République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème:

Sur une équation des ondes de type Kelvin-Voigt avec conditions aux limites acoustiques

Présenté Par:

Saadi Dhouha
Zeghouda Fatima

Devant le jury:

Mr: **Kamel Akrout**	MCA	Université Larbi Tébessi	Président
Mr: **Abdelatif Toualbia**	MCB	Université Larbi Tébessi	Examinateur
Mr: **Abderrahmane Zaraï**	Prof	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance: 14/06/2020

Table des matières

Résumé

L'objet de ce mémoire porte essentiellement sur la détermination de conditions suffisantes pouvant mener la solution à tendre vers zéro lorsque t tend vers l'infini ou à exploser en temps fini pour certains problèmes des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique en présence d'un terme source de type polynomiale.
En plus d'une introduction, une section contenant 23 références, le document comprend trois chapitres formant le corps de la mémoire.
Chapitre 1 :Dans ce chapitre nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans les chapitres ultérieurs.
Dans le chapitre 2, nous utilisons les inégalités intégrales et la technique de multiplicateur nous prouvons des estimations décroissance exponentielle pour l'énergie de l'équation des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique.
Dans le chapitre 3 nous donne des conditions suffisantes d'explosion de la solution d'équation des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique en temps fini, l'outil principal utilisé repose sur la méthode de Georgiev et Todorova, cette méthode est combiner avec quelques modifications nécessaires.

Mots clés

Equation des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt, décroissance énergétique, condition aux limites d'acoustique, explosion.

Abstract

The purpose of our work focuses on the determination of sufficient conditions that can lead the solution to approach to zero when t goes to infinity or blow-up in finite time for some generalized waves of the Kelvin-Voigt type with boundary condition in presence of a source term of polynomial type.
In addition to an introduction, a section containing 23 references, the document includes three chapters forming the body of the work.
Chapter 1 : In this chapter we recall necessary tools which are useful in later chapters.
In chapter 2, we use integral inequalities and the multiplier technique we prove exponential decay estimates for the energy of the generalized wave equation of Kelvin-Voigt type with acoustic boundary condition.
In chapter 3 gives us sufficient conditions of explosion of the solution of equation of generalized waves of Kelvin-Voigt type with boundary condition of acoustics in finite time, the main tool used is based on the method of Georgiev and Todorova , this method is combine with some necessary modifications.

Keywords

Generalized waves equation of Kelvin-Voigt type, energy decay, acoustic boundary, blow up.

ملخص

الغرض من هذه الرسالة هو تحديد الشروط الكافية التي في ظلها يؤول الحل الى الصفر عندما يؤول الزمن الى المالانهاية ويعرف بالسلوك التقاربي للحلول او الى الانفجار في وقت محدود. لمسائل تطورية وفي حالتنا معادلة الامواج العامة من نوع كيلفن-فويغت مع شروط حدية من النوع "الصوتية" وكذلك في وجود قوة خارجية.

بالإضافة الى المقدمة و قسم يحتوي على 23 مرجع, تتضمن المذكرة ثلاثة فصول.

الفصل الاول نذكر فيه بالأدوات اللازمة والمفيدة في الفصول التالية.

في الفصل الثاني نستخدم تقنية دوال ليابونوف لإثبات السلوك التقاربي للحل وبالضبط الاتزان الاسي.

الفصل الثالث في هذا الفصل نثبت بان تطبيق قوة خارجية على المعادلة سوف يؤدي الى انفجار الحلول ولإثبات هذا استخدمنا طريقة جورجييف و تودوروفا.

الكلمات المفتاحية: معادلة الأمواج المعممة من نوع كيلفن-فويغت، اضمحلال الطاقة، الحدود الصوتية، انفجار الحلول

Remerciements

Nous voulons à exprimer toute notre reconnaissance à notre encadreur monsieur **Zaraï Abderrahmane**, professeur à l'Université de Tébessa. Nous le remercions de nous avoir encadrées, orientés, aidées et conseillées.
Nos remerciements vont également à monsieur **Kamel Akrout** docteur à l'Université de Tébessa et monsieur **Toualbia Abdelatif** docteur à l'Université de Tébessa pour l'honneur qu'ils ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.
Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidés nos réflexions et ont acceptés de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.
Nous remercions nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous. Nous remercions nos sœurs nos frères, pour leurs encouragements.
Enfin, Nous remercions nos amis qui ont toujours été là pour nous. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.
À tous ces intervenants, nous présentons nos remerciements, notre respect et notre gratitude.

Introduction Générale

Durant cette dernière décennie, les équations aux dérivées partielles plus précisément les problèmes d'évolution non-linéaire sont devenus de plus en plus utilisés en technologie, ce qui a accrût l'intérêt des chercheurs pour les problèmes des ondes avec condition aux limites d'acoustique. De nombreux travaux à ce sujet existent dans la littérature et un progrès important a été réalisé dans ce domaine

Dans la théorie des équations d'évolution non-linéaire, une solution est qualifiée d'être globale si elle est définie pour tout temps positif et dans ce cas, nous parlons sur le comportement asymptotique. Au contraire, si une solution existe seulement sur un intervalle de temps [0 ; T) borné, elle est dite locale. Dans ce dernier cas et quand le temps maximal d'existence est relié à une alternative d'explosion, on dit aussi que la solution explose en temps fini.

L'objet de notre mémoire est l'étude des équations suivants :

$$|u_t|^\rho u_{tt} = \Delta u + 2\lambda \Delta u_t \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

et le même équation, mais en présence d'une force extérieure

$$|u_t|^\rho u_{tt} = \Delta u + 2\lambda \Delta u_t + |u|^{m-2} u \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Nous joindrons ces deux équations aux conditions suivantes

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial \upsilon} + 2\lambda \tfrac{\partial u_t}{\partial \upsilon} = y_t \quad \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$u_t + p(x) y_t + q(x) y = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0, u_t(x,0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \tag{6}$$

$$y(x,0) = y_0 \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{7}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ est composé de deux parties Γ_0 et Γ_1 tel que $\overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} = \Gamma . u$ est le déplacement transversale, x est la coordonnée spatiale dans le sens de l'écoulement du fluide, et t est le temps. Δ le laplacien dans $\mathbb{R}^n$ pris dans les variables spatiales, υ l'unité normale $d\Gamma$ pointant dans Ω et $\mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$ est un petit coefficient d'amortissement interne du matériau. p et q sont des fonctions remplissant certaines conditions à préciser ultérieurement.

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0 \quad \text{pour tous } x \in \Gamma_1,$$

cette hypothèse implique qu'il existe des constantes positives p_i, q_i $(i = 0, 1)$, telles que

$$p_0 \leq p(x) \leq p_1,\ q_0 \leq q(x) \leq q_1 \text{ pour tous } x \in \Gamma_1.$$

Le terme non linéaire $|u_t|^\rho u_{tt}$, où $\rho > 0$ est exprimés des matériaux dont la densité dépend de la vitesse u_t, le terme $2\lambda\triangle u_t$ est l'amortissement du matériau interne dy type Kelvin-Voigt de la structure.

La stabilisation une équation d'ondes de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique est peu considérée dans la littérature, on peut se référer aux articles suivants [23,19,6,11,4,5,7,10]. Contrairement, au problème de la stabilisation, beaucoup d'études ont porté sur l'explosion de la solution pour les problèmes d'ondes semi-linéaires avec un terme source de type polynomial $|u|^{m-2} u$, voir [22,15]. V. Georgiev et G. Todorova [20] ont montré la non existence de la solution globale pour les conditions initiales négatives. Plus tard, le même résultat a été établi par plusieurs auteurs pour les équations d'évolution générales [16,3,2] : En particulier, Levine et Serrin [9] ont prouvé le résultat de non existence globale pour un problème hyperbolique abstrait assez général..

Notre travail est organisé comme suit :

– Dans le premier chapitre, on introduira quelques notions de base ainsi que des rappels, qui seront utilisés dans certaines preuves et applications.
– Dans le chapitre 2, nous utilisons les inégalités intégrales et la technique de multiplicateur nous prouvons des estimations décroissance exponentielle pour l'énergie de l'équation des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique régies par (1) et (3)-(7).
– Dans le chapitre 3 nous donne des conditions suffisantes d'explosion de la solution d'équation des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites d'acoustique régies par (2) et (3)-(7). En temps fini, l'outil principal utilisé repose sur la méthode de Georgiev et Todorova [20], cette méthode est combiner avec quelques modifications nécessaires en raison de la nature du problème traité ici.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions essentielles, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent les espaces L^p ; les espaces de Sobolev.
Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^T \ et \ |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 .$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x) .$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega))^m$ est l'ensemble des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b\left(\overline{\Omega}\right)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| .$$

Pour $k \geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.
$C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.
Nous définissons aussi $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, comme l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k(\mathbb{R}^n)$ ou bien comme étant l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, telle que pour tous $0 \leq j \leq k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$, la limite $\lim\limits_{x \to x_0} D^j u(x)$ existe et dépend uniquement de x_0.
$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions tests.

1.1 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Remarque 1.1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg dx,\ f, g \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Dérivée faible

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $1 \leq i \leq n$. Une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f_i(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sense des distributions de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, on posera

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

1.2.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ;\ tel\ que\ \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

1.2.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega)\ tel\ que\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}.$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ la langueur de α et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sense de la définition 1.1.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert, avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \quad pour\ u, v \in H^m(\Omega).$$

1.2.4 Formule d'intégration par parties et formule de Green

Définition 1.2 *Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} v u n_i ds.$$

Où $n_i(x) = \cos(n, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x avec l'axe des x_i.

Définition 1.3 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$. Alors on a*

$$\int_\Omega v\Delta u dx - \int_\Omega u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right) ds.$$

Notation 1.1 *Soit $1 \le p \le \infty$. On note par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1.3 Inégalités

Lemme 1.1 *(Inégalité de Young).*
Pour tous a et b réels positifs et tous p et q réels strictement positifs tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit parfois qu'ils sont conjugés) on a

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

l'inégalité de Young.
Preuve. *On a la fonction exponentielle*

$$f(x) = \exp(x)$$

est une fonction strictement convexe (puisque sa dérivée seconde est strictement positive). Donc d'après la définition de la convexité :
Pour tout t de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et tous nombres réels x et y avec $x \neq y$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

En appliquant l'inégalité stricte pour

$$t = \frac{1}{p}, \ (1-t) = \frac{1}{q},$$

et

$$x = \ln a^p, \ y = \ln b^q,$$

on obtient

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln ab) = \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \\ &\le \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

$(i.e)$

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Lemme 1.2 *(Inégalité de Hölder).*
Soit p un nombre avec $1 \leq p \leq +\infty$ et soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve. Soient f et g sont supposés à valeur dans K.
· Soit $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = 0$ et f ou $g = 0$ $\mu - pp$. Dans ce cas $f.g = 0$ $\mu - pp$, alors on a donc trivialement égalité.
· Soit $\|f\|_p.\|g\|_q \neq 0$ on pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ donc on applique le lemme (1.1)

$$\forall x \in X : \frac{|f(x)\,g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_q^q},$$

l'intégration par rapport à μ conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |f.g|\,d\mu &\leq \frac{1}{p\,\|f\|_p^p} \int_X |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q\,\|g\|_q^q} \int_X |g|^q\,d\mu \\ &= \frac{1}{p\,\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\,\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

alors :

$$\|f.g\|_1 = \int_X |f.g|\,d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ donc } fg \in L^1(X).$$

■

Remarque 1.3 *Pour $p = q = 2$ on revient à l'inégalité de Cauchy Schwartz.*

Lemme 1.3 *(Inégalité de Poincaré).*
Si Ω est borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2.$$

Cette l'inégalité dit de poincarré.

Preuve. On travaille par densité.
Soit $v \in D(\Omega)$ et soit $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 en de hors de Ω puisque Ω est borné. On peut supposer que Ω est contenu dans la bande $a \leq x_n \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En posant $x = (x', \ x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

On a : $\tilde{v}(x',\ x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x',\ t)\, dt$.
D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient :

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x',\ x_n)|^2 &= \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x',\ t)\, dt \right| \leq \left(\int_a^{x_n} |1|^2\, dt \right) \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x',\ t) \right|^2 dt \\ &= (x_n - a) \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x',\ t) \right|^2 dt \leq (x_n - a) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x',\ t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}|^2\, dx &= \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x',\ x_n)|^2\, dx' \right) dx_n \leq \int_a^b \left[(x_n - a) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx \right] dx_n \\ &= \int_a^b (x_n - a)\, dx_n. \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité :

$$\forall v \in D(\Omega) : \ \ \|\tilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \ \ \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

■

Lemme 1.4 *(Inégalité de Sobolev-Poincaré).*
Soit p un nombre avec $0 \leq p < +\infty$ $(n = 1, 2)$ ou $0 \leq p \leq \frac{4}{n-2}$ $(n > 2)$. Alors il existe une constante $C(p, \Omega)$ telle que

$$\|u\|_{p+1} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_2, \ \ pour\ u \in H_0^1(\Omega).$$

1.4 Exemple d'application de la méthode de Georgiev –Todorova

L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème aux limites à valeurs initiales suivantes

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) = |u|^{p-2} u, \ x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(x,t) = u_0(x), \ \ x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$ et $p > m > 2$.

Proposition 1.1 *Pour tout valeur initial $u_0 \in L^{\infty}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, le problème (1.1) a une solution*

$$\begin{aligned} u &\in L^{\infty}(\Omega \times (0,T)) \cap L^m((0,T); H_0^m(\Omega)) \\ u_t &\in L^2(\Omega \times (0,T)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Théorème 1.1 *Si $p > m > 2$ alors Pour tout valeur initial $u_0 \in L^{\infty}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, la solution (1.2) explose au temps $T^* = \frac{m-2}{2\gamma} L^{1-\frac{m}{2}}(0)$.*

Preuve. En multipliant l'équation (1.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t u - \int_\Omega u \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) &= \int_\Omega |u|^{p-2} u^2 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^m dx &= \int_\Omega |u|^p dx \\ \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 &= -2\|\nabla u\|_m^m + 2\|u\|_p^p \end{aligned}$$

Maintenant nous définissons

$$H(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^m dx. \tag{1.3}$$

Dérivant la fonction (1.3) par rapport à t le long des solutions de (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_\Omega |u|^{p-1} u_t dx - \int_\Omega |\nabla u|^{m-1} \nabla u_t dx \\ &= \int_\Omega |u|^{p-2} u u_t dx - \int_\Omega |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla u_t dx \\ &= \int_\Omega |u|^{p-2} u u_t dx + \int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u_t dx \\ H'(t) &= \int_\Omega u_t^2(x,t) dx \geq 0; \end{aligned}$$

Alors $H(t) \geq H(0) \geq 0$, où

$$H(0) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p - \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u_0|^m \geq 0$$

Cela implique

$$\frac{1}{m}\|\nabla u_0\|_m^m - \frac{1}{p}\|u_0\|_p^p \leq 0.$$

On définit la fonctionnelle $L(t)$ par

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t) dx.$$

Dérivant la fonctionnelle $L(t)$ par rapport à t le long des solutions de (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &= \int_{\Omega} uu_t(x,t)dx = \int_{\Omega} u\left[\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) + |u|^{p-1}u\right](x,t)dx \\ &= \|u\|_p^p - \|\nabla u\|_m^m = pH(t) + (\frac{p}{m}-1)\int_{\Omega} |\nabla u|^m (x,t)dx \\ &\geq (\frac{p}{m}-1)\left[H(t) + \|\nabla u\|_m^m\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Clairement

$$H(t) + \|\nabla u\|_m^m \leq \frac{m}{p-m}\ L^{'}(t)\ \ . \tag{1.4}$$

Estimons maintenant $L^{\frac{m}{2}}(t)$. Nous avons

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2(x,t)dx.$$

Par conséquent, on trouve

$$L^{\frac{m}{2}}(t) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}\|u\|_2^m .$$

En utilisant l'inégalité de Poincare et l'injection de l'espace L^q, on obtient

$$\begin{aligned} L^{\frac{m}{2}}(t) &\leq \frac{c^m(\Omega,m)}{2^{\frac{m}{2}}}\|\nabla u\|_m^m \\ &\leq \frac{c^m(\Omega,m)}{2^{\frac{m}{2}}}\left[H(t) + \|\nabla u\|_m^m\right]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Donc de (1.2) et (1.3), on obtient

$$\frac{2^{\frac{m}{2}}}{c^m(\Omega,m)}L^{\frac{m}{2}}(t) \leq \left[H(t) + \|\nabla u\|_m^m\right] \leq \frac{m}{p-m}L^{'}(t).$$

Alors :

$$L^{'}(t) \geq \frac{(p-m)2^{\frac{m}{2}}}{c^m(\Omega,m)}L^{\frac{m}{2}}(t).$$

On pose : $\frac{(p-m)2^{\frac{m}{2}}}{c^m(\Omega,m)} = \gamma$ donc

$$L^{'}(t) \geq \gamma L^{\frac{m}{2}}(t). \tag{1.6}$$

En intégrant (1.6) de 0 à t, nous aurons

$$L^{1-\frac{m}{2}}(t) \leq -\gamma_1 t + L^{1-\frac{m}{2}}(0).$$

Où $\gamma_1 = \frac{m-2}{2}\gamma > 0$. Finalement, il vient

$$L^{\frac{m}{2}-1}(t) \geq \frac{1}{L^{1-\frac{m}{2}}(0) - \gamma_1 t}.$$

Alors L explose en temps fini

$$t^* \leq \frac{\frac{m}{2}-1}{\gamma}L^{1-\frac{m}{2}}(0).$$

■

Chapitre 2

Stabilité exponentielle d'équation des ondes de type Kelvin-Voigt avec conditions aux limites acoustiques

L'objectif de ce chapitre est d'étudié le problème avec conditions aux limites d'acoustique suivant

$$|u_t|^\rho u_{tt} = \triangle u + 2\lambda \triangle u_t \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} + 2\lambda \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} = y_t \text{ on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

$$u_t + p(x)y_t + q(x)y = 0 \text{ on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{2.4}$$

$$u(x,0) = u_0, u_t(x,0) = u_1 \text{ in } \Omega, \tag{2.5}$$

$$y(x,0) = y_0 \text{ on } \Gamma_1 \tag{2.6}$$

2.1 Stabilité exponentielle

Dans cette section nous allons démontrer la décroissance exponentielle de solutions du problème (2.1)-(2.6).

Nous définissons l'énergie du problème (2.1) par

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma \tag{2.7}$$

Lemme 2.1 *$E(t)$ est uniformément bornée par $E(0)$ et*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.8}$$

Preuve. On multiplie l'équation (2.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_t|^{\rho} u_{tt} u_t dx = \int_{\Omega} \triangle u . u_t dx + 2\lambda \int_{\Omega} \triangle u_t u_t dx.$$

On remarque que

$$\int_{\Omega} |u_t|^{\rho} u_t u_{tt} dx = \frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

puis, on applique la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \triangle u . u_t dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma,$$

$$2\lambda \int_{\Omega} \triangle u_t u_t dx = -2\lambda \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma,$$

alors

$$\frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} (\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}) = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma - 2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma,$$

on utilise les conditions aux limites (2.3) et (2.4) en obtient

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma = \int_{\Gamma_1} y_t u_t d\Gamma = -\int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x) y y_t d\Gamma,$$

de plus

$$\int_{\Gamma_1} q(x) y y_t d\Gamma = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y(t))^2 d\Gamma),$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2).$$

Par conséquent, il est facile de voir que

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma) = -2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \int\limits_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma.$$

Cela implique que

$$E(t) \leq E(0) \ \ \forall t \geq 0, \tag{2.9}$$

tel que

$$E(0) = \frac{1}{\rho+2}\|u_1\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(x,0))^2 d\Gamma.$$

■

Lemme 2.2 *Pour chaque solution $u = u(x,t)$ du système (2.1)-(2.6), la dérivée temporelle de la fonctionnelle Ψ définie par :*

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{1}{1+\rho}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx + \lambda\|\nabla u\|_2^2 \\ &+ \int_{\Gamma_1} uy d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} p(x)y^2 d\Gamma,\end{aligned} \tag{2.10}$$

satisfaite

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\leq \frac{1}{1+\rho}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2} u_t u dx + 2\int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_1} q(x)\left(y^2\right) d\Gamma - \|\nabla u\|_2^2,\end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve. Dérivant (2.10) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u dx + \frac{1}{1+\rho}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + 2\lambda\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\ &+ \int_{\Gamma_1}(u_t y + u y_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p(x) y y_t d\Gamma \\ &= \int_\Omega \{\triangle u + 2\lambda \triangle u_t\} u dx + \frac{1}{1+\rho}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + 2\lambda\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} u y_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1} y(u_t + p(x) y_t) d\Gamma,\end{aligned} \tag{2.12}$$

on remplace $\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u dx$ par l'équation (2.1) puis, on applique la formule de Green et les conditions aux limites (2.3) et (2.4), on trouve

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u dx &= -\|\nabla u\|_2^2 - 2\lambda\int\limits_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx + \int\limits_{\Gamma_1}\left\{\frac{\partial u}{\partial \upsilon} + 2\lambda\frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}\right\} u d\Gamma \\ &= -\|\nabla u\|_2^2 - 2\lambda\int\limits_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx + \int\limits_{\Gamma_1} y_t u d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.13}$$

On remplace (2.13) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \frac{1}{1+\rho}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \|\nabla u\|_2^2 + 2\int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(u_t + p(x)y_t)yd\Gamma \\ &\leq \frac{1}{1+\rho}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \|\nabla u\|_2^2 + 2\int_{\Gamma_1} uy_t d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

■

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle suivante

$$V(t) = E(t) + \varepsilon\Psi(t). \tag{2.14}$$

Proposition 2.1 *Il existe deux constantes positives M_1, M_2 ; telles que*

$$\{1-\varepsilon M_1\}E(t) \leq V(t) \leq \{1+\varepsilon M_2\}E(t) \quad \forall t \geq 0, \tag{2.15}$$

où

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{M_1}.$$

Preuve. On a

$$E(t) - \varepsilon|\Psi(t)| \leq V(t) \leq E(t) + \varepsilon|\Psi(t)|. \tag{2.16}$$

Nous estimons le premier terme de $\Psi(t)$

$$\left|\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right| \leq \frac{1}{1+\rho}\int_\Omega |u_t|^{\rho+1}|u|\,dx,$$

on utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right| \leq \frac{1}{\rho+1}\left(\int_\Omega (|u_t|^{\rho+1})^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On choisit $p = \frac{\rho+2}{\rho+1}$, on obtient $q = \rho+2$, on trouve

$$\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+1}|u|\,dx \leq \frac{1}{\rho+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}}\left(\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{1}{\rho+2}},$$

on applique aussi l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{\rho+1}\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}}\left(\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{1}{\rho+2}} \leq \frac{\delta^p}{p(\rho+1)}\left(\int_\Omega (|u_t|^{\rho+2})dx\right)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}p} + \frac{\delta^{-q}}{q(\rho+1)}\left(\int_\Omega |u|\,dx\right)^{\frac{1}{\rho+2}q},$$

pour δ est une constante positive et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on choisit $\delta=1$ et $p=\frac{\rho+2}{\rho+1}$, on obtient $q=\rho+2$, alors

$$\frac{1}{1+\rho}\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}}\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx\right)^{\frac{1}{\rho+2}} \leq \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{(\rho+2)(\rho+1)}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

et d'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{(\rho+2)(\rho+1)}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\leq\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}\|\nabla u\|^{\rho+2}.$$

On utilise la définition énergétique, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{(\rho+2)(\rho+1)}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}\|\nabla u\|^2\\ &\leq \left\{1+2\frac{K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}\right\}E(t),\end{aligned}$$

par les dernières inégalités, on conclut que

$$\left|\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|\leq\left\{1+2\frac{K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}\right\}E(t). \tag{2.17}$$

Ensuite, on a les estimations suivantes

$$0\leq\lambda\|\nabla u\|_2^2\leq 2\lambda E(t), \tag{2.18}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} uy d\Gamma\right| &\leq \int_{\Gamma_1}\frac{1}{2q(x)}u^2 d\Gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}q(x)y^2 d\Gamma\\ &\leq \frac{\overline{k}}{2q_0}\|\nabla u\|_2^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}q(x)y^2 d\Gamma\\ &\leq \left(\frac{\overline{k}}{2q_0}+1\right)E(t),\end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}p(x)y^2 d\Gamma &\leq \frac{p_1}{2q_0}\int_{\Gamma_1}q(x)y^2 d\Gamma\\ &\leq \frac{p_1}{q_0}E(t).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Par les inégalités (2.18)-(2.20), on déduit que

$$-\left[2+\frac{2K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}+\frac{\overline{k}}{q_0}\right]E(t)\leq V(t), \tag{2.21}$$

d'autre part

$$V(t)\leq\left[2+\frac{2K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}+2\lambda+\frac{\overline{k}}{q_0}+\frac{p_1}{q_0}\right]E(t), \tag{2.22}$$

telles que

$$M_1=2+\frac{2K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)}(2E(0))^{\frac{\rho}{2}}+\frac{\overline{k}}{q_0}>0,$$

$$M_2 = 2 + \frac{2K^{\rho+2}}{(\rho+1)(\rho+2)} (2E(0))^{\frac{\rho}{2}} + 2\lambda + \frac{\overline{k}}{q_0} + \frac{p_1}{q_0} > 0,$$

où

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{M_1}.$$

■

Théorème 2.1 *Soit $u = u(x,t)$ est une solution régulière du système (2.1) avec des valeurs initiales $(u_0, u_1, y_0) \in V \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$, alors l'énergie $E(t)$ du système défini par (2.7) satisfait*

$$E(t) < Me^{-\mu t}E(0), t \in (0,\infty), \tag{2.23}$$

pour certaines constantes réelles $M > 1$ et $\mu > 0$

Preuve. Dérivant $V(t)$ par apport à t, puis on utilise les formules (2.8), (2.11) et (2.14), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq\ & \varepsilon \left[\frac{1}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + 2\int_{\Gamma_1} u y_t d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 - \|\nabla u\|_2^2 \right] \\ & -2\lambda \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et les inégalités et la définition de l'énergie (2.7) on obtient une estimation

$$\begin{aligned} \left| 2\varepsilon \int_{\Gamma_1} u y_t d\Gamma \right| &\leq \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} \frac{1}{p(x)} |u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{p_0} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{p(x)} |u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{\varepsilon^2 \overline{k}}{p_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{\varepsilon^2 \overline{k}}{p_0} E(t) + \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.25}$$

de (2.24) et (2.25) nous avons

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{2\varepsilon^2 \bar{k}}{p_0} E(t) \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p(x) |y_t|^2 \, d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} q(x) (y)^2 \, d\Gamma \\ &\leq -2\lambda \int_\Omega |\nabla u_t|^2 \, dx - 2\varepsilon (1 - \frac{\varepsilon \bar{k}}{p_0}) E(t) + \frac{\varepsilon}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx \; - \varepsilon \int_{\Gamma_1} q(x) (y)^2 \, d\Gamma \\ &\leq -2\lambda \int_\Omega |\nabla u_t|^2 \, dx - 2\varepsilon (1 - \frac{\varepsilon \bar{k}}{p_0}) E(t) + \frac{\varepsilon}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx + \frac{2\varepsilon}{\rho+2} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx \\ &\leq -2\lambda \int_\Omega |\nabla u_t|^2 \, dx - 2\varepsilon (1 - \frac{2\varepsilon \bar{k}}{p_0}) E(t) + \frac{\varepsilon(3\rho+4)}{(\rho+1)(\rho+2)} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

d'aprés la formule d'énérgie (2.7) on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma = E(t) - \frac{1}{\rho+2} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

de plus

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma \quad \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{\rho+2} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx - \; \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

donc

$$-\varepsilon \int_{\Gamma_1} q(x) (y)^2 \, d\Gamma \leq \frac{2\varepsilon}{\rho+2} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} \, dx,$$

par la définition de l'énérgie (2.7) on a

$$\frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq E(t) \leq E(0),$$

alors

$$\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq (\rho+2) E(0), \tag{2.27}$$

et par l'inégalité (2.27) on peut prendre suffisament petit $\varepsilon_0 > 0$ pour que

$$0 < \varepsilon_0 \leq \frac{2\lambda(\rho+1) \|\nabla u_t\|^2}{(3\rho+4) E(0)},$$

oú

$$-2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 + \varepsilon_0 \frac{(3\rho+4)}{(\rho+1)(\rho+2)} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq 0,$$

alors

$$2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 \geq \frac{\varepsilon_0 (3\rho+4)}{(\rho+1)(\rho+2)} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

de plus

$$2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 \geq \frac{\varepsilon_0(3\rho+4)}{(\rho+1)(\rho+2)}(\rho+2)E(0). \tag{2.28}$$

Alors, il est clair que

$$0 < \varepsilon_0 \leq \frac{2\lambda(\rho+1)\|\nabla u_t\|^2}{(3\rho+4)E(0)}, \tag{2.29}$$

et

$$\frac{2\varepsilon^2 \bar{k}}{p_0} - 2\varepsilon \leq 0,$$

donc

$$0 < \varepsilon < \frac{p_0}{\bar{k}}.$$

Alors, il est possible de choisir

$$0 < \varepsilon < \frac{p_0}{\bar{k}}\ ; 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{2.30}$$

de (2.26)-(2.30) on obtient

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2\varepsilon(1 - \frac{2\varepsilon\bar{k}}{p_0})E(t);\ \forall t > 0,$$

on supposons que

$$0 < \varepsilon < \min\left\{4, M_1^{-1}, \frac{p_0}{\bar{k}}, \varepsilon_0\right\}, \tag{2.31}$$

par la proposition 2.1, on déduit

$$\frac{dV(t)}{dt} + \mu V(t) \leq 0, \tag{2.32}$$

alors

$$\mu \leq -\frac{dV(t)}{dt}\frac{1}{V(t)},$$

on a

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2\varepsilon(1 - \frac{2\varepsilon\bar{k}}{p_0})E(t),$$

et

$$V(t) \leq \{1 + \varepsilon M_2\} E(t).$$

Il est clair que

$$0 < \mu < \frac{2\varepsilon(p_0 - \varepsilon\bar{k})}{p_0(1 + \varepsilon M_2)}. \tag{2.33}$$

Il est facile de voir que la relation (2.32) implique

$$V(t) < V(0)\, e^{-\mu t}\ . \tag{2.34}$$

De l'inégalité (2.15) on déduit que

$$V(t) \leq \{1+\varepsilon M_2\}\, E(t).$$

et

$$E(t) \leq \frac{V(t)}{\{1-\varepsilon M_1\}},$$

on arrive à

$$E(t) \leq \frac{\{1+\varepsilon M_2\}}{\{1-\varepsilon M_1\}} E(t) \leq \frac{\{1+\varepsilon M_2\}}{\{1-\varepsilon M_1\}}\, e^{-\mu t}\, E(0),$$

il découle

$$E(t) < M e^{-\mu t} E(0);\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.35}$$

où :

$$M = \frac{1+\varepsilon M_2}{1-\varepsilon M_1} > 1. \tag{2.36}$$

■

Chapitre 3

Explosion d'équation des ondes de type Kelvin voigt avec conditions aux limites acoustiques

Dans cette section nous considérons la propriété d'explosion de la solution du problème (3.1),pour obtenir notre résultat, on ajoute le terme source $|u|^{m-2}\, u$; alors le problème s'écrit comme suit

$$|u_t|^{\rho}\, u_{tt} = \triangle u + 2\lambda \triangle u_t + |u|^{m-2} u \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} + 2\lambda \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} = y_t \text{ on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

$$u_t + p(x) y_t + q(x) y = 0 \text{ on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0, u_t(x,0) = u_1 \text{ in } \Omega, \tag{3.5}$$

$$y(x,0) = y_0 \text{ on } \Gamma_1 \tag{3.6}$$

Lemme 3.1 *Nous définissons l'énergie du problème (3.1)-(3.6) par*

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{m} \|u\|_m^m + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma, \tag{3.7}$$

et

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Preuve. On multiplie l'équation (3.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u_t dx = \int_\Omega \triangle u.u_t dx + 2\lambda \int_\Omega \triangle u_t u_t dx + \int_\Omega |u|^{m-2} u.u_t dx.$$

On a

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u_t dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

et

$$\int_\Omega |u|^{m-2} u.u_t dx = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\|u\|_m^m,$$

la formule de Green donne

$$\int_\Omega \triangle u.u_t dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma,$$

$$2\lambda \int_\Omega \triangle u_t u_t dx = -2\lambda \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma,$$

alors

$$\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}(\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}) = -\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma - 2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma + \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\|u\|_m^m,$$

on a

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma + 2\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon} u_t d\Gamma = \int_{\Gamma_1} y_t u_t d\Gamma = -\int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q(x) y y_t d\Gamma,$$

de plus

$$\int_{\Gamma_1} q(x) y y_t d\Gamma = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(t))^2 d\Gamma),$$

et

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2),$$

on conclut alors

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{m}\|u\|_m^m + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma) = -2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma.$$

Nous définissons l'énergie du pb (3.1)-(3.6) par

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{m}\|u\|_m^m + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma,$$

et la dérivée de $E(t)$ est

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\lambda\|\nabla u_t\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

■

Théorème 3.1 *Supposons que* $\rho > 1$, $m > \beta(\rho+1)$, *et*

$$E(0) = \frac{1}{\rho+2}\|u_1\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{m}\|u_0\|_m^m + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q(x)(y(0))^2 d\Gamma < 0, \tag{3.9}$$

alors la solution du problème (3.1) explose en temps fini T^**estimé par*

$$T^* \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2\alpha-1)\gamma[L(0)]^{\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}}}. \tag{3.10}$$

Lemme 3.2 *Il existe un constant positif* $C > 1$, *telle que*

$$\|u\|_m^s \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_m^m\right), \tag{3.11}$$

pour toute $2 \leq s \leq m$ *et* $u \in H^1(\Omega)$.

Preuve. Si $\|u\|_m \leq 1$, alors

$$\|u\|_m^s \leq \|u\|_m^2,$$

alors d'aprés le théorème de Sobolev

$$\|u\|_m^s \leq C\|\nabla u\|_2^2.$$

Si $\|u\|_m > 1$, alors

$$\|u\|_m^s \leq \|u\|_m^m.$$

Donc

$$\|u\|_m^s \leq C\left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_m^m\right).$$

■

On définit la fonctionnelle suivante

$$H(t) = -E(t). \tag{3.12}$$

alors
$$\frac{dH(t)}{dt} = 2\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 + \int_{\Gamma_1} p(x)(y_t)^2 d\Gamma \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.13}$$

Par conséquent, nous avons
$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{m} \|u\|_m^m ,$$

Corollaire 3.1 *Soient les hypothèses du lemme 3.2 ont satisfait, alors*
$$\|u\|_m^s \leq C \left(-\frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma - H(t) + \|u\|_m^m \right), \tag{3.14}$$

pour tout $t \in (0,T)$, pour tous $u(.,t) \in H^1(\Omega)$ et $2 \leq s \leq m$.

Preuve. On a
$$\|u\|_m^s \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_m^m \right),$$

et
$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_m^m &= -H(t) - \frac{2}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + (\frac{2}{m}+1) \|u\|_m^m - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma \\ &\leq C \left(-\frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma - H(t) + \|u\|_m^m \right), \end{aligned}$$

alors
$$\|u\|_m^s \leq C \left(-\frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \int_{\Gamma_1} q(x)(y)^2 d\Gamma - H(t) + \|u\|_m^m \right).$$

■

Ensuite, par (3.7) et (3.9).Nous définissons
$$L(t) = H^{2(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^\rho u_t u dx. \tag{3.15}$$

Pour une petite constante positive ε à choisir plus tard et
$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{\rho(m-1)+3m-2}{2m(\rho+2)}. \tag{3.16}$$

on dérive (3.15) ,on obtient
$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= 2(1-\alpha)H_t(t)H^{1-2\alpha}(t) + \rho\varepsilon \int_{\Omega} u_{tt} |u_t|^{\rho-1} u_t u dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} u_{tt} |u_t|^\rho u dx + \varepsilon \int |u|^\rho u_t u_t dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= 2(1-\alpha)H^{(1-2\alpha)}(t)H_t(t) + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\, dx \\ &+\varepsilon(\rho+1)\int_\Omega |u_t|^\rho\, u_{tt} u dx, \end{aligned} \tag{3.17}$$

on utilise l'équation (3.1), il vient

$$\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega u_{tt}\,|u_t|^\rho\, u dx = \varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega \Delta u.u dx + 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega \Delta u_t u dx + \varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega |u|^{m-2}\, u u dx.$$

D'aprés la formule de Green

$$\int\limits_\Omega \Delta u.u dx = -\int\limits_\Omega \nabla u.\nabla u dx + \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \upsilon}.u d\Gamma,$$

donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega u_{tt}\,|u_t|^\rho\, u dx &= -\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega \nabla u.\nabla u dx - 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega \nabla u_t.\nabla u dx \\ &+\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}u + \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}u\right) d\Gamma + \varepsilon(\rho+1)\,\|u\|_m^m. \end{aligned}$$

On a

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega u_{tt}\,|u_t|^\rho\, u dx &= -\varepsilon(\rho+1)\,\|\nabla u\|_2^2 - 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int\limits_\Omega \nabla u_t.\nabla u dx \\ &+\varepsilon(\rho+1)\int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}u + \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}u\right) d\Gamma \\ &+\varepsilon(\rho+1)\int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}u + \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}u\right) d\Gamma \\ &+\varepsilon(\rho+1)\,\|u\|_m^m, \end{aligned}$$

d'aprés la formule (3.3) et (3.2) on a

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} + 2\lambda\frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}\right) d\Gamma = y_t; \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}u + \frac{\partial u_t}{\partial \upsilon}u\right) d\Gamma = 0,$$

et il résulte

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho+1)\int_{\Omega} u_{tt}\left|u_t\right|^{\rho} u dx &= -\varepsilon(\rho+1)\left\|\nabla u\right\|_2^2 - 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int_{\Omega}\nabla u_t.\nabla u dx \\ &\quad +\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1} y_t u d\Gamma + \varepsilon(\rho+1)\left\|u\right\|_m^m \qquad (3.18)\end{aligned}$$

ensuite, on utilise l'équation (3.4), on trouve

$$\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1} y_t u d\Gamma = -\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t.u d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}y.u d\Gamma. \qquad (3.19)$$

On remplace (3.18) et (3.17) dans (3.19) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} &= 2(1-\alpha)H_t(t)H^{1-2\alpha}(t) - \varepsilon(\rho+1)\left\|\nabla u\right\|_2^2 - 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int_{\Omega}\nabla u_t.\nabla u d\Gamma \\ &\quad -\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t.u d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}y.u d\Gamma \\ &\quad +\varepsilon\left\|u\right\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon(\rho+1)\left\|u\right\|_m^m . \qquad (3.20)\end{aligned}$$

On utilise la formule (3.12) et (3.13), il arive

$$2(1-\alpha)\ H^{1-2\alpha}(t) \geq 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0), \qquad (3.21)$$

et

$$H_t(t)\ \geq 2\lambda\left\|\nabla u_t\right\|_2^2 \geq \lambda\left\|\nabla u_t\right\|_2^2. \qquad (3.22)$$

Il est clair que

$$\varepsilon(\rho+1)\left\|u\right\|_m^m = \varepsilon(\rho-1)\left\|u\right\|_m^m + 2\varepsilon\left\|u\right\|_m^m,$$

de (3.11), nous avons

$$2\varepsilon\left\|u\right\|_m^m = 2\varepsilon m H(t) + \frac{2\varepsilon m}{2+\rho}\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon m\left\|\nabla u\right\|_2^2 + \varepsilon m\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma,$$

alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho+1)\left\|u\right\|_m^m &= \varepsilon(\rho-1)\left\|u\right\|_m^m + 2\varepsilon m H(t) + \frac{2\varepsilon m}{2+\rho}\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &\quad +\varepsilon m\left\|\nabla u\right\|_2^2 + \varepsilon m\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

On remplace (3.21), (3.22) et (3.23) dans (3.20) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} \geq\ & 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)\lambda \|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon(\rho+1)\|\nabla u\|_2^2 - 2\lambda\varepsilon(\rho+1)\int_\Omega \nabla u_t.\nabla u dx \\ & -\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t.ud\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}y.ud\Gamma + \varepsilon(\rho-1)\|u\|_m^m \\ & +2\varepsilon mH(t) + \frac{2\varepsilon m}{2+\rho}\|u_t\|_{\rho+2}^{2+\rho} + \varepsilon m\|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon m\int_{\Gamma_1} q(x)y^2 d\Gamma + \varepsilon\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

On utilise l'inégalité de Young avec ε, on a

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t ud\Gamma &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}|u_t|^2 d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}|u|^2 d\Gamma \\ &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{\varepsilon_1}{2p_1}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\frac{1}{2\varepsilon_1 p_1}\int_{\Gamma_1}|u|^2 d\Gamma,\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}u_t ud\Gamma &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2p_1}\int_{\Gamma_1}|\nabla u_t|^2 d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\frac{\overline{k}}{2\varepsilon_1 p_1}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma \\ &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2p_1}\|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon(\rho+1)\frac{\overline{k}}{2\varepsilon_1 p_1}\|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.25}$$

•On utilise l'inégalité de Young avec ε, on a

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}yud\Gamma &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{1\varepsilon_2}{2}\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}|u|^2 d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}|y|^2 d\Gamma \\ &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{q_0\varepsilon_2}{2p_1}\int_{\Gamma_1}|u|^2 d\Gamma - \varepsilon(\rho+1)\frac{q_0}{2\varepsilon_2}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}|y|^2 d\Gamma,\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\rho+1)\int_{\Gamma_1}\frac{q(x)}{p(x)}yud\Gamma &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{q_0\varepsilon_2\overline{k}}{2p_1}\|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon(\rho+1)\frac{q_0}{2\varepsilon_2}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{p(x)}|y|^2 d\Gamma \\ &\geq -\varepsilon(\rho+1)\frac{q_0\varepsilon_2\overline{k}}{2p_1}\|\nabla u_t\|_2^2 - \varepsilon(\rho+1)\frac{1}{2\varepsilon_2 p_1}\int_{\Gamma_1}q(x)|y|^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.26}$$

On utilise l'inégalité de Young avec ε, on a

$$-2\varepsilon(\rho+1)\lambda\int_{\Omega}\nabla u_t.\nabla u dx \geq -\varepsilon(\rho+1)\lambda\varepsilon_3\left\|\nabla u\right\|_2^2-\varepsilon(\rho+1)\frac{\lambda}{\varepsilon_3}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2. \tag{3.27}$$

En substituant (3.25), (3.26) et (3.27) dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} \geq\ & 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)\lambda\left\|\nabla u_t\right\|_2^2-\varepsilon(\rho+1)\left\|\nabla u\right\|_2^2+\varepsilon(\rho-1)\left\|u\right\|_m^m\\ & -\varepsilon(\rho+1)\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2p_1}\left\|\nabla u_t\right\|^2-\varepsilon(\rho+1)\frac{\overline{k}}{2\varepsilon_1 p_1}\left\|\nabla u\right\|^2+\varepsilon m\int_{\Gamma_1}q(x)y^2d\Gamma\\ & +2\varepsilon mH(t)+\varepsilon\left(\frac{2m}{2+\rho}+1\right)\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\varepsilon m\left\|\nabla u\right\|_2^2+\varepsilon\left\|u\right\|_{\rho+2}^{\rho+2}\\ & -\varepsilon(\rho+1)\frac{q_0\varepsilon_2\overline{k}}{2p_1}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2-\varepsilon(\rho+1)\frac{1}{2\varepsilon_2 p_1}\int_{\Gamma_1}q(x)\left|y\right|^2d\Gamma\\ & -\varepsilon(\rho+1)\lambda\varepsilon_3\left\|\nabla u\right\|_2^2-\varepsilon(\rho+1)\lambda\frac{1}{\varepsilon_3}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} \geq\ & \lambda\left[(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(\rho+1)\left(\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2\lambda p_1}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right]\left\|\nabla u_t\right\|_2^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\varepsilon\left\|u\right\|_m^m\\ & +\varepsilon mH(t)+\varepsilon(\rho+1)\left[\left(\frac{m}{\rho+1}-1\right)-\frac{\overline{k}}{2p_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_0\varepsilon_{2\varepsilon}+\frac{2p_1}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right)\right]\left\|\nabla u\right\|_2^2\\ & +\varepsilon(\rho+1)\left[\frac{m}{\rho+1}-\frac{1}{2\varepsilon_2 p_1}\right]\int_{\Gamma_1}q(x)y^2d\Gamma,\end{aligned} \tag{3.28}$$

où

$$\varepsilon\left(\frac{2m}{2+\rho}+1\right)\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2}\geq\varepsilon\left\|u_t\right\|_{\rho+2}^{\rho+2};\ 2\varepsilon mH(t)\geq\varepsilon mH(t)m;\ \varepsilon(\rho-1)\left\|u\right\|_m^m\geq\varepsilon\left\|u\right\|_m^m.$$

On conclut que

$$L(t)=H^{2(1-\alpha)}(0)+\varepsilon\int_{\Omega}u_0u_1dx>0.$$

Maintenant, on pose

$$\begin{aligned}a_1 &= 2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0)-\varepsilon(\rho+1)\left(\frac{\varepsilon_1\overline{k}}{2\lambda p_1}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right),\\ a_2 &= \left(\frac{m}{\rho+1}-1\right)-\frac{\overline{k}}{2p_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_0\varepsilon_{2\varepsilon}+\frac{2p_1}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right),\\ a_3 &= \frac{m}{\rho+1}-\frac{1}{2\varepsilon_2 p_1}.\end{aligned}$$

On a

$$a_1 > 0,$$

alors

$$2(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0) - \varepsilon(\rho+1)\left(\tfrac{\varepsilon_1 \overline{k}}{2\lambda p_0} + \tfrac{1}{\varepsilon_3}\right) > 0,$$

$$(1-\alpha)H^{1-2\alpha}(0) > \varepsilon(\rho+1)\left(\tfrac{\varepsilon_1 \overline{k}}{2\lambda p_0} + \tfrac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

$$\varepsilon < \frac{(1-\alpha)H^{1-2\alpha}}{(\rho+1)}\left(\frac{1}{\dfrac{\varepsilon_1 \overline{k}}{2\lambda p_0}+\dfrac{1}{\varepsilon_3}}\right),$$

on pose

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{k}}{2p_0},$$

alors

$$\varepsilon < \frac{(1-\alpha)H^{1-2\alpha}}{(\rho+1)}\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda}\frac{\overline{k}^2}{4(p_0)^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon_3}}\right).$$

De plus

$$a_3 > 0,$$

alors

$$\tfrac{m}{\rho+1} - \tfrac{1}{2\varepsilon_2 p_0} > 0,$$

$$m > \tfrac{\rho+1}{2\varepsilon_2 p_0},$$

on pose

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2p_0},$$

implique

$$m > \rho + 1.$$

d'autre part on a

$$a_2 > 0,$$

alors

$$\left(\frac{m}{\rho+1}-1\right)-\frac{\overline{k}}{2p_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_1\varepsilon_{2\varepsilon}+\frac{2p_0}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right)>0,$$

$$\left(\frac{m}{\rho+1}-1\right)>\frac{\overline{k}}{2p_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+q_1\varepsilon_{2\varepsilon}+\frac{2p_0}{\overline{k}}\lambda\varepsilon_3\right),$$

$$\frac{m}{\rho+1}-1>\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\overline{k}}{2p_0}+\frac{\overline{k}}{2p_0}q_1\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3,$$

$$m>(\rho+1)\left\{\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\overline{k}}{2p_0}+\frac{\overline{k}}{2p_0}q_1\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3+1\right\},$$

on pose

$$\varepsilon_3=\frac{1}{\lambda}, \tag{3.29}$$

alors

$$m>(\rho+1)\left\{\frac{\overline{k}}{(2p_1)^2}q_0+3\right\}.$$

On choisit

$$\varepsilon_1=\frac{\overline{k}}{2p_0};\varepsilon_2=\frac{1}{2p_0};\varepsilon_3=\frac{1}{\lambda},$$

et

$$\varepsilon<\frac{(1-\alpha)H^{1-2\alpha}}{(\rho+1)}\left(\frac{4\lambda p_0^2}{\overline{k}^2+4\lambda p_0^2}\right),$$

alors, les termes a_i $(i=1..3)$ sont des termes positifs

Enfin, nous obtenons

$$\frac{dL(t)}{dt}\geq C\left[\|\nabla u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+H(t)+\|u\|_m^m\right], \tag{3.30}$$

où

$$C=\{\lambda a_1,\ \varepsilon(\rho+1)a_2,\ \varepsilon(\rho+1)a_3,\ \varepsilon m;\varepsilon\},$$

cela implique

$$L(t)\geq L(0)>0,\forall t\geq 0. \tag{3.31}$$

Maintenent,en estimant $\left|\int\limits_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\left|\int\limits_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\leq\left|\int\limits_\Omega |u_t|^{\rho+1} u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}},$$

on utilise l'inégalité de Hölder ,on obtient

$$\left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+1} udx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \left(\int_{\Omega} |u_t|^{(\rho+1)p} dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u|^{q} dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{q}},$$

on choisit $p = \frac{\rho+2}{\rho+1}$, alors $q = \rho + 2$, telle que$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient

$$\left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+1} udx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{(\rho+1)}{(\rho+2)}} \left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{(\rho+2)}}\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}},$$

et par l'inégalité de Young

$$\left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+1} udx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \frac{\delta^{\theta}}{\theta}\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{\theta}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{(\rho+1)}{(\rho+2)}} + \frac{\delta^{-\mu}}{\mu}\left(\int_{\Omega} |u|^{\rho+2} dx\right)^{\frac{\mu}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{(\rho+2)}},$$

on choisit $\theta = \frac{2(1-\alpha)(\rho+2)}{\rho+1}$, alors $\mu = \frac{2(1-\alpha)(\rho+2)}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}$, telle que $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu} = 1$, et $\delta = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+1} udx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq\ & \frac{\rho+1}{2(1-\alpha)(\rho+2)}\left(\int_{\Omega} |u_t|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}\cdot\frac{2(1-\alpha)(\rho+2)}{\rho+1}} \\ & + \frac{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}{2(1-\alpha)(\rho+2)}\left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}},\end{aligned}$$

donc

$$\left|\int_{\Omega} |u_t|^{\rho} u_t udx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_1\left[\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+2} dx + \left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}}\right], \tag{3.32}$$

où

$$C_1 = \max\left\{\frac{\rho+1}{2(1-\alpha)(\rho+2)}, \frac{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}{2(1-\alpha)(\rho+2)}\right\}.$$

On applique aussi l'inégalité de Hölder sur le deuxiéme terme du côté droit de (3.32), on obtient

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}} \leq \left(\int_{\Omega} 1^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)q} dx\right)^{\frac{1}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}\cdot\frac{1}{q}}, \tag{3.33}$$

on choisit $p = \frac{m}{m-(\rho+2)}$ et $q = \frac{m}{\rho+2}$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{(\rho+2)} dx\right)^{\frac{1}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}} \leq C_2\left(\|u\|_m^{\left(\frac{\rho+2}{[\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)]}\right)}\right), \tag{3.34}$$

où

$$C_2 = \left(\int_\Omega 1^{\left(\frac{m}{m-(\rho+2)}\right)} dx\right)^{\left(\frac{m-(\rho+2)}{m}\right)}.$$

on remplace (3.34) dans (3.32), on obtient

$$\left|\int_\Omega |u_t|^\rho \, u_t u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_3 \left[\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u\|_m^{\left(\frac{\rho+2}{[\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)]}\right)}\right], \tag{3.35}$$

où

$$C_3 = \max\left\{\frac{\rho+1}{2(1-\alpha)(\rho+2)}, \frac{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)}{2(1-\alpha)(\rho+2)}.C_2\right\}.$$

Pour $\rho > 1$, $m > \beta(\rho+1)$ et α définit par (3.16) puis, on pose

$$2 \leq s = \frac{(\rho+2)}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)} \leq m. \tag{3.36}$$

Par conséquent le lemme 3.2, donne

$$\left|\int_\Omega |u_t|^{\rho+1} \, u dx\right|^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq C_3 \left[\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u\|_m^m\right]. \tag{3.37}$$

Nous concluons

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(t) &= \left(H^{2(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^\rho \, u_t u dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \\ &\leq \delta\left(H(t) + \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u\|_m^m\right) \; ; \; \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Danc, combinant (3.38) et (3.30) , nous arrivons à une constante positive $\gamma > C > \delta$

$$\frac{dL(t)}{dt} \geq \gamma L^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(t) \; ; \; \forall t \geq 0. \tag{3.39}$$

Par une simple intégration de (3.39) sur $[0, t]$, on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{L^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(t)} . \frac{dL(t)}{dt} \geq \int_0^t \gamma dt \; ,$$

alors

$$\frac{1}{-\frac{1}{2(1-\alpha)}+1} L^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}+1}(t) - \frac{1}{-\frac{1}{2(1-\alpha)}+1} L^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}+1}(0) \geq \gamma t,$$

$$L^{\frac{-2\alpha+1}{2(1-\alpha)}}(t) \geq -\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}\gamma t + L^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}+1}(0),$$

on résulte que

$$L^{\frac{2\alpha+1}{2(1-\alpha)}}(t) \geq \frac{1}{-\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}\gamma t + L^{-\frac{2\alpha+1}{2(1-\alpha)}}(0)}. \tag{3.40}$$

Maintenant, nous trouvons le temps fini T^*

$$-\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}\gamma t + L^{-\frac{2\alpha+1}{2(1-\alpha)}}(0) = 0,$$

alors

$$-\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}\gamma t = -L^{-\frac{2\alpha+1}{2(1-\alpha)}}(0),$$

donc

$$t = \frac{2(1-\alpha)}{(2\alpha-1)\gamma L^{\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}}(0)},$$

donc $L(t)$ explose en temps fini T^*

$$T^* \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2\alpha-1)\gamma L^{\frac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)}}(0)}. \tag{3.41}$$

Enfin, nous trouvons la constante α,
d'aprés (3.41) ,on obtient

$$2\alpha - 1 > 0,$$

alors

$$\alpha > \frac{1}{2}, \tag{3.42}$$

et d'aprés la formule (3.36),on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(\rho+2)}{\rho(1-2\alpha)-(4\alpha-3)} &\leq m, \\ \rho(1-m)+2-3m &\leq -\alpha(2\rho m + 4m), \end{aligned}$$

alors

$$\alpha \leq \frac{\rho(1-m)+2-3m}{-m(2\rho+4)}. \tag{3.43}$$

Donc d'aprés la formule (3.42) et (3.43),on trouve

$$\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{\rho(m-1)-2+3m}{m(2\rho+4)}. \tag{3.44}$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons déterminé des conditions suffisantes pouvant mener la solution à tendre vers zéro lorsque t tend vers l'infini ou à exploser en temps fini pour un problèmes des ondes généralisées de type Kelvin-Voigt avec condition aux limites acoustique en présence d'un terme source de type polynomiale.
Notre objectif ultime après ce travail de mèmoire est de traiter d'autres problèmes non locaux plus compliqués avec des dissipations fractionnelles.

Bibliographie

[1] A. Pazy, Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Dierential Equations, Springer-Verlag, 1983.

[2] A. Zaraï , N.-E. Tatar, A, Salem, Elastic membrane equation with memory term and nonlinear boundary damping : global existence, decay and blowup of the solution, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 33 (2013), 84-106

[3] A. Zaraï , N.-E. Tatar, Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Arch. Math. (Brno), 46 (2010), 157-176.

[4] C.L. Frota, J.A. Goldstein, Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions, J. Differ. Equ., 164 (2000), 92-109.

[5] C.L. Frota, N.A. Larkin, Uniform stabilization for a hyperbolic equation with acoustic boundary conditions in simple connected domains, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 66 (2005), 297-312.

[6] F. Li, Global existence and blow-up of solutions for a higher Kirchhoff type equation with nonlinear dissipation, Appl. Math. Lett., 17 (2004), 1409-1414.

[7] G.C. Gorain, Exponential eneragy decay estimates for the solutions of n-dimensional Kirchhoff type wave equation, Applied Mathematics and Computation, 117 (2006), 235-242.

[8] G. Kirchhoff, Vorlesungen ubear Mathematische Physik, Mechanik (Teubner), 1977.

[9] H. A. Levine and J. Serrin, Global non existence theorems for quasilinear evolutions equations with dissipation, Arch. Rational Mech Anal., 137 (1997), 341-361.

[10] H. Harrison, Plane and circular motion of a string, J. Acoust. Soc. Am., 20 (1948), 874-875.

[11] J.T. Beal, S.I. Rosencrans, Acoustic boundary conditions, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1276-1278.

[12] J.Y. Park, J.A. Kim, Some nonlinear wave equations with nonlinear memory source term and acoustic boundary conditions, Numer. Funct. Anal. Optim., 27 (2006), 889-903.

[13] J.Y. Park, S.H. Park, Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions, Nonlinear Analysis : Theory, methods and Applications, 74 (2011), 993-998.

[14] J.Y. Park, T.G. Ha, Well-posedness and uniform decay rates for the Klein-Gordon equation with damping term and acoustic boundary conditions, J. Math. Phys., 50 (2009) Article No. 013506 ; doi :10.1063/1.3040185.

[15] N.-E. Tatar, A. Zaraï , Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Demonstratio Math., 44 (2011), 67-90.

[16] N.-E. Tatar, A. Zaraï , On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 18 (2011), 615-627.

[17] S. A. Messaoudi, Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation, Math. Nachr., 260 (2003), 58-6.

[18] S. A. Messaoudi, Blow up in a nonlinearly damped wave equation, Math. Nachr., 231 (2001), 1-7.

[19] S. Toualbia, A. Zaraï, Blow up of solution for the Kelvin-Voigt type wave equation with Balakrishnan-Taylor damping and acoustic boundary, Italian Journal Of Pure And Applied Mathematics-N. 42-2019 (788-797).

[20] V, Georgiev, G. Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations, 109 (1994), 295-308.

[21] Y.H. Kang, Energy decay rates for the Kelvin-Voigt type wave equation with acoustic boundary condition, J. KSIAM., 16 (2012), 85-91.

[22] Y.H. Kang, Energy decay rate for the kelving-voigt type wave equation with balakrishnan-Taylor damping and acoustic boundary, East Asian Math. J., 32 (2016), 355-364.

[23] Yong Han Kang, Energy Decay Rate For The Kelvin-Voigt Type Wave Equation With Balakrichnan-Taylor Damping And Acoustic Boundary, East Asian Math. J. Vol. 32 (2016), No. 3, pp. 355-364.