République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Larbi Tébessi – Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux derivеés partielles et applications

Thème

Etude de la classe des opérateurs paranormaux

Présenté par

Aounallah Yousra **Bouakal Bouthaina**

Devant le jury

Mr **S .Bouzenada** MCA Univérsité Larbi Tébessi Président
Mm **S.Zediri** MAA Univérsité Larbi Tébessi Examinatrice
Mm **H.Messaoudene** MCA Univérsité Larbi Tébessi Encadreur

Date de soutenance : 25/06/2020.

Everybody is a genius. But if you judge a fish by its ability to climb a tree, it will live its life believing that it is stupid.

« Albert Einstein »

DEDICACE:

Je dedie ce travail:

A mes parents,

A mon frére,

A mes sœurs,

A mes amies surtout "Najoua",

Ma première école et mon professeur "Zerfaoui Thouraia",

et à tout mes collégues et tout ceux qui me sont chers et

l'ensemble de tous les étudiants de ma promotion.

Dédicace spécial pour le père de mon amie bouthaina "

oncle Boudjemaa " que dieu l' accueille dans son vaste

paradis

Aounallah yousra

الإهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله الكريم اللهم لا سهل الا ما جعلته سهلا وانت تجعل الحزن ان شئت سهلا .
الحمد لله الذي أنار لي طريقي وكان خير عون لي إلى أغلى ما أملك في هذه الدنيا ,إلى من كان سبب لوجود على هذه الأرض , أهدي تخرجي إلى روح والدي الطاهرة التي أصبحت تحت التراب ,إلى روح قلبي طالما أردت أن أكحل عيني برؤيته في يوم تخرجي وهو فرح بوصولي, تفتحت عيني على رؤياه والمدللة له وذلك يبقى مثلي الأعلى والحبيب الأول ,وصولي إلى هذه المرحلة يعد نجاح ناقص بدون ابي, "بوجمعة" رحمة الله عليك .
كما أهدي تخرجي وفرحتي إلى من جنة الله تحت قدميها
إلى من أفنت عمرها من أجل أن تراني في أحسن صحة وعافية ولو كان على نفسها فهي تستحق أن أهديها فرحتي بل حياتي مسلمة لها أمي "بية"
حبيبة قلبي أطال الله في عمرها.
إلى من أدين لهما بحياتي ,الى من ساندانى وكانا شمعة تحترق لتضيء لي دربي
إلى من أكن لهما مشاعر التقدير والعرفان أخواي "عامر وأسامة"
يليهما أشخاص كنت معهم طفلة صغيرة مدللة نلهو مع بعض كان يضمنا سقف منزل واحد نقضي أوقاتنا فيه تارة نضحك وتارة نبكي هن اخواتي أجزاء من أمي وأبي "مفيدة حبيبتي عواطف أمي الثانية, سهام أختي الصبورة"
إلى من ليست صديقتي فحسب بل هي نبض قلبي ونصفي الثاني, والتي ليست توأم روحي بل هي روحي بذاتها إهداء من القلب إلى القلب ,رغم المسافات صديقة عمري "مريم توأمي"
كما لا أنسى زوجة أخي بل هي أختي الرابعة "سارة" وأزواج أختاي "عبد الكريم, عزوز ستفرج بإذن الله"
ولا أنسى صغار العائلة " راما, مرتجى, مارية, آدم, سوار, جوري, جاد, روان, ريناد" كما أذكر " محمد رحيم, رحمة ولينا" فلا تكتمل فرحتي إلا بكما وأخص بالذكر أخا لم تلده أمي وأبي "سمير".
كما أهدي ثمرة عملي المتواضع إلى رفقائي الصغر "نور الهدى, أميمة" اللاتي قضيت معهن أجمل أيام حياتي.
أهدي تخرجي لكم أهلي وأحبتي" عمتي أطال الله في عمرها, خالاتي, وأعمامي خاصة وأخوالي "وأحبائي "بنات خالاتي وأعمامي خاصة احلام بعيدة عن العين قريبة للقلب "
وعزوتي كل من يحمل لقب "بوعقال"حفظهم الله وأدامهم عزا وفخرا.
تختلط دموعي فرحتي بتخرجي وحزني بوداع أحبتي في غمضة عين مرت أيامنا وها نحن اليوم نجني قطافنا ونودع أحبتنا والمكان الذي ضمنا هذه سنة الحياة, بالأمس التقينا واليوم افترقنا ولكن فرحتنا أنستنا آلامنا صديقاتي "عائشة, إيمان, هدى, زهية, سعاد , صبرينة, رندة, سمية, صباح, منى, امال" .
إلى من جعلهم الله إخوتي ومن أحببتهم بالله طلبة قسم الرياضيات والإعلام الآلي.

دعوة لكم من القلب لكل من انتفعت منهم علما .

Remerciements

Nous rendons grâce à Dieu qui nous a donné la volonté et la patience pour accomplir ce modeste

travail.

Pour commencer on tient à exprimer nos profonds remerciements au Docteur ***H. Messaoudene****,*

qui a encadré notre travail de fin de cycle master 2, pour sa disponibilité, pour sa patience et ses

nombreuses suggestions pour accomplir ce travail et pour le soutien scientifique et moral qu'elle

nous a apporté.

On tient tout particulièrement à remercier le Docteur ***Smail Bouzenada*** *qui nous a honnoré en*

acceptant d'être president de ce jury.

On exprime notre reconnaissance au Docteur ***Sonia Zediri*** *pour avoir accepté de rapporter ce*

mémoire .

Avant de terminer, on tient à dire merci à tous ceux qui ont participé à notre soutient moral à

savoir chaque membre de nos familles, nos amis et nos enseignants.

Abstract

Let H be a complex Hilbert space and $B(H)$ the space of all bounded linear operators defined in H.

We say that A is a paranormal operator if:

$$\left\|A^{2}x\right\| \geq \|Ax\|^{2};$$

for any unit vector x in H.

Which is equivalent to: $A^{*2}A - 2kA^{*}A + k^{2} \geq 0$; $\forall k \in \mathbb{R}$.

The paranormal operator class contains the normal, hyponormal and p-hyponormal operators and is included in the class of normaloïd operators.

The class of paranormal operators is denoted by $\mathcal{P}(H)$.

The main objective of this work is to give more information on the basic properties of paranormal operators and also on some classes of operators related to this class of operators.

Keywords: hyponormal operator, paranormal, *paranormal, k-paranormal, k-*paranormal.

Résumé

Soient H un espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définit dans H.

On dit que A est un opérateur paranormal si.

$$\left\|A^2x\right\| \geq \|Ax\|^2 ;$$

pour tout vecteur unitaire x dans H.

Qui est équivalent à: $A^{*2}A - 2kA^*A + k^2 \geq 0; \forall k \in \mathbb{R}$.

La classe des opérateurs paranormaux contient les opérateurs normaux, hyponormaux et p-hyponormaux et elle est incluse dans la classe des opérateurs normaloïdes.

La classe des opérateurs paranormaux est notée par $\mathcal{P}(H)$.

L'objectif principal de ce travail est de donner plus d'informations sur les propriétés de base des opérateurs paranormaux et aussi sur quelques classes d'opérateurs reliées à cette classe d'opérateurs.

Mots clés: opérateur hyponormal, paranormal, *paranormal, k-paranormal, k-*paranormal

ملخص

ليكن H فضاء هيلبرت معقدا و B(H) فضاء كل المؤثرات الخطية المحدودة على H. نقول ان A مؤثر ناظمي على B(H)

اذا كان $\|Ax\|^2 \geq \|A^2x\|$.لأي متجهX في H

اي $\forall k \in \mathbb{R}$; $A^{*2}A - 2kA^*A + k^2 \geq 0$. تحتوي مجموعة المؤثرات الناظمة على مجموعة المؤثرات الطبيعية

وهي محتواة في مجموعة المؤثرات العادية; نرمز لمجموعة المؤثرات الناظمة ب P(H) .

ان الهدف الرئيسي من هذا العمل هو اعطاء مزيد من المعلومات حول الخصائص الاساسية لمجموعة المؤثرات الناظمة وكذا بعض مجموعات المؤثرات المرتبطة بهذه المجموعة من المؤثرات.

الكلمات المفتاحية : مؤثر ناظمي, مؤثر*− ناظمي, مؤثر k–ناظمي , مؤثرk-*–ناظمي.

.

Table des matières

Notations

Tout au long de ce travail, nous avons utilisé les notations suivantes :

$\mathbb{R}$	Nombres réels.
$\mathbb{C}$	Nombres complexes.
$\|.\|$	Norme.
$\langle .,. \rangle$	produit scalaire.
$\|.\|$	Module complexe, valeur absolue.
$r(A)$	Rayon spectral de A.
$\sigma\ (A)$	Spectre de A.
$Re(A)$	Partie réelle de A.
$\mathbb{k}$	Corps quelconque.
$\rho\,(A)$	Resolvante de A.
$\oplus$	Somme dirécte.
$A^{\perp}$	Complémentaire orthogonale de A
A^{*}	Adjoint de A.
$d(.,.)$	Application de distance.
H	Espace de Hilbert.
$\ker\,(A)$	Noyau de A.
$\mathrm{Im}(A)$	Image de A.
$*$	Code d'auto-adjoint.
$B\,(H)$	Algèbre des opérateurs linéaires bornés de l'espace H.
$B\,(H,K)$	Algébre des opérateurs linéaires bornés de H vers K.
$\mathcal{L}(H)$	Algèbre des opérateurs linéaires de l'espace H.
$\mathcal{L}(H,K)$	Algébre des opérateurs linéaires de H vers K.
$W\,(A)$	Image numérique de A.

Introduction

Soient H un espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définit dans H.
On dit que A est un opérateur paranormal si.

$$\left\|A^2x\right\| \geq \|Ax\|^2 ;$$

pour tout vecteur unitaire x dans H.
L'une des classes les plus importantes et les mieux étudiées en théorie des opérateurs est la classe des opérateurs normaux qui a été introduite par Halmos en 1950, la théorie spectrale des opérateurs normaux assure l'existence d'un sous-espace invariant non trivial et révèle également la structure complète de l'opérateur.
Ainsi, les opérateurs normaux ont conduit à plusieurs généralisations, l'une de ces généralisations est la classe des opérateurs paranormaux.
La classe des opérateurs paranormaux a d'abord été étudiée par Istratescu, Saito et Yoshino [9], qui l'ont nommée classe N. De plus, Furuta [7] a introduit le terme opérateur paranormal.
Les opérateurs paranormaux ont été étudié par de nombreus auteurs, en particulier, Ando a donné une caractérisation des opérateurs paranormaux. Istratescu a prouvé que la classe des opérateurs normaloïdes est une généralisation des opérateurs paranormaux. Nous avons la relation d'inclusion suivante entre certaines sous-classes et une classe généralisée d'opérateurs paranormaux bornés.
Normal $\subset$ Hyponormal $\subset$ Paranormal $\subset$ Normaloïd.
Le but de ce mémoire est l'étude de la classe des opérateurs paranormaux, donner quelques propriétés de cette classe et présenter quelques exemples d'opérateurs paranormaux.
On a aussi donné quelques classes d'opérateurs reliées à la classe des paranormaux.
Un opérateur $T \in B(H)$ est dit *-paranormal si $\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|$; pour tout vecteur unitaire x dans H. Les opérateurs hyponormaux sont paranormaux et *-paranormaux.
Un opérateur $T \in B(H)$ est normaloïde si $\|T\| = r(T)$ (le rayon spectral de T), les opérateurs paranormaux et *-paranormaux sont normaloïdes.
La classe des opérateurs *-paranormaux a été définie par S.M. Patel. La classe des opérateurs k-*-paranormaux a été définie par M.Y. Lee, S.H. Lee et C.S. Ryoo.
Afin d'étendre la classe des opérateurs paranormaux et * -paranormaux, on a cité la classe des opérateurs k-quasi-paranormaux, quasi*-paranormaux et paranormaux généralisé.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Chapitre 01 : Ce chapitre présente les notions préliminaires : quelques définitions, propriétés et exemples sur les espaces vectoriels, normés et espace de Hilbert.

Chapitre 02 : Dans ce chapitre on présente la notion d'opérateur borné sur un espace de Hilbert H. Nous commençons par la définition d'un opérateur et quelques propriétés générales des classes des opérateurs (Opérateur adjoint, normal, hypornormal et normalïode) de l'espace de Hilbert.

Chapitre 03 : Dans ce chapitre, nous présentons la classe d'opérateurs paranormaux et on donne quelques propriétés et exemples, ainsi on a donné quelques classes d'opérateurs reliés à la classe des opérateurs paranormaux (*-paranormaux, k-paranormaux, quasi-paranormaux et paranormal généralisé) avec leurs propriétés principales.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on présente les notions préliminaires qui concerne les notions des espaces vectoriels, normés et espace de Hilbert.

1.1 Espaces vectoriels, normés et espaces de Hilbert

1.1.1 Espace Vectoriel

Définition 1.1 *Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe définie sur un couple (λ, u) de $\mathbb{k} \times E$ et notée $\lambda \cdot u$. On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, ou un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, si ;*

1. $(E, +)$est un groupe commutatif.
2. Pour tous (u, v) de E, pour tous (λ, μ) de $\mathbb{k}$ on a ;
   - $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u.$
   - $1 \cdot u = u.$
   - $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$
   - $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$

Les éléments de E sont alors appelés les vecteurs, ceux de $\mathbb{k}$ les scalaires.

Définition 1.2 *On appéle* ***espace vectoriel*** *topologique tout espace E muni d'une topologie rendant continues les applications :*

$$\begin{aligned}(x,y) &\in E\times E\rightarrow x+y\\ \text{et } (\lambda,x) &\in \mathbb{R}\times E\rightarrow \lambda x.\end{aligned}$$

On notera également qu'une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle l'est en 0.
Enfin, on rappéle qu'un espace topologique est séparé, si pour tout couple de points distincts posséde des voisinages disjoints.

Définition 1.3 *Soit H un espace vectoriel sur $\Bbbk$, on appéle produit scalaire sur H toute application :*

$$\langle .,.\rangle : H\times H\rightarrow \Bbbk$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. – $\langle \lambda x+\mu z,y\rangle =\lambda \langle x,y\rangle +\mu \langle z,y\rangle$ $\forall x,y,z\in H$, $\forall \lambda,\mu \in \Bbbk$ (bilinéaire à gauche).
– $\langle x+z,\lambda y\rangle =\overline{\lambda}\langle x,y\rangle +\overline{\lambda}\langle z,y\rangle$ $\forall x,y,z\in H$, $\forall \lambda \in \Bbbk$ (bilinéaire à droite).
2.$\forall x,y\in H$ on a :

$$\begin{cases}\langle x,y\rangle =\langle y,x\rangle\,; \text{ si l'espace est réel (symétrique)}\\ \langle x,y\rangle =\overline{\langle y,x\rangle};\ \text{si l'espace est complexe (hermitienne)}\end{cases}$$

3. $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall x\in H$ et $\langle x,x\rangle =0\Longleftrightarrow x=0$.

Remarque 1.1 *Notons que dans le cas complexe, on a ; pour tout $x,y\in H$ et $\lambda\in\mathbb{C}$: $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$.*

Exemple 1.1 - *Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n,$$

tels que :

$$x=(x_1,x_2,...x_n)\,et\ y=(y_1,y_2,...y_n)\,.$$

- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+...+x_n\overline{y_n},$$

tels que :

$$x=(x_1,x_2,...x_n)\,et\ y=(y_1,y_2,...y_n)\in\mathbb{C}^n.$$

1.1.2 Espace Normé

Définition 1.4 *Un espace vectoriel linéaire X est dit* ***espace normé*** *si pour chaque élément $x \in X$; il existe un nombre réel noté par $\|x\|$ (norme de x), vérifiant les propriétés suivantes :*

1.$\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2.$\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \Bbbk$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (inégalité triangulaire).
Dans cet espace, on introduit la métrique $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (la distance entre x et y).

Exemple 1.2 *1- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.*

2- Le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ définit une norme sur H telle que; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\forall x \in H$.
3- Pour $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \Bbbk^n$, on pose :
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$
- $\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$

Les applications $x \to \|x\|_\infty$, $x \to \|x\|_1$ et $x \to \|x\|_2$ sont des normes.

Espace compact

Définition 1.5 *(E, d) désigne un espace métrique. Une partie K de E est dite compacte si, de toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.*
En particulier, toute réunion finie ou toute intersection finie de parties compactes est compacte.

Proposition 1.1 *Toute partie compacte de E est fermée et bornée.*

Exemple 1.3 *Un segment $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. En particulier, les parties compactes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées et bornées.*

Proposition : Si A est une partie compacte de E et si $B \subset A$ est fermé, alors B est compact.

Espace complet

Définition 1.6 *(E, d) désigne un espace métrique. Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall q \geq p \geq N, \ d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Exemple 1.4 *$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques complets.*

Proposition 1.2 *1- Si E est un espace métrique complet et $A \subset E$, alors A est complet si et seulement si A est fermé.*

2- Si E est un espace métrique compact, alors E est complet.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.7 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une forme **sesquilinéaire** sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que : $x \to \phi(x, y)$ est linéaire et $y \to \phi(x, y)$ est anti-linéaire c à d : $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$;*

$$\begin{cases} \phi(\lambda x + \mu z, y) = \lambda\phi(x, y) + \mu\phi(z, y) \\ \phi(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}\phi(x, y) + \overline{\mu}\phi(x, z) \end{cases}$$

Définition 1.8 *Un espace de **Hilbert** est la donnée d'un espace vectoriel H complexe et d'une forme sesquilinéaire, i.e. linéaire en la première variable.*
$\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \overline{\lambda'} \langle x', y \rangle ; \forall x, y \in E, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$. Et anti-linéaire en la seconde.
$\langle x, \beta y + \beta' y' \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle + \overline{\beta'} \langle x, y' \rangle ; \forall x, y \in E, \forall \beta, \beta' \in \mathbb{C}$. Cette forme sequilinéaire est de plus hermitienne : $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ et strictement positive : $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle > 0$.

Exemple 1.5 *L'espace $\mathbb{k}^n$, muni du produit scalaire défini par : $\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.6 *L'espace $l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{1\leq i\leq n} |u_n|^2 \text{ converge} \right\}$, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$ est un espace*

de Hilbert.

Définition 1.9 *Pour H un espace, muni de la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle$; H est un espace de **Banach**, s'il est **complet** pour la métrique associée à la norme. (On dit qu'un espace normé X est complet si toute suite de Cauchy a une limite dans X).*

Exemple 1.7 *Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $\|(a_n)\|_p = \sum_p (|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $l_p = \left\{ x; \|x\|_p < +\infty \right\}$. Les l_p sont des espaces de Banach.*

1.2 Quelques inégalités

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soit $\|.\|$ la norme euclidiénne associée à $\langle .,. \rangle$; pour $x, y \in E$; alors : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$.*

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Preuve. a- Posons, pour tout réel t,

$$P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2$$

Comme y est non nul, $\|y\|^2$est non nul également.
Par construction, cette expression polynomiale du second degré est positive ou nulle pour tout réel t.
On en déduit que son discriminant est négatif ou nul : i.e.

$$\langle x, y \rangle^2 - \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0;$$

d'où l'inégalité annoncée.
b- Cas d'égalité :
Si (x, y) est lié alors $x = \lambda y$ pour un certain scalaire λ et l'on en déduit immédiatement :

$$|\langle x, y \rangle| = |\lambda| . \|y\|^2 = \|x\| . \|y\| .$$

Réciproquement, si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| . \|y\|$; alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine réelle (double) t, et pour ce t on a :

$$\|x + ty\|^2 = P(t) = 0,$$

donc $x = -ty$, si bien que (x, y) est lié. Ou plus directement (avec le t_0 de la variante ci-dessus) : l'hypothèse équivaut à $P(t_0) = 0$, donc à $x = -t_0 y$. ■

Définition 1.10 *Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables.*

1.3 Orthogonalité

Définition 1.11 *Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert H sont dits orthogonaux si : $\langle x; y \rangle = 0$, on écrit alors ; $x \perp y$. On dit que deux parties F et G de H sont orthogonaux si tout élément de F est orthogonal à tout élément de G, on écrit alors $F \perp G$.*

L'orthogonal d'une partie F de H, noté $F^{\perp}$, est l'ensembel des éléments de H orthogonaux à F.

Théorème 1.1 *Soit H un espace de Hilbert. Un sous-espace M de H est dense si et seulment si ; $M^{\perp} = \{0\}$.*

Chapitre 2

Espace des opérateurs linéaires bornés

Dans ce chapitre on va rappeller un certain nombre de définitions et résultats sur les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert et Banach.
Comme on va étudier des propriétés spectrales de quelques classes d'opérateurs normaux et leur caractéristiques.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur A est une application définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset H$ à valeurs dans H, $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur.*

Proposition 2.1 *A est un opérateur linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *Additive* : $A(x+y) = Ax + Ay/ \ x, y \in H$.
(ii) *Homogéne : $A(\alpha x) = \alpha A(x)$; $x \in H$ et pour tout nombre complexe α.*

Définition 2.2 *Un opérateur A est borné s'il exite $M \geq 0$; tel que $\|Ax\| \leq M\|x\|$; pour tout $x \in H$.*

Remarque 2.1 *Soient H et K deux espaces de Hilbert et A est un opérateur défini de H dans K :*

1. $B(H, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K.
2. Si $H = K$, on note $B(H, K) = B(H)$.
3. Pour $T \in B(H)$; on note l'image de T par $R(T) = \{Tx, x \in H\}$ et le noyau de T par $\ker(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$.
4. On muni $B(H)$ de la topologie uniforme (de la norme)

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}$$

Exemple 2.1 *Soient X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; l'application $A : X \to X$ définie pour $x \in X$ par :*

$$A_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire.
En effet, pour $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$; On a :

$$A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2)$$

$$= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2)$$
$$= \alpha A_\lambda(x_1) + A_\lambda(x_2)$$

Remarque 2.2 *- L'opérateur identité noté I est défini par : $I(x) = x, \forall x \in H$.*

- L'opérateur nul 0 est défini : $0(x) = 0, \forall x \in H$.

Théorème 2.1 *Soient X, Y deux espaces normés et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire alors ; les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. A est continu.
2. A est continu en 0.
3. A est unifermement continu sur X.
4. A est borné.

Définition 2.3 *Soient H, H_0 et H_1 des espaces de Hilbert et $A_1 \in B(H, H_0)$, $A_2 \in B(H_0, H_1)$. L'opérateur composé des deux opérateurs noté $A_2 \circ A_1 \in B(H, H_1)$.*

Définition 2.4 *Soit $A \in B(H)$, on définit les puissances de l'opérateur A comme étant les opérateurs de H dans H définis de la manière suivante : $A^0 = I$ (l'opérateur identité),*

$A^1 = A, A^2 = A \circ A, ..., A^n = A \circ A^{n-1} = A^{n-1} \circ A, (n \geq 1).$

Inverse d'un opérateur

Définition 2.5 *Soient H et H'des espaces de Hilbert et $A \in B(H, H')$ un opérateur. On dit que A est inversible s'il existe $B \in B(H', H)$ tel que : $AB = I_{H'}$, et $BA = I_H$, où I_H (resp. $I_{H'}$) est l'opérateur identité de H (resp. de H').*

L'opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Théorème 2.2 *Soit* $A \in B(H)$, *tel que :* $\|A\| < 1$, *alors la serie* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ *est convergente et l'opérateur* $(I - A)$ *est inversible et son inverse* $(I-A)^{-1}$ *est donnée par :* $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.

Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème précédent sous la forme suivante :

Corollaire 2.1 *Soit* $A \in B(H)$, *tel que :* $\|I - A\| < 1$; *alors l'opérateur* A *est inversible et son inverse* $(A)^{-1}$ *est donnée par :*

$$(A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k .$$

Définition 2.6 *Un opérateur* A *de* $L(H)$ *est borné inférieurement s'il exite* $\varepsilon \geq 0$ *tel que ;*

$$\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\| \,; \text{pour tout } x \in H.$$

Théorème 2.3 *1. Soit* A *un opérateur, alors* A *est inversible si et seulement si* A *est borné inférieurement et admet une image dense.*

2. Si A est borné inférieurment, alors l'image de A est fermé.

Preuve. 1.► A est inversible $\Leftrightarrow \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\|$.
On prend $\|A^{-1}\| = \frac{1}{c}$ donc ; $c\|x\| \leq \|Ax\|$, d'où A est borné inférieurement.
Pour prouver que $R(A)$ est dense dans H i.e. $\overline{R(A)} = H$.
Puisque A est inversible, alors A est surjectif i.e :

$$R(A) = H \Rightarrow \overline{R(A)} = \overline{H} = H;$$

d'où $R(A)$ est dense dans H.
◄ On a si $R(A)$ est dense ; alors :

$$R(A) = \overline{R(A)} = H \Rightarrow A \text{ est surjectif} \tag{2,1}$$

2. Si A est borné inférieurement $\Rightarrow$ A est injectif et $R(A)$ est fermé

$$Ax = 0 \Rightarrow 0 = \|Ax\| \geq \varepsilon \|x\| \Rightarrow x = 0,$$

donc ;

$$\ker(A) = \{0\} \text{ i.e.} A \text{ est injectif} \tag{2,2}$$

d'aprés $(2,1)$ et $(2,2)$ A est inversible.
A est borné inférieurement $\Rightarrow R(A)$ est fermé. Soit $\{y_n\}$ une suite de $R(A)$ convergente donc elle est de Cauchy.
du moment que H est un espace de Hilbert (i.e ; complet) ; si $x_n \to x$; alors $Ax_n \to Ax$.

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \varepsilon.$$

D'ou $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Hilbert complet ; donc $\{x_n\}$ converge vers x dans H et comme A est un opérateur continu ; alors $Ax_n \to Ax$ dans $R(A)$.
Donc $R(A)$ est fermé. ■

Définition 2.7 *Soient $T_1, T_2 \in B(H)$, la somme directe de T_1 et T_2 notée par $T_1 \oplus T_2$ est;*

$$(T_1 \oplus T_2)(x \oplus y) = T_1 x \oplus T_2 y. \ \forall x, y \in H.$$

Définition 2.8 ***Le spectre** d'un opérateur $A \in \mathbf{B}(H)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \textit{ n'est pas inversible}\}$$

Définition 2.9 *On appele ensemble résolvante de A l'ensemble ;*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \diagdown \lambda I - A \textit{ est inversible}\}$$

Définition 2.10 *Soit $A \in B(H)$, l'enveloppe convexe du spectre de A, notée $co\sigma(A)$, est le plus petit convexe contenant $\sigma(A)$.*

Définition 2.11 *On appele spectre ponctuel de A noté par $\sigma_p(A)$ l'ensemble ;*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I) \textit{ n'est pas injectif. }\}$$

Définition 2.12 *Soit $A \in B(H)$, le spectre approché réduisant de A noté $\sigma_{ap}(T)$ est l'ensemble des complexes λ tels qu'il existe une suite (x_n) : $\|x_n\| = 1$, pour laquelle ;*

$$\lim_{n\to\infty} (A - \lambda) x_n = 0 \textit{ et } \lim_{n\to\infty} (A - \lambda)^* x_n = 0.$$

Définition 2.13 *Le rayon spectral d'un opérateur $A \in B(H)$; noté $r(A)$ est :*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Définition 2.14 *L'image numérique d'un opérateur $A \in B(H)$ noté $W(A)$ est l'ensemble de tous les nombres complexes de la forme $\langle Ax, x\rangle$, où x est un vecteur unitaire de H c.à.d ;*

$$\underline{W}(A) = \{\langle Ax, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

En d'autres termes, $W(A)$ est l'image de la sphère unité $\{x \in H, \|x\| = 1\}$ de H par la forme quadratique bornée : $x \to \langle Ax, x\rangle$.

Définition 2.15 *Soit $T \in B(E)$, un sous-espace vectoriel fermé F de E est dit invariant par T si $TF \subset F$.*

2.2 Quelques classes d'opérateurs

Opérateur adjoint

Définition 2.16 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in B(H_1, H_2)$,* ***l'opérateur adjoint*** *de A est l'opérateur linéaire $A^* : H_2 \to H_1$ caractérisé par :*

$$\langle A^*y, x\rangle_{H_1} = \langle y, Ax\rangle_{H_2}$$

pour tout $x \in H_1$ et $y \in H_2$.

Proposition 2.2 *Soient $A \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$ et $B \in \mathbf{B}(H_2, H_1)$. Alors :*

1.$\|A^*\| = \|A\|$.
2. $(A^*)^* = A$.
3. $\ker(A) = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$ et $(\mathrm{Im}\, A) = (\ker A^*)^\perp$.
4. $(BA)^* = A^*B^*$.

Preuve. 1. Remarquons que ;

$$\|A\| = \sup_{v_1 \in H_1, v_2 \in H_2} \frac{\langle v_2, Av_1\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \tag{2.1}$$

En effet, il existe une suite $\{u_n\} \in H_1$ telle que $\{\frac{\|Au_n\|}{\|u_n\|}\} \to \|A\|$. En prenant $v_1 = u_n$ et $v_2 = Au_n$ dans (2.1), on voit que le suprémum coincide avec $\|A\|$, par conséquent, on a :

$$\|A\| = \sup_{v_1 \in H_1, v_2 \in H_2} \frac{\langle v_2, Av_1\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \sup_{v_1 \in H_1, v_2 \in H_2} \frac{\langle A^*v_2, v_1\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \|A^*\|$$

2. Pour tout $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$; On a :

$$\langle v_2, Av_1\rangle_{H_2} = \langle A^*v_2, v_1\rangle_{H_1} = \langle v_2, (A^*)^*v_1\rangle_{H_2}$$

par conséquent $A = (A^*)^*$.
3. $v_1 \in \ker(A)$ si et seulement si :

$$\langle Av_1, v_2\rangle_{H_1} = \langle v_1, A^*v_2\rangle_{H_1} = 0$$

pour tout $v_2 \in H_2$ c'est-à-dire : $v_1 \in (\operatorname{Im} A^*)^{\perp}$.
On obtient la deuxième relation en remplaçant A par A^*.
4. Pout tout $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$ on a :

$$\langle v_2, BAv_1\rangle_{H_3} = \langle B^*v_2, Av_1\rangle_{H_2} = \langle A^*B^*v_2, v_1\rangle_{H_1}$$

D'autre part, on a aussi ;

$$\langle v_2, BAv_1\rangle_{H_2} = \langle (BA)^*v_2, v_1\rangle_{H_1}$$

par conséquent $A^*B^* = (BA)^*$.
En remplaçant B par A^{-1} on obtient $I^* = I = A^*(A^{-1})^*$. En échangeant les rôles de A et B ; on obtient $I = (A^{-1})^*A^*$.
Par conséquent, A^* admet pour inverse $(A^{-1})^*$. ■

Définition 2.17 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $A \in B(H)$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$, c'est-à-dire :*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \ \forall x, y \in H.$$

Exemple 2.2 *Pour tout $A \in B(H_1, H_2)$; l'opérateur $A^*A \in B(H_1)$ est auto-adjoint, car $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$.*

Opérateur isométrie et unitaire

Définition 2.18 *Soit $A \in B(H)$, on dit que A est opérateur isométrique (ou est une isométrie) si ;*

$$A^*A = I.$$

ou bien,

$$\forall x \in H, \|Ax\| = \|x\|.$$

Exemple 2.3 *L'opérateur de décalage S (ou shift) est un opérateur isométrieque, car pour ;*

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, ...) &= (0, x_1, x_2, ..) \\ S^*(x_1, x_2, ...) &= (x_2, x_3, ..) \end{aligned}$$

On a ;

$$S^*S(x_1, x_2, ...) = S^*(0, x_1, x_2, ..) = (x_1, x_2, ...)$$

Alors ;

$$S^*S = I.$$

Définition 2.19 *Soit $A \in B(H)$, A est un opérateur unitaire si ;*

$$A^*A = AA^* = I.$$

Définition 2.20 *La condition plus faible $A^*A = I$ définit une isométrie. L'autre condition, $AA^* = I$, définit une co-isométrie. Ainsi, un opérateur unitaire est un opérateur linéaire borné qui est à la fois une isométrie et une co-isométrie, ou, de manière équivalente, une isométrie surjective.*

Opérateur normal

Définition 2.21 *On dit que $A \in \mathbf{B}(H)$ est **un opérateur normal** si A commute avec son adjoint i.e. $A^*A = AA^*$.*

Proposition 2.3 *Soit $A \in \mathbf{B}(H)$, A est normal, si et seulement si :*

$$\|Ax\| = \|A^*x\|\,; \text{ pour tout } x \in H.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} A \text{ est normal } &\Leftrightarrow A^*A - AA^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle = 0; \text{ pour tout } x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle; \text{ pour tout } x \in H \\ &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2\,; \text{ pour tout } x \in H. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.4 *La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0,1])$.*

En effet, on a : $(A_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$ *ou ;* $\varphi \in C([0,1])$, $f \in L^2([0,1])$.

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f, g\rangle &= \langle f(t)\varphi(t), g(t)\rangle \\ &= \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t)\rangle \end{aligned}$$

donc $(T_\varphi^* g) = \overline{\varphi(t)}g(t)$, *c'est-à-dire* $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.
D'où, $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$.
L'opérateur T *est un hermitien (auto-adjoint) ; si la fonction* φ *est réelle.*

2.2.1 Opérateur hyponormal

Définition 2.22 *Un opérateur* $A \in \mathbf{B}(H)$ *est* ***hyponormal*** *si :* $A^*A \geq AA^*$ *; qui est équivalent à la condition :*

$$\| A^*x \| \leq \| Ax \| \,.\, \forall x \in H$$

Proposition 2.4 *Soit* $A \in \mathbf{B}(H)$ *; alors* A *est un opérateur hyponormal si et seulement si ;* $A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A \geq 0$, *pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$, A est un opérateur hyponormal si et seulement si :

$$\begin{aligned} \|A^*x\| &\leq \|Ax\| \\ &\iff \|Ax\|^2 + 2\lambda \|A^*x\|^2 + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \langle Ax, Ax\rangle + 2\lambda\langle A^*x, A^*x\rangle + \lambda^2\langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \langle A^*Ax, x\rangle + 2\lambda\langle AA^*x, x\rangle + \lambda^2\langle A^*Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x\rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3 *Si* $A \in B(H)$ *est hyponormal, alors* $(A - \lambda I)$ *est hyponormal pour chaque* $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.2.2 Opérateur normaloïde

Définition 2.23 *Un opérateur* $A \in \mathbf{B}(H)$ *est* ***normaloïde*** *si :* $r(A) = \|A\|$, *où* $r(A)$ *est le rayon spectral de* A *; tel que :*

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Remarque 2.4 *Tout opérateur hyponormal est normaloïde.*

Définition 2.24 *Un opérateur $A \in \mathbf{B}(H)$ est quasinilpotent si son spectre réduit a $\{0\}$ est nul .*

Définition 2.25 *Un opérateur $A \in \mathbf{B}(H)$ est M-hyponormal si : $\exists M \in \mathbb{R}^{+}; \forall z \in \mathbb{C}$;*

$$(A - zI)(A - zI)^{*} \leq M^{2}(A - zI)^{*}(A - zI)$$

Chapitre 3

Théorie d'opérateurs paranormaux

Dans ce chapitre, nous étudions la classe des opérateurs paranormaux et leurs propriétés, Istatescu a introduit cette classe en 1966 et l'a nomé par la classe (N), en 1967 Furuta a nomé cette classe par la classe des opérateurs paranormaux.
La classe des opérateurs paranormaux contient les opérateurs normaux, hyponormaux et elle est incluse dans la classe des opérateurs normaloïdes, donc les opérateurs paranormaux constituent une classe plus large que les opérateurs hyponormaux et plus étroite que les opérateurs normaloïdes.
On va aussi étudié quelques classes d'opérateurs reliées à la classe des opérateurs paranormaux.

Définition 3.1 *Un opérateur $A \in B(H)$ est dit paranormal si A vérifi la relation suivante :*

$$\left\|A^2x\right\| \geq \|Ax\|^2 ;\textit{pour chaque vecteur unitaire } x \textit{ dans } H.$$

On dit aussi que A est paranormal si est vérifi la condition suivante :[19]

$$A^{*2}A - 2kA^*A + k^2 \geq 0; \forall k \in \mathbb{R}.$$

On note la classe des opérateurs paranormaux par $P\left(H\right)$.

Exemple 3.1 [3] *Soit $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ défini par ;*

$$T\left(x_1, x_2, x_3, ...\right) = \left(0, x_1, 2x_2, 3x_3, ...\right)$$

où $D(T) = \left\{(x_1, x_2, x_3, ...) \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{i=1}^{\infty} |ix_i|^2 < \infty\right\}$;alors T est paranormal.

avec $D(T^*) = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{i=2}^{\infty} \left\|(i-1)\, x_i\right\|^2 < \infty\right\}$.

Exemple 3.2 *Pour toute $x = (x_n) \in D(T^2)$; on a:*

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |ix_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)\, i\, |x_i|^2 \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} ((i+1)\, i\, |x_i|)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} = \sum_{i=1} ((i+1)\, i\, |xi|)\, (|xi|) \\
&= \left|T^2 x\right| |x|
\end{aligned}$$

d'où T est paranormal.

Exemple 3.3 *Soient $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormal de H et $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset [1,2]$ satisfaisant $a_n < a_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Soit $A \in \mathbf{B}(H)$:

$$Ae_n = a_n e_{n+1} (n \in \mathbb{Z})$$

$$S = (A^* A - AA^*)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $H \oplus H$ satisfait :

$$T^{2*} T^2 = (T^* T)^2$$

d'où T est paranormal.

3.1 Propriétés des opérateurs paranormaux

Proposition 3.1 [11] *Si T est un opérateur paranormal et si α et β sont des nombres complexes, alors :*

1. $(\alpha T + \beta I) \in \mathcal{P}(H)$.

2. $T^* \in \mathcal{P}(H)$.

3. Si T est inversible ; alors T^{-1}est également paranormal .

Preuve. La preuve est un calcul simple qui dépend de : $\sigma(\alpha T + \beta I) = \alpha\sigma(T) + \beta$ et $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$.
■

Proposition 3.2 *Tout opérateur hyponormal est paranormal.*

Preuve. En effet ; pour tout vecteur unitair $x \in H$:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \left\|A^2x\right\|$$

■

Corollaire 3.1 *La classe des opérateurs paranormaux contient les classes des opérateurs auto adjoint, isométriques, co-isométriques, unitaires et normaux.*

Preuve. Les classes des opérateurs auto adjoints, isométriques, co-isométriques, unitaires et normaux sont des opérateurs hyponormaux, d'aprés la proposition précédente ils sont paranormaux

■

Proposition 3.3 *Soit $A \in \mathbf{B}(H)$. Si A est paranormal alors ; A est normaloïd.*

Lemme 3.1 *Soit A un opérateur paranormal, alors ; pout tout $x \in H$ on a :*

$$\left\|A^3x\right\| \geq \left\|A^2x\right\| \|Ax\| \tag{1}$$

Preuve. Pour chaque vecteur unitaire x en H, tel que $Ax \neq 0$.

$$\begin{aligned}\left\|A^3x\right\| &= \|Ax\| \left\|A^2\frac{Ax}{\|Ax\|}\right\| \geq \|Ax\| \left\|A\frac{Ax}{\|Ax\|}\right\|^2 \\ &= \frac{\left\|A^2x\right\|^2}{\|Ax\|} \geq \frac{\left\|A^2x\right\| \|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \left\|A^2x\right\| \|Ax\|\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2 *Soit A un opérateur paranormal, alors ;*

$$\left\|A^{k+1}x\right\|^2 \geq \left\|A^kx\right\|^2 \left\|A^2x\right\| \tag{P$_k$}$$

Pour un entier positif $k \geq 1$, et chaque vecteur unité x dans H.

Preuve. Demontrons par récurrence ; pour le cas $k = 1$

$$\left\|A^2x\right\|^2 = \left\|A^2x\right\| \left\|A^2x\right\| \geq \left\|A^2x\right\| \|Ax\|^2$$

et (P_1) est clair.

Maintenant supposons que (P_k) est valide pour k et supposons que $\|Ax\| \neq 0$ alors ;

$$\left\|A^{k+2}x\right\|^2 = \|Ax\|^2 \left\|A^{k+1}\frac{Ax}{\|Ax\|}\right\|^2$$

$$\geq \|Ax\|^2 \left\| A^k \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\|^2 \left\| A^2 \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\|$$
$$\geq \left\| A^{k+1}x \right\|^2 \left\| \frac{A^2x}{\|Ax\|} \right\|^2$$
$$\geq \left\| A^{k+1}x \right\|^2 \left\| A^2x \right\|$$

par de Lemme (1) et (P_k). Donc (P_{k+1}) est valid, et la preuve est complète. ∎

Théorème 3.1 *Si A est un opérateur paranormal, alors A^n est paranormal pour chaque entier $n \geq 1$.*

Preuve. on suppose que A et A^k sont paranormaux et prouvons que A^{k+1}est paranormal.
supposons que : $\|A^2x\| \neq 0$; alors ;

$$\left\| A^{2(k+1)}x \right\| = \left\| A^2x \right\| \left\| A^{2k} \frac{A^2x}{\|Ax\|} \right\|$$
$$\geq \left\| A^2x \right\| \left\| A^k \frac{A^2x}{\|A^2x\|} \right\|^2$$
$$= \frac{\left\| A^{k+2}x \right\|^2}{\|A^2x\|}$$
$$\geq \frac{\left\| A^{k+1}x \right\|^2 \left\| A^2x \right\|}{\|A^2x\|} = \left\| A^{k+1}x \right\|^2$$

par (P_{k+1}) de Lemma(2.2). Donc A_{k+1} est paranormal. ∎

Lemme 3.3 *Le théorème suivant est très utile pour construire des exemples.*

Théorème 3.2 [11] *Si A est un opérateur quelconque sur H, alors il existent un espace de Hilbert K et un opérateur normal N sur K tels que $T = A \oplus N \in B(H \oplus K)$ est paranormal.*

Preuve. Puisque $\overline{W(A)}$ est un ensemble compact de nombres complexes, il existent un espace de Hilbert K et un opérateur normal N sur K tels que $\sigma(N) = \overline{W(A)}$.
Soit $T = A \oplus N$; alors :

$$\sigma(T) = \sigma(N) = \overline{W(A)}.$$

Pour $z \notin \sigma(T) = \overline{W(A)}$, il est bien connu que :

$$\|R(A,z)\| \leq \frac{1}{d(z, \overline{W(A)})} = \frac{1}{d(z, \sigma(T))}.$$

Où

$$R(A,z) = (A - zI)^{-1}.$$

Puisque N est normal et $z \in \rho(N)$,

$$\|R(N,z)\| = \frac{1}{d(z,\sigma(T))}.$$

Par conséquent ;

$$\|R(T,z)\| = \max\{\|R(A,z)\|, \|R(N,z)\|\} = \frac{1}{d(z,\sigma(T))}.$$

Ainsi T est paranoramal. ∎

Comme nous le verrons dans ce théorème, la classe des opérateurs hypanormaux sur H est distincte, en général, de la classe d'opérateurs paranormaux.

Lemme 3.4 *Soient $T \in B(H)$ un opérateur paranormal et M un sous espace fermé de H, qui est invariant par T,alors ;*

$T|_M$ est aussi paranormal.

Théorème 3.3 *Soit $T \in B(H)$ un opérateur paranormal ; si $\sigma(T) = 0$ sur le cercle unité, alors T est un opérateur unitaire.*

Théorème 3.4 *Il existe un opérateur paranormal inversible T tel que ;*[11]

1. *T n'est pas hyponormal.*
2. *T^2 n'est pas paranormal.*
3. *$\|T\| > r(T)$*
4. *T^{-1} n'est pas paranormal.*

Preuve. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et N un opérateur normal tel que ; $\sigma(N) = \overline{W(A)}$, et soit $T = A \oplus N$.
D'aprés le théorème (2), T est paranormal.
On a ; tout opérateur hyponormal est hyponormal sur un sous-espace invariant.
Par conséquent, puisque A n'est pas hyponormal, T n'est pas hyponormal aussi.
$W(A)$ est le disque fermé de rayon $\frac{1}{2}$ de centre $z = 1$, et $\overline{W(A^2)}$ est le disque fermé de rayon 1 de centre $z = 1$.
Par conséquent ;

$$0 \in \overline{W(A^2)} \subseteq \overline{W(T^2)} \text{ et } 0 \notin co(\sigma(T)^2) = co\sigma(T^2)$$

$co\sigma(T^2) \neq \overline{W(T^2)}$ et donc T^2 n'est pas paranormal.

Soit $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, alors : $\|x\| = 1$, et $\|Ax\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.
Ensuite ;

$$\|T\| \geq \|Ax\| = \frac{\sqrt{10}}{2} > \frac{3}{2} = r(T)$$

Donc $\|T\| > r(T)$.
Si T^{-1} est paranormal, alors ;

$$\|T\| = \left\|R(T^{-1}, 0)\right\| = \frac{1}{d(0, \sigma(T^{-1}))} = r(T)$$

Contradiction. Par conséquent T^{-1} n'est pas paranormal. ■

Exemple 3.4 *Exemple sur un opérateur non-hyponormal et paranormal :*
Soient C et D telles que ; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soient T et T^2 les matrices infinis sous les formes suivantes ;

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

telle que 0 représente la place des élements matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, il est claire que $D - C \geq 0$, mais $D^2 - C^2 \not\geq 0$; alors T est hyponormal mais T^2 ne l'est pas, mais T est un paranormal.

Théorème 3.5 *Soit A un opérateur paranormal ; alors : $co\sigma(A) = \overline{W(A)}$.*

Théorème 3.6 *Tout opérateur paranormal quasinilpotent est nul.*

3.2 Opérateurs *-paranormaux

La classe des opérateurs *paranormaux est une classe reliée à la classe des opérateurs paranormaux, mais il nexiste pas d'inclusion entre les deux classes, la classe des *paranormaux a été introduite par M. Fujii, elle est une généralisation de la classe des opérateurs hyponormaux.

Définition 3.2 *Soit $A \in B(H)$; A est un opérateur *paranormal si A vérifi la condition suivante :*

$\|A^{*2}x\| \geq \|Ax\|^2$; pour chaque vecteur unitaire x dans H.

Théorème 3.7 *Un opérateur $T \in B(H)$ est* ***-paranormal** *si et seulement si $T^{*2}T^2 + 2k\, TT^* + k^2 \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Pour tous $x \in H$.

$$\begin{aligned}
T^{*2}T^2 + 2kTT^* + k^2 &\geq 0;\ \text{pour tous } k \in \mathbb{R}. \\
&\Leftrightarrow \left\langle \left(T^{*2}T^2 + 2kTT^* + k^2\right)(x), x\right\rangle \geq 0;\ \text{pour tout } k \in R. \\
&\Leftrightarrow \left\langle (T^{*2}T^2(x), x\right\rangle + 2k \left\langle TT^*(x), x\right\rangle + k^2 \left\langle x, x\right\rangle \geq 0;\ \text{pour tout } k \in R. \\
&\Leftrightarrow \left\langle T^2(x), T^2(x)\right\rangle + 2k \left\langle T^*(x), T^*(x)\right\rangle + k^2 \left\langle x, x\right\rangle \geq 0;\ \text{pour tout } k \in R \\
&\Leftrightarrow \left\|T^2(x)\right\|^2 + 2k \left\|T^*(x)\right\|^2 + k^2 \left\|x^2\right\|;\ \text{pour tout } k \in R.
\end{aligned}$$

Nous savons que par les propriétés élémentaires des formes quadratiques réelles, si $a > 0$, b et c sont des nombres réels alors $at^2 + bt + c \geq 0$, pour un reél quelconque t; si et seulement si : $b^2 - 4ac \leq 0$.
par conséquent ;

$$\begin{aligned}
T^{*2}T^2 + 2kTT^* + k^2 &\geq 0;\ \text{pour tout } k \in R. \\
&\Leftrightarrow 4\left\|T^*(x)\right\|^4 \leq 4\left\|T^2(x)\right\|^2 \|x\|^2,\ \text{pour tout } x \in H \\
&\Leftrightarrow \left\|T^*(x)\right\|^2 \leq \left\|T^2(x)\right\|^2 \|x\|,\ \text{pour tout } x \in H \\
&\Leftrightarrow T \text{ est *-paranormal.}
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.4 *Soit T un opérateur *-paranormal, si $\sigma(T) = \{\lambda\}$, alors $T = \lambda$.*

Preuve. Si $\lambda = 0$, alors $\|T\| = r(T) = 0$, d'où $T = 0$.
Si $\lambda \neq 0$; alors $\frac{1}{\lambda}T$ est unitaire de plus $\sigma(\frac{1}{\lambda}T) = \{1\}$; d'où $T = \lambda$. ∎

Lemme 3.5 *Soit T un opérateur *-paranormal, si M est un sous espace fermé invariant pat T; alors $T|_M$ est *-paranormal.*

Preuve. Soit P la projection orthogonal sur M. Du moment que $TP = PTP$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|(T|_M)^* x\|^2 & = & \|PT^*Px\|^2 = \|PT^*x\|^2 \leq \\ \|T^*x\|^2 & \leq & \|T^2x\| \, \|x\| = \|(T|_M)^2 x\| \, \|x\| \end{array}$$

$\forall x \in M$. D'ou $T|_M$ est *-paranormal. ∎

3.2.1 Quelques résultats

[12] Soit T un opérateur *-paranormal.
1. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.
2. Si $Tx = \lambda x$, et $Ty = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, alors $\langle x, y \rangle = 0$.
3. Si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(T^*)$.
5. Si T un opérateur *-paranormal, alors $\ker(T - \lambda)$ réduit T.
6. Si T un opérateur *-paranormal, alors $\ker(T - \lambda)$ est un operateur normal.

Exemple 3.5 *Soient $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée de H et T l'opérateur de décalage défini par :*

$$Te_n = \begin{cases} \sqrt{2}e_2 : (n = 1) \\ e_3 : (n = 2) \\ 2e_{n+1} : (n \geq 3) \end{cases}$$

Il est bien connu qu'un opérateur S est *-paranormal si et seulement si :

$$S^{2*}S^2 - 2kSS^* + k^2 \geq 0;$$

pour tous $k > 0$ et S est paranormal si et seulement si :

$$S^{2*}S^2 - 2kS^*S + k \geq 0;$$

pour tous $k > 0$.
Nous montrons que T est *-paranormal mais pas paranormal.
Puisque ;

$$\begin{aligned}
& T^{2*}T^* - 2kTT^* + k^2 \\
= \; & (2+k^2) \oplus (4-4k+k^2) \oplus (16-2k+k^2) \oplus \left(\overset{\infty}{\underset{n=4}{\oplus}} (16-8k+k^2) \right) \\
= \; & (2+k^2) \oplus (k-2)^2 \oplus \left\{ (k-1)^2 + 15 \right\} \oplus \left(\overset{\infty}{\underset{n=4}{\oplus}} (k-4)^2 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

pour tous $k > 0$, T est *-paranormal.
Cependant,

$$\begin{aligned}
& T^{2*}T^2 - 2kT^*T + k^2 \\
= \; & \left(2-4k+k^2\right) \oplus (4-2k+k^2) \oplus \left(\overset{\infty}{\underset{n=3}{\oplus}} (16-8k+k^2) \right) \\
= \; & \left\{ (k-2)^2 - 2 \right\} \oplus \left\{ (k-1)^2 + 3 \right\} \oplus \left(\overset{\infty}{\underset{n=3}{\oplus}} (k-4)^2 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

pour tous $k = 2$, T n'est pas paranormal.

3.3 Opérateurs k-paranormaux

La classe des opérateurs k-paranormaux a été introduite par Fujii-Izumino-Nakamoto [8] en 1994.

Définition 3.3 *Soit k$\in \mathbb{N}$, un opérateur T est **k-paranormal**, si T satisfait :*

$$\left\|T^k x\right\| \geq \|Tx\|^k$$

pour tout $x \in H, k \in \mathbb{N}$; avec $\|x\| = 1$.

Remarque 3.1 *Pour $k = 1$, l'opérateur 1-paranormal et paranormal.*

Proposition 3.5 *Si T est paranormal alors T est k-paranormal $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Proposition 3.6 [10] *Tout opérateur k-paranormal est normaloïde.*

Preuve. [10]Soit T un opérateur k-paranormal non nul de $B(H)$; alors on a :

$$\|Tx\|^{k+1} \leq \left\|T^{k+1}x\right\| \|x\|^k ; \text{ pour chaque } x \in H, \text{ pour un entier } k \geq 1.$$

pout tout entier $j \geq 1$. On a :

$$\left\|T^j x\right\|^{k+1} \leq \left\|T^{k+j}\right\| \left\|T^{j-1}\right\|^k \|x\|^{k+1}$$

Pour chaque $x \in H$,
ce qui implique

$$\left\|T^j\right\|^{k+1} \leq \left\|T^{k+j}\right\| \left\|T^{j-1}\right\|^k.$$

Supposons $\|T^j\| = \|T\|^j$ pour certains $j \geq 1$.
Puis, par l'inégalité ci-dessus ;

$$\begin{aligned} \left\|T^{(k+1)j}\right\| &= (\|T\|^j)^{k+1} = \left\|T^j\right\|^{k+1} \leq \\ \left\|T^{k+1}\right\| \left\|T^{j-1}\right\|^k &\leq \left\|T^{k+j}\right\| \|T\|^{(j-1)k} \end{aligned}$$

et donc ;

$$\left\|T^{k+j}\right\| = \|T\|^{k+j}$$

Ainsi, par induction ; $\left\|T^{1+jk}\right\| = \|T\|^{1+jk}$; pour chaque $j \geq 1$.
Cela donne une sous suite $\{T^{n_j}\}$ de $\{T^n\}$, $T^{n_j} = T^{1+jk}$, tel que :

$$\lim_j \|T^{n_j}\|^{\frac{1}{n_j}} = \lim_j (\|T\|^{n_j})^{\frac{1}{n_j}} = \|T\|.$$

la suite $\left\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}$ est convergente et converge vers le rayon spectral de T, et comme elle a une sous suite qui converge vers $\|T\|$, il s'ensuit que $r(T) = \|T\|$, ce qui signifie que T est normaloïd. ■

Exemple 3.6 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pour $\alpha, \beta \geq 0$ et soit ;

$$f(k) = \left(\frac{9^k + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

alors ;

$$B^{2k} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9^k + 1 & 9^k - 1 \\ 9^k - 1 & 9^k + 1 \end{pmatrix}$$

et $f(k)$ augmente strictement pour $k > 0$.

Par $A^k B^{2k} A^k + 2\lambda A^{2k} + \lambda^2 \geq 0$, $T =: T_{A,B}$ est k-paranormal si et seulement si ;

$$0 \leq A^k B^{2k} A^k + 2\lambda A^{2k} + \lambda^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha^{2k}\left(9^k + 1\right) + 2\lambda\alpha^{2k} + \lambda^2 & \frac{1}{2}\alpha^k\left(9^k - 1\right)\beta^k \\ \frac{1}{2}\alpha^k\left(9^k - 1\right)\beta^k & \frac{1}{2}\beta^{2k}\left(9^k + 1\right) + 2\lambda\beta^{2k} + \lambda^2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$= \; : X_{\alpha,\beta,k} \tag{3.2}$$

pour tous réels λ. Cela équivaut à ;

$$\frac{1}{2}\alpha^{2k}\left(9^k+1\right)+2\lambda\alpha^{2k}+\lambda^2\geq 0 \text{ pour tous réels } \lambda, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2}\beta^{2k}\left(9^k+1\right)+2\lambda\beta^{2k}+\lambda^2\geq 0 \text{ pour tous réel } \lambda \tag{3.4}$$

et ;

$$\det\left(X_{\alpha,\beta,k}\right)\geq 0. \tag{3.5}$$

Donc (3.3), (3.4) et (3.5) sont équivalents à ;

$$\alpha\leq f\left(k\right) \tag{3.6}$$

et ;

$$\beta\leq f\left(k\right) \tag{3.7}$$

Alors on pronder$0<k_1<k_2$ et $0<\alpha<f\left(k_1\right)<\beta<f\left(k_2\right)$.
donc ; T est k_2-paranormal, mais T n'est pas k_1-paranormal.

Théorème 3.8 [10] *Soit $T\in B\left(H\right)$ un opérateur k-paranormal inversible, pour un entier $k\geq 1$; si son inverse est $(k-1)$-paranormal ; alors T^{-1} est k-paranormal.*

Remarque 3.2 *Soit $T\in B\left(H\right)$ un opérateur k-paranormal inversible, pour un entier $k\geq 1$; alors*

$$\left\|T^k x\right\|^{-1}\geq\left\|T^{-1}x\right\|^{k}$$

pour tout $x\in H, k\in\mathbb{N}$; avec $\|x\|=1$.

Théorème 3.9 *Soit $T\in B\left(H\right)$ un opérateur k-paranormal, si T double commute avec un opérateur p-hyponormal S, alors TS est k-paranormal pour $k>0$.*

Théorème 3.10 *Si T et T^* sont k-paranormaux tels que $\ker(T)=\ker(T^*)$, alors T est normal.*

Remarque 3.3 *Furuta a prouvé que si T est paranormal, alors T^n est paranormal pour tout $n\in\mathbb{N}$, mais la k-paranormalité de T n'implique pas la k-paranormalité de T^n sauf pour le cas ou $k=1$.*

3.4 Opérateurs quasi-paranormaux

3.4.1 Opérateur quasi-paranormal

Définition 3.4 *Un opérateur T est appelé quasi-paranormal si :*

$$\left\|T^2\left(Tx\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|Tx\right\|^{\frac{1}{2}}\geq\left\|T\left(Tx\right)\right\|;\textit{Pour tout } x\in H.$$

3.4.2 Opérateur k-quasi-paranormal

Afin d'étendre la classe des opérateurs paranormaux, Mecheri [14] a introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelé opérateurs k-quasi-paranormaux.
Pour $k = 1$, l'opérateur $1-$quasi-paranormal est un opérateur quasi- paranormal.

Définition 3.5 *Soit k un entier positif. Un opérateur T est appelé **k-quasi-paranormal** ou opérateur $p(k)$ si ;*

$$\left\|T^{k+1}x\right\|^2 \leq \left\|T^{k+2}x\right\| \left\|T^k x\right\|$$

pour tout $x \in H$.
Il n'est pas difficile de vérifier que T est k-quasi-paranormal si et seulement si ;

$$T^{*k+2}T^{k+2} - 2\lambda T^{*k+1}T^{k+1} + \lambda^2 T^{*k}T \geq 0 \text{ pour tout } \lambda > 0 \quad (1)$$

Il est évident que tout opérateur paranormal est un opérateur k- paranormal.[13]

La classe des opérateurs k-quasi-paranormaux est également incluse dans la classe d'opérateurs $(k+1)$ quasi-paranormaux.
En utilisant (1), il n'est pas difficile de montrer qu'un opérateur nilpotent d'index $k+2$ est un opérateur $p(k+1)$ mais pas un $p(k)$ opérateur ; ainsi, la suite de classes d'opérateurs $p(k)$ est strictement croissante.
L'implication suivante nous donne des relations entre les classes d'opérateurs.
Hyponormal $\Rightarrow$ p-hyponormal $\Rightarrow$ paranormal $\Rightarrow$ quasi-paranormal $\Rightarrow$ k-quasi-paranormal $\Rightarrow$ $(k+1)$-quasi-paranormal.

3.4.3 Opérateur k-quasi-*-paranormal

En 2012 B. P. Duggal, I. H. Jeon et I. H. Kim ont introduit la classe k-quasi-*-paranormal qui est une généralisation des classes hyponormaux, *-paranormal et k-* paranormaux, elle est définie comme suit :

Définition 3.6 *Pour un entier positif k, un opérateur T est dit **k-quasi-*-paranormal** si ;*

$$\left\|T^{k+2}x\right\| \left\|T^k x\right\| \geq \left\|T^{*k+1}x\right\|^2$$

Pour tout $x \in H$.

Remarque 3.4 *Tout opérateur k-quasi-*-paranormal est un opérateur normaloïde. Il est claire que ;*

$$^*paranormal \Rightarrow quasi^*paranormal \Rightarrow normaloïde$$

et

$$quasi * paranormal \Rightarrow k - quasi^{*}paranormal \Rightarrow (k+1) - quasi^{*}paranormal$$

3.5 Opérateur paranormal généralisé

En 1978, S. N. Rai a introduit une nouvelle classe d'opérateurs dite classe des opérateurs paranormaux généralisées qui contient la classe des M-hyponormaux et n'est pas en géneral inclu dans la classe des normaloïdes.

Définition 3.7 *Un opérateur $T \in B(H)$ est appelé **paranormal généralisé** si pour chaque vecteur unitaire $x \in H$ et $M \succ 0$, T satisfait :*

$$\left\|T^{2}x\right\| \geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|^{2}.$$

Théorème 3.11 *Un opérateur $T \in B(H)$ est paranormal généralisé si et seulement si :*

$$T^{*2}T^{2} + \frac{2\lambda}{M}T^{*}T + \lambda^{2}I \geq 0;\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, M \succ 0.$$

Théorème 3.12 [16] *Soit T un opérateur paranormal généralisé, alors :*

$$\left\|T^{3}x\right\| \geq \frac{1}{M^{2}}\left\|T^{2}x\right\|\left\|Tx\right\|, \text{ pour chaque vecteur unitaire } x \in H.$$

Preuve. Pour un vecteur unitaire x dans H, nous pouvons supposer $Tx \neq 0$. on a ;

$$\begin{aligned}
\left\|T^{3}x\right\| &= \left\|Tx\right\|\left\|T^{2}\frac{Tx}{\left\|Tx\right\|}\right\| \geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|\left\|T\frac{Tx}{\left\|Tx\right\|}\right\|^{2} \\
&\geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|\left\|\frac{T^{2}x}{\left\|Tx\right\|^{2}}\right\|^{2} \geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|\frac{1}{M}\frac{\left\|T^{2}x\right\|^{2}}{\left\|Tx\right\|^{2}} \\
&\geq \frac{1}{M}\frac{\left\|T^{2}x\right\|^{2}}{\left\|Tx\right\|^{2}} \geq \frac{1}{M^{2}}\left\|T^{2}x\right\|\frac{\left\|Tx\right\|^{2}}{\left\|Tx\right\|} \\
\left\|T^{3}x\right\| &\geq \frac{1}{M^{2}}\left\|T^{2}x\right\|\left\|Tx\right\|.
\end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

Théorème 3.13 *Soit T un opérateur paranormal généralisé, alors :*

$$\left\|T^{k+1}x\right\|^{2} \geq \frac{1}{M^{2k-1}}\left\|T^{k}x\right\|^{2}\left\|T^{2}x\right\|$$

pour un entier positif $k \geq 1$ et chaque vecteur unitaire $x \in H$.

Preuve. Pour le cas $k = 1$;

$$\begin{aligned}
\left\|T^2x\right\|^2 &= \left\|T^2x\right\| \left\|T^2x\right\| \geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|^2 \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|^2 \\
\left\|T^2x\right\|^2 &\geq \frac{1}{M^2}\left\|Tx\right\|^4
\end{aligned}$$

Mettons $GP_k \Longleftrightarrow \left\|T^{k+1}x\right\|^2 \geq \frac{1}{M^{2k-1}}\left\|T^kx\right\|^2\left\|T^2x\right\|$
pour $k = 1$; GP_1 est vrai.
Supposons maintenant que (GP_k) est valide pour tout k et $\|Tx\| \neq 0$, puis ;

$$\begin{aligned}
\left\|T^{k+2}x\right\|^2 &= \|Tx\|^2 \left\|T^{k+1}\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2 \\
&\geq \|Tx\|^2 \frac{1}{M^{2k-1}} \left\|T^k\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2 \left\|T^2\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\| \\
&\geq \|Tx\|^2 \frac{1}{M^{2k-1}} \left\|\frac{T^{k-1}x}{\|Tx\|}\right\|^2 \left\|\frac{T^3x}{\|Tx\|}\right\| \\
&\geq \frac{1}{M^{2k-1}}\left\|T^{k+1}x\right\|^2 \frac{1}{M^2}\frac{\left\|T^2x\right\|\|Tx\|}{\|Tx\|} \\
&\geq \frac{1}{M^{2k-1}}\left\|T^{k+1}x\right\|^2 \frac{1}{M^2}\left\|T^2x\right\| \\
&\geq \frac{1}{M^{2k+1}}\left\|T^{k+1}x\right\|^2 \left\|T^2x\right\|
\end{aligned}$$

c'est à dire ;

$$\left\|T^{k+2}x\right\|^2 \geq \frac{1}{M^{2k+1}}\left\|T^{k+1}x\right\|^2\left\|T^2x\right\|.$$

d'où le théorème. ■

Théorème 3.14 *Un opérateur T est paranormal généralisé si et seulement si :*

$$T^{*2}T^2 + \frac{2\lambda}{M}T^*T + \lambda^2 I \geq 0,$$

pour tous réels λ, $M \geq 0$.

Preuve.

$$T^{*2}T^2 + \frac{2\lambda}{M}T^*T + \lambda^2 I \geq 0$$

implique que ;

$$((T^{*2}T^2 + \frac{2\lambda}{M}T^*T + \lambda^2 I)x, x) \geq 0$$

ou ;

$$(T^{*2}T^2x, x) + \frac{2\lambda}{M}(T^*Tx, x) + \lambda^2(x, x) \geq 0$$

ou ;

$$(T^2x, T^2x) + \frac{2\lambda}{M}(Tx, Tx) + \lambda^2(x, x) \geq 0$$

ou ;

$$\left\|T^2x\right\|^2 + \frac{2\lambda}{M}\left\|Tx\right\| + \lambda^2\left\|x\right\| \geq 0.$$

Par l'argument ci-dessus, cela ne se produira que si ;

$$\frac{4}{M^2}\left\|Tx\right\|^2 - 4\left\|T^2x\right\|^2 \leq 0$$

ou ;

$$\left\|Tx\right\|^2 - M^2\left\|T^2x\right\|^2 \leq 0$$

ou ;

$$\left\|Tx\right\|^2 \leq M\left\|T^2x\right\|$$

ou ;

$$\left\|T^2x\right\| \geq \frac{1}{M}\left\|Tx\right\|^2.$$

d'où le théorème. ■

Exemple 3.7 *Soient $\{e_i\}_{i=1}$ une base orthonormal d'un éspace de Hilbert H et T l'opérateur de décalage pondéré défini : $Te_1 = e_2$, $Te_2 = 2e_3$, et $Te_i = e_{i+1}$ pour $i \geq 3$. D'ou ;*
$T^*e_1 = 0$, $T^*e_2 = e_1$, $T^*e_3 = 2e_2$ et $T^*e_i = e_{i-1}$ pour $i \geq 4$.
T est paranormal généralisé.

Proposition 3.7 *Soit T un opérateur paranormal généralisé, si T^n est compact ; alors T est compact.*

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est l'étude des proporiétés algébriques de la classe des opérateurs paranormaux et sa relation avec les classes des opérateurs hyponormaux et d'autres classes non normaux. Un opérateur paranormal est une généralisaion des opérateurs normaux, plus précisément, on trouve que cette classe contient les opérateurs hypornormaux et elle est incluse dans la classe des opérateurs normaloïde, c'est a dire :

$$normal \subset hypornormal \subset paranormal \subset normaloïde.$$

Pour les classes des opérateurs reliées à la classe des opérateurs paranormaux (il se peut que ces classes ne soient pas inclus dans $\mathcal{P}(H)$), on a ;

$$normal \Rightarrow hypornormal \Rightarrow paranormal \Rightarrow quasi - paranormal \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k - quasi - paranormal.$$

Nous allons expliquer que ces relations d'inclusion sont propres et donc les opérateurs paranormaux constituent une nouvelle classe plus large que les opérateurs hyponormaux et plus étroite que les opérateurs normaloïds.

Bibliographie

[1] P. Aiena, On the spectral properties of some classes of operators, Univ.Di Palermo, MAY 2010.

[2] S.C. Arora, R. Kumar, M-paranormal operators, Pub. de l'inst math. Nouvelle serie, tome 29 (43), (1981), 5-13.

[3] N.Bala, G.Ramesh, Weyl's theorem for paranormal closed operators. 2010 Mathematics Subject Classification. 47A10, 47A53 ; 47B20. 11th October, 2018.

[4] N. L. Braha, M.Lohaj, F.H. Marevci, Sh.Lohaj, Some properties of paranormal and hyponormal operators, Bull. Math. analy. and Appl, V 1, Issue 2, (2009), 23-35.

[5] N. Chennappan, D. S. Karthikeyan, *Paranormal Composition Operators, Indian J. pure appl. Math 31(6) : 591- 600, 2000.

[6] B. P. Duggal, I. H. Jeon, I. H. Kim, On *-paranormal contractions and properties for *-class A operators, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 954–962.

[7] T. Furuta, On the Class of Paranormal Operators, Japan Acad., 43 (1967).

[8] M. Fujii, S. Izumino, and R. Nakamoto, Classes of operators determined by the Heinz-Kato - Furuta inequality and the HÄolder-McCarthy inequality, Nihonkai Math. J. 5 (1994), N°. 1, 61-67.

[9] V.Istratescu,T.Saito,and T.Yoshino :On a class of operators.Tohoku Math.Journ.,18,410-413(1966).

[10] C. S. Kubrusly, B.P Duggal, A note on k-paranormal operators, Jour of op and Matrices 4 (2010) 213-223.

[11] G. R. Luecke, Topological properties of paranormal operators on Hilbert space, Amer. Math. Soc,V 172, Oct 1972.

[12] S.H. Lee, C. S. Ryoo, Some properties of certain non-hyponormal operators, Bull. Korean Math. Soc. 31 (1994), No. 1, pp. 133–141.

[13] S. Mecheri, S.M. Patel, Spectral properties of k-quasi-paranormal operators, AMS 2010 Subject Classi cation : Primary 47B47, 47A30, 47B20 ; Secondary 47B10.

[14] SALAH MECHERI, Bishop's property (β) and Riesz idempotent for k-quasi-paranormal operators, Banach J. Math. Anal, 6 (2012), no. 1, 147-154.

[15] Mohamed Lahouem, Sur la classe des opérateurs paranormaux, Mémoire de fin d'étude 2019.

[16] S. N. Rai, On generalised paranormal operators 1, Yokohama. Math. J. V 26,1978.

[17] K. Tanahashi, A note on *-paranormal operators and related classes of operators, Bull. the Korean. Math. Soc· March 2014.

[18] K.Tanahashi and A.Uchiyama, A note on paranormal operators and related classes of operators, Korean Math. Soc. 51 (2014), N 2, 357–371.

[19] T.Veluchamy, Paranormal Composition Operators-indian.J . pure . appl .math, 24(4) ;257-262, April 1993.

[20] Q. Zeng, H. Zhong, On (n, k)-quasi-*-paranormal operators,School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, P.R. China.