République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux deriveé partielles et applications

Thème

Sur une équation parabolique non linéaire avec une condition non locale

Présenté Par :
LABIDI ZAHIA & SLIMI KHAOULA

Devant le jury :

Dr : Guefaifia Rafik	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président.
Dr : Degaichia Hakima	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur .
Dr : Mesloub Fatiha	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur.

Date de soutenance : .....14../...6.../2020

بسم الله الرحمن الرحيم

Remercîments

Nous tenons tout d’abord à remercier **Dieu** le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d’accomplir ce Modeste travail.

Nous tenons à adresser notre remerciements les plus chaleureux et notre profonde gratitude à notre encadreur **Dr .Mesloub Fatiha** , à l’Université Elarbi Tebessi- Tebessa pour nos avoir proposé le sujet de ce mémoire. C’est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et ses encouragements que nous avons pu mener à bien ce travail.

Nous sommes conscientes de l’honneur que nous a fait **Dr. Degaichia Hakima ,**en étant président du jury et **Dr. Guefaifia Rafik ,** d’avoir accepté d’examiner ce travail.

Nos remerciement s’adresse également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nos profonds remerciements vont également à toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de près ou de loin.

Enfin, Merci à tous mes amis et tous mes collègues sans exception, nous n’oublions pas de remercier toutes les personnes qui nous ont facilité la tâche.

الإهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله, اللهم لا سهل الا ما جعلته سهلا فاجعل
بحولك وقوتك كل صعب علينا سهلا فانك ان شئت جعلت الحزن سهلا .
اولا الفضل لله تعالى دائما وابدا, فالتفاؤل نصف الحياة والأمل نصفها الاخر ومن
وضع ثقته في ربه وتوكل عليه جعل الله النصفين بين يديه وتحقق ما كان بالأمس
حلما فحلمي الآن واقفا آخر الطريق ينتظرني ها قد تمهدت الطريق إليك و تجاوزت
كل العتبات ووصلت والتقينا بعد تعب ومشقة وها أنا اقف بكل همة و فرحة وسرور
وفخر أحمل بحث تخرجي بيدي حامدة لله وشاكرة لكل من ساعدني في مسيرتي.
إلى وردة قلبي وريحانة حياتي ووطني فهي ليست ككل النساء هي أمي حبيبتي
بدعائها وصلت الى هنا ولا شيء كأمي(حيزية).
دمت عزيزي وعزتي وعزي فانت حبيبي الأول وعيني الثالثة وملجئي بعد الله
طاب بك العمر وطبت لي عمرا يأبي (عبد الباقي).
إلى سندي وعضدي بعد الله أخوي "بلقاسم وليد" هما أول من يفتقد لي وأول من
يفرح لي .
أسماء اخرى للحب وقطع من الأب والأم إلى أخواتي العزيزات "كريمة شهرزاد
اكرام" دمتم إخوتي في رعاية الله و حفظه .
إلى خطيبة أخي الغالي "مريم".
والى الارواح الطاهرة (جدي وجدتي واختي وسيلة)
والى جدي وجدتي وكل اخوالي واعمامي وبناتهم واخص بالذكر ابنة خالي الكتكوتة
"جودة "وابنة عمي "نجاة".
و إلى الأقارب والأحباب لكم دعوة جميلة من القلب.
إلى من تذوقت معهن أجمل اللحظات وكن عونا لي في مشواري الدراسي وكانوا
رمزا الكفاح والتحدي والتفاؤل للمستقبل "بثينة هدى إيمان عائشة سعاد نسرين".
لأخت أنجبتها لي الأيام رافقتني في كل صفحات مذكرة تخرجي صديقتي و
حبيبتي" أحلام مراح" .
إلى رفيقة الدرب من كانت معي واهتمت بي وعشت معها أيام حلوة عملت بجد
لإتمام هذا البحث صديقتي ورفيقتي" خولة ".
دعوة لكم من القلب لكل من انتفعت من عندهم علما.

الإهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله, اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلا فاجعل بحولك وقوتك كل صعب علينا سهلا فإنك إن شئت جعلت الحزن سهلا .

أولا الفضل لله تعالى دائما وأبدا فالتفاؤل نصف الحياة والأمل نصفها الأخر ومن وضع ثقته في ربه وتوكل عليه جعل الله النصفين بين يديه وتحقق ما كان بالأمس حلما فحلمي الآن واقفا.

آخر الطريق ينتظرني ها قد تمهدت الطريق إليك و تجاوزت كل العتبات ووصلت والتقينا بعد تعب ومشقة وها أنا اقف بكل همة و فرحة وسرور وفخر أحمل بحث تخرجي بيدي حامدة لله وشاكرة لكل من ساعدني في مسيرتي.

إلى وردة قلبي وريحانة حياتي ووطني فهي ليست ككل النساء هي أمي حبيبتي بدعائها وصلت الى هنا ولا شيء كأمي(دلولة)

دمت عزيزي وعزتي وعزي فأنت حبيبي الأول وعيني الثالثة وملجئي بعد الله طاب بك العمر وطبت لي عمرا يأبي (عمر)

إلى سندي وعضدي بعد الله أخي" رضا وشعيب "هما أول من يفتقد لي وأول من يفرح لي.

اسم آخر للحب وقطعة من الأب والأم إلى أختي عزيزتي" شروق "دمتم ا إخوتي في رعاية الله و حفظه.

إلى الأقارب والأحباب لكم دعوة جميلة من القلب

إلى من تذوقت معهن أجمل اللحظات وكن عونا لي في مشواري الدراسي وكانوا رمزا الكفاح والتحدي والتفاؤل للمستقبل "راضية و نسرين "

لأخت انجبتها لي الأيام رافقتني في كل صفحات مذكرة تخرجي صديقتي و حبيبتي" أحلام مراح"

إلى رفيقة الدرب من كانت معي واهتمت بي وعشت معها أيام حلوة عملت بجد لإتمام هذا البحث صديقتي ورفيقتي" زهية "

دعوة لكم من القلب لكل من انتفعت من عندهم علما

إلى كل من وسعه قلبي ولم يذكره اسمي

Abstract

The main objective of this work is the study of the existence and uniqueness of the strong solution for a non-local problem. This work consists of three chapters :
The .rst chapter is devoted to preliminary notions on the theory of functional spaces and inequalities used in this memory, and some theorems.
In the second chapter, we gave a history and a de.nition de.nition of the method used (thefonctionelle analysis method).
In the third chapter, we treated a problem with non-local boundary condition for an parabolique equation.. Using the fonctionelle analysis method to demonstrate the existence and unicité of the strong solution of the problem.

Résumé

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution forte pour un problème non locale. Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires sur la théorie des espaces fonctionnels, ainsi que les inégalités utilisées dans cette mémoire, et quelques théorèmes importants.

Dans le deuxième chapitre : on a donné un historique et une définition sur la méthode utilisée (méthode de d0analyse fonctionnelle).

Dans le troisième chapitre, on a traité un problème aux limites avec condition non locale pour une équation parabolique. En utilisant la méthode de d0analyse fonctionnelle pour démontré l'existence et l'unité de la solution forte du problème posé.

الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل يتمثل في دراسة وجود وحدانية الحل القوي لمسألة غير محلية. العمل يتكون من ثلاثة فصول :

الفصل الأول خصص للمفاهيم الأولية حول نظرية الفضاءات الدالية, فضلا عن بعض المتراجحات المستخدمة في هذه المذكرة ، وبعض النظريات الهامة .اما في الفصل الثاني فقد أعطينا تاريخًا وتعريفًا حول الطريقة المستخدمة (طريقة التحليل الدالي).

في الفصل الثالث، درسنا مع مسألة حدية مع شرط غير محلي لمعادلة مكافئة, حيث استخدامنا طريقة التحليل الدالي لبرهان وجود ووحدانية الحل القوي للمسألة المطروحة.

Table des matières

Notations 2

0 Introduction **4**

1 Notions préliminaires **6**

1.1 **Quelques espaces** 6

1.1.1 **Espaces normés** 6

1.1.2 **Espaces de Banach** 6

1.1.3 **Espaces de Hilbert** 7

1.1.4 **Espace de Sobolev** $W^{m,P}(\Omega)$ 8

1.1.5 **Les opérateurs** 9

1.2 **Quelques inégalités importantes** 12

1.2.1 **Lemme de Gronwell** 12

1.2.2 **Inégalité de Cauchy** 13

1.2.3 **Inégalité de Cauchy avec** ε 13

1.2.4 **Inégalité de Young** 13

1.2.5 **Inégalité de Young avec** ε 13

1.2.6 **Inégalité intégrale de Hölder** 14

1.2.7 **L'intégral paramétrique(formulle de Leibniz)** 14

1.2.8 **Intégration par partie** 15

1.2.9 **Théorème de** $(Fubini)$ 15

2 La méthode des inégalités énergétiques **16**

2.1 **La description de la méthode des inégalités énergétiques :** 16

3 Sur une équation parabolique singulière avec une condition intégrale **19**

3.1 **Position de la problème** 19

3.2 **Unicité de la solution** 21

3.3 **Existence de la solution** 31

Conclusion générale 43

Bibliographie 43

Notations

X	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}$.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurable u surΩ vérifiant $\int\limits_{\Omega} \mid u \mid^p dx < \infty$.
$L_\rho(\Omega)$	L'espace avec poid.
$\lim$	La limite.
$u_n \to u$	La convergence faible.
$\longrightarrow$	La convergence forte.
L	Un opérateur linéaire.
l	Une fonctionnelle linéaire.
H	Un espace de Hilbert.
$D(L)$	Le domaine de défintion de L.
$R(L)$	L'ensemble des valeurs Lu pour tout $u \in D(A)$.
$\overline{L}$	La fermeture de L.
$\mathcal{L}$	Le opérateur différentiel.
$\frac{d}{dx}$	La dérivée ordinaire par-rapport à x.
$D^k u$	La dérivée généralisée.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$,où $\mid k \mid \leq 1$.

Chapitre 0

Introduction

Au cours de ces dernières années, il y a eu un grand développement dans l'étude des équations d'évolution linéaires et non linéaires. Les applications les plus importantes de cette théorie concernent les problémes aux limites pour les équations différentielles partielles, et comme nous savons que les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problémes en physique, biologie économie ou ailleurs. Sur de nombreux points, elles semblent généraliser au contexte multi-dimensionnel les équations différentielles ordinaires. Les modèles mathématiques pour les problèmes mixtes avec des conditions non locales peuvent être présentées dans de nombreux modèles d'ingénierie tels que la conduction de la chaleur, la désintégration radioactive, la physique du plasma, Thermoélasticité, la dynamique de la population, les problèmes de vibration, et bien d'autres. Tout ces problémes peuvent être traiter par des méthodes fonctionnelles ces méthodes sont devenues essentielles dans l'étude des problémes mathématiques théoriques et appliqués. Le role principal des méthodes fonctionnelles, est de donner de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus par les techniques classiques. L'une des méthodes fonctionnelles est la méthode des inégalités énergétiques (*méthode d'estimation à priorie*), qu'on a développé et appliqué dans cette mémoire à l'étude de problémes parabolique linéaire singuliere avec la condition intégrale, le lecteur peut se référer aux travaux de Bouziani [1], Mesloub [20, 21, 22, 23], Kartynik[3], Mesloub et Bouziani [14, 15, 16], Mesloub et Lekrine [17], Beilin [13], et Mesloub Messaoudi [18, 19], Muravei Philinovskii [7], Nukushev [4] et Pulkina [9] et Yurchuk[10]. Tous ces précédents ont traité des équations paraboliques et hyperboliques.

Le but de cette mémoire est un développement important de la méthode des inégalités énergétiques dans l'étude d'une problème aux limite, engendrés par une équation parabolique pour démontrer l'existence, l'unicité et de la dépendance continu sur les données d'un problème paraboliques posés à l'aide de la méthode d'analyse fonctionnelle.

Notre mémoire est composé par trois chapitre : le premier chapitre est consacré à des outils et notions nécessaires sur la théorie des espaces fonctionnels utilisés et sur la théorie des opérateurs ainsi que des nombreuses inégalités importantes utilisées.

Dans le chapitre deux, on donne La description du Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les E.D.P dans les espaces fonctionnels.

Dans le troisième chapitre, on étudie l'unicité et l'existence de la solution d'un problème mixte avec un condition intégrale pour une équation parabolique, on a utilisé la méthode des inégalités énergétiques.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques théorémes d'analyse fonctionnelle ,on rappelle quelques inégalités fonctionnelles quelques théoréme.

1.1 Quelques espaces

1.1.1 Espaces normés

Un espace vectoriel E est appelé *espace normé* pour tout $u \in E$ correspond un nombre positif $\|u\|$ (appelé *norme* de u) tel que les trois axiomes suivants, dits *axiomes de la norme*, sont vérifiés :

1. $\|u\| \geq 0; \|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$ (la norme est *non dégénérée*),
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (la norme est *homogène*),
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*inégalité triangulaire*).

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.1 *Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de **Banach** si E est un espace **complet.***

Définition 1.2 *E' l'espace linéaire de toutes les fonctions linéaires continues :*

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R},$$

et appelé l'espace dual de E.

Proposition 1.1 *L'espace E' muni de la norme $\| \, . \, \|_{E'}$ définie :*

$$\| f \|_{E'} = \{| f(u) | : \| u \| \leq 1\},$$

est aussi un espace de Banach on not la valeur de $f \in E'$ au $u \in E$ par $f(u)$ ou $\langle f, u \rangle_{E,E'}$.

Définition 1.3 *Soient $(E, \| \, . \, \|_E)$ et $(F, \| \, . \, \|_F)$ deux espaces de **Banach** tels qu'il existe une application vectoriel de E dans F cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on notera $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.4 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, on appelle produit scalaire toute application $(.,.) : H \times H \to \mathbb{k}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Linéarité à gauche : $\forall u, v, w \in H$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}$, $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w)$,*
2. *Hermitienne : $\forall u, v \in H$, $(u, v) = \overline{(u, v)}$,*
3. *Définie positive :$\forall u \in H - \{0\}, (u, u) > 0$ et $(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.*

Naturellement si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarque 1.1 *.*

1. Le nombre $(u.v)$ appelé produit scalaire des vecteurs.
2. Les propriétés (1) (2) (3) nous donnent :

- $(u, \lambda v + \mu w) = \overline{\lambda}(u, v) + \overline{\mu}(u, w), \quad \forall u \ v \ w \in H, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k},$
- $(u, 0) = (0, u) = 0, \quad \forall u \in H.$

Remarque 1.2 *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace de Hilbert s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire. Les espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers sont des généralisations des espaces* $\mathbb{R}^n$ *et* C^n*.*

Exemple 1.1 *Si* $p = 2$, $L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant :*

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ (v, w)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega vw \; dx. \end{aligned}$$

Définition 1.5 *En plus de la convergence forte dans* H, *on considére aussi la convergence faible ou converge au sens de produit scalair* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* H *on dit qu'elle converge faiblement vers* v *si :*

$$(v_n - v, w)_H \to 0 \text{ quand } n \to \infty \quad \forall w \in H,$$

et on not par :

$$u_n \to u \in H.$$

1.1.4 Espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$

Définition 1.6 *Soit* $m > 0$, $p \geq 1$, *on note* $W^{m,p}(\Omega)$ *l'ensemble définie par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); tel \ que \ D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall \alpha :\mid \alpha \mid \leq m \right\},$$

$$\text{où } \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \ \alpha_i \in \mathbb{N}, \ i = \overline{1.n},$$

$$\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \text{et } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

et

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : mesurable \ \backslash \int_\Omega \mid u(x) \mid^p dx < \infty \right\},$$

et

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : mesurable \ \backslash \exists \ C \ \ tq \ \ | \ u(x) \ |\leq C \ \ sur \ \Omega \ \},$$

*-$L^p(\Omega)$ *est un espace complet pour la norme*

$$\| \ u \ \|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} | \ u(x) \ |^p \ dx)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty,$$

*-$L^{\infty}(\Omega)$ *est un espace complet pour la norme*

$$L^{\infty}(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} | \ u(x) \ | \ .$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \| \ D^{\alpha}u \ \|^p_{L^p(\Omega)}, \ \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^m_{\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \| \ D^{\alpha}u \ \|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

pour $p = 2$

$$\begin{aligned} W^{m,2}(\Omega) &= H^m(\Omega) \\ &= \left\{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega), \forall\alpha :| \ \alpha \ |\leq m\right\}, \end{aligned}$$

le produit scalaire dans $W^{m,2}(\Omega)$ *est définie par*

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx.$$

1.1.5 Les opérateurs

Linéaires bornés

Définition 1.7 *Soit* H *un espace de Hilbert sur le corps* $\Bbbk$ $(\Bbbk = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R})$, *1- Un opérateur linéaire A sur H est une application de H dans H vérifie :*

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,\ \forall x, y \in H,\ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk,$$

2-Un opérateur A sur H est dit borné s'il transforme toute partie borné identiquement s'il existe une constane $M > 0$ telle que :

$$\| Ax \| \leq M \| x \| \text{ pour tout } x \in H,$$

3- L'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H est noté $\mathcal{L}(H)$.

Théorème 1.1 *Soit A un opérateur linéaire sur H alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1-A est borné.

2-A est continu sur H.

3-A est continu en un point quelconque x_0 de H.

Les opérateurs fermé et fermable

Définition 1.8 *Le graphe de l'opérateur linéaire $A : X \to Y$ est l'ensemble*

$$G(A) = \{(x, Ax) \setminus x \in D(A) \subset X \times Y\},$$

le graphe est un sous espace de $X \times Y$.

Définition 1.9 *On dit que l'opérateur A est fermé si son graphe est fermé dans $X \times Y$ et noté par $\overline{A}$.*

Définition 1.10 *On dit que l'opérateur A est fermable si pour tout suite $u_n \in D(A)$, $u_n \to 0$ et $Au_n \to f$ alars $f = 0$.*

Corollaire 1.1 *Si A est fermable, alors*

$$\Gamma\overline{(A)} = \overline{\Gamma(A)}.$$

Les opérateurs Régularisation

Soit W une fonction de classe C^{∞}, avec les variables ς tel que :

$$W(\varsigma) > 0; W = 0 \text{ si } \mid \varsigma \mid \geq 1,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varsigma) d\varsigma &= \int_{-1}^{+1} W(\varsigma) d\varsigma \\ &= 1, \end{aligned}$$

on dénote par :

$$W_{\varepsilon}(x, x') = \frac{1}{\varepsilon} W(\frac{x - x'}{\varepsilon}),$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\varepsilon}(x, x') dx' &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\varepsilon}(x, x') dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

et

$$W_{\varepsilon}(x, x') = 0 \text{ si } \mid x - x' \mid \geq \varepsilon.$$

On définit l'opérateur de lissage (smoothing operator) $J_{\varepsilon} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ par la formule :

$$\begin{aligned} (J_{\varepsilon} v)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\varepsilon}(x, x') v(x') dx' \\ &= \int_{|x-x'|<\varepsilon}^{+\infty} W_{\varepsilon}(x, x') v(x') dx', \end{aligned}$$

où $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $v \in L^2(\Omega)$ cet opérateur a les propriétés suivantes :

$p1$. La fonction $J_\varepsilon v \in C^\infty$ si $v \in L^2(\Omega)$ et

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}(J_\varepsilon v) = J_\varepsilon(\frac{\partial^m}{\partial x^m} v) \text{ si } v \in C^m(\Omega),$$

$p2$. Si $v \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\| J_\varepsilon v - v \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et

$$\| J_\varepsilon v \|_{L^2(\Omega)} \leq \| v \|_{L^2(\Omega)},$$

$p3$.Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\| \alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v) \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

$p4$.Si $\alpha \in C^1(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\| \frac{\partial}{\partial x}(\alpha J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\alpha v)) \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

1.2 Quelques inégalités importantes

1.2.1 Lemme de Gronwell

Si les $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0, T]$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ sont intégrables et $f_3(t)$ est non décroissante, alors :

$$\int_0^\tau f_1(t)dt + f_2(t) \leq f_3(t) + k\int_0^\tau f_2(t)dt,$$

il s'ensuit que :

$$\int_0^{\tau} f_1(t)dt + f_2(t) \leq e^{k\tau} f_3(t),$$

1.2.2 Inégalité de Cauchy

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{1}{2} \mid a \mid^2 + \frac{1}{2} \mid b \mid^2 .$$

1.2.3 Inégalité de Cauchy avec ε

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \varepsilon > 0 : |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} \mid a \mid^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \mid b \mid^2 .$$

1.2.4 Inégalité de Young

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{q} |b|^q ,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

1.2.5 Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ alors pour tout $(a,b) \in R^2$ on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon) |b|^q ,$$

où p et q des nombre réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $C(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-q/p}$.

1.2.6 Inégalité intégrale de Hölder

C'ets une généralisation des inégalité de Cauchy, pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in c(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on not q le conjugué de $p((L^p)^\star = L^p)$, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} \mid \int_\Omega uvdx \mid &\leq \int_\Omega \mid uv \mid dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \mid u^p \mid dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \mid v^p \mid dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

(i.e)

$$\int_\Omega \mid uv \mid dx \leq \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^q(\Omega)} .$$

1.2.7 L'intégral paramétrique(formulle de Leibniz)

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$et soient α et β deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors, "*L'intégral paramétrique*" (généralisée) F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f\left(x, y\right) dy,$$

est dérivable

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f\left(x, y\right) dy + \frac{\partial \beta\left(x\right)}{\partial x} f\left(x, \beta\left(x\right)\right) - \frac{\partial \alpha\left(x\right)}{\partial x} f\left(x, \alpha\left(x\right)\right).$$

1.2.8 Intégration par partie

Soit $(u, v) \in H^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

1.2.9 Théorème de $(Fubini)$

Soient par exemple X une partie de $\mathbb{R}^p$, Y une partie de $\mathbb{R}^q$, et

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

avec

$$p \ et \ q \ \in \mathbb{N}$$

une application intégrable. Alors, d'après le théorème de Fubini, la fonction $f(x, .)$ est intégrable pour presque tout x de X, l'intégrale paramétrique F définie par

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy$$

est intégrable sur X et l'on a

$$\int_{X \times Y} f = \int_X F$$

(et même chose en intervertissant les rôles de x et y)

Remarque 1.3 *Pour une fonction f qui ne dépend que de la seconde variable, on retrouve bien le théorème fondamental de l'analyse en posant* $\alpha(x) = \alpha, \ \beta(x) = \beta$.

Chapitre 2

La méthode des inégalités énergétiques

Dans ce chapitre, on expose la méthode des inégalités énergétiques. qui ont connu une grande application pour la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution généralisées pour les (EDP) en particulier les équations parabolique.

2.1 La description de la méthode des inégalités énergétiques :

Actuellement, les méthodes fonctionnelles sont devenues essentielles dans l'étude des problèmes mathématiques théoriques et appliqués. Le rôle principal des méthodes fonctionnelles, est de donner de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus par les techniques classiques, en conséquence, il y a eu des progrès considérables dans l'étude des équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach ou de Hilbert.

L'une des méthodes fonctionnelle utilisées dans l'étude des problèmes mixtes est la méthode des inégalités de l'énergie appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle et aussi du estimations a priori, qui ont été imitée par Sobolev et Friedricks, cette méthode est basée sur les idées de Dezin [2] et développée par Ladyzenskaya [11, 12].

Le point remarquable de cette méthode d'analyse fonctionnelle est qu'on peut tirer le théorème d'existence de la solution du problème posé, à partir du théorème d'unicité.

De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations :paraboliques, elliptique, hyperboliques et du type mixte et cela en utilisant différentes méthodes.

D'abord on ramène le problème posé (P) à une équation opérationnelle :

$$Lu = F, u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisis.

On établit les estimations a priori pour l'opérateur L. On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F.

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité de l'énergie du type.

$$\| u \|_E \leq \lambda \| Lu \|_F, \quad \forall u \in D(L), \tag{1}$$

cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un multiplicateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix de multiplicateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F on construit la fermeture $\overline{L}$ de l'opérateur L, et la solution de l'équation.

$$\overline{L} = F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D(L)$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$.

Comme l'image de l'opérateur L est fermée dans F et que $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$.

Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$ il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie (1).

On établit deux estimations a priori bilatérales :

$$\| \quad u \|_E \leq \lambda \| Lu \|_{\mathcal{F}},$$

$$\| \quad Lu \|_{\mathcal{F}} \leq \lambda \| u \|_E,$$

il résulte de la première estimation que l'opérateur L de E dans F est continu, et de la deuxième estimation, qu'il admet un inverse continu, et que l'ensemble des valeurs de l'opérateur L est fermé.

En d'autres termes, l'opérateur L réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$.

Ainsi, pour démontrer l'existence de la solution il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans F.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi les quelles nous citons :

*/ Le choix des espaces fonctionnels.

*/ Le choix du multiplicateur Mu.

L'unicité de la solution du problème considéré résulte de ces deux inégalités. Son existence est assurée par le fait que $R(L)$ est dense dans F, chose faisable moyennant des opérateurs de régularisation que l'on choisira suivant lanature de problème.

Il convient de noter que l'absence d'une théorie générale a nécessité une étude spéciale pour chaque problème considéré.

Chapitre 3

Sur une équation parabolique singulière avec une condition intégrale

Dans ce chapitre, on étudie l'unicité et l'existence de la solution d'un problème parabolique singuliere avec une condition intégrale.

3.1 Position de la problème

On considére un probléme mixte avec conditions non locale, en combinant une condition classique et une condition intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= u_t - \frac{1}{r}(ru_r)_r - u_{zz} = f(r,z,t), && (3.1.1)\\
lu &= u(r,z,0) = \varphi(r,z), && (3.1.2)\\
u_r(a,z,t) &= u_z(r,b,t) = u_z(r,0,t) = 0, && (3.1.3)\\
\int_0^a ru(r,z,t)dr &= 0. && (3.1.4)
\end{aligned}$$

Dans le domaine borné :

$$Q = \Omega \times (0,T) = \{(r,z,t) : r \in [0,a], z \in [0,b],\ t \in [0,\tau],\ 0 < \tau < T\},$$

où a, b sont des constantes positives,f, φ des fonctions donnés.

Un problème similaire au problème$(3.1.1)-(3.1.4)$ dans le cas où la solution n'est pas symétrique et avec condition intégrale a été traitée par Mesloub, Bouziani, Kechkar $[14-16]$.

Pour étudier notre problème nous introduisons d'abord les espaces fonctionnels appropriés.

Soit $L^2_\rho(Q)$ l'espace L^2 avec poit avec la norme :

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q ru^2 drdzdt,$$

et le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2_\rho(Q)} = (ru, v)_{L^2(Q)}.$$

Soit $W^{1,0}_{2,\rho}(Q)$ l'espace de Hilbert avec un produit scalaire

$$(u, v)_{W^{1,0}_{2,\rho}(Q)} = (u, v)_{L^2_\rho(Q)} + (u_r, v_r)_{L^2_\rho(Q)} + (u_z, v_z)_{L^2_\rho(Q)},$$

et avec la norme associée

$$\|u\|^2_{W^{1,0}_{2,\rho}(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_r\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_z\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Le problème $(3.1.1)-(3.1.4)$ peut être considéré comme la résolution de l'équation de l'opérateur :

$$\begin{aligned} Lu &= (\mathcal{L}u, lu) \\ &= (f, \varphi), \end{aligned}$$

où L est un opérateur défini sur E en F.

E est l'espace de Banach avec une norme finie définie par

$$\|u\|^2_E = \sup_{0\leq\tau\leq T} (\|u(r, z, \tau)\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)}) + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q)},$$

et F est l'espace de Hilbert à norme finie définie par

$$\begin{aligned} \|Lu\|_F^2 &= \|\mathcal{F}\|_F^2 \\ &= \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\varphi\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)}, \end{aligned}$$

le domaine de définition de $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions $L^2_\rho(Q)$ telles que $u_t, u_r, u_z, u_{tr}, u_{rr}, u_{zz} \in L^2_\rho(Q)$ et les conditions $(3.1.3) - (3.1.4)$ sont remplies.

3.2 Unicité de la solution

Théorème 3.1 *Pour toute fonction $u \in D(L)$, nous avons l'estimation a priori*

$$\|u\|_E \leq \lambda \|Lu\|_F, \tag{3.2.1}$$

ou bien

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}(\|u(r,z,\tau)\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)}) + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq \lambda^2(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\varphi\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)}),$$

où λ est une constante positive indépendante de u.

Preuve Considérons l'opérateur intégré-différentiel

$$Mu = ru_t + r\Im_r(\rho u),$$

où

$$\Im_r(\rho u) = \int_0^r \rho u(\rho, z, t) d\rho,$$

et prendre le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (3.1.1) et l'opérateur Mu , où $Q^\tau = [0,\tau] \times [0,a] \times [0,b]$ et $0 < \tau < T$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &= (u_t, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} + (u_t, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} \\
&\quad -(\frac{1}{r}(ru_r)_r, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} - (\frac{1}{r}(ru_r)_r, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} \\
&\quad -(u_{zz}, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} - (u_{zz}, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} \\
&= (f, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} + (f, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Nous considérons séparément l'intégrale de l'inégalité (3.2.2), intégrant par parties et tenant compte des conditions $(3.1.2) - (3.1.4)$ on a :

$$\begin{aligned}
(u_t, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} &= \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru_t^2 drdzdt \\
&= \int_0^b \int_0^a r \left(\int_0^\tau u_t^2 dt \right) drdz \\
&= \int_0^b \int_0^a r \parallel u_t \parallel^2_{L^2(0,\tau)} drdz \\
&= \parallel u_t \parallel^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
(u_t, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} &= \int_0^\tau \int_0^b \underbrace{\int_0^a ru_t \Im_r(\rho u) dr}_{\text{intégration par parties}} dzdt \\
&= \int_0^\tau \int_0^b \Im_r(\rho u)\Im_r(\rho u_t)]_0^a dzdt - \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_t) rudrdzdt \\
&= \left(\int_0^\tau \int_0^b \int_0^r \rho u(\rho,z,t) d\rho \Big]_0^a dzdt \right) \left(\int_0^\tau \int_0^b \int_0^r \rho u_t(\rho,z,t) d\rho \Big]_0^a dzdt \right) \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru\Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
&= \left(\int_0^\tau \int_0^b \int_0^a \rho u(\rho,z,t) d\rho dzdt \right) \left(\int_0^\tau \int_0^b \int_0^a \rho u_t(\rho,z,t) d\rho dzdt \right) \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru\Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
&= -(u, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$
\begin{aligned}
-(\frac{1}{r}(ru_r)_r, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} &= -\int_0^\tau \int_0^b \underbrace{\int_0^a (ru_r)_r u_t dr}_{\text{intégration par parties}} dzdt \\
&= -\int_0^\tau \int_0^b ru_t(r,z,t)u_r(r,z,t)]_0^a \, dzdt + \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru_r u_{tr} drdzdt \\
&= -\left[\int_0^\tau \int_0^b au_t(a,z,t)u_r(a,z,t)dzdt\right] + \left[\int_0^\tau \int_0^b 0u_t(0,z,t)u_r(0,z,t)dzdt\right] \\
&\quad + \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru_r u_{tr} drdzdt \\
&= \int_0^\tau \int_0^b \int_0^a ru_r u_{tr} drdzdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^b \int_0^a r\frac{d}{dt} \mid u_r(r,z,t) \mid^2 drdzdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \int_0^a \left[\int_0^\tau r\frac{d}{dt} \mid u_r(r,z,t) \mid^2 dt\right] drdz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \int_0^a ru_r^2(r,z,\tau)drdz - \frac{1}{2}\int_0^b \int_0^a ru_r^2(r,z,0)drdz \\
&= \frac{1}{2} \parallel u_r(r,z,\tau) \parallel^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2} \parallel \varphi_r \parallel^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(\frac{1}{r}(ru_r)_r, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} &= -\int_0^\tau\int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a (ru_r)_r \Im_r(\rho u)dr\right]}_{\text{integration par partie}} dzdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^b \left. ru_r\Im_r(\rho u)\right]_0^a dzdt + \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r^2 u_r u dr dz dt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b (-ru_r(a,z,t)\int_0^a \rho u(\rho,z,t)\partial\rho + ru_r(0,z,t)\int_0^0 \rho u(\rho,z,t)d\rho)dzdt \\
&\quad + \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r^2 u_r u dr dz dt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r^2 u_r u dr dz dt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left|u\right|^2 dr dz dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b \underbrace{\int_0^a r^2 \frac{d}{dr}\left|u\right|^2 dr}_{\text{integration par partie}} dzdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b \left. r^2\left|u(r,z,t)\right|^2\right]_0^a dzdt - \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b\int_0^a 2r\left|u\right|^2 dr dz dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b (a^2\left|u(a,z,t)\right|^2 + 0\left|u(a,z,t)\right|^2)dzdt - \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r\left|u(r,z,t)\right|^2 dr dz dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^\tau\int_0^b \left|u(a,z,t)\right|^2 dzdt - \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r\left|u(r,z,t)\right|^2 dr dz dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^\tau\int_0^b u^2(a,z,t)dzdt - \left\|u(r,z,t)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}, \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(u_{zz}, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} &= -\int_0^\tau\int_0^b\int_0^a r u_{zz} u_t \, dr dz dt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^a r \underbrace{\int_0^b u_{zz} u_t \, dz}_{\text{integration par partie}} dr dt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^a r u_t(r,z,t) u_z(r,z,t)]_0^b + \int_0^\tau\int_0^a\int_0^b r u_{tz} u_z \, dz dr dt \\
&= \int_0^\tau\int_0^a (-r u_t(r,b,t) u_z(r,b,t) + r u_t(r,0,t) u_z(r,0,t)) dr dt \\
&\quad + \int_0^\tau\int_0^a\int_0^b r u_{tz} u_z \, dz dr dt \\
&= \int_0^\tau\int_0^a\int_0^b r u_{tz} u_z \, dz dr dt \\
&= \int_0^\tau \left[\int_0^a r \int_0^b u_z u_{tz} \, dz\right] dr dt \\
&= \int_0^\tau \left[\int_0^a r \int_0^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left|u_z(r,z,t)\right|^2 dz dr\right] dt \\
&= \int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\int_0^a\int_0^b r \left|u_z(r,z,t)\right|^2 dr dz\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{d}{dt} \left\|u_z(r,z,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_z(r,z,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|u_z(r,z,0)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_z(r,z,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\varphi_z\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(u_{zz}, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)} &= -\int_0^\tau\int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a r u_{zz}\Im_r(\rho u)dr\right]}_{\text{integration par partie}} dzdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^b \Im_r(\rho u)\Im_r(\rho u_{zz})]_0^a\, dzdt + \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a ru(r,z,t)\Im_r(\rho u_{zz})drdzdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^b \left.\int_0^r \rho u(\rho,z,t)d\rho\int_0^r \rho u_{zz}(\rho,z,t)d\rho\right]_0^a dzdt + \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a ru(r,z,t)\Im_r(\rho u_{zz})drdzdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b(-\int_0^a \rho u(\rho,z,t)d\rho\int_0^a \rho u_{zz}(\rho,z,t)d\rho + \int_0^0 \rho u(\rho,z,t)d\rho\int_0^0 \rho u_{zz}(\rho,z,t)d\rho)dzdt \\
&\quad + \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a ru(r,z,t)\Im_r(\rho u_{zz})drdzdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b(\int_0^a ru(r,z,t)\int_0^r \rho u(\rho,z,t)d\rho dr)dzdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^b\int_0^a ru(r,z,t)dr\int_0^r \rho u_{zz}(\rho,z,t)d\rho dzdt \\
&= 0, \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

substitution de $(3.2.3) - (3.2.8)$ dans $(3.2.2)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \|u_t(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} - (u, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|u_r(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\varphi_r\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \frac{1}{2}\|u_z(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\varphi_z\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{a^2}{2}\int_0^\tau\int_0^b u^2(a,z,t)dzdt - \|u(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \; & (f, ru_t)_{L^2(Q^\tau)} + (f, r\Im_r(\rho u))_{L^2(Q^\tau)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \|u_t(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|u_r(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_z(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{a^2}{2}\int_0^\tau\int_0^b u^2(a,z,t)dzdt \\
= \; & (u_t, \mathcal{L}u)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + (\Im_r(\rho u), \mathcal{L}u)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + (u, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|\varphi_r\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\varphi_z\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}. \qquad (3.2.9)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy -ε , nous estimons les trois premiers termes sur le coté gauche de (3.2.9) comme suit

$$\begin{aligned} & (u_t, \mathcal{L}u)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_1}{2} \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q\tau)} , \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned} & (\Im_r(\rho u), \mathcal{L}u)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_2}{2} \|\Im_r(\rho u)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \varepsilon_2 (\int_0^\tau \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a \frac{r}{2} \Im_r(\rho u) dr \right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \varepsilon_2 \int_0^\tau \int_0^b (\left[\frac{r^2}{2} u(r,z,t) \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a r u(r,z,t) dr) dzdt + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_2 a^4}{4} \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} , \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

et

$$\begin{aligned} & (u, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_3}{2} \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\Im_r(\rho u_t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_3}{2} \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{\varepsilon_3} (\int_0^\tau \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a \frac{r}{2} \Im_r(\rho u_t) dr \right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt) \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_3}{2} \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{\varepsilon_3} \int_0^\tau \int_0^b (\left[\frac{r^2}{2} u_t(r,z,t) \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a r u_t(r,z,t) dr) dzdt \\ \leq \; & \frac{\varepsilon_3}{2} \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{a^4}{4\varepsilon_3} \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} , \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

combinant l'inégalités (3.2.10) – (3.2.12) et égalité (3.2.9) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|u_t(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|u_r(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_z(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \frac{a^2}{2}\int_0^\tau\int_0^b u^2(a,z,t)dzdt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|\varphi_r\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\varphi_z\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{1}{2\varepsilon_2})\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + (\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{a^4}{4\varepsilon_3})\|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + (\frac{\varepsilon_2 a^4}{4} + \frac{\varepsilon_3}{2} + 1)\|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{4}\|u(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (3.2.14)$$

en ajoutant les inégalités (3.2.13) et (3.2.14) côté à côté et en tenant compte du fait que le dernier terme dans la partie gauche de (3.2.13) est positif on a

$$\begin{aligned}
& \|u_t(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|u_r(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_z(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \frac{1}{4}\|u(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|\varphi_r\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\varphi_z\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + (\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{1}{2\varepsilon_2})\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + (\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{a^4}{4\varepsilon_3} + \frac{1}{4})\|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& + (\frac{\varepsilon_2 a^4}{4} + \frac{\varepsilon_3}{2} + \frac{5}{4})\|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}, \qquad (3.2.15)
\end{aligned}$$

en choisissant $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_2 = 1$, et $\varepsilon_3 = 2a^4$on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|u_t(r,z,t)\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|u(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \|u_r(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|u_z(r,z,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & K(\|\varphi_r\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|\varphi_z\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& + \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}), \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

où

$$K = \max\left\{10, 5a^4 + 5\right\}.$$

En ajoutant la quantité $K(\|u_r\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|u_z\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)})$ à droite de (3.2.16) donne :

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|u(r,z,\tau)\|^2_{W^1_{,2.\rho}(\Omega)} \\ \leq \; & K(\|u\|^2_{W^{1,0}_{,2.\rho}(Q^\tau)} + \|\varphi\|^2_{W^1_{,2\rho}(\Omega)} + \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}), \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

maintenant appliquer le lemme de Gronwall du chapitre un à l'inégalité (3.2.17) nous obtenous :

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2_{L^2_{\rho(Q^\tau)}} + \|u(r,z,\tau)\|^2_{W^1_{2,\tau}(\Omega)} \\ \leq \; & Ke^{KT}\left\{\|f\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \|\varphi\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)}\right\}, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

en prenant la plus petite borne supérieure du coté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0,T]$ on obtient l'inégalité énergétique souhaitée (3.2.1) avec $\lambda = \sqrt{K}e^{K\frac{T}{2}}$, d'où découle l'unicité du problème donné $(3.1.1) - (3.1.4)$. ■

Proposition 3.1 *L'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est fermable .*

Preuve Soit $u_n \in D(L)$ est une suite telle que

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } E, \tag{3.2.19}$$

et

$$Lu_n \longrightarrow \underset{n\longrightarrow\infty}{\mathcal{F}} = (f,\varphi) \quad \text{dans } F, \tag{3.2.20}$$

il faut alors montrer que $f = 0$, et $\varphi = 0$. La convergence de u_n vers 0 dans E implique que

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } D'(Q), \tag{3.2.21}$$

où $D'(Q)$ est l'espace des distribution sur Q de la continuité de dérivation de $D'(Q)$ en $D'(Q)$ (3.2.21) implique que

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } D'(Q), \tag{3.2.22}$$

mais depuis

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^2_\rho(Q). \tag{3.2.23}$$

Puis

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } D'(Q), \tag{3.2.24}$$

en vertu de l'unicité de la limite en $D'(Q)$, nous concluons que $f = 0$ de (3.2.20) , nous avons

$$lu_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{dans } W^1_{2,\rho}(\Omega), \tag{3.2.25}$$

et du fait que l'injection canonique de $W^1_{2,\rho}(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$ est continue , alors (3.2.25) implique :

$$lu_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{dans } D'(\Omega), \tag{3.2.26}$$

de plus , puisque

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } E,$$

et

$$\|lu_n\|_{W^1_{2,\rho}(\Omega)} \leq \|u_n\|_E \qquad \forall n.$$

Puis, nous avons

$$lu_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } W^1_{2,\rho}(\Omega), \tag{3.2.27}$$

par conséquent,

$$lu_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } D'(\Omega), \tag{3.2.28}$$

en vertu de l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$ nous concluons de (3.2.26) et (3.2.28) que

$$\varphi = 0,$$

par conséquent , l'opérateur L est fermable. Soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, et $D(\overline{L})$ son domaine de définition. L'inégalité (3.2.1) peut être étendue à une solution forte aprés à avoir passé à limite, que nous avons :

$$\|u\|_E \leq \lambda \left\|\overline{L}u\right\|_F, \text{ pour tout } u \in D(L),$$

■

Proposition 3.2 *En déduise* $R(\overline{L})$ *est fermé dans* F, *et que* $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$.

Définition 3.1 *La solution de l'équation d'opérateur*

$$\overline{L}u = (f, \varphi),$$

est appelée solution forte de problème (3.1.1) $-$(3.1.4).

3.3 Existence de la solution

Nous donnons maintenant le résultat principal de l'existence de la solution du problème(3.1.1)$-$(3.1.4).

Théorème 3.2 *Pour tout*

$$\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F \quad (f \in L^2_\rho(Q),\ \varphi \in W^1_{2,\rho}(\Omega)),$$

il existe une solution forte unique $u \in \overline{L}^{-1}(\mathcal{F}) = \overline{L^{-1}}(\mathcal{F})$, *de problème unique* (3.1.1) $-$ (3.1.4).

Preuve Pour prouver que le problème (3.1.1) $-$ (3.1.4) a une solution forte unique, pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, il suffit de prouver que le rang $R(L)$ de l'opérateur L est dense en F, pour cela, nous devons prouver la proposition suivante. ■

Proposition 3.3 *Si pour certains fonction* $g \in L^2_\rho(Q)$ *et tout,* $u \in D_0(L) = \{u/u \in D(L) : lu = 0\}$ *nous avons*

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \tag{3.3.1}$$

donc g *s'anulle presque partout dans* Q.

Preuve En utilisant le fait que la relation (3.3.1) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, nous pouvons l'exprimer sous une forme particulière. Considérons d'abord la fonction h définie par

$$h(r,z,t) = \int_t^T g(r,z,\tau)d\tau - \int_t^T u_\tau(r,z,\tau)d\tau, \tag{3.3.2}$$

soit u_t une solution de l'équation

$$u_t - \Im_r^2(\rho u_t) = h(r,z,t), \tag{3.3.3}$$

et soit

$$u = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t u_r d\tau & s \leq t \leq T, \end{cases} \tag{3.3.4}$$

alors

$$g(r,z,t) = u_t - u_{tt} + \Im_r^2(\rho u_{tt}). \tag{3.3.5}$$

D'après la définition de $D(L)$ la fonction $u_t \in L_\rho^2(Q)$ pour montrer que $g \in L_\rho^2(Q)$ nous devons montrer que $-u_{tt} + \Im_r^2(\rho u_{tt}) \in L_\rho^2(Q)$ par en utilisant les opérateurs de moyenne J_ϵ de la forme

$$(J_\epsilon u)(r,z,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right)u(r,z,s)ds,$$

où $W \in C_0^\infty(0,T), W(t) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} W(t)dt = 1$ en appliquant les opérateurs J_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation (3.3.3) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon h + \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \left(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)\right) - J_\varepsilon(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \right\}, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

il résulte de (3.3.6) que

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \\
\leq \;& 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon h \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \\
& +2 \left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) - J_\varepsilon(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 ,
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

utilisation des propriétés des opérateurs J_ε, il résulte de (3.3.7) que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon h \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2 .$$

Puisque $J_\varepsilon v \longrightarrow v$ comme $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $L_\rho^2(Q)$, et $\left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)) \right\|_{L_\rho^2(Q)}^2$est borné, nous concluons que $g \in L_\rho^2(Q)$.

Remplacent maintenant g par sa représentation (3.3.5) en relation (3.3.1), nous avons

$$\begin{aligned}
& (ru_t, u_t)_{L^2(Q)} - (ru_t, \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} - (ru_t, u_{zz})_{L^2(Q)} \\
& -(ru_{tt}, u_t)_{L^2(Q)} + (ru_{tt}, \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} + (ru_{tt}, u_{zz})_{L^2(Q)} \\
& +(r\Im_r^2(\rho u_{tt}), u_t)_{L^2(Q)} - (r\Im_r^2(\rho u_{tt}), \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} \\
& -(r\Im_r^2(\rho u_{tt}), u_{zz})_{L^2(Q)} \\
= \;& 0,
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

conditions (3.1.3) et (3.1.4), la forme spéciale du u donnée par (3.3.3) et (3.3.4) et une intégration par parties pour chaque terme de (3.3.8) donne :

$$\begin{aligned}
& (ru_t, u_t)_{L^2(Q)} \\
= \;& \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_t^2 drdzdt \\
= \;& \|u_t\|_{L_\rho^2(Q_s)}^2 ,
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$
\begin{aligned}
& -(ru_t, \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} \\
= \;& -\int_s^T \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a (ru_r)_r u_t dr\right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt \\
= \;& -\int_0^b \int_s^T \left[ru_r u_t\right]_0^a dtdz + \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_r u_{tr} drdzdt \\
& \text{d'aprés les condition de Neumann on a} \\
= \;& -\int_0^b \int_s^T \left[au_r(a,z,t)u_t(a,z,t) - 0u_r(0,z,t)u_t(0,z,t)\right] dtdz \\
& + \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_r u_{tr} drdzdt \\
= \;& \int_0^b \int_0^a (\int_s^T ru_r u_{tr} dt) drdz \\
= \;& \int_0^b \int_0^a (\int_s^T r \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left|u_r(r,z,t)\right|^2 dt) drdz \\
= \;& \frac{1}{2} \int_\Omega ru_r^2(r,z,T) drdz - \frac{1}{2} \int_\Omega ru_r^2(r,z,s) drdz \\
= \;& \frac{1}{2} \left\|u_r(r,z,T)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(ru_t, u_{zz})_{L^2(Q)} \\
= \;& -\int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_t u_{zz} drdzdt \\
= \;& -\int_s^T \int_0^a \underbrace{\left[\int_0^b ru_t u_{zz} dz\right]}_{\text{intégration par partie}} drdt \\
= \;& -\int_0^a \int_s^T \left[ru_t u_z\right]_0^b dtdr + \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_{tz} u_z drdzdt \\
= \;& \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_{tz} u_z drdzdt \\
= \;& \frac{1}{2} \int_\Omega ru_z^2(r,z,T) drdz - \frac{1}{2} \int_\Omega ru_z^2(r,z,s) drdz \\
= \;& \frac{1}{2} \left\|u_z(r,z,T)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(ru_{tt}, u_t)_{L^2(Q)} \\
= \; & -\int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{tt} u_t \, dr dz dt \\
= \; & -\int_0^b \int_0^a r \left(\int_s^T u_{tt} u_t dt \right) dr dz \\
= \; & -\int_0^b \int_0^a r \left(\int_s^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| u_t(r,z,t) \right|^2 dt \right) dr dz \\
= \; & -\frac{1}{2} \int_\Omega r u_t^2(r,z,T) dr dz + \frac{1}{2} \int_\Omega r u_t^2(r,z,s) dr dz \\
= \; & \frac{1}{2} \left\| u_t(r,z,s) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} ,
\end{aligned} \tag{3.3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
& (ru_{tt}, \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \underbrace{\left[\int_s^T (ru_r)_r u_{tt} dt \right]}_{\text{intégration par partie}} dr dz \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[(ru_r)_r u_t \right]_s^T dr dz - \int_s^T \int_0^b \int_0^a (ru_r)_r u_t \, dr dz dt \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[(ru_r(r,z,T))_r u_t(r,z,T) - (ru_r(r,z,s))_r u_t(r,z,s) \right] dr dz \\
& -\int_s^T \int_0^b \int_0^a (ru_r)_r u_t \, dr dz dt \\
= \; & -\int_s^T \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a (ru_r)_r u_t dr \right]}_{\text{intégration par partie}} dz dt \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[r u_{rt} u_t \right]_0^a dt dz + \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{tr}^2 \, dr dz dt \\
& \text{d'aprés les condition de Neumann on a} \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[a u_{rt}(a,z,t) u_t(a,z,t) - 0 u_{rt}(0,z,t) u_t(0,z,t) \right] dt dz \\
& + \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{tr}^2 \, dr dz dt \\
= \; & \left\| u_{tr} \right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} ,
\end{aligned} \tag{3.3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
& (ru_{tt}, u_{zz})_{L^2(Q)} \\
= \;& \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{tt} u_{zz} drdzdt \\
= \;& \int_0^b \int_0^a \underbrace{\left[\int_s^T r u_{tt} u_{zz} dt\right]}_{\text{intégration par partie}} drdz \\
= \;& \int_0^b \int_0^a \left[r u_{zz} u_t\right]_s^T drdz - \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{zz} u_t drdzdt \\
= \;& \int_0^b \int_0^a \left[r u_{zz}(r,z,T) u_t(r,z,T) - r u_{zz}(r,z,s) u_t(r,z,s)\right] drdz \\
& - \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{zz} u_t drdzdt \\
= \;& - \int_s^T \int_0^a \underbrace{\left[\int_0^b r u_{zz} u_t dz\right]}_{\text{intégration par partie}} drdt \\
= \;& - \int_0^a \int_s^T \left[r u_t u_{tz}\right]_0^b drdt + \int_s^T \int_0^b \int_0^a r u_{tz}^2 drdzdt \\
= \;& - \int_0^a \int_s^T \left[r u_t(r,b,t) u_{tz}(r,b,t) - r u_t(r,0,t) u_{tz}(r,0,t)\right] drdt + \int_{Q_s} r u_{tz}^2 drdzdt \\
= \;& \|u_{tz}\|_{L_\rho^2(Q_s)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{3.3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
& (r\Im_r^2(\rho u_{tt}), u_t)_{L^2(Q)} \\
= \;& \int_s^T \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a r \Im_r^2(\rho u_{tt}) u_t dr\right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt \\
= \;& \int_0^b \int_s^T \left[\Im_r(\rho u_t) \Im_r^2(\rho u_{tt})\right]_0^a dtdz - \int_s^T \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_t) \Im_r(\rho u_{tt}) drdzdt \\
= \;& \\
= \;& - \int_0^b \int_0^a \left(\int_s^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left|\Im_r(\rho u_t)\right|^2 dt\right) drdz \\
= \;& -\frac{1}{2} \int_\Omega (\Im_r(\rho u_t(r,z,T))^2 drdz + \frac{1}{2} \int_\Omega (\Im_r(\rho u_t(r,z,s))^2 drdz \\
= \;& \frac{1}{2} \left\|\Im_r(\rho u_t(r,z,s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{3.3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(r\Im_r^2(\rho u_{tt}), \frac{1}{r}(ru_r)_r)_{L^2(Q)} \\
= \; & -\int_s^T \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a (ru_r)_r \Im_r^2(\rho u_{tt}) dr\right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[ru_r \Im_r^2(\rho u_{tt})\right]_0^a dtdz + \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_r \Im_r(\rho u_{tt}) drdzdt \\
& \text{D'aprés les condition de Neumann on a} \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[ru_r(a,z,t)\Im_r^2(\rho u_{tt}) - 0u_r(0,z,t)\Im_r^2(\rho u_{tt})\right] dtdz \\
& +\int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_r \Im_r(\rho u_{tt}) drdzdt \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \underbrace{\left[\int_s^T ru_r \Im_r(\rho u_{tt}) dt\right]}_{\text{intégration par partie}} drdz \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[ru_r \Im_r(\rho u_t)\right]_s^T drdz - \int_s^T \int_0^b \int_0^a ru_{rt} \Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[ru_r(r,z,T)\Im_r(\rho u_t) - ru_r(r,z,s)\Im_r(\rho u_t)\right] drdz - \int_{Q_s} ru_{rt} \Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
= \; & -(u_{rt}, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q_s)},
\end{aligned}
\tag{3.3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(r\Im_r^2(\rho u_{tt}), u_{zz})_{L^2(Q)} \\
= \; & -\int_s^T \int_0^b \underbrace{\left[\int_0^a r u_{zz} \Im_r^2(\rho u_{tt}) dr\right]}_{\text{intégration par partie}} dzdt \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[\Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r^2(\rho u_{tt})\right]_0^a dtdz + \int_s^T \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_{tt}) drdzdt \\
= \; & -\int_0^b \int_s^T \left[\Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r^2(\rho u_{tt}) - \Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r^2(\rho u_{tt})\right] dtdz \\
& +\int_s^T \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_{tt}) drdzdt \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \underbrace{\left[\int_s^T \Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_{tt}) dt\right]}_{\text{intégration par partie}} drdz \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[\Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_t)\right]_s^T drdz - \int_s^T \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_{zzt}) \Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
& \text{D'aprés les condition intégrales on a} \\
= \; & \int_0^b \int_0^a \left[\Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_t) - \Im_r(\rho u_{zz}) \Im_r(\rho u_t)\right] drdz \\
& -\int_s^T \int_0^b \int_0^a \Im_r(\rho u_{zzt}) \Im_r(\rho u_t) drdzdt \\
= \; & -\int_s^T \int_0^a \underbrace{\left[\int_0^b \Im_r(\rho u_{zzt}) \Im_r(\rho u_t) dz\right]}_{\text{intégration par partie}} drdt \\
= \; & -\int_0^a \int_s^T \left[\Im_r(\rho u_{zt}) \Im_r(\rho u_t)\right]_0^b dtdr + \int_{Q_s} (\Im_r^2(\rho u_{zt}))^2 drdzdt \\
= \; & \|\Im_r(\rho u_{zt})\|^2_{L^2(Q_s)}, \qquad (3.3.17)
\end{aligned}
$$

substitution d'égalités (3.3.9) – (3.3.17) en (3.3.8) donne

$$
\begin{aligned}
& \| \; u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \frac{1}{2} \| \; u_r(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \; u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\
+ \; & \| \; u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \; \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2(Q_s)} + \frac{1}{2} \| \; u_z(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
+\frac{1}{2} \; & \| \; u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| \; \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
= \; & (u_{rt}, \Im_r(\rho u_t))_{L^2_\rho(Q_s)}. \qquad (3.3.18)
\end{aligned}
$$

Une application de l'inégalité de Cauchy-ε au côté droit des résultats (3.3.18) donne

$$\begin{aligned}
& \| \quad u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \frac{1}{2} \| u_r(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\
+ & \| \quad u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2(Q_s)} + \frac{1}{2} \| u_z(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
+\frac{1}{2} & \| \quad u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \frac{1}{2} \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\
& \leq \frac{a}{2} \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2(Q_s)},
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

si dansl'inégalité (3.3.19) ou laisse le terme $\| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)}$ tomber dans la partie gauche ou ajoute le terme $\| u_z \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_r \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)}$à droite nous l'obtenons a partir de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} & \| \quad u_r(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2(Q_s)} \\
+\frac{1}{2} & \| \quad u_z(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2} \| \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \frac{a}{2} \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2(Q_s)} + \| u_z \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_r \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)},
\end{aligned}$$

puis nous avons

$$\begin{aligned}
& \| \quad u_r(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2(Q_s)} \\
+ & \| \quad u_z(r,z,T) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
& \leq A(\| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2_{(Q_s)}} + \| u_z \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_r \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)},
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

où

$$A = \max\{2, a\}.$$

Nous définissons maintenant la fonction

$$\eta(r,z,t) = \int_t^T u_r(r,z,\tau)d\tau,$$

puis nous avons

$$\begin{aligned} \eta(r,z,t) &= u(r,z,T) - u(r,z,t), \eta(r,z,s) \\ &= u(r,z,T), \end{aligned}$$

par conséquent l'inégalité (3.3.20) devient

$$\begin{aligned} &\| \quad u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ + &\| \quad \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \eta_r(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ + &\| \quad \eta_z(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ + &\| \quad \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ &\leq \quad 2A \left\{ \begin{array}{c} (T-s) \| \eta_r(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \eta_r(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ +(T-s) \| \eta_z(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \eta_z(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ + \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

de cette derniére inégalité nous obtenons

$$\begin{aligned} &\| \quad u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ &\quad +(1-2A(T-s)) \left\{ \| \eta_r(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \eta_z(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \right\} \\ + &\| \quad u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ &\leq \quad 2A \left\{ \begin{array}{c} \| \eta_r(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \| + \| \eta_z(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ + \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

si $s_0 > 0$ satisfait $1 - 2A(T - s_0) = \frac{1}{2}$ alors (3.3.21) implique que

$$\begin{aligned} &\| \quad u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ + &\| \quad \eta_r(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \eta_z(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ + &\| \quad u_t(r,z,s) \|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \| \Im_r(\rho u_t(r,z,s)) \|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq &\ 4A \left\{ \begin{array}{c} \| \eta_r(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \eta_z(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ + \| \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Pour tout $s \in [T - s_0, T]$ soit

$$B = \| u_{tr} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| u_{tz} \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \Im_r(\rho u_{zt}) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)},$$

et

$$\begin{aligned} W(s) \quad &= \quad \| \eta_r(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \| \eta_z(r,z,t) \|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ &+ \quad \| \quad \Im_r(\rho u_t) \|^2_{L^2(Q_s)} + \| u_t \|^2_{L^2_\rho(Q_s)}, \end{aligned}$$

de (3.3.22) nous obtenons

$$B - \frac{dW}{ds} - 4AW(s) \leq 0,$$

d'où il résulte que

$$-\frac{d}{ds}(W(s)\exp(4As) \leq 0, \tag{3.3.23}$$

prendre compte de $W(T) = 0$ et en réalisant une intégration de (3.3.23) par rapport à t sur $[s, T]$ on obtient

$$W(s)\exp(4As)) \leq 0. \tag{3.3.24}$$

Par conséquent nous déduisons de (3.3.24) que $g \equiv 0$ presque par tout sur $Q_{T-s_0} = \Omega \times [T - s_0 T]$ puisque s est indépendant de l'origine nous utilisons la même procédure un nombre fini de fois pour montrer que $g \equiv 0$ sur $Q = \Omega \times [0, T]$ cela permet de prouver la proposition (3.3.1) soit

$\Psi = (g, \phi) \in R(L)^{\perp}$ tel que

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2_\rho(Q)} + (lu, \phi)_{W^1_{2,P(\Omega)}} = 0, \tag{3.3.25}$$

mettre $u \in D_0(L)$ dans (3.3.25) nous avons

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \quad \forall u \in D_0(L), \tag{3.3.26}$$

en vertu de proposition (3.3.1) nous concluons de (3.3.26) que $g = 0$.

Ainsi l'équation (3.3.25) prend la forme

$$(lu, \phi)_{W^1_{2,P(\Omega)}} = 0, \tag{3.3.27}$$

mais comme l'image $R(l)$ de l'opérateur de trace l est dense dans $W^1_{2,p(\Omega)}$ d'où

$$\phi \equiv 0,$$

par conséquent

$$\Psi \equiv 0,$$

cela signifie que

$$\mathbb{R}(L)^{\perp} = \{0\},$$

ceci complète la preuve du théoréme (3.2). ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode de l'estimation à priori pour montrer l'unicité d'un problème mixte avec une condition non locale et en prouvé l'existence.

Notre objectif ultime aprés ce travail de ce mémoire est de traiter d'autres problèmes mixtes non locaux plus compliqués non linéaires avec conditions non locales.

Bibliographie

[1] .A. Bouziani, mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. J. Appl.Math. Stoch. Anal. 9, 323-330 (1996).

[2] A.A.Dezin, théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh. Math. Naouk.14.N 3. (37). 22-73. 1959.

[3] .A.V. Kartynnik, three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second order parabolic equation. Differ. Equ 26, 1160-1162 (1990).

[4] .A.M. Nakushev, on certain approximate method for boundary value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics. Differenentsialnie Uravnenia. 1982 ; 18 : 72-81.

[5] I.G.Petrovsky. Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentialgeichungenin gebit der nichtanalystischen funktionen, Bull. Univ díetat, Moscow, (1938),N° 7, 1-74.

[6] J.Leray., lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficiens, Princeton,Justfor adv. Study, 1952.

[7] .L.A. Muravei and A.V. Philinovskii, on a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation. Matem. zametki. 1993 54 : 98-116.

[8] L.Garding., cauchyís problem for hypebolic equations, University of Chicago, Lecture notes,1957

[9] L.S. Pulkina, a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. electron. J. Diff. Eqns. 1999 ; 45 : 1-6.

[10] N.I. Yurchuk, mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, differential equations, 22, (1986), pp. 1457-1463..

[11] .O.A.Ladyzenskaya , solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obs. 7, 1958

[12] O.A.Ladyzhenskaya , the boundary value problems of Mathematical physics, SpringerVerlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[13] .S.A. Beilin, On a mixed nonlocal problem for a wave equation.J. Electron. Diff. Eqns. 2006 ; 103 : 1-10

[14] S. Mesloub and A. Bouziani, on a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol 22N° 3 (1999), 511-519.

[15] S. Mesloub and A. Bouziani, mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equationwith Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch.Anal. 15(3), 291-300 (2002).

[16] S. Mesloub and A. Bouziani, probléme mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classed'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull.Classe Sci. Acad. R. Belg. 6, 59-69 (1998).

[17] S. Mesloub and N. Lekrine, on a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta.Sci. Math. (Szeged). 2004 ; 70 : 65-75.

[18] S. Mesloub and S.A. Messaoudi, a three point boundary value problem with a nonlocal condition for a hyperbolic equation. Elect. J. Diff. Eqns.2002 ; 62 : 1-13.

[19] S. Mesloub and S.A. Messaoudi, a nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Elect. J. Di§. Eqns. 2003 ; 30 : 1-17.

[20] S. Mesloub, on a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. 2010 ; 68 : 2594-2607

[21] S. Mesloub, mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation. Math. Meth. Appl. Sci. 2010, 33 57-70, DOI : 10.1002/mma.1150.

[22] S. Mesloub, on a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci.Math. (Szeged) 67 (2001), 203-219

[23] S. Mesloub, a nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. J. Math. Anal. Appl. 2006 ; 316 : 189-209.