République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux deriveés partielles et applications

Thème

Existence de solutions positives pour une classe de systèmes de type Kirchhoff avec le côté droit défini comme une multiplication de deux fonctions distinctes

Présenté Par :
Ziani Karima et **Lazizi Khaoula**

Devant le jury :

Mr : **K.AKROUT**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr : **A.NABTI**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr : **R.GUEFAIFIA**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 14/06/2020.

Remerciements

Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout puissant, qui nous a donné la force, le courage et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons tout à remercier Monsieur **Rafik GUEFAIFIA** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience.

Nous le remercions vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.

Nous remercions ensuite Monsieur **Kamel AKROUT** d'avoir accepté d'être président du jury et au Monsieur **Abderrazak NABTI** d'avoir accepté d'examiner notre mémoire de Master et d'assister à la présentation de ce travail.

Nous tenons enfin à remercier nos familles qui nous accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail.

Enfin, nous remercions toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Abstract

In this memory we study the validity of the comparison principle and the sub-supersolution method for **Kirchhoff** type equations. We also use the method of sub-supersolution to show the existence of weak positive solution of elliptic systems with **Dirichlet**-boundary condition.

Key words :

Kirchhoff type systems, positive solution, method of sub-supersolution, comparison principle, non-local problems.

Résumé

Dans cette mémoire, nous étudions la validité du principe de comparaison et de la méthode de sous et sur solutions pour les équations de type **Kirchhoff**. Nous utilisons également la méthode de sous et sur solutions pour montrer l'existence d'une solution faible positive des systèmes elliptiques avec une condition aux limites de **Dirichlet**.

Mots clés :

E de type **Kirchhoff**, solution positive, méthode de sous et sur solution, principe de comparaison, problémes non locaux.

الملخـــــــــــص

في هذه المذكرة، ندرس صلاحية مبدأ المقارنة وطريقة الحلول الفرعية والحلول لمعادلات نوع **كيرشوف**. نستخدم أيضًا طريقة الحل الفوقي والتحتي لإظهار وجود حل إيجابي ضعيف للأنظمة ذات قطع ناقص بوجود شرط **ديريكلي** على الحافة.

الكلمات المفتاحية **:**

معادلات من نوع **كيرشوف**، حل موجب، طريقة الحل الفوقي و التحتي، مبدأ المقارنة، انظمة غير محلية

Introduction Générale

L'analyse fonctionnelle s'est développée pour résoudre divers problèmes, le plus souvent représentée par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Plusieurs techniques ont été développées dans ce sens. Dans ce travail, on s'intéresse en particulier à la méthode de sous et sur solutions. Cette dernière est utilisée pour la résolution des EDO et EDP. Le principe de la méthode consiste à chercher une solution qui se situe entre la sous et la sur solution sous certaines conditions.

Dans les dernières années, beaucoup d'attention a été accordée aux problèmes non locaux puisqu'ils apparaissent dans des phénomènes physiques comme la théorie de l'élasticité non linéaire, la biologie, la diffusion de la chaleur,... . Parmi ce genre de problèmes, on trouve les problèmes de type **Kirchhoff** , qui se connaissent par la présence du terme : $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)$.

En effet, l'opérateur de **Kirchhoff** $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\triangle u$ apparaît aussi dans l'équation des vibrations non linéaires, à savoir,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\triangle u = f(x,u) \text{ dans } \Omega\times(0,T), \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

cette équation initialement étudiée par **Kirchhoff** en 1883, représentant une extension de l'équation de **D'Alembert** des ondes.

Dans ce travail nous étudions la validité du principe de comparaison et de la méthode de sous et sur solutions pour les équations de type Kirchhoff, voir par exemple dans [9] (Théorème 2.1), (Théorème 2.2), et (Théorème 2.4).

De plus nous étudions un système elliptique non linéaire de type **Kirchhoff** avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et notre approche est basée sur la méthode de sous et sur solutions combiné avec le principe de comparaison voir [13]. **Rafik Guefaifia** et **Salah Boulaaras** ont fait une étude un système parabolique de type **Kirchhoff** de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u = \lambda_1 \alpha(x) f(v) h(u) \quad \text{dans } Q_T, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx\right) \Delta v = \lambda_2 \beta(x) g(u) \tau(v) \ \ \text{dans } Q_T, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N \, (N \geq 3)$ étant un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ régulière, et $A, B \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions continues et décroissantes ; λ_1, λ_2 sont des paramètres positifs, et quand les non-linéarités sont "sous-linéaire" à l'infini, (voir les conditios $(\mathcal{H}3)$ et $(\mathcal{H}4)$) . Les auteurs à prouves que ce système admet une solution faible positive, selon les travaux des **Giovany M. Figueiredo**, **Antonio Suarez** dans[9] ,et **C.O. Alves, Corrêa F.J.S.A** dans [2] .

Ce système est une extension des travaux de **G. Afrouzi** et **N. T.Chung** en **2016** (voir [1]). et **N. Azouz , A. Bensedik** en **2012** (voir [3]).

Dans ce travail, nous faisons $t = 0$, le système parabolique (2) est équivalent à un système elliptique. La première valeur propre et la première fonction propre de l'opérateur **Laplace** joue un rôle très important dans l'existence d'une solution positive sous les conditions $\lambda_1\alpha_0$, $\lambda_2\beta_0$ sont larges.

Ce mémoire il se présente sous forme de trois chapitres.

Le premier chapitre un rappel qui comporte des définitions, des théorèmes, des propositions et des lemmes sur les espaces de **Sobolev** indispensables pour le reste de la mémoire.

Le deuxième chapitre contient des résultats de la validité du principe de comparaison et de la méthode de sous et sur solutions pour les équations de type **Kirchhoff**.

Le troisième chapitre contient des résultats d'existence de solutions faibles positives de certaines classes de systèmes elliptiques de type **Kirchhoff** avec l'opérateur **Laplace,** dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^N$, avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et en utilisant la méthode de sous et sur solutions.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle, qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces des fonctions continues, les espaces L^p et les espaces de **Sobolev** ainsi que quelques inégalités utiles et quelques concepts de principe de maximum. Enfin on va considérer une partie de définitions sur le problème de valeurs propres. Qu'ils sont nécessaires pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Notations

On notera $X = (x_1, ..., x_N)$ les éléments d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ tel que $N \in \mathbb{N}$. Soit u fonction définie de Ω a valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *Dans un système de coordonnées cartésiennes, le gradient d'une fonction $u(x_1, ..., x_n)$ est le vecteur de composante $\frac{\partial u}{\partial x_i}(i = 1, 2, ..., N)$, c'est à dire les dérivées partielles de u par rapport aux coordonnées.*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \operatorname{grad}(u),$$

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2.$$

Définition 1.2 *Le laplacien est l'opérateur différentiel définie par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence.*

$$\Delta u = \nabla^2 u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

1.2 Les espaces des fonctions continues

On note $C(X, K)$ l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans K.

$C\left(\overline{\Omega}\right)$ c'est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω (avec $k \in \mathbb{N}^*$).

$C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$C_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^1à support compact dans Ω.

L'espace C_0^∞est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à support compact et nulles sur $\partial\Omega$, qu'on appelle espace des fonctions tests est noté $D(\Omega)$.

L'espace des distributions dans Ω est le dual topologique de $D(\Omega)$, on le note $D'(\Omega)$.

Espace hölderienne

Soit f une fonction définie sur un intervalle Ω de $\mathbb{R}$. On dit que f est $\alpha-$hölderienne avec α dans $]0.1]$ s'il existe une constante C_α telle que :

$$\forall x, y \in \Omega, \ \ |f(x) - f(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha .$$

La continuité höldérienne d'une fonction dépend donc d'un $\alpha \in]0.1]$:

$1-$Les applications 1-höldérienne sont les applications lipschitziennes.

$2-$Pour $\alpha \in]0.1]$ fixé, l'ensemble des fonctions réelles $\alpha-$hölderienne bornées sur X est un espace vectoriel, couramment noté $C^{0,\alpha}(\Omega)$, particulièrement important en analyse fonctionnelle.

Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$

Définition 1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\alpha \in]0,1]$. $C^{0,\alpha}$ est l'espace vectoriel des fonctions f : $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

$$f \in L^\infty(\Omega) \text{ i.e } f \text{ est mesurable bornée sur } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\exists C > 0 \ : \forall x, y \in \Omega \ , \ |f(x) - f(y)| \leq C\, |x-y|^\alpha . \tag{1.2}$$

Sur cet espace on met la norme :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 *Tout élément f de $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est borné et vérifié (1.2) pour x, y dans $\overline{\Omega}$. En particulier $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ muni de la norme (1.3), $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est un espace de **Banach** .*

i) Si $\alpha \geq \alpha'$ on a $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

ii) Si Ω est un ouvert borné et $\alpha > \alpha'$, l'inclusion $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte.

Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition et propriétés Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$. On peut définir les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ par récurrence sur k, en posant pour $k \geq 1$

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \ \Leftrightarrow \ f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega) \ , i = 1..n.$$

Il est équivalent de dire

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \ \Leftrightarrow \ f \in C_b^k(\Omega) \text{ et } \partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \forall\, |\beta| \leq k,$$

on a noté ici

$$\partial^\beta = (\frac{\partial}{\partial x})^\beta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^\beta ... (\frac{\partial}{\partial x_n})^\beta, \ |\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n.$$

On muni $C^{k,\alpha}(\Omega)$ de la norme

$$\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^{\beta} f\right\|_{\alpha},$$

où $\|.\|_{\alpha}$ est la norme $C^{0,\alpha}$ définie en (1.3), cette norme est équivalente à la norme

$$\|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^{\beta} f\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left|\partial^{\beta} f(x) - \partial^{\beta} f(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

On résume les principales propriétés des espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ comme suite :

$a-$ Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, les dérivées d'ordre au plus k se prolongent en des fonctions continues bornées sur $\overline{\Omega}$ qui vérifient des conditions de **Hölder** d'exposant α sur $\overline{\Omega}$.

$b-$ $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de **Banach**.

$c-$ Si $k+\alpha \geq k'+\alpha'$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est contenu dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

$d-$ Si Ω est un ouvert borné et si $k+\alpha > k'+\alpha'$ l'injection de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.

$e-$ Si Ω est un ouvert borné et si $k+\alpha > k'+\alpha'$, $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C(\varepsilon) \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega).$$

$f-$ $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algébre multiplicative .Si $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ alors $uv \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et

$\|uv\|_{k,\alpha} \leq C \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$.

Les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)|\, dx.$$

Définition 1.4 *Soit $p \in [1, \infty[$. On définit :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \textit{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty \},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.5 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est essentiellement bornée s'il existe un réel $C \geq 0$ tel que $|u(x)| \leq C$ p.p sur Ω. On note*

$$\sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = \inf(\{C \geq 0; |u(x)| \leq C \textit{ p.p sur } \Omega\}).$$

Définition 1.6 *On appelle espace $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω, on note*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \textit{ mesurable et } \exists C \ \geq 0, \ \ |u(x)| \leq C \textit{ p.p sur } \Omega\}$$

pour $u \in L^\infty(\Omega)$, on note

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| \, .$$

1.3 Espaces de Sobolev

Soit u une fonction dans l'espace de **Lebesgue** $L^1(\Omega)$.

Définition 1.7 *On dit que $v \in L^1(\Omega)$ est une dérivée faible de u si*

$$\int\limits_{\Omega} u(t) \, \varphi'(t) \, dt = -\int\limits_{\Omega} v(t) \, \varphi(t) \, dt, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \, .$$

1.3.1 Espace de Sobolev en dimension un

Définition 1.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1.p}(\Omega)$ par :*

$$W^{1.p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \backslash \exists\ v \in L^p(\Omega) \ \text{ tel que :} \int_\Omega u(t)\, \varphi'(t)\, dt = -\int_\Omega v(t)\, \varphi(t)\, dt, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Si $p = 2$:

$$W^{1.2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Sur cet espace on met la norme

$$\|u\|_{W^{1.p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u'\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.9 *Étant donnée $1 \leq p < \infty$ on désigne par $W_0^{1.p}(\Omega)$, la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1.p}(\Omega)$ et on écrit :*

$$W_0^{1.p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)} \text{ dans } W^{1.p}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1.p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1.p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W_0^{1.p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u'\|_{L^p(\Omega)}.$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1.2}(\Omega).$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induite par $H^1(\Omega)$.

Rappelons que :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u',v')_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (uv + u'v')\,dt.$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

$H^1(\Omega)$ *est un espace de* ***Hilbert.***

1.3.2 Espace de Sobolev en dimension N

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \le p < \infty$.

Définition 1.10 *L'espace de* ***Sobolev*** $W^{1.p}(\Omega)$ *est définie par :*

$$W^{1.p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) \setminus \exists\ v_1, v_2, ..., v_n \in L^p(\Omega)\,,\ \text{tel que} \int_\Omega u(t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dt = -\int_\Omega v(t)\,\varphi(t)\,dt, \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,, \forall i = 1..N. \end{array} \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1.2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1.p}(\Omega)$*, on note* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$*, et nous écrivons :*

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

L'espace $W^{1.p}(\Omega)$ *est muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{1.p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.11 *Soient* $m \ge 2$ *un entier et soit* p *un réel avec :*$1 \le p < \infty$*. L'espace de*

Sobolev *:*

$$W^{m.p}(\Omega)=\left\{\begin{array}{c} u\in L^{p}(\Omega),\forall\alpha \text{ avec } 1<|\alpha|\leq m,\exists v\in L^{p}(\Omega),\ \text{tel que} \\ \int\limits_{\Omega}u(t)\,D^{\alpha}\varphi dt=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega}v(t)\,\varphi(t)\,dt,\forall\varphi\in C_{c}^{\infty}(\Omega) \end{array}\right\}.$$

On pose : $D^{\alpha}u=v_{\alpha}$*. L'espace* $W^{m.p}(\Omega)$ *muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{m.p}(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^{P}(\Omega)},$$

est un espace de ***Banach*** *,on pose*

$$H^{m}(\Omega)=W^{m.2}(\Omega).$$

$H^{m}(\Omega)$ *muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^{m}(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(D^{\alpha}u,D^{\alpha}v)_{L^{2}(\Omega)},$$

est un espace de ***Hilbert****.*

1.3.3 Quelques inégalités utiles

Lemme 1.1 *(Exposant critique de* ***Sobolev****).Soient* $N\in\mathbb{N},1<p<\infty$ *tels que :*

$$\frac{1}{p^{*}}=\frac{1}{p}-\frac{1}{N}=\frac{N-p}{Np}$$

Proposition 1.2 *(Inégalité de* ***Young****) Soient* $1<p,q<\infty$ *tels que :*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (\forall a, b > 0).$$

Proposition 1.3 *(Inégalité de **Hölder**) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, supposons que $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $f.g \in L^1$ et

$$\|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lemme 1.2 *(Formule de **Green**) Pour tous $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$on a*

$$\int_{\Omega} \triangle u v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u en un point de $\partial\Omega$.

Proposition 1.4 *(Inégalité de **Poincarée**) On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :*

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^P(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad 1 \leq p < \infty,$$

en particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^P}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Corollaire 1.1 *(Injection de **Sobolev**) Il existe une constante C dépandant de $|\Omega| < \infty$ tel que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \forall \;\; 1 \leq p \leq \infty.$$

Théorème 1.1 *(Théorème de l'injection de **Sobolev**) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.*

$$(i) \text{ Si } p < N, \text{ alors } \begin{cases} \text{pour tout } q \in [1, p^*), \text{ l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^q(\Omega) \\ \text{l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^{p^*}(\Omega) \text{ est continue où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \end{cases}$$

(ii) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

(iii) Si $p > N$, et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ est compacte.

1.4 Principe du maximum

Théorème 1.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de classe C^1 et $u \in H^1(\Omega)$ telle que :*

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 \ \textit{dans } \Omega, \\ u \geq 0 \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, $u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > 0$ alors $u > 0$ dans Ω.

Théorème 1.3 *(**Schauder**) Soit $f \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ et k un constant réel non négatif. Alors le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u + ku = f \ \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Théorème 1.4 *(Estimation de **Schauder**) Soit $f \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ et $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ la solution du problème précèdent. Alors il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq C \|f\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

1.4.1 Principe de maximum de Hoppf

Définition 1.12 *Soit $u = u(x)$,$x = (x_1, ..., x_n)$ une fonction C^2 qui satisfait l'inégalité différentielle suivante :*

$$Lu = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0$$

dans un ouvert Ω,où la matrice symétrique $a_{ij} = a_{ij}(x)$ est localement uniformément définie positive dans Ω et les coefficients $a_{ij}, b_i = b_i(x)$ sont localement bornés.Si u atteint son maximum M dans Ω, alors $u \equiv M$.

1.5 Problème de valeurs propres

1.5.1 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

• Les valeurs propres de $\left(-\Delta, H_0^1(\Omega)\right)$ sont réelles.

• Ces valeurs propres constituent une suite croissante,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,$$

et

$$\lambda_k \to \infty, \ \ k \to +\infty.$$

• Il existe une base orthonormée $\{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à λ_k i.e

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k \text{ dans } \Omega.$$

Chapitre 2

Validité du principe de comparaison et méthode de sous et sur solutions dans les équations de type Kirchhoff

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la validité du principe de comparaison et de la méthode de sous et sur solutions pour les équations de type **Kirchhoff**. Nous montrons que ces principes ne pas valide lorsque le terme de **Kirchhoff** est une fonction croissante, nous donnons une méthode alternative des sous et sur solutions et l'appliquons à certains modèles. De nombreux auteurs évoquent les équations de type **Kirchhoff** elliptiques non linéaires, voir par exemple $[10], [11], [16]$. On considère l'équation de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f\left(x,u\right) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ étant un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ régulière,

$$\|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

et M une fonction continue vérifie

$$\begin{gathered} M : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}, \\ \text{et } \exists m_0 > 0 \text{ tel que : } M(t) \geq m_0 > 0, \forall t \in [0, +\infty). \end{gathered} \tag{M_0}$$

Et $f \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$. Le problème (2.1) modélise de petites vibrations verticales d'une corde élastique à extrémités fixes lorsque la densité du matériau est homogène et qu'il existe une force externe, (voir [15] pour une explication du modèle). Pour étudier ce problème on utilise, principalement des méthodes variationnelles ou la méthode de sous et sur solutions.

2.2 Définitions et notations

Commençons par introduire la définition d'une sous et sur solution faible du problème (2.1).

Définition 2.1 *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, u est dite une solution faible de* (2.1) *si elle satisfait*

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f(x,u)\, \phi dx, \quad \text{dans } \Omega \tag{2.2}$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Définition 2.2 *Une paire de fonctions non négatives $(\underline{u}, \overline{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$ sont appelées sous solution faible et sur solution faible de* (2.1) *si elles satisfont $\underline{u} = \overline{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ et*

$$\begin{aligned} M\left(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx &\leq \int_\Omega f(x,\underline{u})\, \phi dx, \quad \text{dans } \Omega, \\ M\left(\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 \, dx\right) \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \phi dx &\geq \int_\Omega f(x,\overline{u})\, \phi dx, \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Lemme 2.1 *Si H est monotone avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème $M-$non-linéaire*

$$-M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f(x) \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Preuve Considérons $B = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...\}$ la base orthonormée de $H_0^1(\Omega)$ comprenant les fonctions propres ϕ_j associées à les valeurs propres λ_j du problème de Dirichlet linéaire

$$\begin{cases} -\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j \text{ dans } \Omega, \\ \phi_j = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec :

$$\left\|\phi_j\right\| = 1 \text{ et } \left|\phi_j\right|_2^2 = \frac{1}{\lambda_j},$$

où nous désignons par $\|u\|$ et $|u|_p$ avec $p > 1$, la norme euclidienne de fonction u dans $H_0^1(\Omega)$ et L^p respectivement.

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\phi_j \text{ et } \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty, \tag{2.4}$$

il existe aussi $\{f_j\} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\phi_j \text{ et } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j^2}{\lambda_j^2} < \infty, \tag{2.5}$$

dans ce qui suit nous chercherons a_j de telle manière que u donné en (2.4) serait la solution que nous recherchons. Pour cela supposons que (2.3) possède une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ comme dans (2.4) .Donc de (2.2),(2.4) et (2.5) on a

$$M\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\right) a_j = \frac{f_j}{\lambda_j}. \tag{2.6}$$

En vue de l'hypothèse (M_0) nous avons $f_j = 0$ si et seulement si $a_j = 0$. Soit j_0 est le premier indice pour lequel $f_j \neq 0$ (ou, équivalent $a_j \neq 0$). Ici, nous devons souligner que $u = 0$ si et seulement si $f = 0$. Nous recherchons donc des solutions non triviales. Notez que pour tous les indices k avec $a_k \neq 0$ nous avons l'identité suivante

$$a_k = \frac{a_{j_0} \lambda_{j_0} f_k}{\lambda_k f_{j_0}}. \tag{2.7}$$

De (2.6) et (2.7) nous obtenons

$$M\left(a_{j_0}^2 \left[1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2} \sum_{k=j_0+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2}\right]\right) a_{j_0} = \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}. \tag{2.8}$$

Soit

$$0 < \lambda = 1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2} \sum_{k=j_0+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2}.$$

alors, nous pouvons écrire (2.8) sous la forme :

$$M\left(\left(\sqrt{\lambda} a_{j_0}\right)^2\right) \sqrt{\lambda} a_{j_0} = \sqrt{\lambda} \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}} \tag{2.9}$$

Par conséquent, $t = \sqrt{\lambda} a_{j_0}$ est la solution unique de l'équation

$$M\left(t^2\right) t = \sqrt{\lambda} \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}.$$

Nous noterons par $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue et croissante $H(t) = M\left(t^2\right) t$. A cause des hypothèses sur la fonction H. Une fois que nous avons trouvé a_{j_0},nous pouvons utiliser (2.7) pour déterminer a_k pout tout $k \geq j_0$. Par conséquent, on peut conclure que u donnée par (2.4) et avec $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ vérifient (2.7) et (2.9) est la solution unique de (2.3). ■

En général. Il y a essentiellement trois résultats concernant les résultats de comparaison et de la méthode de sous et sur solutions liés à (2.1). Voir [9] (Théorèmes 2.1 et 2.2), le résultat suivant :

Théorème 2.1 [9] *Supposons que :*

(M_1) M *est non-croissante dans* $[0, +\infty)$.

On définit la fonction :

$$H(t) := M\left(t^2\right) t, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{H}$$

alors la fonction H *est croissante tel que* $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *Alors :*

a) S'il existe deux fonctions non négatives $\underline{u}, \overline{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *tel que* $\underline{u} = \overline{u} = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et*

$$-M\left(\|\underline{u}\|^2\right) \Delta \underline{u} \leq -M\left(\|\overline{u}\|^2\right) \Delta \overline{u} \text{ dans } \Omega. \tag{2.10}$$

alors (principe de comparaison)

$$\underline{u} \leq \overline{u} \text{ sur } \overline{\Omega}.$$

b) Si

(f_1) f *est croissante pour la variable* u *pour tout* $x \in \Omega$ *fixé.*

Et il existe deux fonctions régulières $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* Ω. $\underline{u} = \overline{u} = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *satisfont*

$$-M\left(\|\overline{u}\|^2\right) \Delta \overline{u} \ \geq f(x, \overline{u}), \quad -M\left(\|\underline{u}\|^2\right) \Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u}), \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.11}$$

Alors d'après la méthode de sous et sur solutions il existe une solution u *de* (2.1) *tel que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* Ω .

Preuve *a)* On reprend l'idée dans [2] . Multiplions les deux membres de (2.10) par $\overline{u}$ et $\underline{u}$ et intégrons, on obtient :

$$M(\|\underline{u}\|^2) \langle \overline{u}, \underline{u} \rangle \leq M\left(\|\overline{u}\|^2\right) \|\overline{u}\|^2 ,$$

et

$$M(\|\underline{u}\|^2) \|\underline{u}\|^2 \leq M\left(\|\overline{u}\|^2\right) \langle \overline{u}, \underline{u} \rangle .$$

D'après ces inégalités on obtient

$$\frac{M(\|\underline{u}\|^2) \|\underline{u}\|^2}{M\left(\|\overline{u}\|^2\right)} \leq \langle \overline{u}, \underline{u} \rangle \leq \frac{M(\|\overline{u}\|^2) \|\overline{u}\|^2}{M\left(\|\underline{u}\|^2\right)}, \tag{2.12}$$

ce qui implique

$$M(\|\underline{u}\|^2)\,\|\underline{u}\| \leq M(\|\overline{u}\|^2)\,\|\overline{u}\|\,.$$

Puisque la fonction H est croissante

$$H(\|\underline{u}\|) \leq H(\|\overline{u}\|),$$

on obtient

$$\|\underline{u}\| \leq \|\overline{u}\|$$

et donc de (M_1)

$$M(\|\underline{u}\|^2) \geq M(\|\overline{u}\|^2), \tag{2.13}$$

car la fonction M est non-croissante.

D'autre part, par application du principe de maximum au problème (2.2) nous obtenons

$$M(\|\underline{u}\|^2)\underline{u} \leq M(\|\overline{u}\|^2)\overline{u},$$

alors cette dernière inégalité et (2.13) nous pouvons conclure que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans Ω.

b) La preuve de cette partie utilise des arguments similaires à ceux du cas $M \equiv 1$ (voir par exemple [14]), car ici nous avons aussi à notre disposition un principe de comparaison. Puisque la sous solution $\underline{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ on a $f\left(x,u\right) \in L^2\left(\Omega\right).$

Considérons le probléme $M-$linéaire suivant :

$$-M\left(\|v\|^2\right)\Delta v = f\left(x,\underline{u}\right)\ \text{dans } \Omega,\ \text{ et } v=0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.14}$$

Il suit de Lemme (2.1) qu'il existe une unique solution $u_1 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ de (2.14). En plus

$$-M\left(\|u_1\|^2\right)\Delta u_1 \geq -M\left(\|\underline{u}\|^2\right)\Delta \underline{u} \text{ dans } \overline{\Omega},$$

qui donne par principe de comparaison $u_1 \geq \underline{u} \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

On a aussi

$$-M\left(\|u_1\|^2\right)\Delta u_1 \leq -M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta \overline{u} \text{ dans } \overline{\Omega},$$

et en utilisant à nouveau le principe de comparaison, on obtient $u_1 \leq \overline{u}$ dans $\overline{\Omega}$ donc

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{\Omega},$$

de même on obtient $v_1 \in H_0^1$ tel que :

$$-M\left(\|v_1\|^2\right)\Delta v_1 = f\left(x, \overline{u}\right) \text{ dans } \Omega,\ v_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.15}$$

et qui satisfait :

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq v_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Répète cet argument, on trouve deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ satisfont

$$0 \leq \underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq \overline{u} = v_0 \text{ dans } \Omega, \tag{2.16}$$

$$-M\left(\|u_n\|^2\right)\Delta u_n = f\left(x, u_{n-1}\right) \text{ dans } \Omega,\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{2.17}$$

et

$$-M\left(\|v_n\|^2\right)\Delta v_n = f\left(x, v_{n-1}\right) \text{ dans } \Omega,\ v_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.18}$$

Maintenant, nous allons montrer que la suite $\{u_n\}$ converge vers une solution u de (2.1).

En multipliant les deux côtés de (2.17) par u_n et intégrant sur Ω, on obtient :

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 = \int_\Omega f\left(x, u_{n-1}\right) u_n dx,$$

ce qui implique

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\| \leq c. \tag{2.19}$$

Puisque H est croissante avec $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, nous avons conclu de cette dernière inégalité que $\{u_n\}$ est borné.

Si u est la limite faible de $\{u_n\}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a par le théorème d'injection de **Sobolev** $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, 2^*)$. Si $N \geq 3$ ou $p \in [1, \infty)$ si $N = 1, 2$.Avec $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev.

Remarquons qu'il existe $k_1 > 0$ tel que $|u_n|_\infty \leq k_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in W^{1.p}(\Omega)$ avec $p > N$ et par conséquent $\{u_n\} \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec :

$$\|u_n\|_{1,\alpha} \leq k_2 \quad \text{pour certains } k_2 > 0.$$

Par conséquent, en utilisant l'estimation de **Schauder**, nous obtenons donc

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2,$$

et par la continuité de la fonction M

$$M\left(\|u_n\|^2\right) \to M\left(\|u\|^2\right). \tag{2.20}$$

De plus, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle \tag{2.21}$$

et

$$\int_\Omega f(x, u_n)\, v dx \to \int_\Omega f(x, u)\, v dx. \tag{2.22}$$

De (2.20) à (2.22)

$$-M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x, u)\, v dx \ , \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

c'est

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx\right)\Delta u=f\left(x,u\right)\ \text{dans }\Omega,\ u=0\text{ sur }\partial\Omega,$$

$$-M\left(\|u\|^{2}\right)\Delta u=f\left(x,u\right)\ \text{dans }\Omega,\ u=0\text{ sur }\partial\Omega,$$

avec

$$0\leq\underline{u}\leq u\leq\overline{u}\text{ dans }\overline{\Omega},$$

De la même manière, on trouve v comme limite de la suite $\{v_n\}$ donc

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{2}\,dx\right)\Delta v=f\left(x,v\right)\ ,\ \text{dans }\Omega,\ v=0\text{ sur }\partial\Omega$$

avec

$$0\leq\underline{u}\leq u\leq v\leq\overline{u}\text{ dans }\overline{\Omega},$$

et la preuve est terminée. ■

Théorème 2.2 [9] *Supposons que, (M_2) M est croissante.*
Alors le principe de comparaison est valable. De plus, si f satisfait (f_1), la méthode de sous et sur solutions valable aussi.

Lemme 2.2 [9] *Supposons que M satisfait (H) et soit $u_i\in H_0^1(\Omega)$, $i=1,2$, sont des fonctions telles que :*

$$-M\left(\|u_i\|^{2}\right)\Delta u_i=f_i\in\mathbb{R}_{+},$$

et $f_1\leq f_2$.Alors $u_1\leq u_2$ dans Ω.

Preuve *Définir e comme la solution positive unique de l'équation :*

$$\begin{cases}-\Delta e=1\ \textit{dans }\Omega,\\ e=0\ \ \textit{sur }\partial\Omega.\end{cases}\tag{2.23}$$

Observons que

$$M\left(\|u_i\|^{2}\right)u_i=f_ie,\tag{2.24}$$

alors $u_1 \leq u_2$ *si et seulement si*

$$\frac{f_1}{M\left(\|u_1\|^2\right)} \leq \frac{f_2}{M\left(\|u_2\|^2\right)} \tag{2.25}$$

observez que, d'après (2.24)

$$f_i = \frac{M\left(\|u_i\|^2\right)\|u_i\|}{\|e\|}$$

et alors (2.25) *est équivalente à*

$$\|u_1\| \leq \|u_2\|. \tag{2.26}$$

Puisque

$$M\left(\|u_i\|^2\right)\|u_i\| = f_i\,\|e\|,$$

et en raison de (H)*, alors* (2.26) *est vrai.* ■

2.3 Résultats principales

Théorème 2.3 [9] *Supposons* (M_0) *et* (M_3) : $G(t) := M(t)t$ *est inversible et noté par* $R(t) := G^{-1}(t)$.

On définit maintenant l'opérateur non-local

$$\mathcal{L}(w) := R\left(\int_\Omega f(x,w)w\ dx\right).$$

S'il existe $\underline{u}, \overline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tel que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* Ω*,* $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ *sur* $\partial\Omega$ *satisfont*

$$-M\left(\mathcal{L}(w)\right)\Delta\overline{u} \geq f(x,\overline{u}), \quad -M\left(\mathcal{L}(w)\right)\Delta\underline{u} \leq f(x,\underline{u}), \quad \forall w \in \left[\underline{u},\overline{u}\right], \tag{2.27}$$

alors il existe une solution u *de* $(2,1)$ *tel que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* Ω.

Preuve Observons que si M est non-croissante et H est croissante alors G est croissante. En effet, utilisant que $M' \leq 0$ nous obtenons

$$G'(t) = M'(t)t + M(t) \geq 2tM'(t) + M(t) = H'(t^{1/2}) > 0, \quad t > 0,$$

et ensuite, $w \to \mathcal{L}(w)$ est croissante car f est aussi croissante.
Considérons maintenant que $\underline{u}$ est une sous solution et $\overline{u}$ est une sur solution au sens du théorème (2.1). Nous allons montrer qu'il est aussi une sous et sur solution au sens du théorème (2.3). Nous montrons ce fait pour $\underline{u}$; pour $\overline{u}$ nous pouvons appliquer un raisonnement analogue. Puisque f est croissante et $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$. D'abord, nous allons transformer l'équation (2.1) en une autre équation elliptique non-locale. En effet, multipliant l'équation par u et intégrant, on a

$$\begin{aligned} -M\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega \Delta u \; udx \; = \int_\Omega f(x,u)udx \quad &\Longleftrightarrow \quad M\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \; = \int_\Omega f(x,u)u \; dx \\ &\Longleftrightarrow \quad M\left(\|u\|^2\right) \|u\|^2 = \int_\Omega f(x,u)u \; dx. \end{aligned}$$

Par (M_3), G est inversible, et donc

$$\|u\|^2 = R\left(\int_\Omega f(x,u)udx\right) = \mathcal{L}(u),$$

alors l'équation est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{f(x,u)}{M(\mathcal{L}(u))} \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Maintenant, on va voir la sous solution.
Multiplions la 1ère partie de l'équation (2.11) par la fonction $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω on obtient :

$$M\left(\|\underline{u}\|^2\right) \|\underline{u}\|^2 \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}dx \leq \int_\Omega f(x,w)wdx \quad , \forall w \in [\underline{u}, \overline{u}],$$

et on a

$$\|\underline{u}\|^2 \leq \mathcal{L}(w) \Longrightarrow M(\|\underline{u}\|^2) \geq M(\mathcal{L}(w)), \forall w \in [\underline{u}, \overline{u}]\,,$$

car M est non-croissante, alors

$$\frac{f(x,\underline{u})}{M(\|\underline{u}\|^2)} \leq \frac{f(x,\underline{u})}{M(\mathcal{L}(w))},\ \forall w \in [\underline{u}, \overline{u}]\,, \tag{2.28}$$

et on a

$$-M(\|\underline{u}\|^2)\Delta\underline{u} \leq f(x,\underline{u}) \Longleftrightarrow$$

$$-\Delta\underline{u} \leq \frac{f(x,\underline{u})}{M(\|\underline{u}\|^2)}. \tag{2.29}$$

D'aprés (2.28) et (2.29)

$$-\Delta\underline{u} \leq \frac{f(x,\underline{u})}{M(\|\underline{u}\|^2)} \leq \frac{f(x,\underline{u})}{M(\mathcal{L}(w))} \Longleftrightarrow$$

$$-\Delta\underline{u} \leq \tfrac{f(x,\underline{u})}{M(\mathcal{L}(w))},$$

$$-M(\mathcal{L}(w))\Delta\underline{u} \leq f(x,\underline{u}),\ \forall w \in [\underline{u}, \overline{u}]\,.$$

Maintenant, on va voir la sur solution.

$$-M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta\overline{u} \geq f(x,\overline{u}).$$

Multiplions la 2éme partie de l'équation (2.11) par la fonction $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant on obtient

$$M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\|\overline{u}\|^2 \geq \int_\Omega f(x,\overline{u})\overline{u}\ dx \geq \int_\Omega f(x,w)w\ dx,$$

et on a

$$\begin{aligned}\overline{u} \geq w,\ \forall w \in [\underline{u}, \overline{u}] \ &\Longrightarrow \|\overline{u}\|^2 \geq \mathcal{L}(w)\\ &\Longrightarrow M(\|\overline{u}\|^2) \leq M(\mathcal{L}(w)),\end{aligned}$$

car M est non-croissante

$$\frac{f(x,\overline{u})}{M(\|\overline{u}\|^2)} \geq \frac{f(x,\overline{u})}{M(\mathcal{L}(w))}, \tag{2.30}$$

et on a

$$-M(\|\overline{u}\|^2)\Delta\overline{u} \geq f(x,\overline{u}),$$

$$-\Delta\overline{u} \geq \frac{f(x,\overline{u})}{M(\|\overline{u}\|^2)}, \tag{2.31}$$

d'après (2.30) et (2.31)

$$-\Delta\overline{u} \geq \frac{f(x,\overline{u})}{M(\|\overline{u}\|^2)} \geq \frac{f(x,\overline{u})}{M(\mathcal{L}(w))} \Longleftrightarrow$$

$$-\Delta\overline{u} \geq \tfrac{f(x,\overline{u})}{M(\mathcal{L}(w))},$$

$$-M(\mathcal{L}(w))\Delta\overline{u} \geq f(x,\overline{u}),\ \forall w \in [\underline{u},\overline{u}].$$

Alors, $(\underline{u},\overline{u})$ satisfait les hypothèses du théorème (2.3) et nous pouvons conclure l'existence d'une solution u de (2.1) et $u \in [\underline{u},\overline{u}]$. ■

2.4 Applications

Dans cette section nous appliquons nos résultas sur certains modéles. Nous supposons que M satisfait seulement (M_3). Noté par $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre du Laplacien et $\varphi_1 > 0$ la fonction propre qui lui est associée avec $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.

Exemple 2.1 *On considère l'équation*

$$\begin{cases} -M\left(\|u^2\|\right)\Delta u = \lambda u^q \ \textit{dans}\ \Omega, \\ u = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.32}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 < q < 1$. Nous allons montrer que (2.32) possède une solution positive si selement si $\lambda > 0$. D'après le principe de maximum, si $\lambda \leq 0$ le problème (2.32) n'a pas de solution positive. Supposons $\lambda > 0$ et prenez comme sous et sur solutions $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ et $\overline{u} = Ke$ comme sur solution avec $\varepsilon, K > 0$ être choisi. Alors $\overline{u}$ est sur solution si

$$K^{1-q} \geq \frac{1}{m_0}\lambda\|e\|_{L^\infty}^q,$$

où K est fixé. $\underline{u}$ *est sous solution si*

$$M\left(\mathcal{L}\left(w\right)\right)\varepsilon^{1-q}\leq\frac{\lambda}{\lambda_1},\quad \forall w\in\left[\underline{u},\overline{u}\right].$$

En effet, on a le principe de maximum

$$\inf\left\{f\right\}\leq u\leq\sup\left\{f\right\},$$

donc

$$\inf\left\{\lambda u^q\right\}\leq u\leq\sup\left\{\lambda u^q\right\}.$$

Supposons que u est positive

· *Si* $\lambda\leq 0$:

le problème (2.32) *n'admet pas aucune solution positive. Donc contraduction.*

· *Si* $\lambda > 0$:

Cas 1 : *on prend la sur solution* $\overline{u}=Ke$ *avec* $K>0$, *alors on a d'aprés* (H)

$$-M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta\overline{u}\geq f(x,\overline{u}),\quad \textit{dans }\Omega,$$

et d'après (M_0)

$$\exists m_0>0 \textit{ tel que } M\left(t\right)\geq m_0,\ \forall t\in\left[0,+\infty\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}-M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta\overline{u}\geq\lambda\overline{u}^q &\implies -m_0\Delta Ke\geq -M\left(\|Ke\|^2\right)\Delta Ke\geq\lambda(Ke)^q\\ &\implies -m_0\Delta Ke\geq\lambda K^q e^q\\ &\implies -m_0K\Delta e\geq\lambda K^q e^q\\ &\implies -m_0K^{1-q}\Delta e\geq\lambda e^q\end{aligned}$$

$$\implies -K^{1-q}\Delta e\geq\frac{1}{m_0}\lambda e^q. \tag{2.33}$$

Définir e comme la solution positive unique de l'équation (2.23) .

Alors (2.33) *devient*

$$K^{1-q} \geq \frac{1}{m_0}\lambda e^q,$$

et comme

$$\|e\|_{L^\infty}^q \geq e^q \Longrightarrow K^{1-q} \geq \frac{1}{m_0}\lambda \|e\|^q \geq \frac{1}{m_0}\lambda e^q.$$

Alors $\overline{u}$ *est sur solution du problème* (2.32) .

Cas 2 : *on prend maintenant la sous solution* $\underline{u} = \varepsilon\varphi$, *comme* M *satisfait* (M_3) , *alors*

$$\begin{aligned}
&-M(\mathcal{L}(w))\Delta\underline{u} \leq f(x,\underline{u}), \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}]\\
&\Longrightarrow -M(\mathcal{L}(w))\Delta\varepsilon\varphi_1 \leq \lambda\varepsilon^q\varphi_1^q, \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}]\\
&\Longrightarrow M(\mathcal{L}(w))\varepsilon\lambda_1\varphi_1 \leq \lambda\varepsilon^q\varphi_1^q, \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}]\\
&\Longrightarrow M(\mathcal{L}(w))\varepsilon\varphi_1 \leq \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\varepsilon^q\varphi_1^q, \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow M(\mathcal{L}(w))\varepsilon^{1-q} \leq \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1^{q-1}, \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}], \tag{2.34}$$

on a

$$\varphi_1 \leq \|\varphi_1\|_{L^\infty} = 1 \Longrightarrow \|\varphi_1\|_{L^\infty}^{q-1} \leq \varphi_1^{q-1} = 1.$$

Alors (2.34) *devient*

$$M(\mathcal{L}(w))\varepsilon^{1-q} \leq \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \forall w \in [\underline{u},\overline{u}].$$

Donc d'après le théorème (2.3) *il existe une solution* u *de* (2.32) *telle que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* Ω.

Exemple 2.2 *Considérons l'équation classique concave-convexe*

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = \lambda u^q + u^p \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.35}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $0 < q < 1 < p$, *nous supposons que* M *satisfait seulement* (M_3). *Nous montrons qu'il existe au moins une solution positive pour* λ *petit et positif. Nous pouvons montrer que* $\overline{u} = Ke$

est sur solution de (2.35) *si*

$$m_0 K^{1-q} \geq \lambda \|e\|_\infty^q + K^{p-q} \|e\|_\infty^p ,$$

et il existe $\lambda_0 > 0$ *tel que, pour* $\lambda \in (0, \lambda_0)$, *il existe* K_0 *tel que* $\overline{u} = K_0 e$ *est sur solution.*

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow -M\left(\|\overline{u}\|^2\right) \Delta \overline{u} \geq \lambda \overline{u}^q + \overline{u}^p \\
&\Longleftrightarrow -M\left(\|Ke\|^2\right) \Delta Ke \geq \lambda (Ke)^q + (Ke)^p \\
&\Longleftrightarrow -M\left(K^2 \|e\|^2\right) K \Delta e \geq \lambda K^q e^q + K^p e^p \\
&\Longleftrightarrow M\left(K^2 \|e\|^2\right) K \geq \lambda K^q e^q + K^p e^p \\
&\Longleftrightarrow M\left(K^2 \|e\|^2\right) K^{1-q} \geq \lambda e^q + K^{p-q} e^p .
\end{aligned}$$

Nous avons

$$M\left(K^2 \|e\|^2\right) \geq m_0 \quad et \quad \|e\|_{L^\infty} \geq e, \tag{2.36}$$

et si

$$m_0 K^{1-q} \geq \lambda \|e\|_{L^\infty}^q + K^{p-q} \|e\|_{L^\infty}^p$$

$$\Longrightarrow M\left(K^2 \|e\|^2\right) K^{1-q} \geq m_0 K^{1-q} \geq \lambda \|e\|_{L^\infty}^q + K^{p-q} \|e\|_{L^\infty}^p \geq \lambda e^q + K^{p-q} e^p$$

$$\Longrightarrow M\left(K^2 \|e\|^2\right) K^{1-q} \geq \lambda e^q + K^{p-q} e^p ,$$

alors $\overline{u}$ *est sur solution. Nous pouvons montrer que* $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1$ *est une sous solution de* (2.35) *si*

$$M(\mathcal{L}(w)) \varepsilon^{1-q} \lambda_1 \leq \lambda + \varepsilon^{p-q} \varphi_1^{p-q} .$$

En appliquer le théorème (2.3) ,*on a*

$$\begin{aligned}
&-M(\mathcal{L}(w)) \triangle \underline{u} \leq \lambda \underline{u}^q + \underline{u}^p \\
&\Longleftrightarrow -M(\mathcal{L}(w)) \triangle \varepsilon \varphi_1 \leq \lambda (\varepsilon \varphi_1)^q + (\varepsilon \varphi_1)^p \\
&\Longleftrightarrow -M(\mathcal{L}(w)) \varepsilon \triangle \varphi_1 \leq \lambda \varepsilon^q \varphi_1^q + \varepsilon^p \varphi_1^p \\
&\Longleftrightarrow M(\mathcal{L}(w)) \varepsilon \lambda_1 \varphi_1 \leq \lambda \varepsilon^q \varphi_1^q + \varepsilon^p \varphi_1^p .
\end{aligned}$$

Nous avons

$$0 \le \varphi_1 \le 1 \Longrightarrow \varphi_1 \le \varphi_1^q, \qquad car \quad 0 < q < 1,$$

et si

$$M\left(\mathcal{L}\left(w\right)\right)\varepsilon^{1-q}\lambda_1 \le \lambda + \varepsilon^{p-q}\varphi_1^{p-q}. \tag{2.37}$$

Multipliant par $\varepsilon^q\varphi_1^q$ *, donc* (2.36) *devient*

$$M\left(\mathcal{L}\left(w\right)\right)\varepsilon\lambda_1\varphi_1^q \le \lambda\varepsilon^q\varphi_1^q + \varepsilon^p\varphi_1^p$$

$$\Longrightarrow M\left(\mathcal{L}\left(w\right)\right)\varepsilon\lambda_1\varphi_1 \le M\left(\mathcal{L}\left(w\right)\right)\varepsilon\lambda_1\varphi_1^q \le \lambda\varepsilon^q\varphi_1^q + \varepsilon^p\varphi_1^p,$$

$\underline{u}$ *est sous solution de* (2.35). *Alors d'après le théorème* (2.3) *il existe une solution* u *de* (2.35) *telle que* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ *dans* Ω.

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour une classe de systèmes de type Kirchhoff avec le côté droit défini comme une multiplication de deux fonctions distinctes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence de solution faible positive du problème suivant :

$$\begin{cases} -A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u = \lambda_1 \alpha(x) f(v) h(u) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ -B\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\right)\Delta v = \lambda_2 \beta(x) g(u) \tau(v) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0, \ \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N\,(N \geq 3)$ est un domaine borné régulière de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2, A, B :

$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions cotinues, $\alpha, \beta \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, et λ_1, λ_2 sont des paramètres non négatifs.

Dans les dernières années, les problèmes impliquant des opérateurs de type **Kirchhoff** ont été étudiés dans de nombreux articles, on se réfère à ([2], [4], [5], [6], [10], [15]) dans lequel les auteurs ont utilisé différentes méthodes pour obtenir l'existence de solutions pour les équations de type **Kirchhoff**. Notre chapitre est motivé par les résultats récents en ([14]).

La technique employé dans ce chapitre est la méthode de sous et sur solutions.

3.2 Définitions et notations

Commençons par introduire la défnition d'une solution faible du problème (3.1).

Définition 3.1 *Soit* $(u, v) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$, (u, v) *est dite une solution faible de* (3.1) *si elle satisfait*

$$\begin{aligned} A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx &= \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x) f(v) h(u) \phi dx \ \ dans\ \Omega, \\ B\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx &= \lambda_2 \int_\Omega \beta(x) g(u) \tau(v) \psi dx \ \ dans\ \Omega \end{aligned}$$

pour tout $(\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$.

De même on définit la sous solution et la sur solution faible du problème (3.1).

Définition 3.2 *Paires de fonctions non négatives* $(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})$ *dans* $\left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$ *sont appelées sous et sur solutions faibles du problème* (3.1) *si*

$$(\underline{u}, \underline{v}) = (\overline{u}, \overline{v}) = (0, 0) \ \ sur\ \partial\Omega,$$

$$\begin{cases} A\left(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x) f(\underline{v}) h(\underline{u}) \phi dx \quad dans\ \Omega, \\ B\left(\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \underline{v} \nabla \psi dx \leq \lambda_2 \int_\Omega \beta(x) g(\underline{u}) \tau(\underline{v}) \psi dx \quad dans\ \Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A\left(\int\limits_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx\right) \int\limits_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \phi dx \geq \lambda_1 \int\limits_\Omega \alpha(x) f(\overline{v}) h(\overline{u}) \phi dx \ \ dans\ \Omega, \\ \\ B\left(\int\limits_\Omega |\nabla \overline{v}|^2\, dx\right) \int\limits_\Omega \nabla \overline{v} \nabla \psi dx \geq \lambda_2 \int\limits_\Omega \beta(x) g(\overline{u}) \tau(\overline{v}) \psi dx \ \ dans\ \Omega \end{cases}$$

pour tous $(\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right).$

Lemme 3.1 [2] *Supposons que* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue et non croissante satisfait*

$$\lim_{t \to 0^+} M(t) = m_0, \tag{3.2}$$

où m_0 *est une constante positive, et nous noterons par* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction continue donnée par*

$$H(t) = M\left(t^2\right) t, \forall t \in \mathbb{R}$$

alors la fonction H *est croissante sur* $\mathbb{R}$*. Supposons que* $\overline{u}, \underline{u}$ *sont deux fonctions non négatives telles que*

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx\right) \Delta \overline{u} \geq -M\left(\int\limits_\Omega |\nabla \underline{u}|^2\, dx\right) \Delta \underline{u} \ \ dans\ \Omega, \\ \overline{u} = \underline{u} = 0 \ \ sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

alors

$$\overline{u} \geq \underline{u} \ \ p.p\ \ dans\ \Omega.$$

Lemme 3.2 [2] *Soit* ω *la solution de problème* $\Delta \omega = g$ *dans* Ω*. Si* $g \in C(\Omega)$*, alors* $\omega \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *pour toute* $\alpha \in (0, 1)$*. En particulier,* ω *est continue dans* Ω*.*

Supposons les hypothèses suivants :

$(\mathcal{H}1)$ $A, B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfont aux mêmes conditions que M dans le Lemme (3.1), et il existe $a_i, b_i > 0, i = 1, 2$, tel que

$$a_1 \leq A(t) \leq a_2, \quad b_1 \leq B(t) \leq b_2 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

$(\mathcal{H}2)$ $\alpha, \beta \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ et

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \beta(x) \geq \beta_0 > 0$$

pour tout $x \in \Omega$.

$(\mathcal{H}3)$ f, g, h et τ sont des fonctions croissantes et continues sur $(0, \infty)$ tel que :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) \quad = +\infty.$$

$(\mathcal{H}4)$ $\exists\gamma > 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(t) f(k[g(t)^\gamma])}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\tau(kt^\gamma)}{t^{\gamma-1}} = 0 \quad \text{pour tout } k > 0.$$

3.3 Résultat principale

Théorème 3.1 [13] *Supposons que les conditions $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}4)$ sont vérifiées. Alors le système (3.1) admet une solution faible positive pour $\lambda_1\alpha_0$ et $\lambda_2\beta_0$ larges.*

Preuve Soit σ est la première valeur propre de $-\Delta$ avec conditions aux limites **Dirichlet** et ϕ_1 la fonction propre positive correspondante avec $\|\phi_1\| = 1$. Soit $m_0, \delta > 0$ tel que $|\nabla\phi_1|^2 - \sigma\phi_1^2 \geq m_0$ sur $\overline{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$. Pour chaque $\lambda_1\alpha_0$ et $\lambda_2\beta_0$ larges, on définit :

$$\underline{u} = \left(\frac{\lambda_1\alpha_0}{2a_1}\right)\phi_1^2 \text{ et } \underline{v} = \left(\frac{\lambda_2\beta_0}{2b_1}\right)\phi_1^2,$$

où a_1, b_1 donné par la condition $(\mathcal{H}1)$. Nous vérifierons que $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous solution du problème (3.1) pour $\lambda_1\alpha_0$ et $\lambda_2\beta_0$ assez grands. En effet, soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$ dans Ω. Par $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}3)$

un calcul simple montre que

$$
\begin{aligned}
& A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \int_{\overline{\Omega}_\delta} \nabla \underline{u}.\nabla \phi dx \\
= \; & A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \frac{\lambda_1 \alpha_0}{a_1} \int_{\overline{\Omega}_\delta} \phi_1 \nabla \phi_1.\nabla \phi dx \\
= \; & \frac{\lambda_1 \alpha_0}{a_1} A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \left\{ \int_{\overline{\Omega}_\delta} \nabla \phi_1 \nabla \left(\phi_1.\phi\right) dx - \int_{\overline{\Omega}_\delta} |\nabla \phi_1|^2 \phi dx \right\} \\
= \; & \frac{\lambda_1 \alpha_0}{a_1} A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \int_{\overline{\Omega}_\delta} \left(\sigma \phi_1^2 - |\nabla \phi_1|^2\right) \, \phi dx.
\end{aligned}
$$

Sur $\overline{\Omega}_\delta$, nous avons $|\nabla \phi_1|^2 - \sigma \phi_1^2 \geq m_0$. Alors $\sigma \phi_1^2 - |\nabla \phi_1|^2 < 0$. Donc

$$
A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \int_{\overline{\Omega}_\delta} \nabla \underline{u}.\nabla \phi dx < 0.
$$

Daprès $(\mathcal{H}3)$ pour $\lambda_1 \alpha_0$ et $\lambda_2 \beta_0$ assez grands, on obtient $f(\underline{v})\, h(\underline{u}) > 0$. Alors

$$
\begin{aligned}
& A\left(\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \int_{\overline{\Omega}_\delta} \nabla \underline{u}.\nabla \phi dx \\
& \leq \lambda_1 \int_{\overline{\Omega}_\delta} \alpha(x) \; f(\underline{v}) \; h(\underline{u}) \; \phi dx.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Ensuite, sur $\Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta$, nous avons $\phi_1 \geq r$ pour certains $r > 0$, et donc par les conditions $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}3)$ et la définition de $\underline{u}$ et $\underline{v}$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_\delta} \alpha(x)\ f(\underline{v})\ h(\underline{u})\ \phi dx &\geq \frac{\lambda_1\alpha_0 a_2}{a_1}\sigma \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_\delta} \phi dx \\
&\geq \frac{\lambda_1\alpha_0}{a_1} A\left(\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^2\, dx\right) \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_\delta} \sigma\phi dx \\
&\geq \frac{\lambda_1\alpha_0}{a_1} A\left(\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^2\, dx\right) \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_\delta} \left(\sigma\phi_1^2 - |\nabla\phi_1|^2\right)\ \phi dx \\
&= A\left(\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^2\, dx\right) \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_\delta} \nabla\underline{u}.\nabla\phi dx
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

pour $\lambda_1\alpha_0 > 0$ assez grand.

Les relations (3.4) et (3.5) impliquent que :

$$
\begin{aligned}
& A\left(\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla\underline{u}.\nabla\phi dx \\
\leq\ & \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x)\ f(\underline{v})\ h(\underline{u})\ \phi dx \qquad \text{dans } \Omega
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

pour $\lambda_1\alpha_0 > 0$ assez grand et tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$ dans Ω.

De même

$$
B\left(\int_\Omega |\nabla\underline{v}|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla\underline{v}\nabla\psi dx \leq \lambda_2 \int_\Omega \beta(x)\ g(\underline{u})\ \tau(\underline{v})\ \psi dx \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.7}
$$

pour $\lambda_2\beta_0 > 0$ assez grand et tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\psi \geq 0$ dans Ω. De (3.6) et (3.7), $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous solution du problème (3.1). En outre, on a $\underline{u} > 0$ et $\underline{v} > 0$ dans Ω, $\underline{u} \to +\infty$ et $\underline{v} \to +\infty$ comme $\lambda_1\alpha_0 \to +\infty$ et $\lambda_2\beta_0 \to +\infty$.

Ensuite, nous allons construire une sur solution du problème (3.1). Soit e la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 \text{ dans } \Omega, \\ e = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Soit

$$\begin{aligned} \overline{u} &= Ce\ , \\ \overline{v} &= \left(\frac{\lambda_2 \|\beta\|_{L^\infty}}{b_1}\right) [g(C\|e\|_{L^\infty})]^\gamma e. \end{aligned}$$

où γ est donné par $(\mathcal{H}4)$ et $C > 0$ est un grand nombre réel positif à choisir plus tard. Nous vérifierons que $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution du problème (3.1).

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$ en Ω, on obtient alors de (3.8) et la condition $(\mathcal{H}1)$ que

$$\begin{aligned} A\left(\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\phi dx &= A\left(\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2 dx\right) C\int_\Omega \nabla e\nabla\phi dx \\ &= A\left(\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2 dx\right) C\int_\Omega \phi dx \\ &\geq a_1 C\int_\Omega \phi dx. \end{aligned}$$

Par $(\mathcal{H}4)$, on peut choisir C assez grand pour que

$$a_1 C \geq \lambda_1 \|\alpha\|_{L^\infty}\ f\left(\frac{\lambda_2 \|\beta\|_{L^\infty}}{b_1} \|e\|_{L^\infty}\ [g(C\|e\|_{L^\infty}\ )]^\gamma\right) h(C\|e\|_{L^\infty}\ ).$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
& A\left(\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \phi dx \qquad (3.9)\\
\geq\ & \lambda_1 \|\alpha\|_{L^\infty}\ f\left(\frac{\lambda_2 \|\beta\|_\infty}{b_1} \|e\|_{L^\infty}\ \ [g(C\|e\|_{L^\infty}\ )]^\gamma\right) \times h(C\|e\|_{L^\infty}\ ) \int_\Omega \phi dx \\
\geq\ & \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x)\ f(\overline{v})\ h(\overline{u})\ \phi dx.
\end{aligned}
$$

De plus, nous avons

$$B\left(\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla \overline{v} \nabla \psi dx \geq \lambda_2 \|\beta\|_\infty \int_\Omega [g(C\|e\|_\infty)]^\gamma \psi dx. \qquad (3.10)$$

Encore une fois par $(\mathcal{H}4)$ pour C assez grand, nous avons

$$[g(C\|e\|_{L^\infty}\ )]^\gamma \geq g(C\|e\|_{L^\infty}\ )\tau\left(\frac{\lambda_2 \|\beta\|_{L^\infty}\ \ \|e\|_{L^\infty}}{b_1}\ [g(C\|e\|_{L^\infty}\ )]^\gamma\right). \qquad (3.11)$$

De (3.10) et (3.11), nous avons

$$B\left(\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^2\, dx\right) \int_\Omega \nabla \overline{v}\ \nabla \psi dx \geq \lambda_2 \int_\Omega \beta(x)\ g(\underline{u})\ \tau(\underline{v}) \psi dx. \qquad (3.12)$$

D'après (3.9) et (3.12), nous avons $(\overline{u}, \overline{v})$ une faible sur solution du problème (3.1) avec $\underline{u} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \overline{v}$ pour C large.

Maintenant pour obtenir une solution faible du problème (3.1) nous définissons la suite

$$\{(u_n, v_n)\} \subset E = \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) \cap \left(C(\Omega) \times C(\Omega)\right),$$

comme suit : $(u_0, v_0) := (\overline{u}, \overline{v}) \in E$ et (u_n, v_n) est la solution unique du système :

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u_n|^2\,dx\right)\Delta u_n = \lambda_1\alpha\,(x)\ \ f(v_{n-1})\ h(u_{n-1}) \text{ dans } \Omega, \\ -B\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v_n|^2\,dx\right)\Delta v_n = \lambda_2\beta(x)\ g(u_{n-1})\ \tau(v_{n-1}) \text{ dans } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Le problème (3.13) est (A, B)-linéaire dans le sens où, si $(u_{n-1}, v_{n-1}) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ est une donné, le côté droit de (3.13) est indépendant de u_n, v_n.

Définir $\tilde{A}(t) = tA(t^2)$, $\widetilde{B}(t) = tB(t^2)$. Depuis $\tilde{A}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\widetilde{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(v_0), h(u_0), g(u_0)$ et $\tau(v_0) \in C(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (en x), on déduit du lemme (2.1) (chapitre 2) que le système (3.13) avec $n = 1$ a une solution unique $(u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.

Et en observant que :

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u_1|^2\,dx\right)\Delta u_1 = \lambda_1\alpha\ f(v_0)\ h(u_0) \in C\ \ (\Omega), \\ -B\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v_1|^2\,dx\right)\Delta v_1 = \lambda_2\beta\ g(u_0)\ \tau(v_0) \in C\ \ (\Omega), \\ u_1 = v_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On déduit du lemme (3.2) que $(u_1, v_1) \in C(\Omega) \times C(\Omega)$. Par conséquent $(u_1, v_1) \in E$. De la même manière nous construisons les éléments suivants $(u_n, v_n) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ de notre suite.

De (3.13) et le fait que (u_0, v_0) est une sur solution faible de (3.1), nous avons

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx\right)\Delta u_0 \geq \lambda_1\alpha\,(x)\ \ f(v_0)\ h(u_0) = -A\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u_1|^2\,dx\right)\Delta u_1, \\ -B\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v_0|^2\,dx\right)\Delta v_0 \geq \lambda_2\beta\,(x)\ \ g(u_0)\ \tau(v_0) = -B\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v_1|^2\,dx\right)\Delta v_1 \end{cases}$$

et en utilisant le lemme (3.1), $u_0 \geq u_1$ et $v_0 \geq v_1$. Aussi, puisque $u_0 \geq \underline{u}$, $v_0 \geq \underline{v}$ et la monotonie de f, g, h et τ,on a

$$\begin{aligned} -A\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2\, dx\right)\Delta u_1 &= \lambda_1 \alpha(x)\ f(v_0)\ h(u_0) \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x)\ f(\underline{v})\ h(\underline{u}) \\ &\geq -A\left(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2\, dx\right)\Delta \underline{u}\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -B\left(\int_\Omega |\nabla v_1|^2\, dx\right)\Delta v_1 &= \lambda_2 \beta(x)\ g(u_0)\ \tau(v_0) \\ &\geq \lambda_2 \beta(x)\ g(\underline{u})\ \tau(\underline{v}) \\ &\geq -B\left(\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^2\, dx\right)\Delta \underline{v}\ , \end{aligned}$$

à partir de laquelle selon le lemme (3.1), $u_1 \geq \underline{u}$, $v_1 \geq \underline{v}$ pour u_2, v_2, nous écrivons

$$\begin{aligned} -A\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2\, dx\right)\Delta u_1 &= \lambda_1 \alpha(x)\ f(v_0)\ h(u_0) \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x)\ f(v_1)\ h(u_1) \\ &= -A\left(\int_\Omega |\nabla u_2|^2\, dx\right)\Delta u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -B\left(\int_\Omega |\nabla v_1|\, dx\right)\Delta v_1 &= \lambda_2 \beta(x)\ g(u_0)\ \tau(v_0) \\ &\geq \lambda_2 \beta(x)\ g(u_1)\ \tau(v_1) \\ &= -B\left(\int_\Omega |\nabla v_2|^2\, dx\right)\Delta v_2, \end{aligned}$$

puis $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$. De même, $u_2 \geq \underline{u}$ et $v_2 \geq \underline{v}$. Parce que

$$\begin{aligned} -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_2|^2\,dx\right)\Delta u_2 &= \lambda_1\alpha(x)\ f(v_1)\ h(u_1) \\ &\geq \lambda_1\alpha(x)\ f(\underline{v})\ h(\underline{u}) \\ &\geq -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla \underline{u}|^2\,dx\right)\Delta\underline{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_2|^2\,dx\right)\Delta v_2 &= \lambda_2\beta(x)\ g(u_1)\ \tau(v_1) \\ &\geq \lambda_2\beta(x)\ g(\underline{u})\ \tau(\underline{v}) \\ &\geq -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla \underline{v}|^2\,dx\right)\Delta\underline{v}. \end{aligned}$$

En répétant cet argument nous obtenons une séquence monotone bornée $\{(u_n, v_n)\} \subset E$ satisfont

$$\overline{u} = u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq ... \geq \underline{u} > 0 \tag{3.14}$$

et

$$\overline{v} = v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq ... \geq v_n \geq ... \geq \underline{v} > 0. \tag{3.15}$$

En utilisant la continuité de les fonctions f, g, h et τ et la définition des suites $\{u_n\}, \{v_n\}$, il existe des constantes $C_i > 0$, $i = 1, ..., 4$ indépendantes de n telles que

$$|f(v_{n-1})| \leq C_1, \qquad |h(u_{n-1})| \leq C_2, \qquad |g(u_{n-1})| \leq C_3 \tag{3.16}$$

et

$$|\tau(u_{n-1})| \leq C_4 \quad \text{pour tout } n,$$

à partir de (3.16), en multipliant la première équation de (3.13) par u_n, en intégrant en utilisant l'inégalité de **Hölder** et l'injection de **Sobolev**, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} a_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx &\leq A\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx \\ &= \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x) \ f(v_{n-1}) \ h(u_{n-1}) \, u_n dx \\ &\leq \lambda_1 \|\alpha\|_{L^\infty} \int_\Omega |f(v_{n-1})| \ |h(u_{n-1})| \ |u_n| \, dx \\ &\leq C_1 C_2 \lambda_1 \|\alpha\|_{L^\infty} \int_\Omega |u_n| \, dx \\ &\leq C_5 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

Alors

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_5, \quad \forall n, \tag{3.17}$$

où $C_5 > 0$ est une constante indépendante de n. De même, il existe $C_6 > 0$ indépendant de n tel que :

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_6, \quad \forall n. \tag{3.18}$$

De (3.17) et (3.18), nous déduisons que $\{(u_n, v_n)\}$ a une sous-suite qui converge faiblement en $(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ vers une limite (u, v) avec les propriétés $u \geq \underline{u} > 0$ et $v \geq \underline{v} > 0$. Étant monotone et utilisant également un argument de régularité standard, $\{(u_n, v_n)\}$ converge vers (u, v). Maintenant, laissant $n \to +\infty$ dans (3.13), on en déduit que (u, v) est une solution faible positive du système (3.1). La preuve du théorème est maintenant terminée. ■

Conclusion

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution recherchée, plus précisément on a montrer que si on peut trouver une sous solution $\underline{u}$ et une sur solution $\overline{u}$ d'un problème aux limites bien particulier, et si de plus $\underline{u} \leq \overline{u}$ alors il existe une solution qui satisfait $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Ce qui nous assure l'existence de solutions.

Bibliographie

[1] G. A. Afrouzi, N. T.Chung and S.Shakeri, Existence and non-existence results for nonlocal elliptic systems via sub-supersolution method, Funkcial. Ekvac.,59(2016),303-313.

[2] C.O. Alves, .et Corrêa F.J.S.A. On existence of positive solutions for a class of problem involving a nonlinear operator. Commun Appl Nonlinear Anal. 2001 ;8 :43-56.

[3] N. Azouz and A. Bensedik, Existence of positive result for an elliptic equation of Kirchhoff-type with changing sign data. Funkcial.Ekvac.,55(2012), 55-66.

[4] M. Chen. On positive weak solutions for a class of quasilinear elliptic systems, Nonlinear Anal., 62(2005), 751-756.

[5] N. T. Chung, Multiple solutions for a $p(x)$-Kirchhoff-type equation with sign-changing nonlinearities, Complex Var. Elliptic Equ.,58(2013), 1637-1646.

[6] N. T. Chung and H. Q. Toan, Multiple solutions for a class of N-Kirchhoff type equations via variational methods, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 109(2015), 247-256.

[7] D. G .Figueiredo, de, Positive solutions of semilinear elliptic problems, 94-87, Lecture Notes in Mathematics, N. 957, Spring-Verlag(1982).

[8] G. M. Figueiredo, Morales-Rodrigo, C., Santos. J. J. R. and Suárez, A. :Study of nonlinear Kirchhoff equation with non-homogenous material. J. Math.Anal. Appl. 416(2014), no. 597-608

[9] M. Giovany ,Figueiredo ,and Antonio Suárez. Some remarks on the comparison principle in Kirchhoff equations. Rev. Mav. Theoram. 34(2018), no. 2,609-620.©European Mathematical Society.

[10] C.Lei,.-Y.,Liao,J.-F., and C.-LTang,. :Multiple positive solutions for Kirchhoff type of problems with singularity and critical exponents. J.Math Anal 421(2015), no,1,521-538.

[11] Z.Liang, .F.,Li., and J. Shi, . :Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearity having prescribed asymptotic behavior . Ann. Inst. H. Poincaré Anal Non Linéaire 31 (2014),no. 1,155-167.

[12] D.Naimen, . : The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four. J. Differential Equations 257 (2014),no. 4, 1168-1193.

[13] G.Rafik ,B. Salah ,and B.Youcef . Existence of positive solutions for a class of Kirchhoff systems with right hand side defined as a multiplication of two separate functions.2018.ISSN 1607-2510.Applied Mathematics E-Notes,19(2019), 331-342©

[14] B. Salah, G.Rafik ,. Existence of positive weak solutions for a class of Kirchhoff elliptic systems with multiple parameters, Math. Meth. Appl. Sci.,41(2018), 5203-5210.

[15] G.Sun , and Teng, K. : Existence and multiplicity of solutions for a class of fractional Kirchhoff-type problem.Math .Commun. 19(2014), no. 1, 183-194. 16

[16] B.Youcef, B. Salah and B. Djebbar. Some existence results for an elliptic equation of Kirchhoff-type with changing-sign data and a logarithmic nonlinearity, Math. Meth. Appl. Sci., (2019), 2465-2474.