que leurs parties réelles sont positives. Donc, le point d'équilibre S_3 aussi est un point de focalisation selle instable.

L'analyse ci-dessus montre que les trois points d'équilibre du système non linéaire sont tous centrés sur la selle.

-Dissipation du système

Pour le système (3.3), nous avons :

$$\nabla v = -a - c = -12 \quad (4.20)$$

ce qui implique que le système (3.3) est un système dissipatif, et sa contraction exponentielle

$$\frac{dv}{dt} = \exp^{-12t}$$

Cela implique que chaque volume contenant la trajectoire diminue à zéro puisque $t \rightarrow \infty$ à un taux exponentiel.

Par conséquent, toutes les orbites du système sont finalement confinées à un sous-ensemble spécifique de volume nul et le mouvement asymptotique s'installe sur un attracteur.

-Exposants de Lyapunov du système (3.3)

Selon le théorème du chaos non linéaire, les exposants de Lyapunov mesurent les vitesses et d'exponentielles de divergence et convergence des trajectoires proches dans l'espace des phases du système (3.3).

Soit $a = 10, b = 28$ et $c = 2$ et la condition $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (7.2, 7.8, 2.3)$. Par une analyse numérique est théorique détaillée, selon l'algorithme de Wolf [19]; les valeurs des exposants de Lyapunov du système sont obtenues de la manière suivante :

$$\lambda_{L1} = 2.46, \lambda_{L2} = 0, \lambda_{L3} = -14, 45. \quad (4.21)$$

Par conséquent, la dimension de Lyapunov de ce système est :

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{Lj} + 1|} \sum_{i=1}^j \lambda_{Li} = 2, 17 \quad (4.22)$$

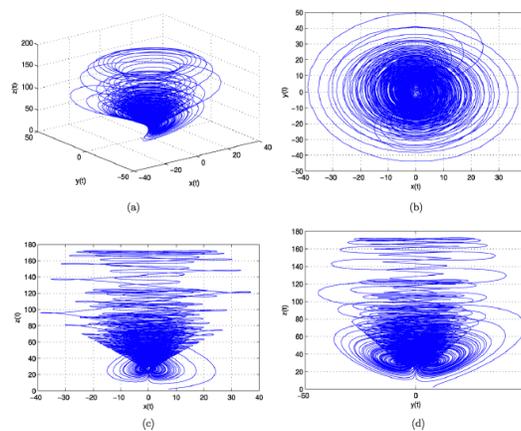


Fig 4.1 : Portraits de phase du système (3.3), $a = 10, b = 28, c = 2$. (a) : Vue 3D sur les plans $x - y - z$. (b) : Projection sur plan $x-y$. (c) : Projection sur plan $x-z$. (d) : Projection sur plan $y - z$.

4.1.2 Dynamiques du système (3.3)

-Comportement dynamique du système (3.3) pour : $a = 10, b = 28$ et c varié

Le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre c est illustré à la **figure 4.2**. Évidemment, lorsque $c \in [0.1, 13]$, l'exposant maximal de Lyapunov est positif; le système (3.3) est chaotique (par exemple, avec $c = 6$, selon la méthode de Runge - Kutta, le portrait de phase est représenté sur la **figure 4.4(a)**). Lorsque $c \in]13, 50]$, l'exposant maximal de Lyapunov est égal à zéro; le système (3.3) est en orbite périodique. **Figure 4.4(b), (c)** montre l'orbite périodique lorsque $c = 16$ et $c = 50$.

Lorsque $c \in]152, 200]$, l'exposant maximal de Lyapunov est négatif, le système (3.3) converge vers un équilibre représenté à la **figure 4.4(d)**, ou $c = 158$.

En dessinant le diagramme de bifurcation par rapport à c , le résultat est présenté à la **Fig 4.3**. Lorsque c augmente, la **Fig.4.3** montre clairement le processus de dégénérescence de du nouvel attracteur chaotique vers la région de solution périodique, comme indiqué, par exemple, sur les **figures 4.4(a), (b), (c)**, où le système en orbite dégénère par bifurcations de doublement de période inverses dynamiques du système (3.3).

-Comportement dynamique du système (3.3) pour : $a = 10, b = 28$ et c varié

Le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre c est illustré à la **figure 4.2**. Évidemment, lorsque $c \in [0.1, 13]$, l'exposant maximal de Lyapunov est positif; le système (3.3) est chaotique (par exemple, avec $c = 6$, selon la méthode de Runge -Kutta, le portrait de phase est représenté sur la **figure 4.4(a)**). Lorsque $c \in]13, 50]$, l'exposant maximal de Lyapunov est égal à zéro; le système (3.3) est en orbite périodique. **Figure 4.4(b), (c)** montre l'orbite périodique lorsque $c = 16$ et $c = 50$.

Lorsque $c \in]152, 200]$, l'exposant maximal de Lyapunov est négatif, le système (3.3) converge vers un équilibre représenté à la **figure 4.4(d)**, ou $c = 158$.

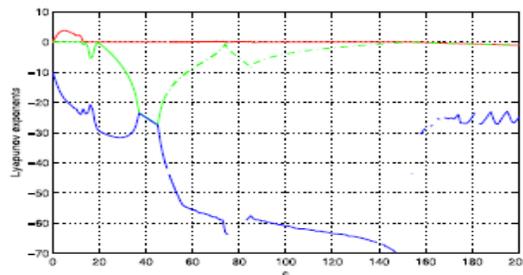


Fig 4.2 : Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $c \in [0.200]$ avec $a = 10, b = 28$.

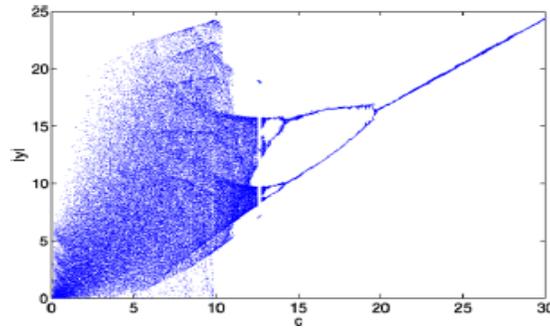


Fig 4.3 : Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $c \in [0,30]$ avec $a = 10, b = 28$.

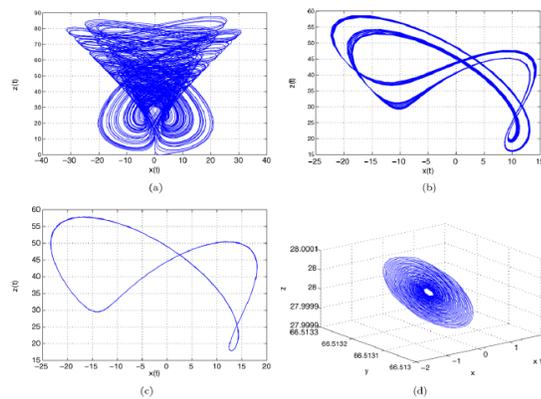


Fig 4.4 : Portraits de phase du système (3.3), $a = 10, b = 28$. (a) : Projection sur plan x-z, $c = 6$. (b) : Projection sur plan x-z, $c = 16$. (c) : Projection sur plan x-z, $c = 50$. (d) : Vue 3D sur les plans x-y-z, $c = 158$.

-Comportement dynamique du système (3.3) pour : $a = 10, c = 2$ et b varié

La figure 4.5 montre le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre b . Évidemment, lorsque $b \in [0, 7]$, le système est stable et converge vers un équilibre, comme le montre la figure 4.7(a). Lorsque $b \in]7, 10.5]$, l'exposant max de Lyapunov est toujours égal à zéro, ce qui implique que le système a une orbite périodique, comme illustré à la Fig. 4.7 (b) où $b = 9$. Lorsque $b \in]10.5, 106]$, l'exposant max de Lyapunov est positif, ce qui implique que le système est chaotique et lorsque $b > 106$, le système évolue finalement vers une orbite périodique, comme illustré à la Fig. 4.7 (c), (d).

En traçant le diagramme de bifurcation par rapport à b , le résultat est présenté à la Fig. 4.6. Avec b croissant,

La figure 4.6 montres clairement la création du chaos à partir de bifurcations à période double et, d'autre part, il existe un processus de dégénérescence du nouvel attracteur chaotique vers la

région de solution périodique, où le système dégénère par bifurcations à période doublée. En fait, l'ensemble du processus d'évolution contient deux processus distincts : premièrement, le nouvel attracteur chaotique dégénère progressivement en région de solutions périodiques. Deuxièmement, le processus de dégénérescence est souvent soudainement modifié par le retournement et la localisation de l'orbite du système.

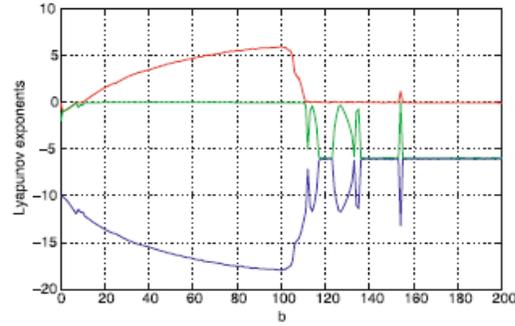


Fig 4.5 : Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $b \in [0.200]$ avec $a = 10$, $c = 2$.

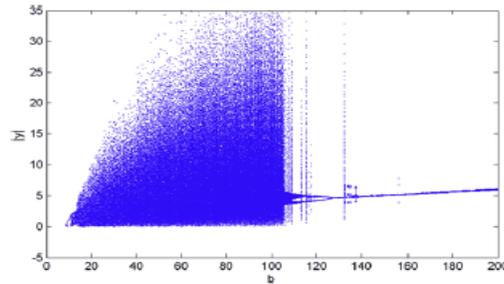


Fig 4.6 : Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $b \in [0.200]$ avec $a = 10$, $c = 2$.

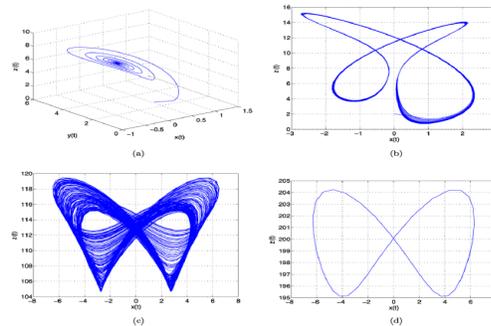


Fig 4.7 : Portraits de phase du système (3.3), $a = 10$, $c = 2$. (a) : Vue 3D sur les plans $x - y - z$, $b = 6$. (b) : Projection sur plan $x - y$, $b = 9$. (c) : Projection sur plan $x - z$, $b = 106$. (d) : Projection sur plan $y - z$, $b = 190$.

-Comportement dynamique du système (3.3) pour : $b = 28, c = 2$ et a varié

Le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre a est présenté à la Fig. 4.8.

Quand $a \in]0, 4.35]$, l'exposant maximal de Lyapunov est égal à zéro, ce qui implique que le système a une orbite périodique, comme illustré à la Fig. 4.10 (a), où $a = 4$. Quand $a \in]4.35, 17.3]$, l'exposant maximal de Lyapunov est positif, le système est chaotique comme indiqué à la Fig. 4.10 (b), où $a = 15$. Quand $a \in]17.3, 18.3]$, l'exposant maximal de Lyapunov est égal à zéro à nouveau, le système dégénère en région de solutions périodiques comme le montre la figure 4.10 (c), et quand un $a \in]18.3, 26]$, le système redevient chaotique. Quand $a \in]26, 41]$, le système a une orbite périodique, comme le montre la figure 4.10 (d) Quand $a > 41$, l'exposant maximal de Lyapunov est négatif, l'orbite du système converge vers un équilibre.

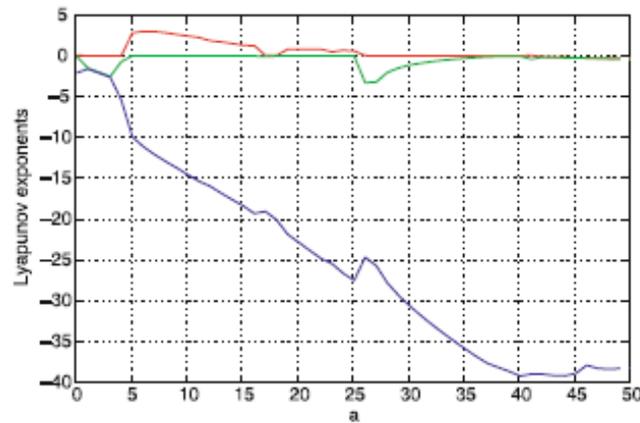


Fig 4.8 : Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.3) par rapport au paramètre $a \in [0, 50]$ avec $c = 2, b = 28$.

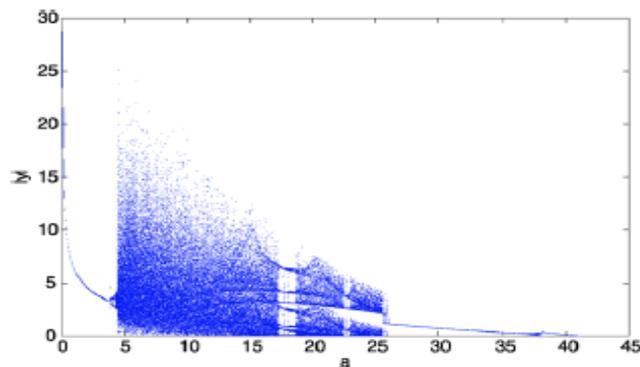


Fig 4.9 : Digramme de bifurcation du système (3.3) en fonction du paramètre $a \in [0, 45]$ avec $c = 2, b = 28$.

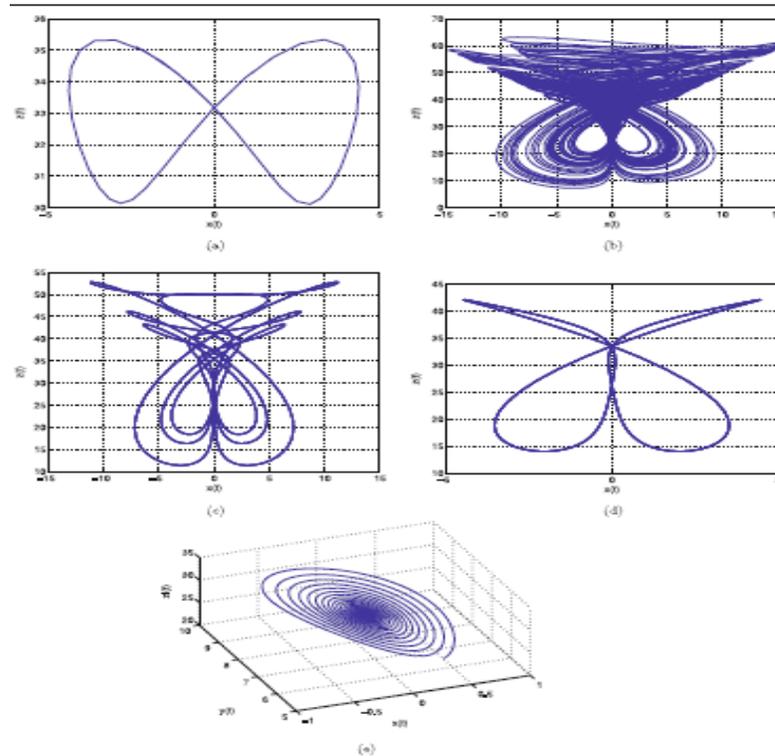


Fig 4.10 : Portraits de phase du système (3.3), $c = 2$, $b = 28$. (a) : Projection sur plan $x - z$, $a = 4$. (b) : Projection sur plan $x - z$, $a = 15$. (c) : Projection sur plan $x - z$, $a = 17.5$. (d) : Projection sur plan $x - z$, $a = 30$. (e) : Vue 3D sur les plans $x - y - z$, $a = 44$.

4.2 Analyse et dynamiques du système chaotique (3.4)

4.2.1 Analyse du système chaotique (3.4)

-Propriétés de base

Dans cette section, quelques propriétés de base du système (3.4) sont données. Nous commençons par les points d'équilibre du système et vérifions leur stabilité aux valeurs initiales des paramètres a, b, c .

-Points d'équilibre

Les points fixes du système (3.4) sont par définition tel que $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$ i.e.,

$$\begin{cases} a(y-x) + byz = 0, \\ (c-a)x + cy - xz = 0, \\ xy - z = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

donnent les cinq points d'équilibre :

$$\begin{cases} p_0 = (0, 0, 0) \\ p_{1,3} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{4a} (s-2a) \sqrt{\frac{a}{b^2c} (s-2ab+4bc)}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a}{b^2c} (s-2ab+4bc)}, -\frac{s}{2b} \right) \\ \simeq (\pm 4.049, \pm 3.166, -12.819) \\ p_{2,4} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{4a} (k-2a) \sqrt{\frac{a}{b^2c} (k-2ab+4bc)}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a}{b^2c} (k-2ab+4bc)}, -\frac{k}{2b} \right) \\ \simeq (\pm 1.746, \pm 1.256, 2.194) \end{cases} \quad (4.24)$$

où :

$$s = a + \sqrt{a^2b^2 - 2a^2b + a^2 - 2ab^2c + 6abc + b^2c^2} + ab - bc \simeq 68.366 \quad (4.25)$$

$$k = a - \sqrt{a^2b^2 - 2a^2b + a^2 - 2ab^2c + 6abc + b^2c^2} + ab - bc \simeq -11.686$$

-Stabilité

Afin de vérifier la stabilité des points d'équilibre, nous dérivons la matrice Jacobéenne en un point $p(x, y, z)$ du système (3.4).

$$J(p) = \begin{pmatrix} -a & a+bz & by \\ c-a-z & c & -x \\ y & x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 15 + \frac{8}{3}z & \frac{8}{3}y \\ -5-z & 10 & -x \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Pour p_0 , on obtient $J(p_0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 15 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec équation polynomiale caractéristique

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 - 70\lambda - 75 = 0$$

qui a trois valeurs propres :

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -11.513, \lambda_3 = 6.513 \quad (4.27)$$

Puisque toutes les valeurs propres sont réelles, le théorème de Hartman-Grobman implique que p_0 est un point de selle et instable selon le théorème de stabilité de Lyapunov.

En utilisant la même méthode, les valeurs propres du Jacobéen en p_1 et p_3 sont :

$$\lambda_1 = 3.3706 - 8.3184i, \lambda_2 = 3.3706 + 8.3184i, \lambda_3 = -12.741 \quad (4.28)$$

alors p_1 et p_3 sont deux points de selle instables. Les valeurs propres du Jacobéen en p_2 et p_4 sont :

$$\lambda_1 = 1.8884 + 3.3001i, \lambda_2 = 1.8884 - 3.3001i, \lambda_3 = -9.7768 \quad (4.29)$$

alors p_2 et p_4 sont deux points sellés foyers instables car aucune des valeurs propres n'a de partie réelle zéro et λ_1, λ_2 sont complexes.

-Dissipativité

Un système dynamique dissipatif vérifie la condition :

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} < 0 \quad (4.30)$$

Dans le cas du système (3.4), on a :

$$\nabla V = c - (a + 1) = -6 \quad (4.31)$$

Pour $a = 15, b = 8/3, c = 10$, on obtient $\nabla V = -6 < 0$ et donc la condition de dissipative est vérifiée sur ce système. Également,

$$\frac{dV}{dt} = e^{c-(a+1)} \simeq 0.0024788 \quad (4.32)$$

alors le volume de l'attracteur diminue d'un facteur de 0.0024788.

-Exposants de Lyapunov et dimension de Kaplan-Yorke

Les exposants de Lyapunov sont utilisés pour mesurer les taux exponentiels de divergence et de convergence des trajectoires proches, ce qui est un caractère important pour juger si le système est chaotique ou non. L'existence d'au moins un exposant de Lyapunov positif implique que le système est chaotique.

Pour les valeurs de paramètres $a = 15, b = 8/3$ et $c = 10$, les exposants de Lyapunov du nouveau système chaotique (3.4) sont obtenus à l'aide de l'algorithme de Wolf [19] dans Matlab, comme suit :

$$L_1 = 0.65581, L_2 = -0.00085397, L_3 = -6.655 \quad (4.33)$$

Le spectre des exposants de Lyapunov est présenté à la Fig. 4.11.

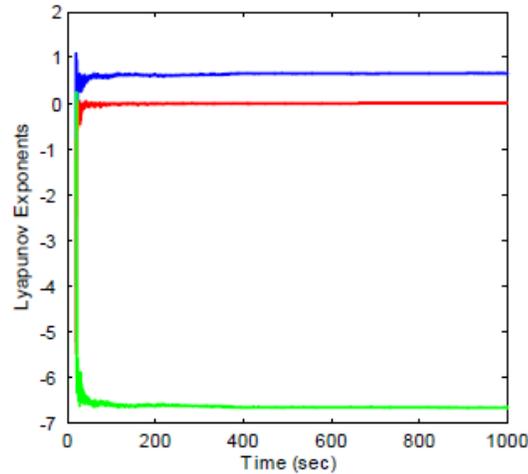


Fig 4.11 : Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$.

Le spectre des exposants de Lyapunov [20] ayant un terme positif L , il s'ensuit que le nouveau système chaotique 3D (3.4) est chaotique. La dimension de Kaplan-Yorke du système (3.4) est calculée comme suit :

$$D_{KL} = 2 + \frac{L_1 + L_2}{|L_3|} = 2.0984. \quad (4.34)$$

4.2.2 Dynamique du système (3.4)

Dans cette section, les comportements dynamiques du système (3.4) sont étudiés numériquement à l'aide du spectre du plus grand exposant de Lyapunov et des diagrammes de bifurcation.

-Comportement dynamique du système (3.4) pour : $b = 8/3$; $c = 10$; et a varié

La figure 4.12 montre le spectre des plus grands exposants de Lyapunov du système (3.4) selon le paramètre a : $a \in [12, 22]$; et comportements du système (3.4) sont soit chaotique, périodique soit convergent vers l'un des équilibres. Quand $a \in [12.5, 16]$; l'exposante maximale de Lyapunov est positif, ce qui implique que le nouveau système (3.4) est chaotique dans cet intervalle. La Fig. 4.13 montre l'attracteur étrange quand $a = 15$. For $a \in [16.4, 16.8]$; l'exposant maximal de Lyapunov est presque toujours égal à zéro, ce qui implique que le nouveau système (3.4) À une orbite périodique. La Fig. 4.14 montre l'orbite périodique quand $a = 16.5$. l'exposant maximal de Lyapunov est négatif pour $a \in [18.5, 22]$ ce qui signifie que les trajectoires du nouveau système (3.4) sont en chute pour converger vers l'équilibre. Cette dynamique est confirmée par le diagramme de bifurcation de la Fig. 4.15.

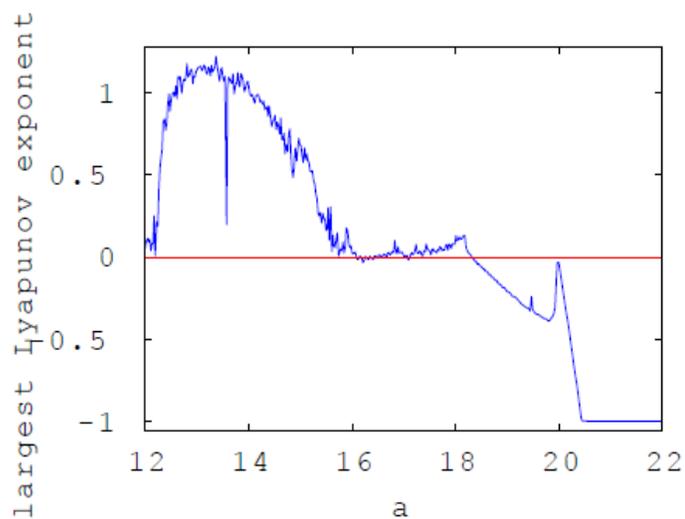


Fig 4.12 : Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $a \in [12, 22]$; and $b = 8/3$; $c = 10$.

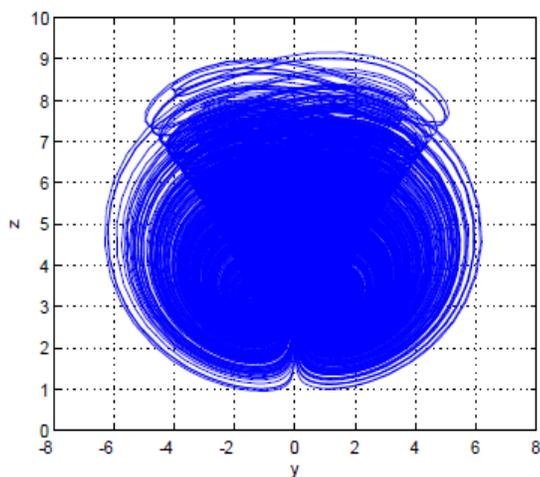


Fig 4.13 : L'attracteur étrange du nouveau système (3.4) lorsque : $a = 15$; $b = 8/3$; $c = 10$.

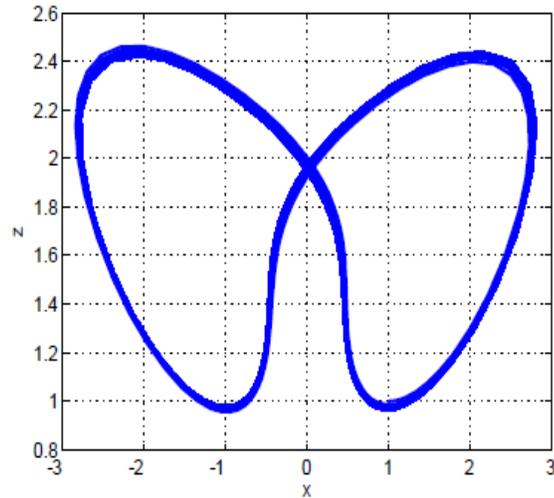


Fig 4.14 : L'orbite périodique du nouveau système (3.4) lorsque $a = 16.5$; $b = 8/3$; $c = 10$.

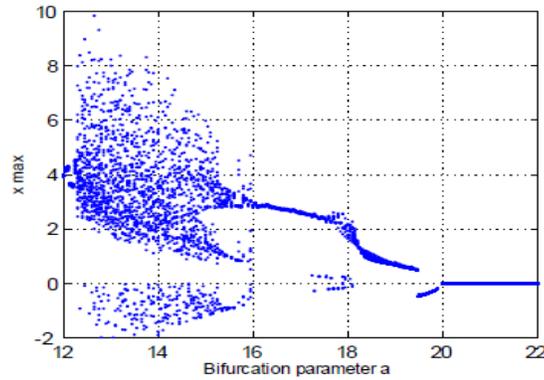


Fig 4.15 : Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $a \in [12, 22]$; and $b = 8/3$; $c = 10$.

-Comportement dynamique du système (3.4) pour : $a = 15$; $c = 10$; et b varié

La Fig. 4.16 montre le spectre des plus grands exposants de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre b : évidemment, lorsque $b \in [0, 20]$; le comportement du système (3.4) est en état chaotique pour toutes les valeurs de cette plage, à l'exception de certaines valeurs pour lesquelles le système passe en état périodique. cette dynamique est confirmée par le diagramme de bifurcation de la Fig. 4.17.

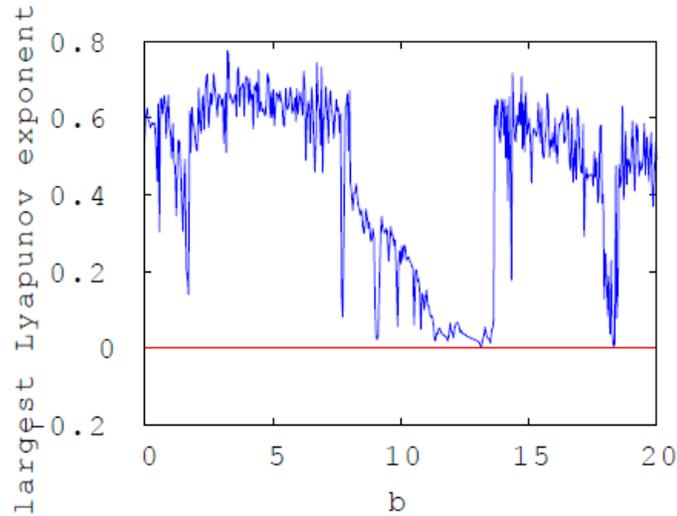


Fig 4.16 : Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $b \in [0, 20]$; et $a = 15$; $c = 10$

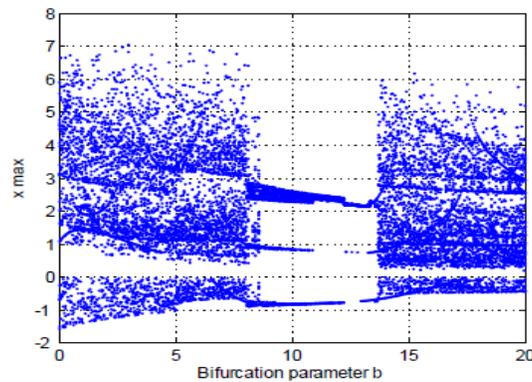


Fig 4.17 : Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $b \in [0, 20]$; et $a = 15$; $c = 10$.

-Comportement dynamique du système (3.4) pour : $a = 15$; $b = 8/3$; et c varié

Les Figs. 4.18-4.19 montre le spectre des plus grands exposants de Lyapunov et le diagramme de bifurcation du système (3.4) par rapport au paramètre $c \in [5, 13]$; et $a = 15$; $b = 8/3$. dans $c \in [5, 13]$; soit le comportement du système (3.4) converge vers un équilibre unique, périodique au chaotique.

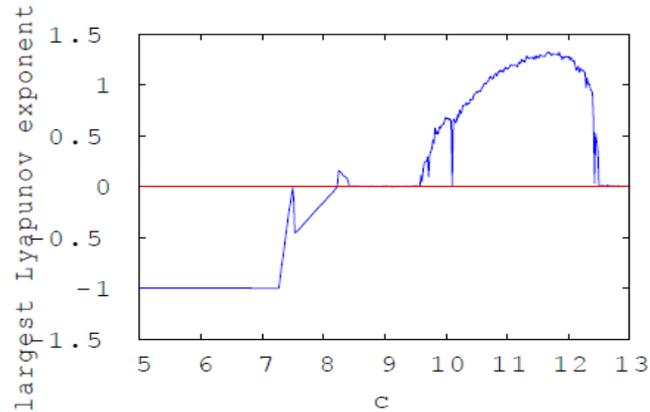


Fig 4.18 : Variation du plus grand exposant de Lyapunov du système (3.4) par rapport au paramètre $c \in [5, 13]$; and $a = 15$; $b = 8/3$.

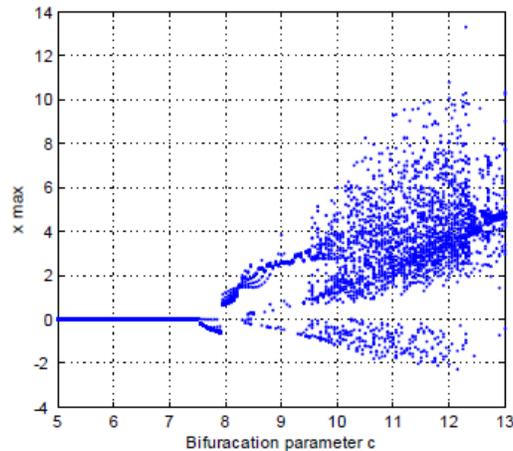


Fig 4.19 : Diagramme de bifurcation du système (3.4) en fonction du paramètre $c \in [5, 13]$; et $a = 15$; $b = 8/3$.

Les figures. 4.20-4.21 représente l'attracteur chaotique du nouveau système (3.4) en vue 3D, alors que sur les fig. 4.22-4.23-4.24-4.25-4.26, les projections 2D de l'étrange attracteur chaotique du nouveau système chaotique (3.4) sur (x, y) , (y, x) , (x, z) , (z, x) , (y, z) , (z, y) plans, sont indiqués, respectivement

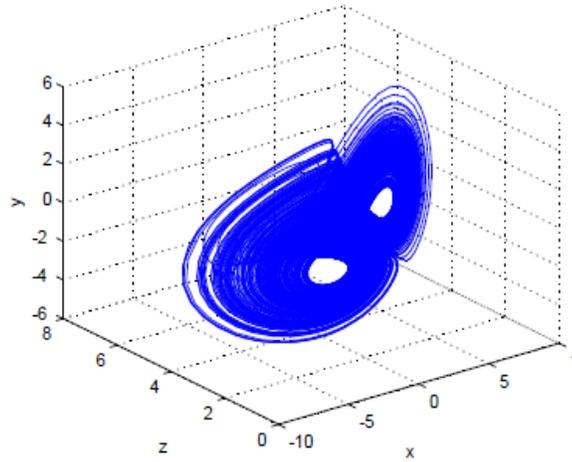


Fig 4.20 : Vue 3D sur l'espace $x - y - z$ de l'attracteur chaotique du nouveau système (3.4).

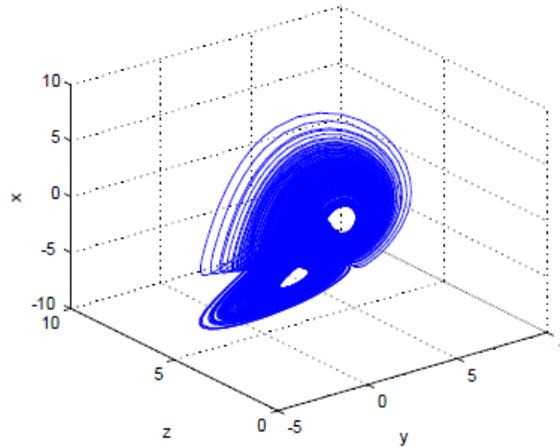


Fig 4.21 : Vue 3D sur l'espace $y - z - x$ de l'attracteur chaotique du nouveau système (3.4).

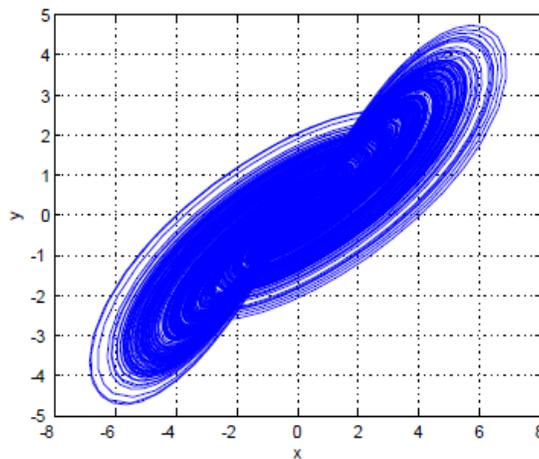


Fig 4.22 : Projection sur plan $x - y$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

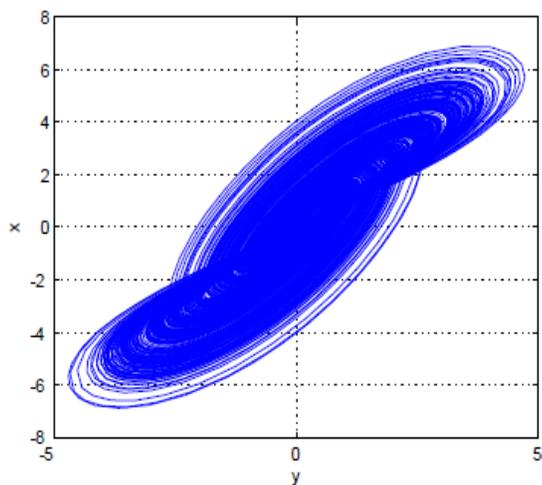


Fig 4.23 : Projection sur plan $y - x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

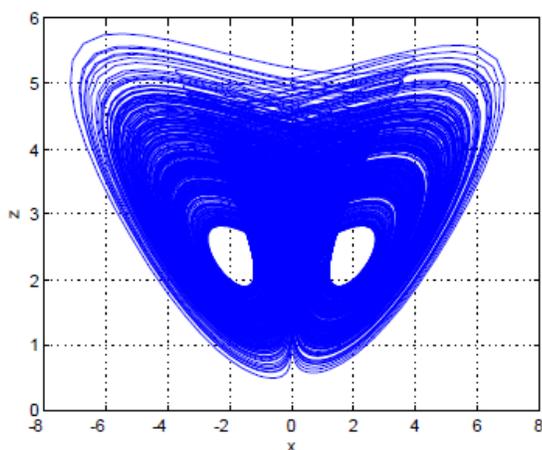


Fig 4.24 : Projection sur plan $x-z$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

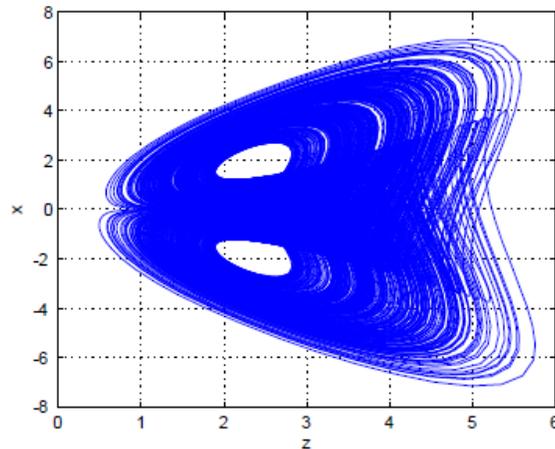


Fig 4.25 : Projection sur plan $z - x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

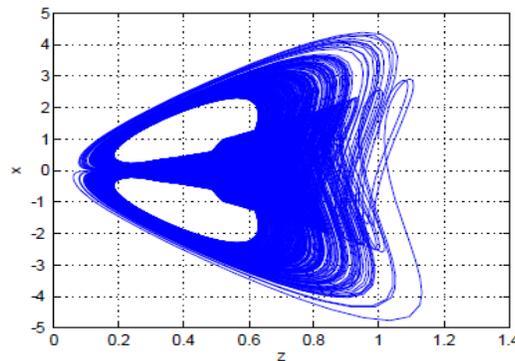


Fig 4.26 : Projection sur plan $z - x$ de l'attracteur chaotique du système (3.4) pour : $a = 15$;
 $b = 8/3$; $c = 10$.

4.3 Conclusion

Ce chapitre présente l'analyse et la dynamique des systèmes chaotiques tridimensionnelle. Pour l'analyse quelques propriétés de base du nouveau système chaotique sont données, telles que les points d'équilibre, la stabilité des points d'équilibre, le spectre des exposants de Lyapunov, la dimension de Kaplan-Yorke. La dynamique du système chaotique 3D est également étudiée numériquement à l'aide des diagrammes de plus grands exposants de Lyapunov et des diagrammes de bifurcation. Les résultats sont validés par simulation numérique avec Matlab.

Conclusion Générale

La théorie du chaos est l'une des théories principales des systèmes dynamiques, car son importance pour décrire le comportement pour ces systèmes. L'analyse et la dynamique des systèmes dynamiques chaotiques ont été étudiés dans nombreux travaux. Le but essentiel dans ce travail est de donner une idée générale sur l'analyse et la dynamique de quelque $3D$ systèmes chaotiques. Le premier est un chapitre préliminaire contient les notions fondamentaux concernons les systèmes dynamiques (discrets et continus) et le deuxième est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov.

Dans le troisième chapitre, nous considérons quelques systèmes chaotiques tridimensionnelle avec quelque détaillent. Dans le quatrième chapitre, nous présentons l'analyse et la dynamique de quelque $3D$ systèmes chaotiques.

Pour l'analyse de ces systèmes nous cherchons les points d'équilibre de ces systèmes et leurs stabilités selon la matrice jacobéenne et les valeurs propres correspondantes, ensuite, nous étudions la dissipativité du système considéré et nous cherchons les exposants de Lyapunov en utilisant l'algorithme de Wolf pour confirmer que ces systèmes sont chaotiques.

Les comportements dynamiques de ces systèmes sont étudiés en utilisons les diagrammes des variations exposants de Lyapunov et les diagrammes de bifurcations selon les paramètres de bifurcations de ces systèmes.

Bibliographie

- [1] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), 130-141.
- [2] Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
- [3] Chen, G., & Ueta, T. (1999). Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 9(07), 1465-1466.
- [4] Lü, J., & Chen, G. (2002). A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 12(03), 659-661.
- [5] Grebogi, C., & Lai, Y. C. (1997). Controlling chaotic dynamical systems. *Systems & control letters*, 31(5), 307-312.
- [6] Xiao-Qun, W., & Jun-An, L. (2003). Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(4), 721-729.
- [7] Vaidyanathan, S. (2013). A new six-term 3D chaotic system with an exponential nonlinearity. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 79(1), 135.
- [8] Vaidyanathan, S., Volos, C. K., & Pham, V. T. (2015). Analysis, adaptive control and adaptive synchronization of a nine-term novel 3D chaotic system with four quadratic nonlinearities and its circuit simulation. *J Eng Sci Technol Rev*, 8(2), 181-191.
- [9] Mamat, M., Vaidyanathan, S., Sambas, A., & Sanjaya, W. S. M. (2018, March). A novel double-convection chaotic attractor, its adaptive control and circuit simulation. In *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* (Vol. 332, No. 1, p. 012033). IOP Publishing.
- [10] Vahedi, S., & Noorani, M. S. M. (2013). Analysis of a new quadratic 3D chaotic attractor. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013). Hindawi.

- [11] Elhadj, Z. (2008). Analysis of a new three-dimensional quadratic chaotic system. *Radioengineering*, 17(1), 9-13.
- [12] Andreyev, Y. V., Belsky, Y. L., Dmitriev, A. S., & Kuminov, D. A. (1996). Information processing using dynamical chaos : neural networks implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(2), 290-299.
- [13] Zhang, X., Zhu, H., & Yao, H. (2012). Analysis of a new three-dimensional chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 67(1), 335-343.
- [14] Li, C., & Chen, G. (2004). Estimating the Lyapunov exponents of discrete systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14(2), 343-346.
- [15] Gonchenko, S. V., Meiss, J. D., & Ovsyannikov, I. I. (2006). Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation. *Regular and Chaotic Dynamics*, 11(2), 191-212.
- [16] Čelikovský, S., & Chen, G. (2002). On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(08), 1789-1812.
- [17] Čelikovský, S., & Chen, G. (2002). Hyperbolic-type generalized Lorenz chaotic system and its canonical form. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 203-208.
- [18] Čelikovský, S., & Chen, G. (2005). On the generalized Lorenz canonical form. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(5), 1271-1276.
- [19] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285-317.
- [20] Oseledec, V. I. (1968). A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic number for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19, 197-231.
- [21] Hannachi, F. (2019). Analysis, dynamics and adaptive control synchronization of a novel chaotic 3D system. *SN Applied Sciences*, 1(2), 158
- [22] Hirsch, M. W., Devaney, R. L., & Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra* (Vol. 60). Academic press.
- [23] Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. In *The Theory of Chaotic Attractors* (pp. 94-102). Springer, New York, NY.
- [24] Li, C. P., & Chen, G. R. (2004). An improved version of the Marotto theorem (vol 18, pg 69, 2003). *Chaos solitons & fractals*, 20(3), 655.
- [25] Leonov, G. A. (1997). *Lyapunov exponents and problems of linearization. From stability to chaos*. St. Petersburg University Press, 11, 3-4.

- [26] Li, C., & Chen, G. (2004). Estimating the Lyapunov exponents of discrete systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14(2), 343-346.
- [27] Linz, S. J., & Sprott, J. C. (1999). Elementary chaotic flow. *Physics Letters A*, 259(3-4), 240-245.
- [28] Li, C., & Chen, G. (2003). On the Marotto–Li–Chen theorem and its application to chaotification of multi-dimensional discrete dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(4), 807-817.
- [29] Misiurewicz, M. (2010). Horseshoes for continuous mappings of an interval. In *Dynamical systems* (pp. 125-135). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [30] Sprott, J. C. (1994). Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 50(2), R647.
- [31] Parker, T. S., & Chua, L. (2012). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media.
- [32] Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398 .
- [33] Smítal, J. (1986). Chaotic functions with zero topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297(1), 269-282.
- [34] Seydel, R. U. D. I. G. E. R. (1994). Practical bifurcation and stability analysis, from equilibrium to chaos. In *Interdisciplinary Applied Mathematics* (Vol. 5). Springer New-York.
- [35] Zhou, T., Chen, G., Lu, Q., & Xiong, X. (2006). On estimates of Lyapunov exponents of synchronized coupled systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(3), 033123.
- [36] Sprott, J. C. (1993). *Strange attractors : Creating patterns in chaos* (Vol. 9). M & T Books.
- [37] Michiels, W., & Niculescu, S. I. (2007). *Stability and stabilization of time-delay systems : an eigenvalue-based approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [38] Lien, C. H., Vaidyanathan, S., Sambas, A., Mamat, M., & Sanjaya, W. S. M. (2018, March). A new two-scroll chaotic attractor with three quadratic nonlinearities, its adaptive control and circuit design. In *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* (Vol. 332, No. 1, p. 012010). IOP Publishing.
- [39] Vaidyanathan, S. (2015). A 3D Novel Highly Chaotic System with Four Quadratic Nonlinearities, its Adaptive Control and Anti-Synchronization with Unknown Parameters. *Journal of Engineering Science & Technology Review*, 8(2).
- [40] Hannachi, F., & Zeraoulia, E. (2018). *Attracteurs étranges et chaos* (Doctoral dissertation, université oum el bouaghi).