



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Le Chaos dans les systèmes dynamiques

Thème

Présenté Par :

Kharkhache Chaima

Chaibi Saoussen

Devant le jury :

Mr **Zeraoulia Elhadj** Professeur Université Larbi Tébessa Président

Mm **Gasri Ahlem** MCB Université Larbi Tébessa Examineur

Mr **Boukhalifa el-hafsi** MCB Université Larbi Tébessa Encadreur

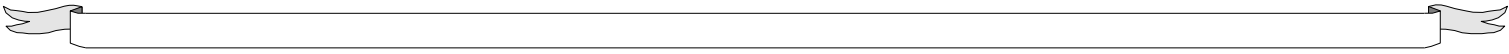
Date de soutenance : 20/06/2019



Résumé

L'objectif de ce mémoire de fin d'études est basé sur la problématique générale qui porte sur la détection du chaos dans les systèmes dynamique non linéaires. Plus précisément, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques continus non linéaires, dont leurs formulations sont données par des équations différentielles avec la présence d'un paramètre de bifurcation, et aussi nous nous intéressons aux systèmes dynamique discrets non linéaires, dont leurs formulations sont données par des fonctions récurrentes avec la présence d'un paramètres de bifurcation, (ultérieurement, sera plusieurs paramètres dans le cas multidimensionnel), ou une petite perturbation aux conditions initiales résulte un grand écart entre les observations à long terme, c'est d'ici la notion de l'imprévisibilité a lieu. En appliquant les outils de quantification du chaos, plusieurs exemples de systèmes sont détectés chaotiques, pour un tel ensemble de paramètres.

Les mots clés : système dynamique, bifurcation, stabilité, chaos, les exposants de lyapunov, attracteurs, application Logistique, modèle de lozi, modèle de Hénon, modèle de Lorenz.

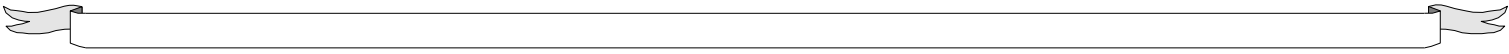




Abstract

The purpose of this final memory is focused on the general problem of discovering chaos in nonlinear dynamical systems. More specifically, we are interested in nonlinear continuous dynamical systems, whose formulas are presented by differential equations with the splicing parameter, and we are also interested in separate nonlinear dynamical systems, whose formulas are presented by repetitive functions with the parameters of the diffraction (later, Many parameters in the case of multi-dimensional), or a small disturbance in the initial conditions lead to a large gap between the long-term observations, it is here to the idea of unpredictability occur. Through the application of quantitative measurement tools for chaos, many examples of anarchic systems are detected chaotic, for a set of parameters

Keywords: dynamical system, bifurcation, stability, chaos, lyapunov exponents, attractors, Logistic application, Lozi model, Hénon model, Lorenz model.



ملخص

إن الهدف من هذه الأطروحة النهائية يعتمد على الإشكالية العامة التي تتعلق باكتشاف الفوضى في الأنظمة الديناميكية غير الخطية. بتعبير أدق، نحن مهتمون بالأنظمة الديناميكية المستمرة غير الخطية، والتي يتم تقديم صيغها بواسطة معادلات تفاضلية مع وجود وسيط التفرع، وكذلك نحن مهتمون بالأنظمة الديناميكية غير الخطية المنفصلة، والتي يتم تقديم صيغها بواسطة دوال تراجعية مع وجود وسيط التفرع، (في وقت لاحق، سيكون العديد من الوسائط في حالة متعددة الأبعاد)، حيث يؤدي تغير صغير في الشروط الابتدائية إلى حدوث تباعد كبير بين الصور على المدى الطويل، فمن هنا ظهرت فكرة عدم القدرة على التنبؤ. من خلال تطبيق أدوات القياس الكمي للفوضى سوف يتم اكتشاف العديد من الأمثلة على النظم الفوضوية، من اجل مجموعة من الوسائط.

الكلمات المفتاحية: نظام ديناميكي, وسائط, استقرار, فوضى, جاذب, تطبيق لوجستي, نموذج Lozi, نموذج Hénon, نموذج Lorenz.

Dédicace

بسم الله الرحمن الرحيم والحلوة والسلام على أئمة المرسلين والحمد لله رب العالمين
اولا نشكر الله عز وجل الذي وفقنا لهذا وما كنا لنهتدي اليه لولا ان هدانا الله
في نهاية هذا المسار الشاق بالنسبة للكثير ممن اهتم بوصولي لهذه اللحظة
لكل من ساهم ولكل من ساهم ولو بالقليل لتحقيق هذا الإنجاز المتواضع، اود أولا ان تقف كل كلمات الشكر
منحنية امام عظمة امرأة ببساطة كانت عظيمة **امي** اهدي لكي كل هذه اللحظات السعيدة، هذا العمل
الصغير امام تضحياتك الجسدية وأقول شكرا. ثم وبامتنان لا يقل، وشكرا لا يمل اهدي هذه الفرحة لامنا
خديجة الداعم الأول.
واود ان اختص بالشكر كل جنود الخفاء وكذا **ابي**، **اخوتي** و**صديقاتي** وأجمل رفيقة درب واخت، **شيء**.
اتمنى لكم التوفيق.



Avec un grand plaisir, une immense joie et un cœur ouvert
Merci Allah Avant tout

Je dédie mon travail à mes très chers, respectueux et magnifiques ma **mère** et mon **père** qui m'ont soutenu tout au long de ma vie .ainsi à mes **sœurs**:Hanene; Nozha; mes **frères** Walid; Chaouki; Hichem; Bilele; Skander.; mes amoureux: Islem; Titou; Tasnouma; Ahouba et mon proche sœur et binôme **Saoussen**, mes chers amies **Nassima** et **Amira**, et aussi a tout personne qui m'ont encouragé au long de mes étude.



Remerciements

*Nous remercions avant tout **Dieu** de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.*

*Nous exprimons toute notre profonde reconnaissance à notre encadreur **Dr. Boukhalfa el hafsi** pour tout l'effort qu'il a fournis pour nous faciliter et aider à accomplir notre travail de fin d'étude.*

*Nous remercions profondément **Mr. Dr.Zeraoulia Elhadj** pour avoir accepté de présider Notre jury.*

*Nos remerciements sont aussi adressés **Mm. Gasri Ahlem** d'être membre de jury et ayant de présenter notre thèse devant elle.*

*Aussi nous adressons nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et tout le personnel du département de **Mathématiques et Informatique**.*

Table des matières

1	Notions préliminaires	8
1.1	Système dynamique	8
1.1.1	Système dynamique continue	9
1.1.2	Système dynamique discret	10
1.2	Points fixes	10
1.3	Orbite (ou trajectoire)	11
1.4	Orbite périodique (ou p-cycle)	12
1.5	Stabilité	13
1.5.1	Stabilité des point fixes	13
1.5.2	Stabilité des points périodiques	17
1.5.3	Types de points fixes et leurs stabilité	20
1.6	Linéarisation	21
1.7	Fonction de Lyapunov	22
1.8	Section de Poincaré	23
2	Bifurcation	24
2.1	Introduction	24
2.2	Définitions	24
2.3	Les type de bifurcation	25
2.3.1	Bifurcaton de noeud-col (pli ou fold bifurcation)	25
2.3.2	Bifurcation de Fourche	26
2.3.3	Bifurcation de Hopf	28
2.3.4	Bifurcation transcritique (Transcritical bifurcation) :	28
2.3.5	Bifurcation de doublement de période (ou flip) :	30

3	Théorie du chaos	32
3.1	Bref historique sur le chaos	32
3.2	Definitions du chaos	34
3.3	Routes vers le chaos	35
3.3.1	Par la doublement de période	35
3.3.2	Par intermittence	35
3.3.3	Par quasi-périodicité	35
3.4	Caractéristiques du chaos	36
3.4.1	Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)	36
3.4.2	Exposants de Lyapunov	36
3.4.3	Attracteur chaotique étrange	43
4	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques	46
4.1	Le chaos dans les systèmes dynamiques continues	46
4.1.1	Modèle de Lorenz	46
4.2	Le chaos dans les systèmes dynamiques discrets	50
4.2.1	L'application logistique	50
4.2.2	Application de Hénon	55
4.2.3	Modèle de Lozi	59

Notations

\mathbb{R}	ℓ ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	ℓ ensemble des nombres naturels.
\mathbb{Z}	ℓ ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r$	ℓ ensemble des parties de \mathbb{R}^n
x^*	Points fixes.
$Df(x)$	La dérivée de la matrice jacobienne.
t, k	Indices.
p	Période.
m_p	Multiplicateur.
ξ	Valeurs propres.
$S.C.I$	Sensibilité aux conditions initiales.
d	La distance.
μ	Paramètre de contrôle.
D_L	Dimension de Lyapunov.

Table des figures

Figure N ⁰	Titre
Figure (1,1)	Représentation géométrique des point fixe.
Figure (1,2)	Représentation graphique de l'orbite.
Figure (1,3)	(a) : instable, (b) : stable, (c) : asymptotiquement stable.
Figure (1,4)	Le graphe de la fonction f .
Figure (1,5)	Le graphe de la fonction g .
Figure (1,6)	Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .
Figure (1,7)	Méthode de détermination des sections de poincaré.
Figure (2,1)	Diagramme de bifurcation noeud-col dans le cas $f(x, \mu) = \mu + x^2$.
Figure (2,2)	Diagramme de bifurcation fourche sup-critique.
Figure (2,3)	Diagramme de bifurcation fourche sous-critique.
Figure (2,4)	Diagramme de bifurcation de hopf.
Figure (2,5)	Diagramme de bifurcation transcritique dans le cas $x_{k+1} = x_k + x_k(\mu - x_k)$.
Figure (2,6)	Diagramme de bifurcation transcritique dans le cas $x_{k+1} = x_k + x_k(\mu + x_k)$.
Figure (2,7)	Diagramme de bifurcation par doublement de période a) $f(x_k, \mu) = -x_k + \mu x_k + x_k^3$; b) $f(x_k, \mu) = -x_k - \mu x_k + x_k^3$.
Figure (3,1)	Sensibilité aux conditions initiales de l'application Logistique.
Figure (3,2)	La transformation de boulanger.
Figure (3,3)	Attracteur étrange de Chua, Hénon.
Figure (3,4)	Attracteur étrange de Lorenz, Chen.

Figure (4,1)	Attracteur de Lorenz.
Figure (4,2)	Le graphe de $g(x)$.
Figure (4,3)	L'èvolution des points fixes de l'application logistique pour $v = 3.3 < 1 + \sqrt{6}$.
Figure (4,4)	Le Graphe de $g^2(x_n)$.
Figure (4,5)	L'èvolution des points fixes de l'application logistique pour $v = 3.5 > 1 + \sqrt{6}$.
Figure (4,6)	L'èvolution des points fixes de l'application logistique pour $v = 3.57$.
Figure (4,7)	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique $g(x_n) = 3.8x_n(1 - x_n)$. A) Pour $x_0 = 0.8$; B) Pour $x_0 = 0.8001$.
Figure (4,8)	Diagramme de bifurcation de l'application logistique.
Figure (4,9)	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec condition initiales $A = (x_0, y_0) = (0, 0)$ et $B = (x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.
Figure (4,10)	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec condition initiales $A = (x_0, y_0) = (0, 0)$ et $B = (x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.
Figure (4,11)	L'èvolution de l'exposante de Lyapunov λ de système de Hénon en fonction de a .
Figure (4,12)	Diagramme de bifurcation de Hénon.
Figure (4,13)	Attracteur de Hénon.
Figure (4,14)	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques se sont développés durant le *XIX*^{ème} siècle ; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français **Henri Poincaré**¹ avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales, il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Puis, plusieurs recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées, **Alexandre Lyapunov**², le mathématicien russe qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, et **Edward Lorenz**³ météorologue américain analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. **Edward Lorenz** soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents. C'est d'ici les premiers pas pour comprendre le chaos déterministe.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases" ; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire et donc prévisible.

En raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations, et la cryptographie , les systèmes dynamiques chaotiques jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques,

¹Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

²Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

³Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Massachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

des réactions chimiques et des systèmes économiques, ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques. Par conséquent, il est important de considérer l'étude de ce type de systèmes.

Suite à ce qui précède, notre mémoire est réparti sur quatre chapitres importants et liés l'un de l'autre, dont le premier est consacré aux systèmes dynamiques dans leurs généralité, comme par exemple, les définitions de base, d'espace d'état, de système dynamique continu, de système dynamique discret, des points fixes avec leurs classification et stabilité, en passant en deuxième chapitre à la théorie de bifurcation, en etudions avec exemples tous les types de bifurcation.

Le troisième chapitre, nous fait une tournée vers les outils de mesure et de quantification du chaos dans tel système, en décrivant les notions d'attracteur étrange, sensibilités aux conditions initiales, exposant de Lyapunov.

Pour la bonne illustration du chaos dans les systèmes dynamiques, nous citons dans le quatrième chapitre, quelques exemples universels des systèmes dynamiques détecter chaotique .

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Système dynamique

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables statiques appelés paramètres du système, sont fixes, les variables dynamique, encore sont les quantités fondamentales qui évolue au cours du temps de manière à la fois :

- Causale (c.à.d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé du présent).
- Déterministe(c.à.d qu'à une "**condition initiale**" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "**un et un seul état futur**" possible).[5]

Définition 1.1 Soient X un espace mathématique (généralement $X = \mathbb{R}^n$) T est l'ensemble (\mathbb{R} , \mathbb{Z} ou \mathbb{N}) et f une application continue

$$f : X \times T \longrightarrow X$$
$$(x, t) \longrightarrow f(x, t)$$

on définit un système dynamique par le triplet (X, T, f) si $\forall x \in X$

$$f(x, 0) = x$$
$$f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2), \forall t_1, t_2 \in T,$$

sachant que

X : Espace de phases.

T : Espace temporel.

f : Flot du système dynamique ou encore (fonction d'évolution).[8]

Définition 1.2 (Espace de phases) : De manière simple, l'espace de phases est une structure correspondante à l'ensemble de tout les états possible du système considéré.

Définition 1.3 (Espace temporel) : C'est l'ensemble des coordonnées nécessaire à la description complète d'un système. Cet espace peut être continue ou discret.

Définition 1.4 (Flot) : On appelle flot d'un système dynamique l'application continue [16]

$$\begin{aligned}\Phi & : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \\ (x, t) & \rightarrow \Phi_t(x) = \Phi(x, t).\end{aligned}$$

Qui possède les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\Phi_t(x_0) & = x_0 \\ \Phi_{t+s}(x_0) & = \Phi_t(\Phi_s(x_0)), \text{ pour tout } t \geq s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Exemple 1.1 – Cas continue : (L'oscillateur de Duffing)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où δ, γ, ω sont des paramètres physiques réels (variables statiques) l'espace de phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^3 .

– **Cas discret :** (l'application de Hénon)

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels, l'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^2 .

Remarque 1.1 On classifie un système dynamique par rapport au temps à deux catégories

- Systèmes dynamiques continus.
- Systèmes dynamiques discrets.

1.1.1 Système dynamique continue

Un système dynamique [9] dans le cas continue est représenté par un système d'équation différentielle du premier order (EDP parabolique ou équation différentielle ordinaire) de la forme :

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système, avec une condition initiale :

$$x_0 = x(t_0)$$

1.1.2 Système dynamique discret

Soit $f : D \rightarrow D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ une application continue et dérivable, f^k désigne la $k^{\text{ième}}$ itérée de f , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x)).$$

Dans le pratique $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$, représentant les valeurs d'une certaine quantité au temps $0, 1, 2, \dots$

Ainsi la valeur de la quantité aux temps $k + 1$ est une fonction de sa valeur au temps k .

L'application f est couramment appelée "système dynamique **discret**". [9]

Aussi on peut le représenter par l'itération suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, \mu), x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^P \\ x(0) = x_0 \in D \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2 Points fixes

a) Cas continue

Définition 1.5 On appelle un point d'équilibre (point fixe, critique, ou singulier) de 1.1, tout point x^* de l'espace de phase vérifiant l'équation :

$$f(x^*) = 0.$$

b) Cas discret

Définition 1.6 Un point x^* est appelé un point fixe (point stationnaire) de 1.2 si :

$$f(x^*) = x^*.$$

Géométriquement :

Les points fixes sont définies par l'intersection de la courbe de la fonction $y = f(x)$ avec la droite $y = x$.

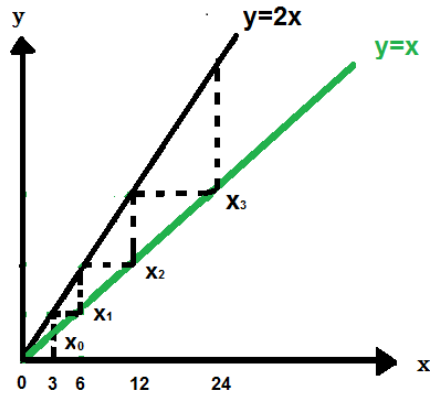


Fig (1,1) : Représentation géométrique des points fixes.

Remarque 1.2 Soit la matrice jacobienne :

$$J = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Si la matrice jacobienne $Df(x^*)$ n'a pas des valeurs propres dont le module soit égale à un, x^* est appelé point fixe **hyperbolique**.
- Si tout les modules des valeurs propres de $Df(x^*)$ sont égaux à un, x^* est appelé point fixe **elliptique**.

1.3 Orbite (ou trajectoire)

Définition 1.7 Une trajectoire est une solution du système différentiel.

a) Cas continu

On considère le système dynamique continue 1.1 l'orbite est définie par :

$$O(x_0) = \{x(t); -\infty < t < +\infty\}.$$

b) Cas discret

Pour tout point x d'une fonction f , l'orbite directe et l'orbite arrière de x sont définies respectivement par :

$$O_+^f = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

$$O_-^f = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

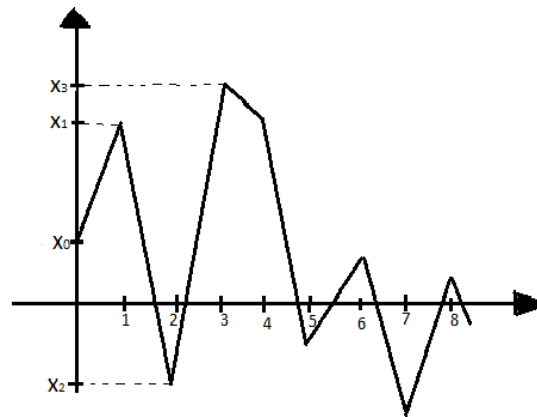
c-à-d l'ensemble des points $\{x, f(x), f^2(x)\dots\}$ et $\{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x)\dots\}$.[12]

Remarque 1.3 *Simplement, l'orbite direct de x sera appelé orbite de x , où*

$$O(x) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(k) = f(x(k-1)), x(k+1) = f(x(k)), \dots\}.$$

Représentation graphique de l'orbite de x_0

Dans \mathbb{R} on représente l'orbite issue d'un point x_0 par le graphe suivant :



Fig(1,2) : Représentation graphique de l'orbite.

1.4 Orbite périodique (ou p-cycle)

a) Cas continue

Soit le système dynamique continue 1.1, un point x est dit T -périodique

$$\forall k \in \mathbb{R} : x(k+T) = x(k) \quad (1.3)$$

b) Cas discret

Un ensemble $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p ou (**orbite périodique** d'ordre p , ou encore un **p -cycle**) si

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1. \\ f(x_{p-1}) = x_0 \end{array} \right\}$$

Autrement dit, pour $i = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1$ chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p , ou $f^p(x_i) = x_i$, et n'est pas un point fixe pour f^k si $k < p$.

S'il existe $k \geq 2$ tel que $f^k(x) = x$, on dit que x est un point **périodique**. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 2$ tel que $f^k(x) = x$. [12]

Remarque 1.4 – Une orbite périodique $O(x)$ est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période p .

– Tout point fixe, étant point périodique de période $p = 1$, est un point périodique de n'importe quelle période.

1.5 Stabilité

1.5.1 Stabilité des point fixes

a) Cas continue

Définition 1.8 [aux sens de lyapunov] [17] Un point d'équilibre x_0 est :

– stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.3)$$

– Asymptotiquement stable si après une faible perturbation il revient à sa position d'équilibre quand $t \rightarrow \infty$

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0.$$

– Exponentiellement stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < a \|x(t_0) - x\| \exp(-bt) \forall t > t_0.$$

– Le point d'équilibre x_0 est instable si l'équation (1.4) n'est pas satisfaite.

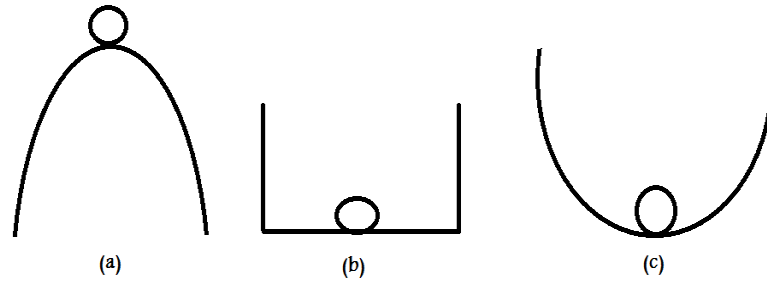


Fig (1,3) : (a) : instable, (b) : stable, (c) : asymptotiquement stable.

Exemple 1.2 ($n=2$)

Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} ; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix} ; \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon ; \forall t > 0$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|)$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta ; \text{ on prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} ; \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \rightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

b) Cas discret

Définition 1.9 Un point fixe $x^* \in D$ est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_0 - x^*| < \delta \implies \forall k \geq 0 : |x_k - x^*| < \varepsilon.$$

– **En dimension 1** ; Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le multiplicateur est la pente $m_p = f'(x^*)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine la nature de point fixe (ou le type)

Théorème 1.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposons que x^* un point fixe, alors :

1. Attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$;
2. Répulsif (ou instable) si $|m_p| > 1$;
3. Indifférent si $|m_p| = 1$;
4. Super attractif (super stable) si $m_p = 0$.

On s'appelle m_p : **le multiplicateur** de f au point x^* .

Preuve. On utilise la fomule de Taylor au voisinage de x^* :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + m_p(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ &= x^* + m_p(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ f^2(x) &= ff(x^*) + m_p(m_p(x - x^*)) + O(2) \\ &= x^* + m_p^2(x - x^*) + O(2) \\ &\dots \\ f^k(x) &= x^* + m_p^k(x - x^*) + O(2) \end{aligned}$$

Ainsi, l'éloignement par rapport à x est multiplié par m_p à chaque itération (d'ou le nom multiplicateur) donné à m_p .

Après k itération, le point x voisin de x^* se trouve maintenant à la distance $m_p^k(x - x^*)$.

1) Nous avons :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + m_p(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ f(x) - f(x^*) &= m_p(x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ \left| \frac{f(x) - f(x^*)}{(x - x^*)} \right| &= |m_p + O((x - x^*)^2)| \\ |m_p| &= \lim_{x_0 \rightarrow x^*} \left| \frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0} \right| < 1 \end{aligned}$$

Pour x_0 proche suffisamment de x^* , on a :

$$|f(x^*) - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Comme x^* est fixe nous obtenons :

$$|x^* - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Pour un x_0 proche de x^* , $f(x_0)$ est encore plus proche de x^* , par répétition augmentative, $f^2(x_0)$ sera aussi plus proche de x^* , etc....

Ainsi, la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ défini par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^* , le point x^* est donc attractif.

2) Au contraire, d'après l'assertion précédente il est évidente de prouver que le point fixe x^* peut être répulsif.

3) Si $|m_p| = 1$, nous ne pouvons pas conclure quant à la nature du point fixe; x^* dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor.

4) Si $m_p = 0$, le terme du premier ordre disparaît complètement donc l'attraction est plus forte d'où le nom "super attractif".

tel que $m_p = f'(x^*)$. ■

– **En dimension n** ; et si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour décider si le point x^* est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(x^*) = Df(x^*)$

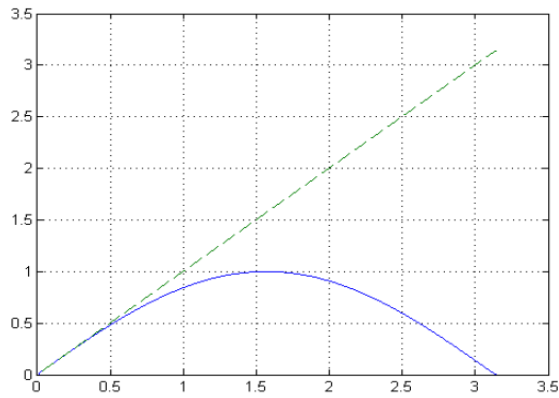
Théorème 1.2 Si toute les valeurs propres de $J(x^*) = Df(x^*)$ sont à l'intérieur du disque unité, x^* est stable.

Si l'une de ces valeurs propres a un module plus grand que 1, x^* est instable.

Exemple 1.3 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin x, x \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

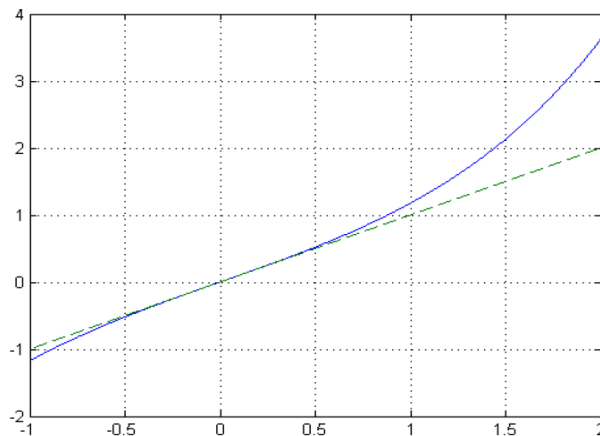
On a $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$; $\sin x < x$ et pour tout $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$, la suite itérée (x_k) définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ est strictement décroissante minoré par 0 donc convergente vers une limite x^* . Comme f est continue et que $f(x^*) = x^*$, $x^* = 0$ est l'unique point fixe de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui est attractif.

Fig (1,4) : Le graphe de la fonction f .

Exemple 1.4 Soit la fonction :

$$g(x) = \sinh x, x \in [0; +\infty[.$$

On a $\sinh x > x$ et pour tout $x_0 \in [0; +\infty[$, la suite itérée (x_k) définie par $x_{k+1} = g(x_k)$ est strictement croissante et non majorée donc divergente. Par conséquent, le point fixe $x^* = 0$ de g est répulsif.

Fig (1,5) :Le graphe de la fonction g .

1.5.2 Stabilité des points périodiques

a) Cas continue

Dans cette section, nous nous intéressons aux solution T périodique du ??

On convient de noter $\varphi(t, x_0)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, les trajectoires solutions du système ?? muni de la condition initiale $x(0) = x_0$

parmi les méthodes d'étude de stabilité des points périodiques du système ??, il existe la méthode de la matrice de Monodormie :

La matrice de Monodormie

Le concept de l'approche par la matrice de monodormie est d'étudier l'influence d'une perturbation des conditions initiales sur l'évolution temporelle des solutions du système ?. Pour cela, on considère $x^*(t)$ une solution périodique particulière du système ? :

La stabilité de $x^*(t)$ est évaluée par la détermination, après une période, de l'écart entre la trajectoire de la solution périodique $x^*(t)$ et de la trajectoire issue d'une légère perturbation de la condition initiale. Cette approche est détaillée dans Seydel (1988).

Soient $\varphi(t, x_0^*)$ la trajectoire de la solution périodique $x^*(t)$ correspondant à la condition initiale $x^*(0) = x_0^*$, trajectoire de la solution ayant pour condition initiale $x_0^* + \gamma x_0$, l'évolution temporelle de l'écart des trajectoires est donnée par :

$$\gamma x(t) = \varphi(t, x_0^* + \gamma x_0) - \varphi(t, x_0^*).$$

En particulier, après une période on a :

$$\gamma x(T) = \varphi(T, x_0^* + \gamma x_0) - \varphi(T, x_0^*).$$

En effectuant un développement en série de Taylor autour de x_0^* , on aboutit au premier ordre à :

$$\gamma x(T) = \frac{\partial \varphi(T, x_0^*)}{\partial x_0} \cdot \gamma x_0$$

On constate que l'écart entre les deux trajectoires à $t = T$ est lié à l'écart initial γx_0 par la matrice

$$\frac{\partial \varphi(T, x_0^*)}{\partial x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^n} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Où ∂^i et x_0^i ($i = 1, \dots, n$) représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ composante de φ et de x_0 .

Il est facile d'imaginer que les propriétés de la matrice 1.4, appelée Matrice de Monodormie, décideront de la stabilité du système 1.2 par l'intermédiaire de la croissance ou de l'amortissement de la perturbation initiale.

Puisque $\varphi(t, x_0)$ représente la trajectoire de la solution de 1.2 ayant x_0 pour condition initiale, $\varphi(t, x_0)$ est également ce système, soit :

$$\frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0} = F(\varphi(t, x_0), \beta).$$

Différencier cette équation par rapport à la condition initiale x_0 donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial F \varphi(t, \beta)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0}.$$

En remarquant ensuite que la condition $\partial \varphi(0, x_0) = x_0$ conduit à

$$\frac{\partial \varphi(0, x_0)}{\partial x_0} = 1$$

On met en évidence que la matrice de monodormie est identique à $\Phi(T)$ ou $\Phi(t)$ vérifie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial F \varphi(x^*, \beta)}{\partial \varphi} \Phi, \quad \Phi(0) = 1. \quad (1.5)$$

La matrice de **Monodormie** $M_d \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associée à la solution T périodique x^* de valeurs initiales x_0^* est défini par :

$$M_d = \Phi(T) = \frac{\partial \varphi(T, x_0)}{\partial x_0}.$$

Enfin, on montre (Seydel, 1988) que la matrice de monodormie possède deux propriétés remarquables :

- $\forall k \in \mathbb{N}, (kT) = M_d^k$
- La matrice de **Monodormie** M_d possède toujours $\xi = 1$ comme valeur propre .

Théorème 1.3 Soit x^* une solution T périodique du flot 1.1 correspondant à une valeur de γ fixée, la matrice de monodormie $M_d(\gamma)$ est encore définie par $\Phi(T)$ ou $\Phi(t)$ est solution du problème matriciel 1.5 aux valeurs initiales.

Soit $\xi_i, i = 1, \dots, n$ le spectre de valeurs propres de la matrice de monodormie, on convient, quitte à les renuméroter, que ξ_n correspond à la valeur propre égale à 1 de la matrice de monodormie. La stabilité locale de la solution est alors déterminée par les $n - 1$ autres valeurs propres en appliquant la règle suivante :

- $|\xi_i| < 1$, pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, alors, la solution périodique est linéairement stable.
- $|\xi_i| > 1$, si il existe $i = 1 \leq i \leq n - 1$, alors, la solution périodique est linéairement instable.

b) Cas discret

Théorème 1.4 Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p . Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est continue à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable .

Si une des valeurs propres a un module plus grand que 1 le cycle est instable .

– **En dimension 1**, si $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est un cycle d'ordre p , les dérivées $(f^p)'(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ sont égales. En effet la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$\begin{aligned}(f^p)'(x_0) &= (f \circ f \circ f \dots \circ f)(x_0) \\ &= (f^{p-1} \circ f)'(x_0) \\ &= (f^{p-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= (f^{p-2})'(f^2(x_0)) \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= f'(x_{p-1}) \cdot (f'(x_{p-2}) \dots \dots \dots f'(x_1)) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

Mais $x_0 = x_p$. On déduit que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$:

$$m_p = (f^p)'(x_0) = \dots \dots \dots = (f^p)'(x_{p-1})$$

Où m_p est appelée le multiplicateur du cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$.

Cette dernière détermine le type du cycle.

Théorème 1.5 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est :

1. *Attractif (ou stable)* si $|m_p| < 1$;
2. *Répulsif* si $|m_p| > 1$;
3. *Indifférent* si $|m_p| = 1$;
4. *Super attractif* si $m_p = 0$.

Exemple 1.5 Soit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

Le point 0 est 3-périodique car : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$.

On a : $f'(0) = \frac{5}{2}$, $f'(1) = \frac{-1}{2}$, $f'(2) = \frac{-7}{2}$

et $(f^3)'(0) = f'(0)f'(1)f'(2) = \frac{35}{8} > 1$

Ainsi 0 est point 3-périodique répulsif.

1.5.3 Types de points fixes et leurs stabilité

Généralement, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on calcule les valeurs propres ξ_i , $1 \leq i \leq n$ de la matrice jacobienne de f^p si ξ_i sont réelles alors :

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, $|\xi_i| < 1$, il s'agit d'un noeud attractif, donc stable .

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, $|\xi_i| > 1$, il s'agit d'un noeud répulsif, donc instable.

$\exists i, j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tq $|\xi_i| < 1$ et $|\xi_j| > 1$, il s'agit d'un noeud col, donc instable.

Si ξ_i sont complexe :

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, $|\xi_i| < 1$, il s'agit d'un foyer attractif, donc stable.

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, $|\xi_i| > 1$, il s'agit d'un foyer réplusif, donc instable.

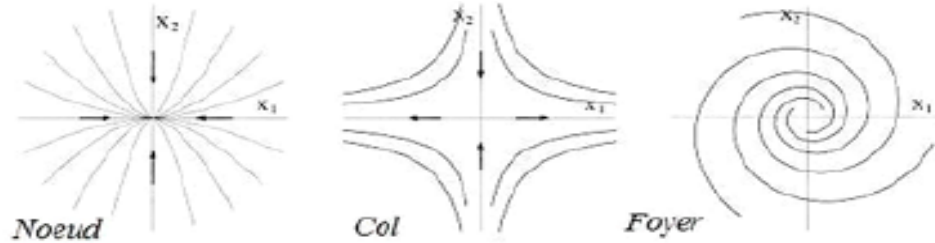


Fig (1,6) : Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .

1.6 Linéarisation

a) Cas continue

Considérons le système dynamique non-linéaire défini par :

$$x' = R(x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

et soit x_0 un point fixe de ce système .

Supposons qu'une petite perturbation $\epsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe. La fonction R peut être développée en série de Taylor au voisinage de point x_0 comme suite :

$$\epsilon'(t) + x'_0 = R(x'_0 + \epsilon'(t)) \simeq R(x_0) + J_A(x_0).\epsilon(t) \quad (1.7)$$

Avec $D_R(x_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction R défini par :

$$D_R(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

Comme $R(x_0) = x_0$ alors l'équation 1.7 redevient :

$$\epsilon'(t) = D_R(x_0).\epsilon(t) \quad (1.8)$$

L'écriture 1.8 veut dire que le système 1.6 est linéarisé.

Théorème 1.6 Si $D_{\mathbb{R}}(x_0)$ admet des valeurs propres non nulle ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non-linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage V de x_0 .

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire 1.6 à la dynamique du système linéaire 1.8.

b) Cas discret

Définition 1.10 Linéarisée agit d'étudier le comportement des trajectoires, au voisinage des points d'équilibre (points fixes) d'un système non linéaire définie en dimension n par l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = f(x_k) \end{cases} \quad (1.13)$$

On suppose que $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe de f

(i.e) $f(x^*) = x^*$ par négligence de termes du second ordre du développement du Taylor au voisinage d'un point x ; où $x = x^* + \zeta$ pour ζ assez petit, le système peut être linéarisé. Alors, on peut écrire :

$$f(x) = x^* + F\zeta + O(\zeta)$$

sachant que $\zeta = x - x^*$ désigne l'écart par rapport au point fixe, et $F = Df(x^*)$ est la matrice jacobienne de f au point x^* . Donc par itération, on obtient :

$$f^n(x) = x^* + F^n\zeta + O(\zeta) \quad (1.9)$$

$\zeta \rightarrow F\zeta$ s'appelle application linéaire de f au voisinage du point fixe x^* .

On dit alors que le système ?? est approximé au voisinage du point d'équilibre x^* par le système 1.9.

1.7 Fonction de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations qui décrivent le système et ne nécessitent pas la détermination explicite de leurs solutions.

Nous introduisons une fonction continue $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, dite de Lyapunov, vérifiant : $V(x(t))$ définie positive, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V(x^*) = 0. \\ V(x) > 0, \forall x \neq x^*. \end{cases}$$

Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de x vers x^* par celle de $V(x(t)) = V(x(t, t_0, x(t_0)))$. En effet, si $V(x(t))$ est définie négative pour tout t et pour $x(t)$ au voisinage de x^* tels que : $\dot{V}(x(t)) < 0$, (V décroît le long de toutes les trajectoires) nous pouvons alors conclure à la stabilité du point x^* .

Il n'y a pas aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

1.8 Section de Poincaré

Depuis Poincaré [1] [18], nous savons que nous pouvons restreindre l'étude des systèmes dynamiques aux intersections successives des trajectoires avec une surface donnée.

L'organisation des intersections sur cette surface nous permet de qualifier la trajectoire associée. Pour que ces sections puissent exister il faut que l'espace de phase soit borné, et la trajectoire recoupe infiniment la surface considérée. Pour les systèmes dynamiques, le premier cas non trivial correspond à $N = 3$ (l'espace de phase est de dimension 3). Nous sélectionnons dans cet espace une surface de Poincaré Σ , de dimension 2, et on considère les intersections successives Y_0, Y_1, Y_2, \dots de la trajectoire avec Σ comme le montre le figure (1.7) :

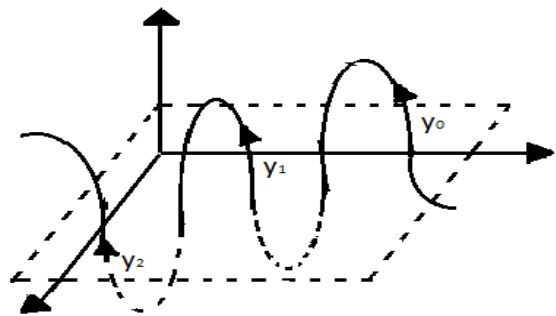


Fig (1,7) : Méthode de détermination des sections de Poincaré.

Chapitre 2

Bifurcation

2.1 Introduction

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de **bifurcation**. Le terme de bifurcation a été introduit par **Henri Poincaré** au début du *XXe* siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement ; on dit qu'il y a bifurcation [9]

2.2 Définitions

Définition 2.1 La bifurcation signifie un changement qualitatif des propriétés d'un système, telle que la stabilité, le nombre de point d'équilibre ou la nature des régimes permanents, lors d'une variation quantitative d'un paramètre du système.[11]

– Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de bifurcation.

Définition 2.2 Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution " x_0 " du système 1.1 et 1.2 lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle μ et d'une manière plus précise la disparition ou changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

– La démarche pour étudier des systèmes dynamiques est la suivante :

1. Recherche des points fixes.
2. Étude de la stabilité des points fixes.
3. Diagramme de bifurcation.

Définition 2.3 (Diagramme de bifurcation) un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

Ce diagramme résume toute l'information sur la bifurcation et permet de comprendre de ce comment évolue le système. [9]

– Les logiciels actuels ne permettent pas de construire que des diagrammes de bifurcation en deux dimensions.

Remarque 2.1 – Nous nous intéressons à des bifurcations **locales**, c-à-d ayant relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret. L'étude de ce type de bifurcation repose sur la théorie de **Landau**.

– Les ensembles des points des bifurcations de même nature.

2.3 Les types de bifurcation

a) Cas continu :

2.3.1 Bifurcation de noeud-col (pli ou fold bifurcation)

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre des racines en fonction du paramètre μ est le polynôme quadratique $f(x) = \mu - x^2$. Considérons le système 1.1. Si on peut réécrire la fonction f sous la forme normale

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (2.1)$$

étudions le comportement de l'équation :

Les points fixes sont :

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\mu}$$

qui existent seulement pour $\mu > 0$, leur stabilité est déterminée par :

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\pm}^* = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \pm\sqrt{\mu}$$

selon les signes de $f'(x^*)$, on voit que $x_+^* = \sqrt{\mu}$ est stable, tandis que $x_-^* = -\sqrt{\mu}$ est instable.

Remarque 2.2 Même étude pour : $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$, $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

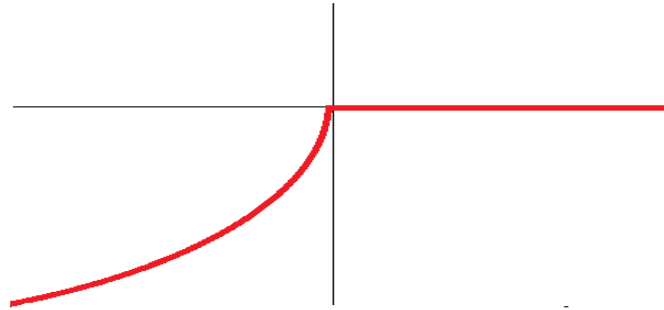


Fig (2,1) : Diagramme de bifurcation noeud-col dans le cas $f(x, \mu) = \mu + x^2$.

2.3.2 Bifurcation de Fourche

Consideron le système 1.1. Si on peut réduire $f(x, \mu)$ à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (2.2)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \quad (2.3)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3$$

L'équation 2.2 s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique.

Les points fixes sont :

$$x^* (\mu - x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \text{ pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} \text{ pour } \mu > 0 \end{cases}$$

Stabilité des points fixes

$$f'(x^*) = \mu + 3x^{*2} = \begin{cases} \mu, & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu, & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu} \end{cases}$$

le point fixe $x^* = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les branches de nouveaux points fixes $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont créés. ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

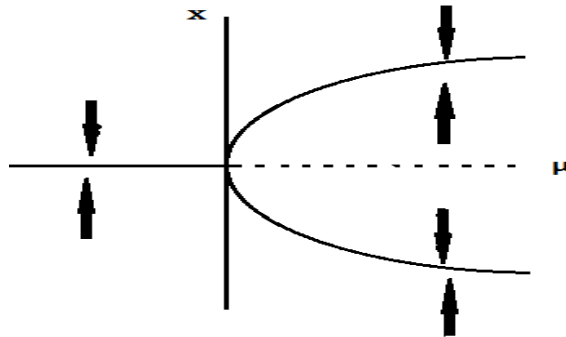


Fig (2,2) : Diagramme de bifurcation fourche sup-critique.

Pour 2.3 qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous-critique :

Les points fixes sont :

$$x^* (\mu - x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & , \text{ pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} & , \text{ pour } \mu < 0 \end{cases}$$

Stabilité des points fixes

$$f'(x^*) = \mu + 3x^{*2} = \begin{cases} \mu & , \text{ pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & , \text{ pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$$

le point fixe $x^* = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$.

Mais par contaire le cas supercritique, les autre points fixes $\pm\sqrt{-\mu}$ existent dans la région où $x^* = 0$ est stable, et sont toujours instable.

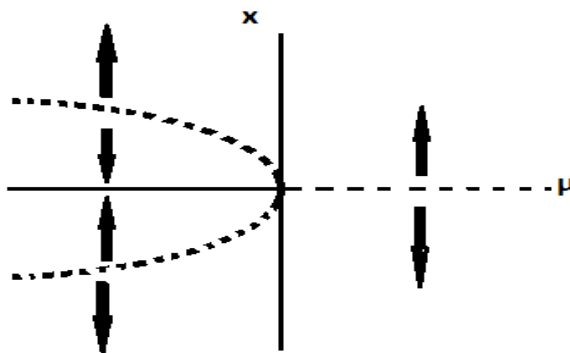


Fig (2,3) : Diagramme de bifurcation fourche sous-critique.

2.3.3 Bifurcation de Hopf

Par contre les bifurcations précédentes qui conduisent à des solutions stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes, l'espace des phases a maintenant deux composantes et s'écrit dans le plans complexe.

L'étude de la forme normal

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z.$$

En posant $Z = X e^{i\theta}$ et $\mu = \mu_r + i\mu_I$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu_r X - X^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_I \end{cases}$$

La première équation n'est autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle μ .

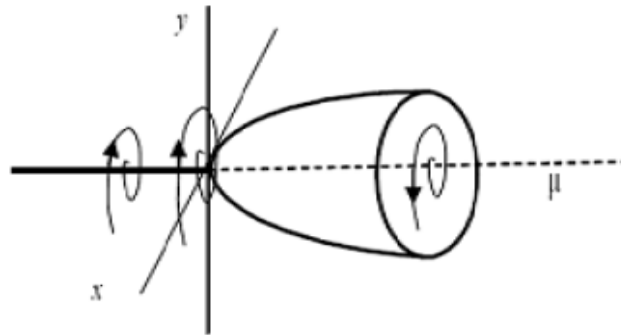


Fig (2,4) : Diagramme de bifurcation de hopf.

b) Car discret

2.3.4 Bifurcation transcritique (Transcritical bifurcation) :

Théorème 2.1 Soit une famille de fonctions $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe un couple (μ^*, x^*) tel que le système

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu)$$

a un point fixe en x^* :

$$\begin{cases} f(x^*, \mu^*) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = 1 \end{cases}$$

supposons aussi que

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0$$

alors on dit que le système subit au point μ^* une bifurcation **transcritique** .

L'étude de la forme normal

Prenons le cas

$$f(x_k, \mu) = x_k + x_k(\mu - x_k)$$

Les points fixe sont :

$$x^* = 0 \vee x^* = \mu$$

Stabilité des points fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x^*}(0) = 1 + \mu$$

le point fixe $x^* = 0$ est stable si $\mu < 0$ et instable si $\mu > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x^*}(\mu) = 1 - \mu$$

le deuxième point fixe $x^* = \mu$ est stable si $\mu > 0$ et instable si $\mu < 0$.

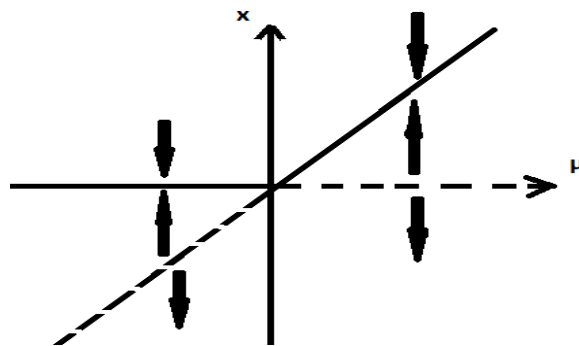


Fig (2,5) : Diagramme de bifurcation transcritique dans le cas

$$x_{k+1} = x_k + x_k(\mu - x_k)$$

Remarque 2.3 Même étude pour : $f(x_k, \mu) = x_k + x_k(-\mu + x_k)$,
 $f(x_k, \mu) = x_k + x_k(\mu + x_k)$,
 $f(x_k, \mu) = x_k + x_k(-\mu - x_k)$.

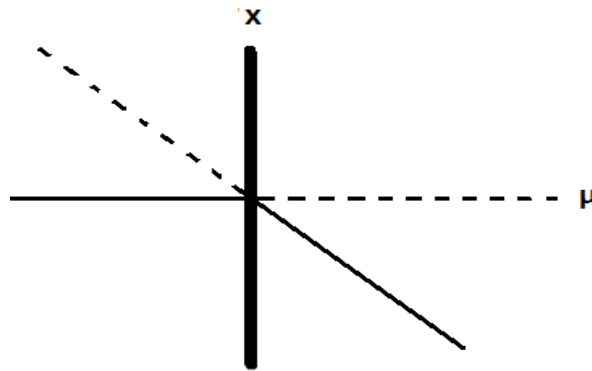


Fig (2,6) : Diagramme de bifurcation
 transcritique dans le cas
 $x_{k+1} = x_k + x_k(\mu + x_k)$.

2.3.5 Bifurcation de doublement de période (ou flip) :

Théorème 2.2 Soit une famille de fonctions $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe une couple (μ^*, x^*) tel que le système

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu)$$

a un point fixe en x^* :

$$\begin{cases} f(x^*, \mu^*) = x^* \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = -1 \end{cases}$$

supposons aussi que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0 \\ d = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \neq 0, \end{cases}$$

alors on dit que le système subit au point μ^* une bifurcation de **doublement de période**.

L'étude de la forme normal

Étudions la forme normale d'une application à seule itérée :
prenons le cas :

$$f(x_k, \mu) = -x_k + \mu x_k + x_k^3.$$

Les points fixes sont :

$$x^* = 0 \vee x^* = \pm\sqrt{2 - \mu}$$

nous avons donc un point fixe $x^* = 0$ (noter que nous pouvons formellement trouver d'autres points fixes $x^* = \pm\sqrt{2 - \mu}$). Mais ce sont des points fixes pas bon pour nous, car ils ne sont pas près de $x^* = 0$. En effet seulement en $x^* = 0$.

Stabilité des points fixes

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(0) = -1 + \mu$$

au $\mu < 0$, le point est stable, et au $\mu > 0$ le point est instable. Nous ne voyons pas d'autre bifurcation ici. Pour cela on a besoin de trouver d'autres bifurcations pour une application à double itérée.

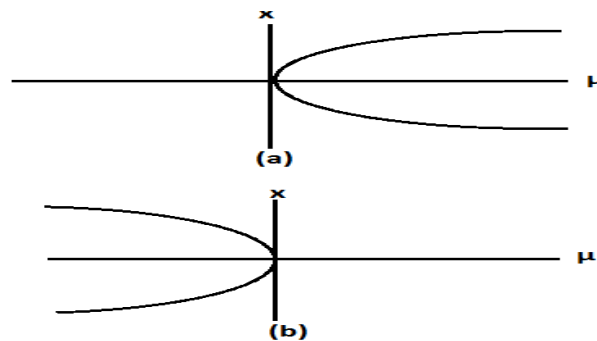


Fig (2,7) : Diagramme de bifurcation par doublement de période

$$a) f(x_k, \mu) = -x_k + \mu x_k + x_k^3,$$

$$b) f(x_k, \mu) = -x_k - \mu x_k + x_k^3.$$

Chapitre 3

Théorie du chaos

3.1 Bref historique sur le chaos

Il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs interprétations sont données au phénomènes chaotiques, comme un indésirable aspect du désordre, et aussi confusion, agitation, abime essentiel et aléatoire indésirable.

Nous citons plusieurs travaux qui prédispose l'invention de cette branche de mathématiques dans sa façon moderne, nous commençons par **Henri Poincaré** en 1889, dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publié par **Poincaré**. En 1898, la divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par **Jacques Hadamard**, puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par **Pierre Duhem** qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

À la fin du $XIX^{ième}$ siècle, Jacques Hadamard a réussi à prouver un théorème sur la dépendance sensible aux conditions initiales concernant le courant géodésique sur une surface de courbure négative et le mouvement sans friction d'un point sur une surface.

Le comportement indécis "*occasionnel*" d'un circuit oscillatoire du tube électronique géré par une équation différentielle non linéaire simpliste a été constaté par **Bathazar Van Del Pol** en 1927. **Environ treizeans** après, selon **Mary Cartwright Tôt** et **John Littlewood** cette équation avait le potentiel de démontrer des solutions sensibles à tous les chiffres dans ces conditions initiales.

En suivant la tradition de Poincaré, l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaires a été poursuivi par des nombreux mathématiciens comme **Kolmogorov**, **Arnold** et **Moser** entre les années 1920 et 1960.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs

de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la révolution cognitive. Considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon **Miller, Gallanter** et **Pribram**. En 1972, **Newell** et **Simon** ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.

En 1960, **Steve Smale** a fourni des preuves mathématiques permettant d'établir des équations différentielles avec une sensibilité générique. La fin des années 1960 a marqué le commencement des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe sur les calculatrices analogiques ensuite sur les calculatrices numériques.

Dans les années 1962, **Edward Lorenz** a remarqué un comportement complexe sensiblement dépendable des conditions initiales après avoir mené une simulation en ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour une convection d'un fluide.

Une large série de champs a incorporé la théorie des systèmes dynamiques dans le comportement prédateur-proie, parole et langue, développement de l'enfant, et l'intelligence artificielle.

En 1977, **Ilya Prigogine** a remporté le Prix Noble en chimie. Il a focalisé sur l'entropie des systèmes ouverts. En d'autres mots, l'accumulation et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a dévoilé à travers un système dissipatif que l'évolution des structures complexes peut être simple et organisé.

C'est en 1984 que **T. Matsumoto** et **L.O. Chua** [7] [15] avaient leurs première observation d'un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments. Le développement de la théorie des circuits non linéaires a commencé à partir de cette observation, suivi par les circuits électroniques chaotiques. Matsumoto a vérifié la nature chaotique de ce circuit avec ses expériences numériques.

Avec ses étudiants ils étaient parvenus à modifier les circuits de Rosenthal afin d'obtenir deux résistances non linéaires terminales avec une fonction linéaire par morceaux qui devraient être précocement désignés. L'adaptation du circuit de Rosenthal a été réussite par Takumaso deux ans après dans le but d'en arriver à la non-linéarité requise.

La caractéristique principale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, si le système est chaotique, alors il n'est pas possible de calculer avec précision l'évolution d'un cas particulier, car une erreur négligeable est survenue aux observations de départ résulte des fluctuations énormes. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales. Ce comportement est connu sous le nom du

chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.[10]

3.2 Définitions du chaos

Définition 3.1 f est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tel $x_0 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $y_0 \in X$ et un entier $k \geq 0$ satisfaisant :

$$d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(k)}(x_0), f^{(k)}(y_0)) > \delta$$

ou d représente la distance et $f^{(k)}$ la k ième itération de f .

Définition 3.2 f est topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans X , il existe $x_0 \in U$ et un indice $k \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $f^{(k)}(x_0) \in V$ ou, de façon équivalente, il existe un indice $k \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $f^{(k)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 3.3 On suppose que A est un ensemble et B est un sous-ensemble de A , pour n'importe quel élément $a \in A$, il existe un élément y dans le sous-ensemble B arbitrairement proche de a , alors B est dense dans A . (c'est-à-dire si la fermeture de B est égale à A : $B = A$). Ce qui revient à dire que B est dense dans A si pour tout $a \in A$ on peut trouver une séquence de points $\{b_n\} \in B$ qui convergent vers a .

Après les définitions de base précédentes on est en position d'énoncer les définitions du chaos,[2]

– au sens de **Li et Yorke**

Définition 3.4 soit $f : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique $(X; d)$ compacte. On dit que f est chaotique dans le sens de **Li et Yorke** s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifié les propriétés suivantes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0 \text{ pour tout } x, y \in S, x \neq y.$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ pour tout } x, y \in S, x = y.$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0 \text{ pour tout } x \in S \text{ pour tout } x \in S, p \in X, p \text{ périodique}$$

– au sens de **Devaney**

Définition 3.5 Une fonction $f : I \rightarrow I$ est dite constituée d'une dynamique chaotique si :

(i) f possède une sensibilité aux conditions initiales,

(ii) f est topologiquement transitive,

(iii) L'ensemble des points périodiques de f est denses dans I .

Cette définition est certainement la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables. De plus, elle s'applique à un très grand nombre de systèmes dynamiques chaotiques et dans certains cas elle est même facilement vérifiable. [17]

Définition 3.6 *On peut introduire la notion d'un système chaotique à l'aide d'un nouvel élément géométrique. Cet élément est appelée "attracteur".*

Un système dynamique est potentiellement capable de donner lieu à un grand nombre de solutions différentes, en fonction des valeurs des paramètres, ou encore des conditions initiales dans l'espace des phases.

3.3 Routes vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos.[4] On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

3.3.1 Par la doublement de période

Ce scénario de transition est sans doute le plus connu. Par augmentation du paramètre de control de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16, ...etc. Les doublements étant de plus en rapprochées, on tend vers un point d'accumulation au quel on obtiendrait hypothetiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique.[21]

3.3.2 Par intermittence

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotique dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain lapps de temps un région périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire un certain "régularité" et il se destabilise brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique.

3.3.3 Par quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de [20] **Ruelle et Takens**. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si

nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

3.4 Caractéristiques du chaos

3.4.1 Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

Sensibilité aux conditions initiales ou simplement **sensitive** cette propriété a été observée pour la première fois par **E. Lorenz** sur son modèle météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon. Pour un système chaotique presque toujours, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initiale " x_0 " dans l'espace des phases va se trouver rapidement amplifiée.

On dit que $f : I \rightarrow I$ est sensible aux conditions initiales ou **sensitive** lorsque :

$$\exists \delta > 0 \forall x_0 \in I, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in I : |x_0 - y_0| < \delta \implies |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \varepsilon$$

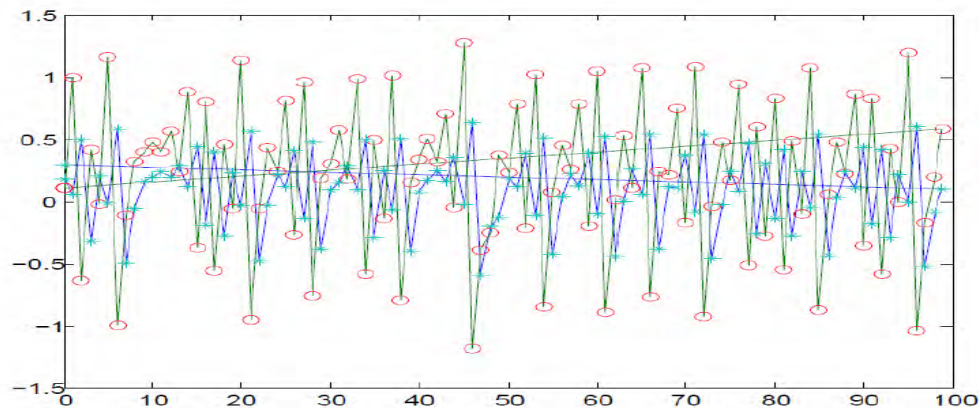


Fig (3,1) : Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique.

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique.

3.4.2 Exposants de Lyapunov

Pour quantifier la sensibilité par rapport aux conditions initiales, on utilise souvent la notion de "nombre de lyapunov" ou "exposants de Lyapunov".

La divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide qui cause la difficulté à appréhender l'évolution d'un flot chaotique, c'est pourquoi on essaye si c'est possible de mesurer ou estimer la vitesse de divergence (convergence). cette dernière est donnée par l'exposants de Lyapunov .

Les exposant de Lyapunov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange .

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.[11]

Cas d'une application discrete unidimensionnelle

Soit f une application discrète définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

L'exposant de Lyapunov qu'il indique le taux moyen de divergence est définie par :

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |(f)'(x_i)|$$

Preuve. On choisit deux conditions initiales très proches, soit d_0 la distance séparées x_0 et x'_0 , et on regarde comment les trajectoires qui en sont issues. On sait que :

$$d_0 = |x'_0 - x_0|$$

après une iteration d_0 devient d_1

$$d_1 = |x'_1 - x_1|$$

après k iterations la distance évolue à d_n

$$d_n = |x'_n - x_n|$$

$\frac{d_1}{d_0}$: décrit l'évolution de l'erreur d_1 dans la 1^{ière} iteration :

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0}$$

pour $d_0 \rightarrow 0$

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0} = |f'(x_0)|$$

On suppose que les deux trajectoires $X(x_0, t)$ et $X(x'_0, t)$ s'écartent à un rythme exponentiel à la 1^{ière} itération. On pourra alors trouver un réel $\lambda(x_1)$ tel qu'après 1 itération :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = e^{\lambda(x_1)}$$

par comparaison avec la limite précédente

$$e^{\lambda(x_1)} = |f'(x_0)|$$

en passant au logarithme, on trouve :

$$\lambda(x_1) = \ln |f'(x_0)|$$

$\lambda(x_1)$ est appelé **exposant de Lyapunov local**, qui mesure la divergence ou la convergence après la 1^{ière} itération.

L'évolution de l'erreur après k itérations :

$$\frac{d_k}{d_0} = \frac{|x'_k - x_k|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^k(x'_0) - f^k(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^k(x_0 + d_0) - f^k(x_0)|}{d_0}$$

pour $d_0 \rightarrow 0$

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_k}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^k(x_0 + d_0) - f^k(x_0)|}{d_0} = \left| \frac{df^k}{dx}(x_0) \right|$$

l'erreur d_k tend vers une limite, un réel λ qui représente l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_k}{d_0} = e^{\lambda k}$$

d'où :

$$e^{\lambda k} \simeq \left| \frac{df^k}{dx}(x_0) \right| \Rightarrow \ln e^{\lambda k} \simeq \ln \left| \frac{df^k}{dx}(x_0) \right|$$

par conséquent

$$\lambda \simeq \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k}{dx}(x_0) \right|$$

Finalement, en faisant tendre k vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda &\simeq \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df(f^{k-1}(x_0))}{dx} \right| \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{k} \ln |f'(x_{k-1})| |f'(x_{k-2})| \dots |f'(x_1)| |f'(x_0)| \\ \lambda &\simeq \frac{1}{k} \ln \prod_{i=0}^{i=k} |f'(x_i)|\end{aligned}$$

donc on conclut

$$\lambda \simeq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=k} \ln |f'(x_i)| \quad (3.1)$$

■

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, on obtient :

$$\lambda = \ln |f'(x^*)|$$

- Si $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale x_0 (i.e $\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$) est asymptotiquement stable au voisinage de x^* .
- Si $|f'(x^*)| = 1 \Rightarrow \lambda = 0$, x^* est **stable** et par conséquent la trajectoire de x_0 est périodique donc stable.
- Si $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$, x^* est **instable** ainsi que la trajectoire issue de x_0 .
- Si $x_0 \in B(x^*, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov $\lambda = \ln |f'(x^*)|$.
- Si $x_0 \notin B(x^*, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov λ est la moyenne de divergence exponentielle donnée par :

$$\lambda \simeq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{i=k} \ln |f'(x^*)|$$

Théorème 3.1 - Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales .

- Si $\lambda \leq 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Preuve. La preuve de ce théorème est bien détaillée dans [19]. ■

Exemple 3.1 L'application logistique

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i) ; x_i \in [0, 1]$$

l'exposant de Lyapunov de f est :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln |4(1 - 2x_i)|$$

soit $\lambda = \log 2 \geq 0$ d'où le comportement est chaotique.

Cas d'une application discrete multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m qui applique x_k sur x_{k+1} :

L'exposant de Lyapunov est définie par :

$$\lambda_i \simeq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{i=k} \ln \xi_i |f^k(x_0)|$$

Preuve. On a le développement limité d'ordre 1 de $f^k(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned} x_k - x'_k &\simeq f^k(x_0) - f^k(x'_0) \\ &\simeq \frac{df^k(x_0)}{dx_0} (x_0 - x'_0) \\ &\simeq J(x_0) J(x_1) \dots J(x_n) (x - x'_0) \\ &\simeq \prod_{i=0}^{i=k} J(x_i) (x_0 - x'_0). \end{aligned}$$

Où $\prod_{i=0}^{i=k} J(x_i) = Df^k(x)$ dénote la matrice jacobienne de $f^k(\cdot)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_m tel que $D_p^k = P_m^{-1} J^k P_m$ est une matrice diagonale des valeurs propres $\xi_i(f^k(x_0))$; $i = \overline{1, m}$ de la matrice jacobienne. Alors on définit les m exposants de Lyapunov de la matrice suivante :

$$\lambda_i \simeq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{i=k} \ln \xi_i |f^k(x_0)| \quad (3.2)$$

λ_i c'est l'exposante de Lyapunov associé à la trajectoire issue de x_0 dans $i^{\text{ème}}$ direction. Sachant que $x' = x + \varepsilon$. ■

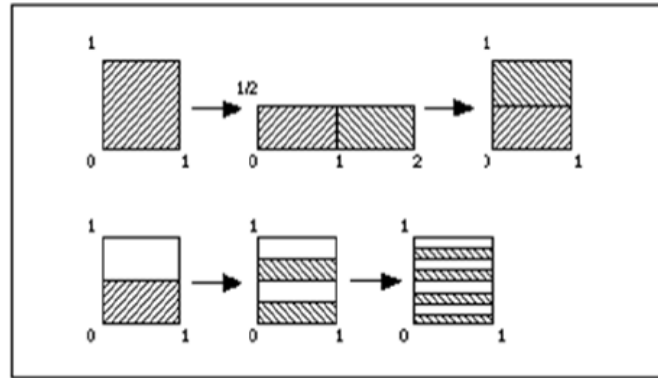
Exemple 3.2 La transformation de boulanger


Fig (3,2) : La transformation de boulanger.

On définit la transformation de boulanger sur $E = [0, 1] \times [0, 1]$ par :

$$\begin{cases} x \rightarrow 2x \pmod{1} & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}ay & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(ay + 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (0 \leq a \leq 1)$$

Le seul point fixe de f est $x_0 = (0, 0)$.

Donc la matrice jacobienne de f au point x_0 donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de J de $f^k(x_0)$ au point x_0 sont :

$$\begin{cases} \xi_1(f^k(x_0)) = 2 \\ \wedge \\ \xi_2(f^k(x_0)) = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

appliquant la formule 3.2 dans 3.3 on obtient les exposants de Lyapunov

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln 2 \implies \lambda_1 = \ln 2 \\ \lambda_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \frac{a}{2} \implies \lambda_2 = \ln \frac{a}{2} \end{cases} \implies \lambda_1 > 0, \text{ et le système est chaotique.}$$

Résultat : Remplace x^* par x_i dans la formule 3.1 tel que x^* est le point d'équilibre, on obtient : $\lambda = \ln |\alpha|$ où $\alpha = f'(x^*)$ donc on a les cas suivants :

- Si $0 < |\alpha| < 1 \implies \gamma < 0$ et x^* asymptotiquement stable.
- Si $|\alpha| > 1 \implies \gamma > 0$ et x^* instable.
- Si $|\alpha| = 1 \implies \gamma = 0$ dans ce cas x^* est instable par la définition de l'exposant de Lyapunov.

C'est-à-dire l'exposant de Lyapunov résout le problème de stabilité du point fixe dans le cas :
 $|f'(x^*)| = 1$

Cas d'une application continues multidimensionnelle

Un des algorithmes utilisés pour le calcul est celui appelé algorithme de **wolf** [23].

Celui-ci permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps. L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de **wolf** calcule l'exposant de Lyapunov le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Changement du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Evolution du système dans le but d'atteindre un attracteur.
4. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
5. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calculs de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
6. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence.
7. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
8. Retour au point (1).
9. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

Dimension de Lyapunov

Un autre outil pour déterminer la structure géométrique d'un attracteur est la dimension de Lyapunov, cet outil se base sur l'exposant de Lyapunov. **Karlan** et **Yorke** [22] ont suggéré de calculer la dimension de l'attracteur A est utilisant l'exposant de Lyapunov de la manière suivante :

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_m$ les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique

la dimension de Lyapunov D_L est donné par

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Où j est le plus grand entier tel que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

sachant que A un attracteur représenté dans un espace multidimensionnel de dimension m

3.4.3 Attracteur chaotique étrange

Le terme attracteur étrange est introduit pour la première fois par **Takens** et **Ruelle** (1971), l'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange et toutes les définitions que l'on trouve dans la littérature sont restrictives. [14][20]

Quelques définitions d'un Attracteur chaotique étrange

Définition 3.7 La figure qui représente l'ensemble des trajectoires en proie à un mouvement chaotique s'appelle l'attracteur étrange .

Définition 3.8 Un attracteur étrange possédant un exposant de Lyapunov si $\lambda_k > 0$.

– **D. Ruelle** et **F. Takens** [20] donnent la définition suivante :

Définition 3.9 Un attracteur étrange est caractérisé par sensibilité aux conditions initiales.

– **Guckenheimer** et **Holmes** [13] donnent la définition suivante :

Définition 3.10 Un attracteur étrange est un attracteur contenant une orbite homocline transverse.

– Berge et al [16]; imposent une condition supplémentaire d'un type dimensionnel :

Définition 3.11 *Un attracteur étrange est caractérisé par sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale .*

Remarque 3.1 *Il est clair que certains attracteurs ne sont pas généralement étranges.*

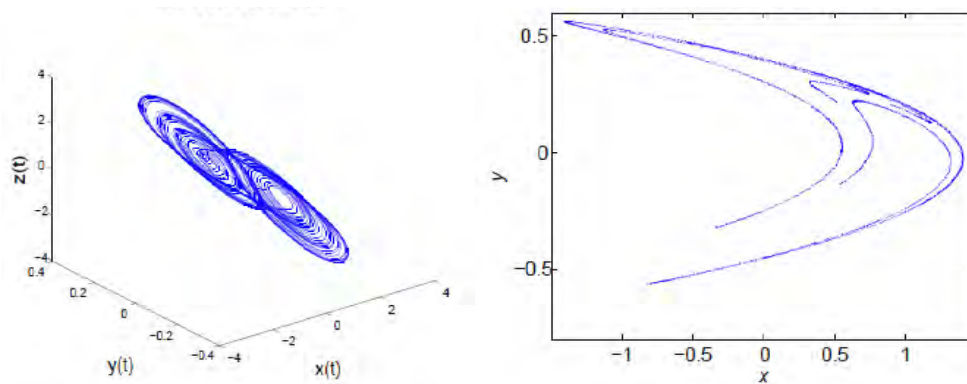


Fig (3,3) : Attracteur étrange de Chua, Hénon.

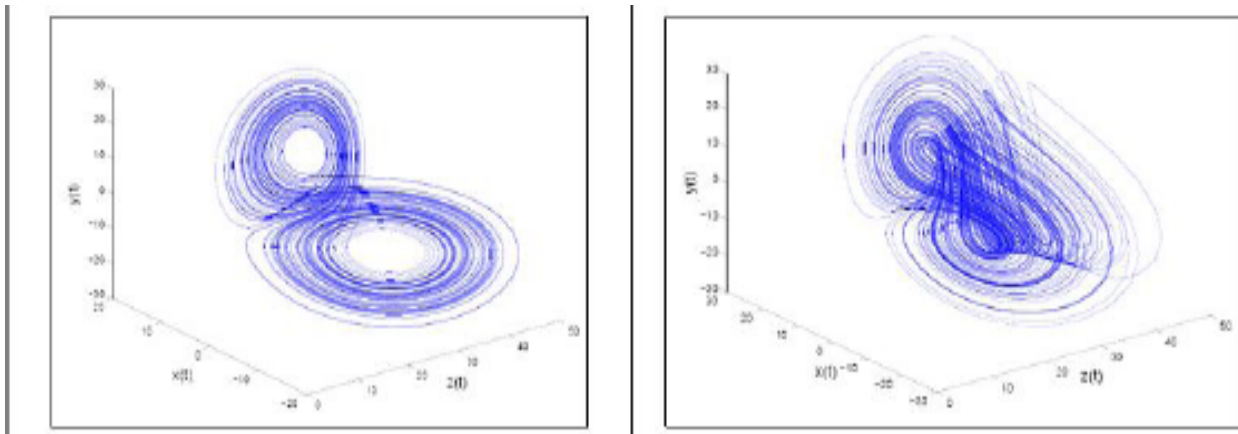


Fig (3,4) : Attracteur étrange de Lorenz, Chen.

– L'attracteur chaotique classés en trois type principaux :

1. **Attracteur de type Lorenz** : Ces type des attracteurs ne sont pas strucurellement stable mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont strucurellement stable (hyperbolique)

et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même

2. **Attracteur hyperbolique** : Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles limites structurellement stable. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des système d'attracteur hyperboliques.
3. **Quasi-attracteur** : Ces types d'attracteurs sont des ensembles limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instable (par exemple les attracteurs générés par circuit de chua).[\[21\]](#) [\[15\]](#)

Chapitre 4

Exemples des systèmes dynamiques chaotiques

4.1 Le chaos dans les systèmes dynamiques continues

4.1.1 Modèle de Lorenz

En 1963, **Lorenz** a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère. (C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres.)

Les équations du modèle :

Le système dynamique implique 3 équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

L'espace des phases est tridimensionnel.

Les valeurs de σ désignent le nombre de Prandtl, et b désigne l'élongation de la boîte contenant le fluide, les valeurs sont fixées respectivement à 10 et $8/3$.

Le paramètre de contrôle est r qui est positif, physiquement r est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide.

– **Equilibres du modèle :**

On cherche les points d'équilibre (x, y, z) vérifiant $x' = y' = z' = 0$, pour $r < 1$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre dans l'origine $(0, 0, 0)$, et pour $r > 1$; il y a deux autres points :

on a

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) = 0 \\ y' = rx - y - xz = x(r - z) - y = 0 \\ z' = xy - bz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma y = ax \\ y(r - z) = y \\ y^2 - b(r - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = r - 1 \\ y = \pm\sqrt{b(r - 1)} \end{cases}$$

donc les deux points sont :

$$(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1); (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1).$$

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne DL obtenu en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice jacobienne DL du système est :

$$DL \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Stabilité de l'équilibre nul (au point $(0, 0, 0)$)

Au point $(0, 0, 0)$; les valeurs propres ξ de la matrice jacobienne DL :

$$DL = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\det(|DL - \xi I_d|) = \begin{vmatrix} -\sigma - \xi & \sigma & 0 \\ r & -1 - \xi & 0 \\ 0 & 0 & -b - \xi \end{vmatrix} \Rightarrow (b + \xi)[\xi^2 + \xi(\sigma + 1) + \sigma(1 - r)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi + b = 0 \\ (\xi^2 + \xi(\sigma + 1) + \sigma(1 - r)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = b \\ \Delta = (1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -b \\ \xi_2 &= \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \\ \xi_3 &= \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \end{aligned}$$

Nous reportons les valeurs de σ et b on obtient :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\frac{8}{3} \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{40r+81} - \frac{11}{2} \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{40r+81} - \frac{11}{2}\end{aligned}$$

- Pour $r < 1$; les trois racines réelles sont négatives, $\xi_3 < \xi_2 < \xi_1 < 0$; l'équilibre est donc noeud stable.
- Pour $r > 1$; une des valeurs propres est positive ξ_3 : l'équilibre est donc instable (col).
- Il y a une bifurcation quand $r = 1$; l'équilibre est dit : **maginal**.

Stabilité des équilibre pour $r > 1$

Pour les deux autre points d'équilibre, les valeurs propres de la matrice jacobienne sont solutions de l'équation en ξ :

$$(-\sigma - \xi)[(-b - \xi)(-1 - \xi) + b(r - 1)] - \sigma[r(-b - \xi) + b(r - 1)] = 0$$

$$\implies P(\lambda) = \xi^3 + (\sigma + b + 1)\xi^2 + b(\sigma + r)\xi + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

selon les valeurs du paramètre r , ce polynome peut avoir trois racines réelles négatives (les équilibres sont donc stables) ou bien une réelle et deux racines complexes conjuguées.

on peut chercher s'il existe une valeur critique de r pour laquelle les équations deviennent instables, la déstabilisation de ces équations par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si $\lambda = 0$, on a forcément $r = 1$, on peut donc chercher pour quelles valeur de r , on peut obtenir deux racines iw et $-iw$ de partie réelle nulle en reportant la valeur $\lambda = iw$ dans l'équation

$$iw^3 + (\sigma + b + 1)iw^2 + b(\sigma + r)iw + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

on obtient les deux condition :

$$-w^2(\sigma + b + 1) + 2b(r - 1)\sigma = 0$$

$$iw^3 + iwb(\sigma + r) = 0$$

L'élimination de w^2 entre les deux équations d'obtenir la valeur r_c critique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de (1) on a : } w^2 = \frac{ab + \frac{2ab}{a+1+b}}{\frac{2ab}{a+1+b} - b} \\ \text{de (1) on a : } w^3 = wb(\sigma + r_c) \implies w^3 = ww^2 \text{ d'où } w^2 = \sigma b + br_c \end{array} \right.$$

alors

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}$$

$$w = \mp \sqrt{\left(ab + b \frac{ab + \frac{2ab}{a+1+b}}{\frac{2ab}{a+1+b}} \right)}$$

pour les valeurs $\sigma = 10$ et $b = 8/3$; la valeur critique est $r_c = \frac{470}{19} \simeq 24.73$ et $w = \mp 92,64$.

La déstabilisation des équilibres correspond à une bifurcation de Hopf. Deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre r franchit la valeur critique r_c :

Lorsque $r < r_c$ le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour l'un des deux équilibres instables comme si elle y convergerait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement. On montre que la distance entre deux conditions très proches s'amplifie très rapidement. Toutes les trajectoires convergent vers l'attracteur étrange.

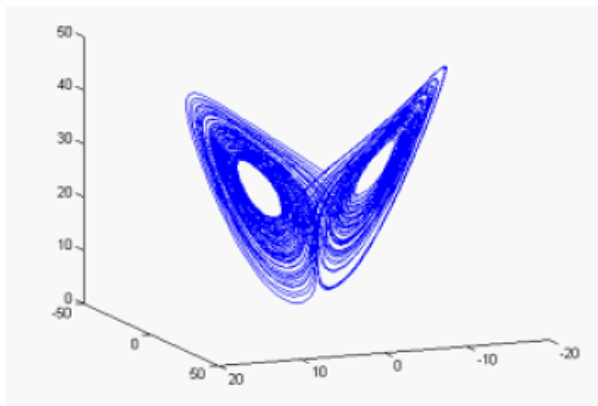


Fig (4.1) : Attracteur de Lorenz.

4.2 Le chaos dans les systèmes dynamiques discrets

4.2.1 L'application logistique

On présente ici un modèle de classe de système dynamique non linéaire à temps discret. Ce modèle est appelé application quadratique (ou logistique).

L'équation logistique a été proposée par le biologiste **May** en 1979 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes.

$$x_{n+1} = g(x_n) = vx_n(1 - x_n)$$

$v \in [0, 4]$; $x_n \in [0, 1]$ où $0, 1, 2, \dots$ (dénote le temps discret)

où x_n représente le pourcentage de population par rapport à une certaine valeur maximale de référence.

- Le graphique de g est une parabole ayant origine dans le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{4}\right)$, concave et symétrique par rapport à la droite verticale $x = \frac{1}{2}$.
- Les points fixes sont obtenus en résolvant l'équation $vx(1 - x) = x$. Les racines sont l'origine $x_1^* = 0$; $x_2^* = \frac{v - 1}{v}$.
- Notons aussi que les trajectoires ayant comme conditions initiales $x(0) = 1$ et $x(0) = \frac{1}{v}$ si $v > 1$ sont constantes pour $n \geq 1$.
- Au fur et à mesure que le paramètre a augmenté, le comportement qualitatif du système change fortement.
- Afin de l'analyser il est important tenir en considération que :

$$g(x) = vx(1 - x); \quad g'(x) = v - 2vx; \quad g^{(2)}(x) = -2v; \quad g^{(3)}(x) = 0.$$

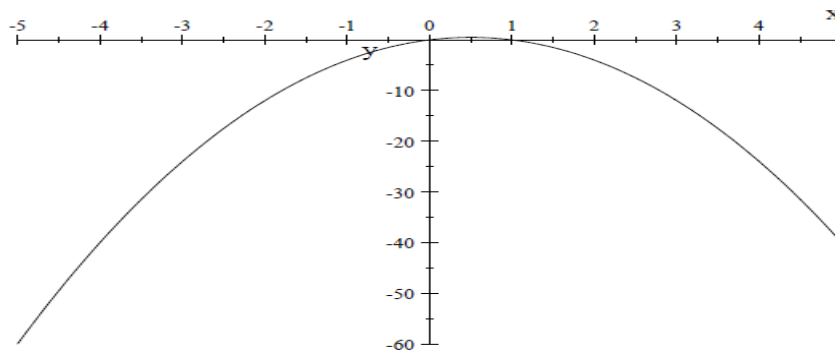


Fig (4,2) : Le graphe de $g(x)$.

Etude de l'application logistique

Considérons l'application g qui est définie de $[0, 1]$ dans lui-même par l'itération suivante :

$$g(x_n) = vx_n(1 - x_n)$$

Les points fixes sont :

$$vx(1 - x) = x \implies \begin{cases} x_1^* = 0 ; & \text{pour } v \in [0, 4] \\ x_2^* = \frac{v-1}{v} ; & \text{pour } v \neq 0 \end{cases}$$

La stabilité

$$g'(x^*) = v - 2vx^* \implies \begin{cases} v ; & \text{pour } x_1^* = 0 \\ 2 - v ; & \text{pour } x_2^* = \frac{v-1}{v} \end{cases}$$

x_1^* est un point fixe attractif (resp stable) si seulement si $v < 1$. Il est répulsif (resp insatable) pour $v > 1$, et on ne peut rien dire quant à sa nature pour $v = 1$

D'autre part, x_2^* est attractif si,

$$|g'(x_2^*)| = |2 - v| < 1$$

$$\implies -1 < 2 - v < 1$$

$$\implies 1 < v < 3$$

Donc x_2^* est un point fixe attractif pour $1 < v < 3$, et il répulsif pour $v < 1$ et $v > 3$, et on ne peut rien dire quant à sa nature pour $v = 1$ et $v = 3$

– Pour $3 < v \leq 4$

Un cycle stable et attracteur d'ordre 2 apparait.

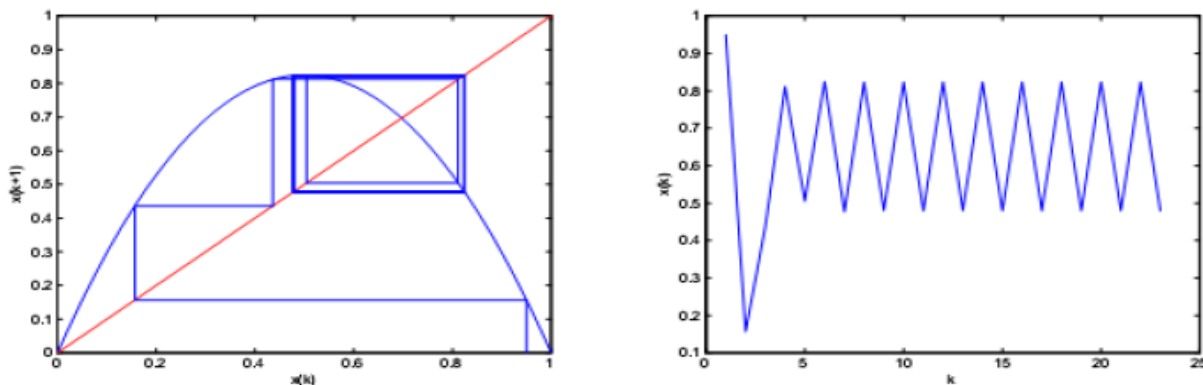


Fig (4,3) : L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $v = 3.3 < 1 + \sqrt{6}$

-Les points fixes de g^2

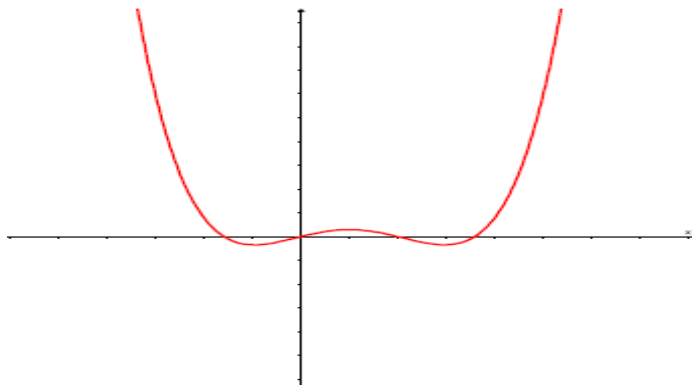


Fig (4,4) : Le Graphe de $g^2(x_n)$

On a

$$g^{(2)}(x) = g \circ g(x) = g[g(x)] = g[vx(1-x)] = v[vx(1-x)][1-(vx(1-x))]$$

$$g^{(2)}(x) = v^2x(1-x)(1-vx(1-x))$$

\Leftrightarrow

$$g^{(2)}(x) = x \left(x - \frac{v-1}{v} \right) (-v^3x^2 + (v^2 + v^3)x - (v^2 + v))$$

$$g^{(2)}(x) = x(v^3x^3 - (v^2 + v^3)x + v^2) = 0$$

\Leftrightarrow

$$g^{(2)}(x) = x \left(x - \frac{v-1}{v} \right) (-v^3x^2 + (v^2 + v^3)x - (v^2 + v)) = 0$$

à quatre solutions distinctes x_1^* , x_2^* et deux solutions additionnelles : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{v-1}{v}$;

$$x_3^* = \frac{v+1 + \sqrt{(v+1)(v-3)}}{2v}$$

$$x_4^* = \frac{v+1 - \sqrt{(v+1)(v-3)}}{2v}$$

Donc on a une orbite périodique de période 2. On peut conclure sa stabilité sachant qu'elle est stable si $|g'(x_3^*)g'(x_4^*)| < 1$, on a :

$$g'(x_3^*)g'(x_4^*) = -v^2 + 2v + 4$$

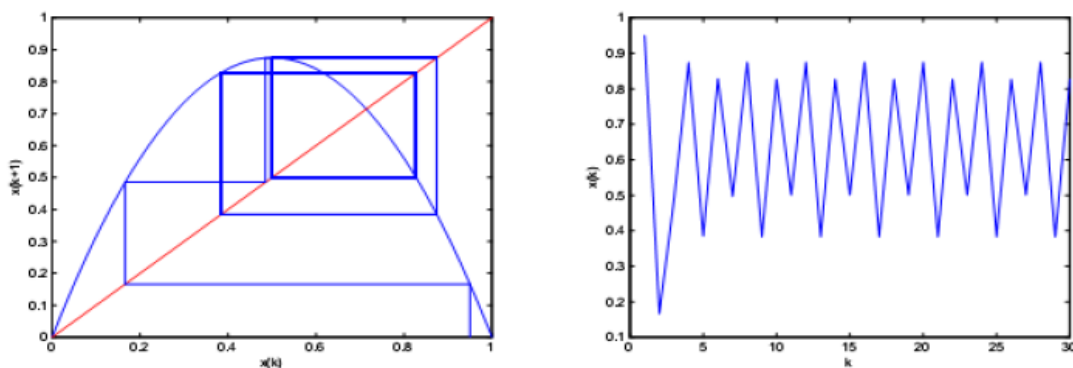
- Si $v \in]3, 1 + \sqrt{6}[$ le cycle est stable et attractif.
- Si $v > 1 + \sqrt{6}$:

Le comportement devient beaucoup plus complexe le cycle n'est plus stable est un cycle d'ordre 4 apparait.

A partir de ces valeur on assiste à un doublement de l'ordre de la période jusqu'à $v = 3.569945$ quand le système devient chaotique .

- Si $v = 3.5 > 1 + \sqrt{6}$:

Un cycle stable et attracteur d'ordre 4 apparait .



Fig(4,5) : L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $v = 3.5 > 1 + \sqrt{6}$.

- Si $v = 3.57$

Un comportement chaotique apparait.

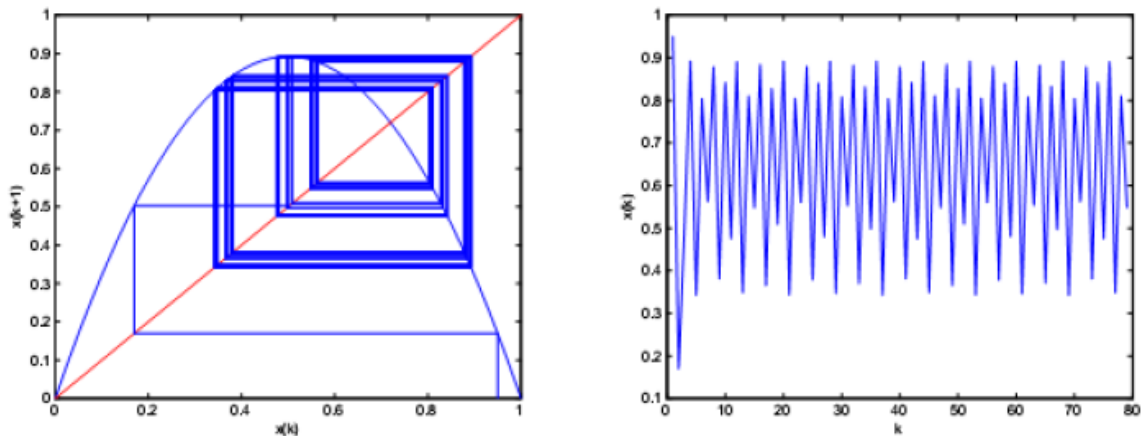


Fig (4,6) : Évolution des points fixes de l'application logistique pour $\nu = 3.57$.

Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

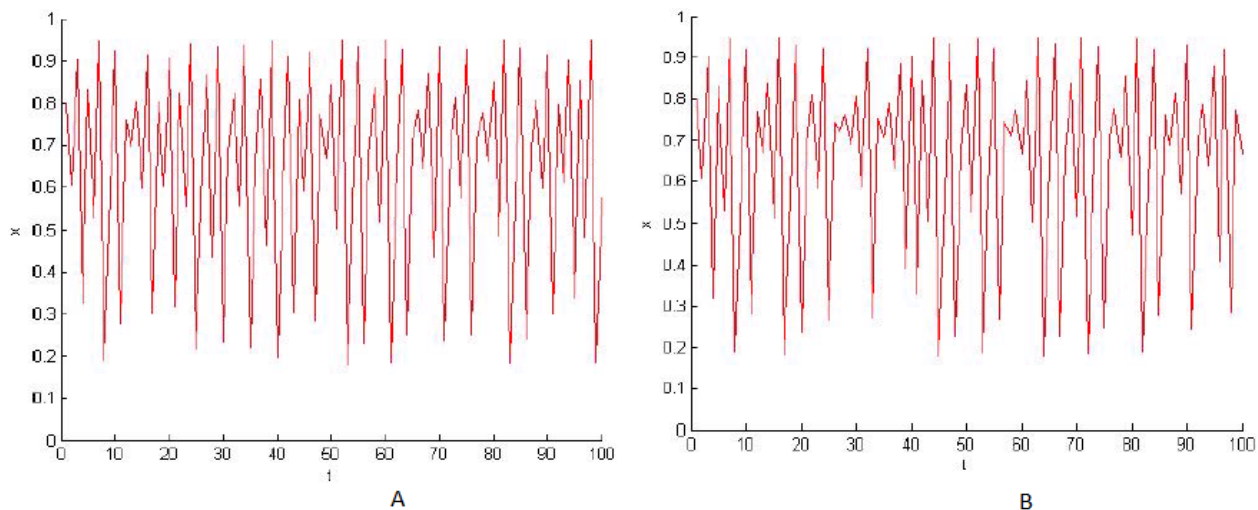


Fig (4,7) : Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique $g(x_n) = 3.8x_n(1 - x_n)$
 A) Pour $x_0 = 0.8$; B) Pour $x_0 = 0.8001$.

Diagramme de bifurcation

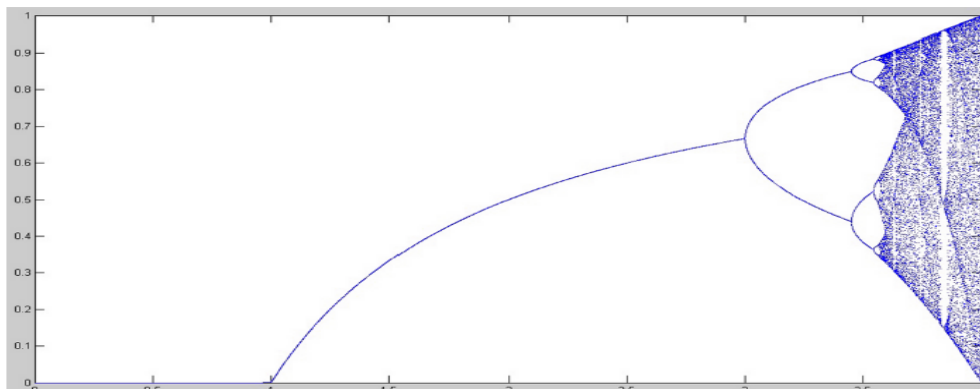


Fig (4,8) : Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

Un diagramme de bifurcation consiste à représenter les états finaux x en fonction du paramètre. On peut alors constater les comportements de cette suite :

1. Si $0 \leq v < 1$, le système finit par arriver à $x_1^* = 0$ et ne bouge alors plus.
2. Si $1 < v \leq 3$, le système se stabilise sur un point fixe x_2^* .
3. Si $v = 3$, le diagramme se divise en deux branches, puis après en quatre, puis huit, etc....
4. A partir de $r = 3.57$, la période n'est plus visible, c'est le chaos.

4.2.2 Application de Hénon

L'astronome **Michel Hénon** permet de réagir rapidement et de produire un système très simple. Ce système dynamique discret de dimension 2, à temps discret car les points évoluent par étape et non continument. Il est définie par la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (4.1)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ représentent des paramètres de bifurcation.[3]

La valeur de la constante a control la non linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellements utilisées pour a , b sont $a = 1,4$ et $b = 0,3$. L'application de Hénon est inversible, son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

La matrice jacobienne $DH_{a,b}$ est :

$$DH_{a,b} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$. Cette application possède deux points fixes hyperboliques définis par :

$$\begin{cases} P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, b \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \right), & \text{si } 0 < b < 1, \\ P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, b \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \right), & \text{si } 0 < b < 1. \end{cases}$$

La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne que définit en 4.3 l'équation caractéristique de matrice jacobienne est :

$$\xi^2 + 2ax\xi - b = 0$$

et leurs valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \xi_1 = -ax + \sqrt{a^2x^2 + b}, & \text{pour } P_1. \\ \xi_2 = -ax - \sqrt{a^2x^2 + b}, & \text{pour } P_2. \end{cases}$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grande est inférieure, ou égale ou supérieure à 1 suivant que $|x|$ inférieure, égale ou supérieure à $\frac{(1-b)}{2a}$, on en déduit que le point fixe P_2 est un point selle.

L'autre point fixe est stable si $a < \frac{3(1-b)^2}{4} = 0.3675$. Si $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$, on a $\xi_1(x_1, y_1) = b$ et $\xi_2(x_2, y_2) = -1$

Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

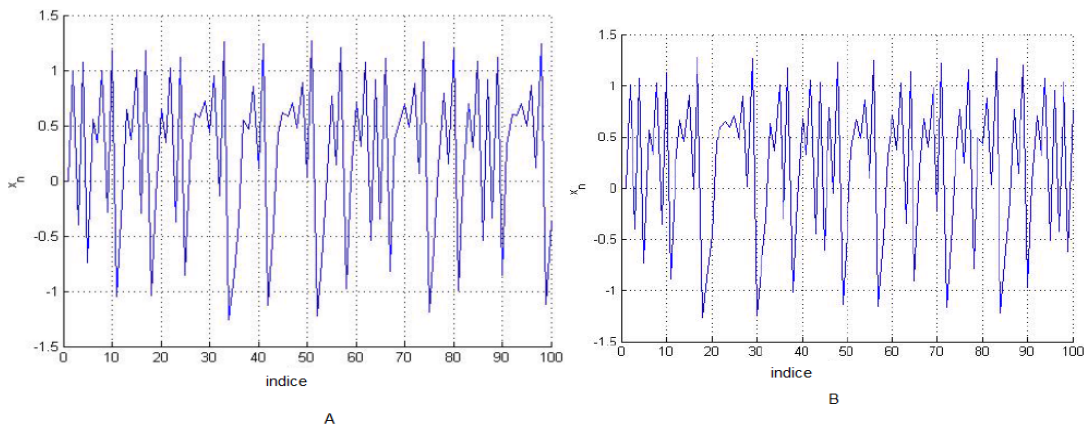


Fig (4,9) : Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec condition intials $A = (x_0, y_0) = (0, 0)$ et $B = (x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

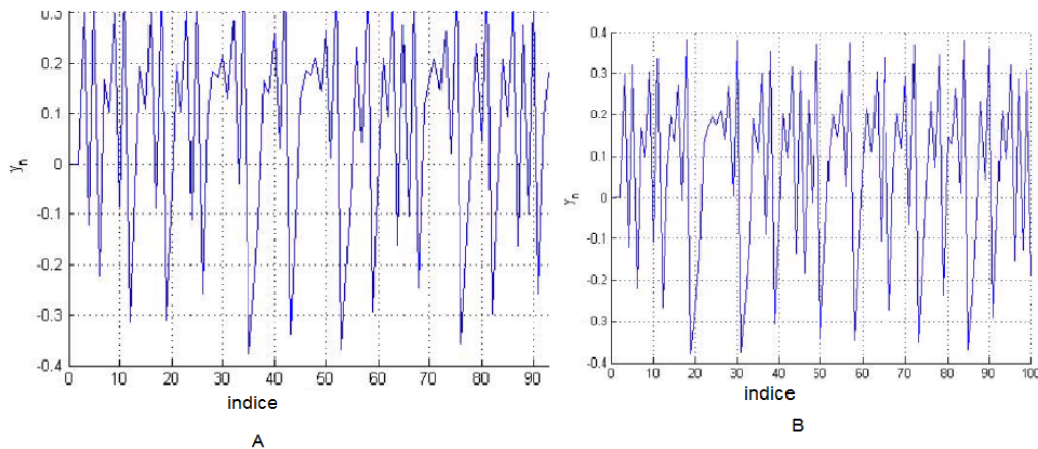


Fig (4,10) : Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec condition intiale $A = (x_0, y_0) = (0, 0)$ et $B = (x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

L'exposants de Lyapunov

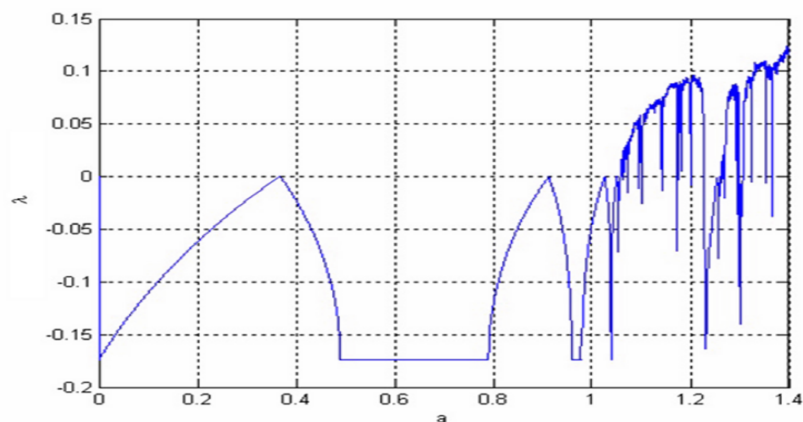


Fig (4,11) : L'évolution de l'exposant de Lyapunov λ de système de Hénon en fonction de a

On fixe $b = 0,3$, et on laisse a varier entre 0 et 1,4.

A partir de la figure (4, 12) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle $[0; 1,052]$.
- une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle $]1,052; 1,4]$.

Diagramme de bifurcation

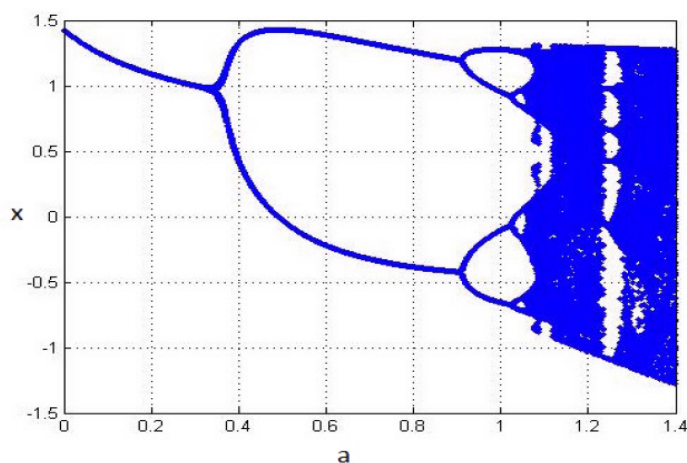


Fig (4,12) : Diagramme de bifurcation de Hénon.

- Si $-0,1225 < v < 0,3675$, les iterations convergent vers une point du plan.

– Si $0,3675 < v < 0,9$, les itérations tendent à constituer une suite (x_n, y_n) telle que (x_{2n}, y_{2n}) converge vers un point et (x_{2n+1}, y_{2n+1}) converge vers un autre point. On a donc deux points limites, on observe un doublement de période.

– Si $0,9 < v < 1,02$ on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a \geq 1,02$, on ne distingue plus les cycles : le système est chaotique.

Attracteur de Hénon

L'attracteur chaotique de Hénon pour les valeurs numériques $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

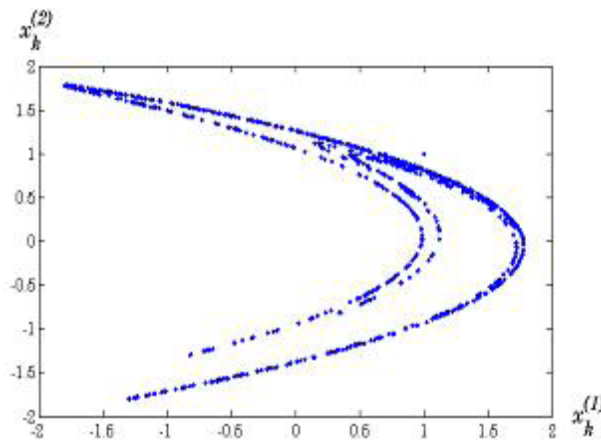


Fig (4,13) : Attracteur de Hénon

4.2.3 Modèle de Lozi

En 1978, **René Lozi** a introduit un système bidimensionnel ayant des équations et des attracteurs semblent pareils à ceux du système célèbre précité de Hénon. La seule différence entre ces deux systèmes est que le terme non-linéaire x^2 du système de Hénon est remplacé par $|x|$ dans le système de Lozi qui fait de ce système une application non différentielle.

– **L'équation du modèle :**

$$L(x, y) : \begin{cases} x_{n+1} = -a|x_n| + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels

Si $a = 0$, le model de **Lozi** est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.

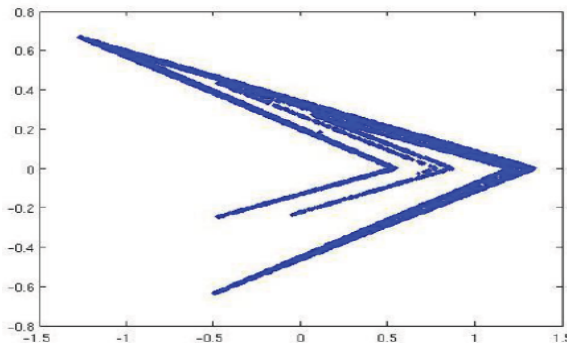


Fig (4,14) : Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

– Le modèle de Lozi est inversible ; son inverse est :

$$L^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b}|y| \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|L| = -b$, alors il y a contraction des aires pour $|b| < 1$

Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right) & , si b < a + 1 \\ P_2 = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right) & , si b < -a + 1 \end{cases}$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$DL(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

– **La stabilité :**

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\xi^2 + a\xi - b = 0.$$

$$\xi^2 - a\xi - b = 0.$$

• **Stabilité de P_1**

Pour $b > \frac{-a^2}{4}$ les valeurs propres sont des réelles.

Pour $b < \frac{-a^2}{4}$ les valeurs propres sont des complexes.

Elle sont de module inférieur à 1 si :

$b > -1$, $b < a + 1$ et $b < 1 - a$. Et le point fixe P_1 est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si :

$b < -1$, $b < a + 1$ et $b < 1 - a$. Et le point fixe P_1 est instable.

Les valeurs propres ξ_1 et ξ_2 sont $|\xi_1| < 1$ et $|\xi_2| > 1$ si :

$b > a + 1$ et $b > 1 - a$. Et le point fixe P_1 est un point selle ou col.

• **Stabilité de P_2**

L'existence de P_2 est pour $b > -a + 1$, alors $\Delta = a^2 + 4b > 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elle sont de modules supérieurs à un si

$b > -a + 1$, $b > a + 1$. Et le point fixe P_2 est instable.

Les valeurs propres ξ_1 et ξ_2 sont $|\xi_1| < 1$ et $|\xi_2| > 1$ si :

$b > a + 1$, $b > 1 - a$. Et le point fixe P_2 est une point selle ou col.

Contrairement au cas de l'application de **Hénon**, le route vers le chaos par l'application de **Lozi** n'est pas une bifurcation de doublement de période. Puisque la dérivée de l'application de **Lozi** n'est pas continue.

– **Dimension de l'attracteur de Lozi** : On a pour $a = 1.7$, $b = 0.6$, l'application de **Lozi** a deux exposants de **lyapunov** $\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$; alors la dimension de lyapunov est égale à $D_L = 1.5757$.

Conclusion

La notion du chaos est très utile dans plusieurs domaines. En effet, en physique, en météorologie évidemment, mais aussi en biologie et chimie, en économie dans l'estimation des paramètres des distributions, et aussi l'étude de leurs comportement à long terme, et en sciences sociales. Dans la cryptographie, la découverte des signaux chaotiques pouvons alourdir la poursuite, et aussi endommager un tel message en face des pirates, fait une grande révolution dans le monde de la communication, ces signaux de nature très imprévisibles et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler sont déterministes mais fortement sensibles aux conditions initiales et présentent une allure pseudo-aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

L'objectif principal de ce mémoire de fin d'étude était de présenter de façon approfondie les systèmes dynamiques en générale, on donnant une synthèse sur les notions de base pour l'étude d'un tel système, comme les points fixes, leurs stabilités, puis les différents types de bifurcation, qui nous amène à la détection du comportement chaotique via plusieurs caractéristiques dont la sensibilités aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, et attracteurs étranges.

Ensuite, nous nous attachons au comportement chaotique dans les systèmes les plus célèbres dans la littérature qui comportent des perturbations imprévisibles pour un ensemble de paramètres, et qui ont une grande utilité et citation dans plusieurs disciplines, comme l'application logistique, le modèle de **Hénon**, l'application de **lozi**, le système de **Lorenz**, et autres.

Bibliographie

- [1] **Aïssaoui Ziar**, Determination des exposants de Lyapunov et de la dimension de l'information dans quelques systèmes dynamiques, Université Joseph Fourier- Grenoble I, le 30/06/1992.
- [2] **Aulbach, Bernd et Kieninger, Bernd**. On three definitions of chaos, "Nonlinear Dyn.Syst, vol 1, no 1"
- [3] **Aziz Aloui, Carl Robert, Celso Grebogi**, Dynamics of a Hénon-Lozi type map, university of California, 2000.
- [4] **Boukhalfa el-hafsi, Laskri Yamina**, Quasi-controlling of chaotic discrete
- [5] **David Viennot**, Analyse spectrale pour les Systèmes Dynamiques Classiques, Master Physique & Physique Numérique.
- [6] **Dang-Vu, H., Delcarte, C**. Bifurcations et Chaos. Paris, Ellipses, 2000.
- [7] **Devaney, Robert L** and others, "An introduction to chaotic dynamical systems", New York, Addison-Wesley Reading, vol. 13046, 1989.
- [8] **Désilles Anna**, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret, 24/09/2003.
- [9] **Eric Goncalvès da Silva**, Introduction aux systèmes dynamiques et chaos, Institut Polytechnique de Grenoble, Avril 2004.
- [10] **E.Goncalvés**, "Introduction aux systèmes dynamiques et chaos", Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [11] **Floriane Anstett**, Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse, Université Henri Poincaré Nancy I, 2006.
- [12] **Ibtissem Talbi**, Systèmes dynamiques non-linéaires et phénomènes de chaos(application à la cryptographie), mémoire de magistère, Université Mentouri Constantine, le 29/06/2010.

-
- [13] **Guckenheimer.J** and **Holmes.P**, Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York.
- [14] **Lozi, R, Ushiki, S.** "Coexisting chaotic attractors in Chua's circuit," International Journal of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering, [1991].
- [15] **L. O. Chua**, "Chua's circuit : an overview ten years later.", Journal of Circuits Systems & Computers, vol.4,
- [16] **Mindlin.GB, Solari.HG, Natiello.MA, Gilmore.R, Tufilano.NB**, Classification of strange attractors by integers, Physical Review Letters.
- [17] **Mr Zeraoulia Elhadj** Etude de quelques types de systèmes chaotiques :Généralisation d'une modèle issu du modèle de chen, Université Mentouri de Constantine, le 20/02/2006.
- [18] **Poincaré.H**, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,Gautiers-Villareds-Paris(1892).
- [19] **Rouvière**, Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 3^{eme} édition Caussin, p.
- [20] **Ruelle.D** et **Takens.F**,On the nature of turbulence, Commun.Math.Phys.[1971]
- [21] **Tayeb Hamaizia**, Systemes Dynamiques et chaos " Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique", thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences, Université de Constantine-1-, le 25/04/2013.
- [22] **T-Y.Li** and **J.A.York**, Period three implies chaos, Amer.Math, [1975].
- [23] **Wolf.A**, Quantifying chaos with lyapunov exponent, In Chaos, A.V.Holden, Ed.Princeton University press, Princeton, [1986].