



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Larbi Tébessi - Tébessa  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département : Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de *MASTER*  
Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Option : EDP et Applications

Thème

**Etude d'un type de synchronisation IHFPS des systèmes chaotiques**

Présenté Par:

- *SEKHRI* Bouthayna
- *GHRIEB* Lattra

Devant le jury :

- <i>HANNACHI</i> Fareh	<i>MCA</i>	Université de Tébessa	président
- <i>MEZHOUD</i> Rachida	<i>MAA</i>	Université de Tébessa	Examinateur
- <i>GASRI</i> Ahlem	<i>MCB</i>	Université de Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 25/06/2020

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نشكر الله العلي القدير الذي أنعم علينا بنعمة العقل والدين، القائل في محكم التنزيل " وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ (76) "

سورة يوسف

وقال رسول الله ﷺ: "من صنع إليكم معروفاً فكافئوه، فإن لم تجدوا ما تكافئونه به فادعوا له حتى تروا أنكم كافئتموه"

رواه أبو داوود

وعن أبي هريرة - رضي الله عنه - قال ﷺ: "مَنْ لَا يَشْكُرُ النَّاسَ، لَا يَشْكُرُ اللَّهَ"



## الإهداء

إلى من جَرَعَ الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب, إلى من كلت أنامله ليقدّم لنا السعادة,

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم إلى من دفعني

إلى العلم وبه أزداد افتخار والدي العزيز: **ص. الشريف**

أطال الله في عمرك.

إلى من ركع العطاء أمام قدميها وأعطتنا من دمها وروحها وعمرها حباً وتصميماً ودفع لغدٍ أجمل

إلى الغالية التي لا نرى الأمل إلا من عينيها أُمي الحبيبة: **ص. خضرة**

شفاك الله وأطال في عمرك.

إلى من علموني علم الحياة, إلى من أظهروا لي ماهو أجمل من الحياة ,

إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات إخوتي :

**مراد, بسمة, إسلام, أيمن**

إلى من جعلهم الله أخواتي في الله, إلى من سأفتقدهن صديقاتي المقربات:

**العطرة, خولة, كوثر, نجاة, صباح .**

إلى كل من ساعدني في انجاز هذا العمل ...شكري الجزيل وامتناني.



## الإهداء

الحمد و الشكر لله الذي وفقنا على انجاز وإتمام هذا العمل المتواضع الذي اهديه لمن كانوا مدرستي الأولى:

إلى من علمني أن للنجاح قيمة ومعنى وأوصلني إلى ما أنا عليه أبي الحبيب "عبد الحميد"

إلى من علمتني أن الحب ليس له عمر وان العطاء ليس له حدود أي الغالية "مسعودة"

حفظكم الله و أطال في عمركم

إلى إخوتي الذين هم مصدر قوتي "وليد ورضا"

إلى صغيرة العائلة أختي "هناء"

إلى من عملت معي بكد بغية إتمام هذا العمل صديقتي "بثينة"

إلى كافة أهلي كلا باسمه وصفته ومكانته خاصة لمن كان يدعمني ويسانديني

إلى أخي وابن عمي "رمزي"

رحمة الله عليه و أرجو الدعاء له بالرحمة و الغفران

ولا أنسى من جمعني بهم منبر العلم و الصداقة صديقتي بدون استثناء

ولجميع أساتذتي اللذين رافقوني طوال مستواي الدراسي

أسأل الله عز وجل أن يوفقنا لما فيه خيرنا



# Remerciements

*Nous tenons à remercier tout d'abord « Allah » tout puissant qui nous donné  
Durant tous ces années la santé, le courage et la foi en nous-mêmes pour réaliser ce  
mémoire.*

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements vers notre  
encadreur **DR-GASRI AHLEM.***

*Nous tenons à la remercier pour ses efforts pour compléter ce mémoires, malgré les  
circonstances aux quelles nous avons été confrontés.*

*Nous remercions également tout particulièrement les jurés d'avoir alloué le temps  
nécessaire à lire et corriger ce mémoire et les membres du département de **M.I** en  
générales.*



## Résumé

Aujourd'hui, les recherches portant sur la synchronisation du chaos se sont généralisées du fait de ses diverses applications notamment dans le domaine des communications, les systèmes biologiques, les réactions chimiques, etc. Cependant, l'étude des problèmes inverses de la synchronisation des systèmes dynamiques est un sujet qui vient d'être traité très récemment. L'étude des problèmes inverses est une idée séduisante et importante, et elle donne naissance à des nouveaux schémas de synchronisation améliorant la sécurité dans les télécommunications.

Au fil des années, plusieurs schémas de synchronisation des systèmes dynamiques hyperchaotiques ont été développés. Parmi ces schémas on mentionne la synchronisation (**HFPS**) « **Hybrid Function Projective Synchronization** » des systèmes chaotiques qui est largement considérée. Par conséquent, nous étudions le problème inverse de ce schéma qui produit un nouveau type de synchronisation notée (**IHFPS**). Le résultat tiré est prouvé en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov et la simulation numérique a mis en évidence l'efficacité du schéma proposé ici.

### Mots clés:

Chaos, système chaotique, systèmes dynamiques, Stabilité de Lyapunov, synchronisation, Erreur de synchronisation, vecteur de contrôle, contrôleur actif, maître, esclave, synchronisation projective à fonction hybride inverse.

## *Abstract*

Today, research deals with the synchronization of chaos have been generalized due to its various applications notably in the field of communications, biologic systems, chemical reactions, ect. However, the study of the inverse problems of the synchronization of dynamical systems is a subject which has just been treated very recently. The study of the inverse problems is an attractive and important idea, and it gives rise to new synchronization schemes improving security in telecommunications.

Over the years, several synchronization schemes for hyperchaotic dynamical systems have been developed. Among these schemes we mention the synchronization (**HFPS**) "**Hybrid Function Projective Synchronization**" for chaotic systems which is widely considered. Consequently, we study the inverse problem of this scheme which produces a new type of synchronization noted (**IHFPS**). The result has been proven using Lyapunov's stability theory and numerical simulation highlighted the effectiveness of the scheme proposed herein.

### Key words:

Chaos, chaotic systems, dynamical systems, Lyapunov stability, synchronization, Synchronization Error, Vector Controllers, active controller, master, slave, Hybrid Function Projective Synchronization.

## المخلص

حالياً، تم تعميم البحث عن تزامن الفوضى بفضل تطبيقاتها المختلفة لا سيما في مجال اتصالات الأنظمة البيولوجية والتفاعلات الكيميائية.. الخ. ومع ذلك فإن دراسة المشاكل العكسية لمزامنة الأنظمة الديناميكية هي موضوع تم التعامل معه مؤخرًا. تعتبر دراسة المشكلات العكسية فكرة جذابة وهامة، وتؤدي إلى مخططات التزامن الجديدة التي تقوم بتحسين الأمن في الاتصالات.

على مر السنين، تم تطوير العديد من مخططات التزامن للأنظمة الديناميكية المفرطة. من بين هذه المخططات نذكر التزامن (HFPS) "التزامن الإسقاطي للوظيفة الهجينة" للأنظمة الفوضوية والتي يتم الاهتمام بها على نطاق شاسع. و بالتالي فإننا ندرس المشكلة العكسية لهذا المخطط والتي تنتج نوعًا جديدًا من المزامنة الملحوظة (IHFPS). تم إثبات النتيجة باستخدام نظرية الاستقرار لليابونوف والمحاكاة العددية التي سلطت الضوء على فعالية المخطط المقترح هنا.

الكلمات المفتاحية:

الفوضى، النظام الفوضوي، النظام الحركي، استقرار ليابونوف، المزامنة، خطأ المزامنة، تحكم نشط، شعاع المراقبة، السيد، العبد، المزامنة الإسقاطية للوظيفة الهجينة العكسية.

# Table des matières

Notations . . . . .	ii
Liste des figures . . . . .	iii
Introduction générale . . . . .	iv
<b>1 Préliminaires sur les systèmes dynamiques</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Définitions des systèmes dynamiques . . . . .	1
1.3 Systèmes autonomes et non-autonomes . . . . .	3
1.4 Comportement des systèmes dynamiques . . . . .	3
1.4.1 Espace de phase . . . . .	3
1.4.2 Espace d'état . . . . .	3
1.4.3 Trajectoires et orbites . . . . .	3
1.5 Classification des systèmes dynamiques . . . . .	4
1.5.1 Systèmes dynamiques à temps discret . . . . .	4
1.5.2 Systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	5
1.6 Linéarisation des systèmes dynamiques . . . . .	11
1.6.1 Linéarisation des systèmes dynamiques continus . . . . .	11
1.6.2 Linéarisation des systèmes dynamiques discrets . . . . .	12
1.7 Conclusion . . . . .	12
<b>2 Initiation au chaos dans les systèmes dynamiques</b>	<b>13</b>
2.1 Historique . . . . .	13
2.2 Définitions du chaos . . . . .	14
2.3 Caractéristiques du chaos . . . . .	14
2.3.1 La non-linéarité . . . . .	14
2.3.2 Le déterminisme . . . . .	15

2.3.3	Aspect aléatoire . . . . .	15
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	15
2.4	Les attracteurs . . . . .	16
2.4.1	Ensemble invariant . . . . .	16
2.4.2	Définitions d'attracteur . . . . .	16
2.4.3	Bassin d'attracteur . . . . .	17
2.4.4	Les propriétés d'un attracteur . . . . .	17
2.5	Les différents types d'attracteurs . . . . .	17
2.5.1	Les attracteurs réguliers . . . . .	17
2.5.2	Les attracteurs étranges . . . . .	18
2.5.3	Différents types d'attracteurs chaotiques (étranges) . . . . .	19
2.6	Détection du chaos . . . . .	20
2.6.1	Les exposants de Lyapunov . . . . .	20
2.6.2	Dimension fractale . . . . .	22
2.7	Transitions vers le chaos . . . . .	23
2.7.1	Cascade de doublements de période . . . . .	24
2.7.2	L'intermittence . . . . .	24
2.7.3	La quasi-périodicité . . . . .	24
2.8	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu . . . . .	24
2.9	Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques . . . . .	28
2.10	Conclusion . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Définitions de la synchronisation . . . . .	32
3.3	Différents types de synchronisation . . . . .	34
3.3.1	Synchronisation complète . . . . .	34
3.3.2	Anti-synchronisation . . . . .	35
3.3.3	Synchronisation généralisée . . . . .	35
3.3.4	Synchronisation projective . . . . .	35
3.3.5	Synchronisation Q.S . . . . .	36
3.3.6	Synchronisation HPS . . . . .	36
3.3.7	Synchronisation HFPS . . . . .	37
3.4	Méthodes de synchronisation . . . . .	37
3.4.1	Méthode du contrôleur actif . . . . .	37

3.4.2	La méthode backstepping . . . . .	39
3.4.3	Exemple numérique . . . . .	40
3.5	conclusion . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Méthode et application pour un type de synchronisation IHFPS des systèmes chaotiques</b>	<b>46</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.2	Description des systèmes maître-esclave chaotiques . . . . .	47
4.3	Définition de la synchronisation <b>IHFPS</b> . . . . .	47
4.4	Méthode de la synchronisation <b>IHFPS</b> . . . . .	47
4.5	Application de la synchronisation IHFPS pour deux systèmes chaotiques en temps continu . . . . .	49
4.6	conclusion . . . . .	51
	Conclusion générale . . . . .	52

---

## Notations

$\mathbb{R}^n$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\dot{x}_t = \frac{dx}{dt}$	Dérivée de la variable $x$ par rapport au temps
$A$	Matrice constant
$x_0$	L'état initial de la variable $x$ .
$x^*$	Point fixe.
$x_k$	L'état de $x$ au temps $t = kT$ .
$x_{k+1}$	L'état de $x$ au temps $t = (k + 1)T$ .
$J_f(x)$	La matrice <b>Jacobienne</b> .
$\mathbb{Z}^+$	Ensemble des nombres entier positif.
$\text{Im}(\lambda_i)$	Partie réel du valeur propre.
$\text{Re}(\lambda_i)$	Partie imaginaire du valeur propre.
$\  \cdot \ $	La norme euclidienne.
$V(x)$	Fonction de <b>Lyapunov</b> .
$d$	La distance.
$f^{(j)}$	$j$ éme itération de $f$ .
$A$ et $B(A)$	Attracteur et Bassin d'attracteur
$e(t)$	Erreur.
$H(x)$	Fonction de <b>Heaviside</b> .
$v$	Dimension de corrélation.
$D_L$	Dimension de <b>Lyapunov</b> .
$\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$	Système chaotique maître et Système chaotique esclave

---

## Liste des figures

<b>FIG.1.1</b>	Classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$ .....	7
<b>FIG.1.2</b>	Différents types de stabilité de Lyapunov.....	9
<b>FIG.2.1</b>	L'aspect aléatoire du système de Rössler.....	17
<b>FIG.2.2</b>	Les attracteurs réguliers : (a) Points fixes attracteurs, (b) Cycles limites, (c) Un tore....	20
<b>FIG.2.3</b>	Attracteur étrange de Lorenz.....	27
<b>FIG.2.4</b>	Attracteur étrange de Rössler.....	30
<b>FIG.2.5</b>	Projection plane de l'attracteur hyperchaotique de Rössler en 4-D.....	31
<b>FIG.3.1</b>	Le couplage unidirectionnelle.....	35
<b>FIG.3.2</b>	Le couplage bidirectionnelle.....	35
<b>FIG.4.1</b>	Évolution du temps des erreurs de la synchronisation <b>IHFPS</b> entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2).....	54

---

## *Introduction générale*

D'un point de vue historique, la théorie des systèmes dynamiques est née avec les travaux de Poincaré autour des années **1881-1890**, notamment avec les deux grandes mémoires (sur les courbes définies par des équations différentielles, sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique) et prolongée par quelques mathématiciens et physiciens théoriciens autour des années **1930**.

Les systèmes dynamiques concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais progressivement, au fur et à mesure de la diversification des mathématiques, Les systèmes dynamiques se sont considérablement élargis. Ils comprennent aujourd'hui l'étude des action continues de groupes, dont l'intérêt réside dans ses applications en géométrie, et la théorie de la mesure et qui trouve ses échos en probabilités.

Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales et imprédictible à long terme. Et la théorie du Chaos a vu le jour dans les travaux d'**Henri Poincaré** à la fin du **XIXe** siècle et c'est dans les années soixante qu'elle fut redécouverte après la publication d'un article qui allait révolutionner le monde des sciences [1]. Le chaos est devenu un champ d'exploration de la science.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Au cours des dernières années, la synchronisation des systèmes chaotiques a attiré beaucoup d'attention en raison de ses larges applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos et hyperchaos dans les systèmes dynamiques, telles que : la méthode de contrôleur actif (adaptif), la méthode Feedback, la méthode de backstepping design et la méthode de contrôleur en modélissant...etc. De nombreux types des synchronisation ont été proposés dans les systèmes chaotiques intéressants telles que : la synchronisation complète (**CS**), l'anti-synchronisation (**AS**), la synchronisation projective (**PS**), la synchronisation projective fonctionnelle (**FPS**), la synchronisation généralisée (**GS**) et la synchronisation **Q-S**... etc.

Très récemment, des nouveaux types hybrides sont proposés, par exemple, la synchronisation **HPS** (Hybrid Projective Synchronization), la synchronisation **HFPS** (Hybrid Function Projective Synchronization) ... etc. Bien que l'étude de ces types de synchronisation soit assez importante, investir leurs problèmes inverse paraît une idée séduisante. En effet, d'autres schémas sont introduites tels que (**IGS**) inverse de (**GS**) et (**IHFPS**) l'inverse de la (**HFPS**), ce dernier fait l'objet de cette mémoire.

Le mémoire est organisé de la façon suivante :

-**Le premier chapitre** présente un rappel sur les systèmes dynamiques telle que : leurs définitions, la définition de système continu et discret, aussi que la linéarisation des systèmes dynamiques (continu et discret)...

-**Le deuxième chapitre** est réservé la théorie de chaos, et nous avons également fourni des exemples des systèmes chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

-**Le troisième chapitre** on trouve les différents types connus dans la synchronisation et la méthode de synchronisation la plus usé.

-**Le quatrième chapitre** est focalisé sur l'étude d'un type de synchronisation **IHFPS** des systèmes chaotiques : Un critère simple est dérivé pour la synchronisation du chaos entre deux systèmes dynamiques chaotiques maître et esclave à  $n$  dimensions à temps continu, on démontre l'efficacité du schéma de synchronisation (**IHFPS**), applications numérique de la synchronisation entre deux systèmes chaotiques.

# Chapitre 1

## Préliminaires sur les systèmes dynamiques

### 1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités.

Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Les systèmes dynamiques ont été développés et spécialisés au cours du 19<sup>ème</sup> siècle par des mathématiciens et des physiciens dont **Henri Poincaré** et **Aleksandre Mikhailovich Lyapunov**.

L'objectif de ce chapitre est présenter quelques définitions des systèmes dynamiques (continu et discret), nous rappelons quelques concepts relatifs à leurs stabilités en particulier au sens de **Lyapunov**.

### 1.2 Définitions des systèmes dynamiques

En mathématiques, en physique, en ingénierie un système dynamique est un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale (c.à.d. que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent),
- déterministe (c.à.d. qu'à une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "un et un seul état futur" possible).

On définit un système dynamique par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$ , qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.

**Définition 1.1** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que :

- $f(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,
- $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,
- $f(0, x) = x$ ,
- $f(t_1 + t_2, x) = f(t_1, f(t_2, x))$  pour  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2** On définit le système dynamique **linéaire** par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constant.

la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (1.2)$$

et on défini le système **non-linéaire** par :

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad (1.3)$$

le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$  associe :

$$f(t, x) = e^{At} x. \quad (1.4)$$

vérifiée les quatre propriétés de système dynamique.

**Définition 1.3** Considérons le système (1.3). le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.5)$$

Où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = Df(x^*), 1 \leq i, j \leq n, \quad (1.6)$$

et

$$f(x^*) = 0. \quad (1.7)$$

est appelé linéarisation de (1.3) en  $x^*$  ( $x^*$  point d'équilibre du système 1.3).

## 1.3 Systèmes autonomes et non-autonomes

**Définition 1.4** Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.8)$$

Lorsque le champ de vecteur  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est **autonome**, Dans le cas contraire il est **non-autonome**.

**Remarque 1.1** On peut toujours transformer un système non-autonome en système autonome, on posant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = t, \\ \dot{x}_{n+1} = f_{n+1}(x, p) = 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet remplacer systématiquement  $t$  dans l'équation par  $x_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de système d'équations différentielles vous en remercieront.

**Remarque 1.2** Par un changement de variable approprié on peut transformer un système non-autonome de dimension  $n$  à un système autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .

## 1.4 Comportement des systèmes dynamiques

### 1.4.1 Espace de phase

-L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

### 1.4.2 Espace d'état

-L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

### 1.4.3 Trajectoires et orbites

-La trajectoire est une solution du système différentiel.

-L'orbite d'un point  $x$  est l'image de la trajectoire issue de  $x$ .

## 1.5 Classification des systèmes dynamiques

### 1.5.1 Systèmes dynamiques à temps discret

Un système dynamique discret représenté par une équation aux différences finies (fonction itérative) sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, k). \quad (1.10)$$

Où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  Indique la dynamique du système en temps discret.

On peut également identifier pour chaque couple  $(x_0, k_0)$  une solution unique.

$$\phi_f(\cdot, x_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\phi_f(k_0, x_0, k_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \phi_f(k+1, x_0, k_0) = f(\phi_f(k, x_0, k_0), k). \quad (1.11)$$

**Exemple 1.1** (L'application de Hénon) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases}$$

Où  $a, b$  sont des paramètres réels, l'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$ ,

Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des systèmes dynamiques discrets obtenus en itérant une fonction continue  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### 1. Point fixe

**Définition 1.5** Un point  $x^*$  est appelé un **point fixe** de l'application  $x_{k+1} = f(x_k, k)$  si  $f(x^*) = x^*$ .

-Géométriquement le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction  $y = f(x)$  avec la ligne  $y = x$ .

**Définition 1.6** Un **point fixe** d'une application  $x_{k+1} = f(x_k, k)$  est un point invariant par  $f$ , c'est-à-dire un point  $x^*$  de l'espace de phase vérifiant l'équation  $f(x^*) = x^*$ .

**Définition 1.7** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le multiplicateur est la pente :

$$m = \dot{f}(x^*). \quad (1.12)$$

de la tangente au point fixe  $x^*$  de  $f$  qui détermine le type(ou la nature) de point fixe.

$m$  : s'appelle le multiplicateur de  $f$  au point  $x^*$ .

**Exemple 1.2** Soit  $x_{k+1} = x_k^3$  possède trois point fixe :  $x_1^* = -1$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 1$ .

## 2. Etude de la stabilité

**Théorème 1.1** Supposons que  $x^*$  est un point fixe de  $x_{k+1} = f(x_k, k)$ , alors le point fixe  $x^*$  est :

- 1-Attractif (ou stable) si  $|m| < 1$ .
- 2-Répulsif (ou instable) si  $|m| > 1$ .
- 3-Indifférent si  $|m| = 1$ .
- 4-Super attractif (ou super stable) si  $m = 0$ .

En dimension  $n$ , pour déterminer si un point fixe  $x^*$  est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x^*) = J_f(x^*)$ .

**Théorème 1.2** Pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , le point fixe est :

- 1-**Stable** si toutes les valeurs propres de  $J_f(x^*) = Df(x^*)$  sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieur à 1).
- 2-**Instable** si l'une de ces valeurs propres de  $J_f(x^*) = Df(x^*)$  a un module plus grand que 1 (à l'extérieur du disque unité).

### 1.5.2 Systèmes dynamiques à temps continu

Un système dynamique dans le cas **continu** est présenté par un système d'équations différentielles [2] , [3] de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x_t, t). \quad (1.13)$$

Où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial

$$x_0 = x(t_0), \quad (1.14)$$

Pour chaque couple choisi  $(x_0, t_0)$  on peut identifier une solution unique :

$$\phi(\cdot, x_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

telle que :

$$\phi_f(t_0, x_0, t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi}_f(t, x_0, t_0) = f(\phi_f(t, x_0, t_0), t). \quad (1.15)$$

-Cette solution appelée souvent trajectoire, fournit les états successifs occupés par le système à chaque instant  $t$ .

**Exemple 1.3** (*L'oscillateur de Duffing*) :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = y, \\ \dot{y}_t = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t. \end{cases} \quad (1.16)$$

Où  $\delta, \gamma, \varpi$  sont des paramètres réels,

L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$ , ce système est non linéaire, non autonome.

## 1. Point d'équilibre

**Définition 1.8** Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{x}(t) = f(x_t, t)$  est un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = 0$ .

**Remarque 1.3** Par un changement de variable  $y = x - x^*$ , on peut ramener le point à l'origine.

**Théorème 1.3** Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.17)$$

Où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $A$  une matrice constante inversible.

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sont réelles et de même signe, la solution  $x = 0$  est appelée **noeud**.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = 0$  est appelée **selle**.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée **foyer**.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée **centre**.

Tous ces cas sont regroupés (FIG.1.1).

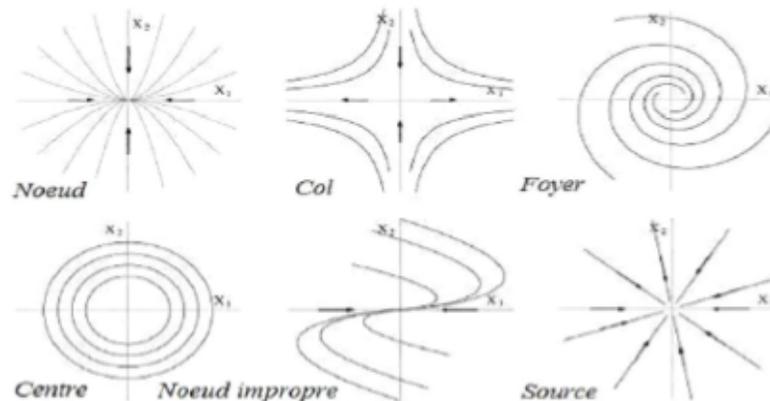


FIG.1.1-Classification des points d'équilibre dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 1.4** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = x_1 - x_1^2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Les points d'équilibre sont :  $x_1^* = (0, 0)$  et  $x_2^* = (1, 0)$

-Le point d'équilibre  $x_1^*$  est un point selle.

-Le point d'équilibre  $x_2^*$  est un point centre.

**Théorème 1.4** Soit le système non-linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t), \quad (1.19)$$

Un point critique de  $x^*$  de (1.19) est appelée :

- **Puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives.
- **Sources** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives.
- **Selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

## 2. Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie généralisable valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

-Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = f(x_t, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continu et non-linéaire et soit  $x^*$  point d'équilibre.

**Définition 1.9** Le système (1.20) est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point d'équilibre  $x^*$  si pour des conditions initiales  $x(t_0)$  suffisamment proches du point d'équilibre soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.21)$$

**Définition 1.10** Le point d'équilibre  $x^*$  est **asymptotiquement stable** si :

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0. \quad (1.22)$$

**Définition 1.11** Le point d'équilibre  $x^*$  est **exponentiellement stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a, b > 0 : \|x(t_0) - x^*\| \leq \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a\|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0. \quad (1.23)$$

**Définition 1.12** Le point d'équilibre  $x^*$  est **instable** si l'équation(1.21) n'est pas satisfaite.

**Définition 1.13** Une solution  $\phi(t)$  du système (1.20) telle que  $\phi(t_0) = t_0$  est dite **stable au sens de Lyapunov** tel que toute solution  $x(t)$  de (1.20) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0, \quad (1.24)$$

si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0. \quad (1.25)$$

Alors la solution  $\phi(t)$  est dite **asymptotiquement stable**.

Tous ces cas sont montrés (FIG.1.2).

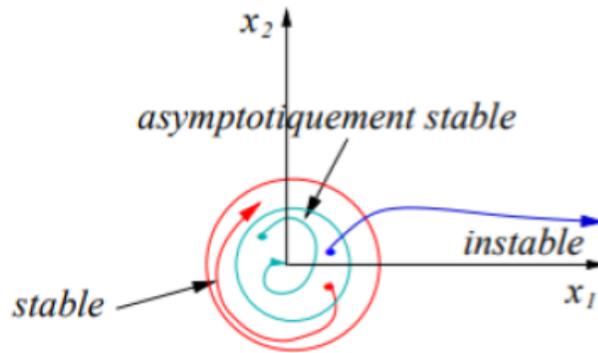


FIG.1.2-Différents types de stabilité de Lyapunov.

**Exemple 1.5** ( $n = 2$ ) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y, \\ \dot{y}(t) = x. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

La solution qui vérifie  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \implies \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|). \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta, \text{ On prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \delta = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

d'où  $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est **stable au sens de Lyapunov**.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \nrightarrow 0. \quad (1.28)$$

Donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

On va présenter les deux méthodes de Lyapunov (**méthode indirecte** et **méthode directe**) :

► **Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)**

La première méthode de **Lyapunov** est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x^*$  du système (1.20). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x^*$  s'expriment comme suit :

1. Si les valeurs propres de  $A = Df(x^*)$  sont toutes à partie réelle strictement négative, alors  $x^*$  est un équilibre asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**.
2. Si l'une des valeurs propres de  $A = Df(x^*)$  possède une partie réelle strictement positive alors  $x^*$  n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapunov ( $x^*$  instable).

**Exemple 1.6** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x, \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy. \end{cases} \quad (1.29)$$

L'origine 0 est un point fixe ( $x^* = 0$ ).

Son linéarisation est :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

Les valeurs propres de  $Df(0)$  sont  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Toutes négatives, d'où le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.4** Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est **stable** ou **instable** quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

► **Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)**

La seconde méthode de Lyapunov est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contre partie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée **fonction de Lyapunov**, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant résume cette méthode.

**Théorème 1.5** Le point d'équilibre  $x^*$  du système (1.20) est stable s'il existe une fonction

$V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :

- i)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x^* \in D$ .
- ii)  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > V(x^*)$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ .
- iii)  $\dot{V}(x^*) \leq 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ .

-Si de plus pour  $x$ ,  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ , alors  $x^*$  est **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov.

**Remarque 1.5** Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.

**Exemple 1.7** Considérons le système décrit par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{x} = -x - x^3, \quad (1.31)$$

Le point  $x^* = 0$  est un point d'équilibre de l'équation différentielle.

-Le but est de déterminer si le point d'équilibre est stable sans avoir à résoudre l'équation différentielle

Soit alors la fonction :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad (1.32)$$

On peut l'assimiler à une énergie puisque cette fonction est strictement positive. Calculons maintenant la dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système.

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x}, \quad (1.33)$$

D'où :

$$\dot{V}(x) = x(-x - x^3) = -x^2 - x^4, \quad (1.34)$$

Par conséquent, on dit que la fonction  $V$  est définie négative.

$$\dot{V}(x) < 0, \quad (1.35)$$

Cette énergie est donc toujours strictement décroissante. On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov que le point d'équilibre  $x^* = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

**Exemple 1.8** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.36)$$

Ce système à un point d'équilibre unique  $(0, 0)$ . On pose  $V(x) = x^2 + y^2 > 0$ .

D'après le théorème de Lyapunov :

- Si  $a < 0$ , le point  $x^*$  est asymptotiquement stable.
- Si  $a > 0$ , le système est stable au sens de Lyapunov.
- Si  $a = 0$ , le point est au moins stable au sens de Lyapunov.

## 1.6 Linéarisation des systèmes dynamiques

Lorsque les valeurs propres de la matrice jacobienne d'un système différentiel en un point stationnaire ne sont ni nulles, ni imaginaires pures, les trajectoires de ce système au voisinage de ce point comportent comme les trajectoires de son linéarité au voisinage de l'origine.

### 1.6.1 Linéarisation des systèmes dynamiques continus

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x}_t = f(x_t, t), \quad (1.37)$$

Où  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , et soit  $x^*$  un point d'équilibre de ce système. Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point d'équilibre. La fonction  $f$  peut être développée en série de Taylor au voisinage du point  $x^*$  comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t), \quad (1.38)$$

Où  $J_f(x^*)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $f$  définie par :

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}_{x=x^*} \quad (1.39)$$

Comme  $f(x^*) = x^*$ , alors l'équation (1.38) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t), \quad (1.40)$$

L'écriture (1.40) veut dire que le système (1.37) est linéarisé.

## 1.6.2 Linéarisation des systèmes dynamiques discrets

Il s'agit d'étudier la nature des point fixe d'un système dynamique non-linéaire défini en dimension  $m$  par l'application suivante :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ x_{k+1} = f(x_k, k). \end{cases} \quad (1.41)$$

Soit  $x_1^* \in \mathbb{R}^m$  est point fixe de  $f$  au voisinage du point  $x_1^*$ , le système peut être linéarisé, en négligeant les termes de second ordre du développement de Taylor au voisinage d'un point  $x_2^* = x_1^* + \varepsilon$  on peut alors écrire :

$$f(x_2^*) = x_1^* + A^m \varepsilon + 0(\varepsilon), \quad (1.42)$$

Où  $A = J_f(x_1^*)$  (la matrice Jacobienne de  $f$  au point  $x_1^*$ )

Par itération on obtiens :

$$f^m(x_2^*) = x_1^* + A^m \varepsilon + 0(\varepsilon). \quad (1.43)$$

$\varepsilon \rightarrow A\varepsilon$  application linéarisé de  $f$  au voisinage du point fixe  $x_1^*$ , le système (1.41) est approximé au voisinage du point d'équilibre  $x_1^*$  par le système linéaire (1.43).

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons avancé un rappelle récapitulatif sur les systèmes dynamiques, telles que : Définitions des systèmes dynamiques, leurs classifications et comportement (l'espace de phase, l'espace d'état, trajectoires et orbites).

Ensuite nous avons donné la stabilité des systèmes dynamiques (continus et discrets).

À la fin de ce chapitre, nous avons fourni la linéarisation des systèmes dynamiques continus et discrets.

# Chapitre 2

## Initiation au chaos dans les systèmes dynamiques

### 2.1 Historique

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** découvre le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

En 1963, le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. **Lorenz** venait de mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. il expliqua d'ailleurs très joliment cette notion à l'aide de l'image métaphorique suivant :

problème effet de papillon : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?

En 1975, **Li** et **Yorke** ont pour la première fois de l'histoire utilisé le terme "chaos" pour décrire les systèmes déterministes et imprévisibles.

Depuis ces découvertes, la théorie du chaos a trouvé diverses applications en mathématiques, en physique, en électronique, en biologie, en médecine et plus récemment en télécommunications. Comme pour beaucoup des limites en science, il n'y a aucune définition standard du chaos d'où la parution de plusieurs définitions légèrement différentes. Deux principes mathématiques importants expliquent le comportement chaotique, celui de **Devaney** et celui de **Li** et **Yorke**.

## 2.2 Définitions du chaos

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos :

**Définition 2.1 (Ensemble dense)** Supposons que  $X$  est un ensemble et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ ,  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in Y$  arbitrairement proche de  $x$ , c'est-à-dire si la fermeture de  $Y$  est égale à  $X$  ( $\overline{Y} = X$ ). Ce qui revient à dire que  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une séquence de points  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Y$  qui convergent vers  $x$ .

**Définition 2.2** Soit  $f : X \rightarrow X$  une fonction,  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $x_0 \in X$  et pour tous  $\epsilon > 0$  il existe un point  $y_0 \in X$  et un entier  $j \geq 0$  satisfait :  $d(x_0, y_0) < \epsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta$ , où  $d$  représente la distance et  $f^{(j)}(x_0)$  la  $j$  ième itération de  $f$ .

**Définition 2.3** On dit que la fonction  $f$  est topologiquement transitive si  $U$  et  $V$  étant deux ensembles non vides ouverts dans  $X$ , il existe  $x_0 \in U$  et un indice  $j > 0$ , tel que pour  $f^{(j)}(x_0) \in V$  ou de façon équivalente, il existe un indice  $j > 0$  tel que pour  $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Définition 2.4 (Chaos dans le sens Devaney) [4]**

La fonction  $f : X \rightarrow X$  est dite constituée d'une dynamique chaotique si :

1.  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales,
2.  $f$  est topologiquement transitive,
3. L'ensemble des points périodiques de  $f$  est denses dans  $X$ .

## 2.3 Caractéristiques du chaos

Un système chaotique est caractérisé par :

### 2.3.1 La non-linéarité

- En fait, des études approfondies ont révélé que les phénomènes chaotiques étaient caractéristiques des systèmes non-linéaires.
- Un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

### 2.3.2 Le déterminisme

- Un système dynamique chaotique est déterministe c'est -à-dire qu'il obéit à des lois qui décrivent complètement son mouvement.
- Le comportement irrégulier provient des non-linéarités intrinsèques plutôt que des bruits aléatoires un système chaotique ne présente pas des paramètres stochastique (probabilistes).

### 2.3.3 L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière.

La figure (FIG.2.1) montre l'aspect aléatoire d'un système dynamique chaotique, en occurrence, le système de Rössler.

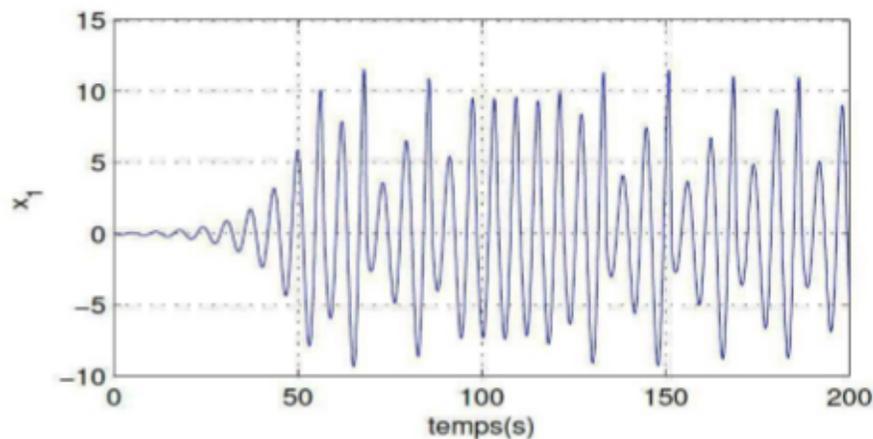


FIG.2.1- L'aspect aléatoire du système de Rössler.

### 2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

Edward Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Lorenz a illustré ce fait par l'effet papillon. Pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondant à ces données initiales divergent exponentiellement. Par la suite, les deux trajectoires sont incomparables. Une des propriétés essentielles du

chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant les taux de divergence des trajectoires.

D'un point de vue mathématique, on dit que  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, n) \in D \text{ tel que : } \|x - y\| < \epsilon \Rightarrow \|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta. \quad (2.1)$$

## 2.4 Les attracteurs

### 2.4.1 Ensemble invariant

Un ensemble  $M \subset I$  est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associé au champ de vecteurs issue de  $M$  vérifie  $x(t) \subset M$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie.

### 2.4.2 Définitions d'attracteur

On peut introduire la notion d'un système chaotique à l'aide d'un nouvel élément géométrique, cet élément est appelée "**attracteur**".

On donne d'abord quelques définitions d'attracteur :

#### **Définition 2.5 (Ruelle)[5]**

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .
- Il existe une orbite dense dans  $A$  tel que :  $\cap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A, t \geq 0$ .

#### **Définition 2.6 (Zeraoulia et Sprott)[6]**

Soit  $A$  un ensemble fermé de l'ensemble non errant  $\Omega(f)$ ,  $A$  est dit attracteur si :

1.  $A$  est invariant par  $f$  s'il vérifie  $f(A) = A$ ,
2. Il existe un voisinage  $V$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :  $\cap_{t \geq 0} f^n(V) = A$ ,
3.  $f$  est transitive (il existe  $C, D \subset A$  tel que  $f^n(C) \cap D \neq \emptyset$ ;  $C, D$  ouvert).

### 2.4.3 Bassin d'attracteur

Le bassin d'attracteur  $B(A)$  d'un attracteur  $A$  est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers  $A$ , donc  $B(A) = \cup \varphi_t(V)$ . On appelle bassin d'attracteur  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est-à-dire  $B(A) = \cup \{U \in \varphi(x)\}$ ,  $U$  est un voisinage attiré  $A$ .

### 2.4.4 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur possède les propriétés suivantes :

1. Tous points de l'espace d'état qui appartiennent à un attracteur demeurent à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .
2. Il existe un ensemble  $A \subset B$ , tel que pour tout voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de  $A$ . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .
3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

## 2.5 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs :

### 2.5.1 Les attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers (**non chaotique**) caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de quatre sortes :

- **Le point fixe** : C'est le cas le plus courant, et le plus simple d'attracteur, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point).
- **Le cycle limite périodique** : Une solution  $X(t)$  d'un système dynamique autonome ou non est périodique s'il existe un entier  $T$  pour lequel : pour tout  $t$ ,  $X(t+T) = X(t)$  et  $X(t+\bar{T}) = X(t)$  pour  $0 < \bar{T} < T$ ,  $T$  est alors appelé la période de la solution. La représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelé cycle-limite et telle qu'aucune trajectoire commençant, suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée. En général, on a trois types de cycle-limite : cycle-limite stable, cycle-limite instable et cycle-limite semi-stable (en pratique instable) (**FIG. 2.2.b**).

● **Cycle-limite pseudo périodique** : Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycles-limites relativement proches sans jamais passer deux fois de suite exactement sur la même trajectoire, on parle alors d'attracteur quasi-périodique.

● **Un tore** : cet attracteur correspond à un régime quasi-périodique ayant  $n$  fréquences de base indépendantes. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension deux (FIG.2.2.c).

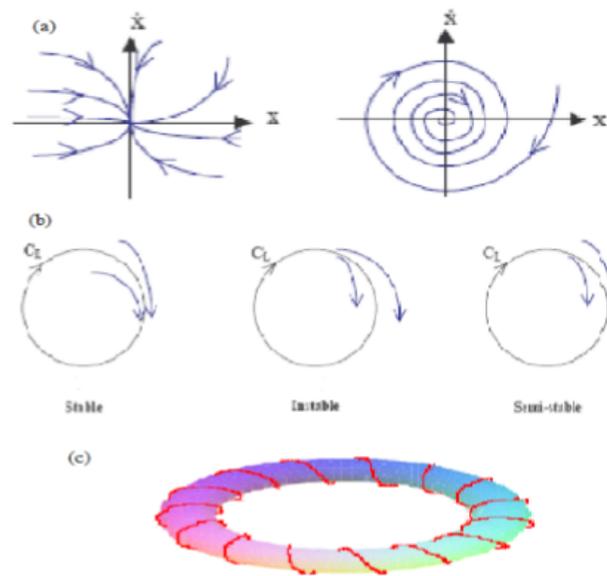


FIG.2.2-Les attracteurs réguliers : (a) Points fixes attracteurs, (b) Cycles limites, (c) Un tore.

## 2.5.2 Les attracteurs étranges

Les attracteurs chaotiques -dit aussi étranger-est une caractéristique géométrique du chaos. Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange (chaotique) pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , c'est-à-dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. Attraction :  $U$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $U$  est entièrement contenue dans  $\mathbb{R}$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
2. Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).
3. Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.
4. Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

Les définitions suivantes sont fournies par :

**Définition 2.7 (Ruelle et Takens) [7]** *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

**Définition 2.8 (Berge et al) [8]** *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

**Définition 2.9 (Farmer et Sidorowich) [9]** *Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov  $\lambda_k > 0$ .*

### 2.5.3 Différents types d'attracteurs chaotiques (étranges)

Les attracteurs chaotiques (étranges) peuvent être classés en trois types principaux :

#### 1. Attracteur hyperbolique

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

#### 2. Attracteur de type Lorenz

Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même [1] .

#### 3. Quasi-attracteurs

Ces types d'attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua [10] .

## 2.6 Détection du chaos

Pour déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : la **dimension fractale** et les **exposants de Lyapunov**.

### 2.6.1 Les exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov servent à mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines et permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de **Lyapunov** est égal à la dimension de l'espace des phases.

Rappelons d'abord cette formule et voyons comment **Lyapunov** a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| f'(x_{i-1}) \right|, \quad (2.2)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale  $x_0$  est affectée d'une erreur infinitésimale  $E_0$ . Après  $n$  itérations, l'erreur initiale  $E_0$  sera donc amplifiée d'un facteur  $\frac{E_n}{E_0}$ .

Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|. \quad (2.3)$$

Il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithmes. Utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left( \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| = \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right|, \end{aligned}$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, on calcule d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de **Lyapunov**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right), \quad (2.4)$$

$E_i$  et  $E_{i-1}$  étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet, soit  $f(x_i)$  cette fonction :

$$\begin{aligned} E_i &= f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \\ \frac{E_i}{E_{i-1}} &= \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \quad (2.6)$$

alors, si  $f$  est dérivable on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow +\infty \quad (2.7)$$

par conséquent :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})| \quad (2.8)$$

Lorsque l'exposant de **Lyapunov** est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \quad (2.9)$$

et par conséquent :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1 \quad (2.10)$$

- Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multiplicateurs caractéristiques pour les solutions périodiques.
- Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (Voir le Tableau).

#### -Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

On peut classer trois cas des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov :

1. Si  $\lambda < 0$ , l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable, il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov qui tend vers  $-\infty$ .
2. Si  $\lambda = 0$ , l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

3. Si  $\lambda > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités, ces points sont dits instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyperchaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov.

## 2.6.2 Dimension fractale

Il y a un autre genre d'attracteur qui a une forme inhabituelle, une structure géométrique fractale due à l'étirement dans une direction et au repliement dans une autre direction qui est l'attracteur étrange. La caractéristique géométrique principale de ce type d'attracteur est leur dimension fractale. Plusieurs dimensions ont été proposées, on peut citer : il ya dimension de Corrélation et dimension de Lyapunov, une différence légère entre chaque une de ces dimension, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

- i)  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$ .
- ii)  $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$ .
- iii)  $d(A \times B) = d(A) + d(B)$ .

### 1. Dimension de corrélation

Le principe de cette méthode repose sur les corrélations entre les points de la série temporelle étudiée.

Notons  $C(R)$  le nombre de boîtes requises pour chaque dimension  $N$ . on peut définir après corrélation en utilisant une fonction appropriée qui est :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \vartheta \quad (2.11)$$

avec  $\vartheta$  représente le nombre de paires  $i, j$  dont la distance  $|X_i - X_j| < R$ .

On peut réécrire la fonction (2.11) comme :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=j=1}^n H(R - |X_i - X_j|) \quad (2.12)$$

$H$  : la fonction de Heaviside.

On définit la dimension de corrélation par :

$$v = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)} \quad (2.13)$$

### 2. Dimension de Lyapunov

La dimension de Lyapunov est définie par **Li** et **York** [11] et elle donnée par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (2.14)$$

d'ou  $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$  sont les exposants de **Lyapunov** d'un attracteur d'un système dynamique  $j$  est

le plus grand entier naturel telque :  $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i \leq 0$ .

## 2.7 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre.

### 2.7.1 Cascade de doublements de période

Ce phénomène se manifeste sur un oscillateur forcé. À mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [12],[13].

### 2.7.2 L'intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine [14],[15] .

### 2.7.3 La quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** [7]. Ce phénomène intervient quand un deuxième oscillateur perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux oscillateurs (systèmes) en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Si le rapport entre les deux périodes est rationnel, le comportement est périodique.

## 2.8 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu

### **Exemple 2.1** (*Système de lorenz*)

Prenons comme exemple de système chaotique continu le système de lorenz (1963) [1].

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.15)$$

$\delta$  et  $b$  : valeurs fixées respectivement à 10 est  $\frac{8}{3}$ .

$r > 0$  : paramètre de control positif.

$\delta$  : Le nombre de prandtl,

$b$  : La taille physique dy système ,

$r$  : Le nombre de Rayleigh.

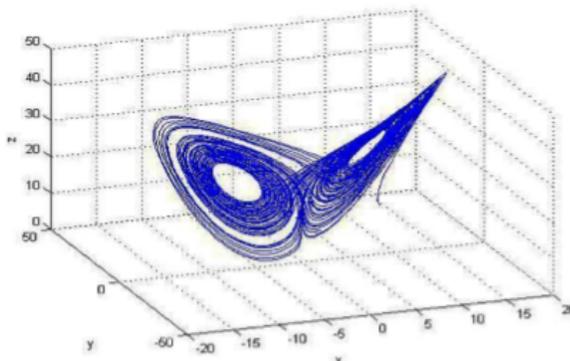


FIG.2.3-Attracteur étrange de Lorenz.

● **Recherche des points d'équilibres :**

on cherche les points d'équilibre  $(x, y, z)$  vérifiant  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ .

-Pour  $r < 1$ , il n'y a qu'un seul point d'équilibre l'origine  $(0, 0, 0)$ .

-Pour  $r > 1$ , il y a deux autres points.

On a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta(y - x) = 0, \\ x(r - z) - y = 0, \\ xy - bz = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta y = \delta x, \\ x(r - z) = y, \\ y^2 - b(r - 1) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ z = r - 1, \\ y = \pm\sqrt{b(r - 1)}. \end{cases} \quad (2.16)$$

donc les deux points sont :  $(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$  et  $(-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$ .

● **Etude de la stabilité des points d'équilibres :**

L'étude de la stabilité des points d'équilibres repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df$  qui s'écrit par :

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \delta & 0 \\ r - z & 1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

1-La stabilité de l'équilibre pour  $r < 1$  au point  $(0, 0, 0)$  (**l'équilibre nul**)

Les valeurs propres de la matrice jacobienne sont :

$$A = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

L'équation caractéristique est définie par :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\delta - \lambda & \delta & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + b)(\lambda^2 + (\delta + 1)\lambda + \delta(1 - r)) = 0. \quad (2.19)$$

Pour les racines, on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b, \\ \lambda_2 = \frac{-\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4\delta(r - 1)}}{2}, \\ \lambda_3 = \frac{-\delta - 1 - \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4\delta(r - 1)}}{2}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous reportons les valeurs de  $\delta$  et  $b$ , on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8}{3}, \\ \lambda_2 = \frac{-11 + \sqrt{40r + 81}}{2}, \\ \lambda_3 = \frac{-11 - \sqrt{40r + 81}}{2}. \end{cases}$$

– L'équilibre est **stable**, pour  $r < 1$ , c'est -à-dire il y a trois racines réelles sont négatives

$$\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

– L'équilibre est **instable** (col), Pour  $r > 1$ , c'est -à-dire une des valeurs propres est positive  $\lambda_1$ .

– L'équilibre est dit **marginal**, c'est -à-dire Il y a une bifurcation quand  $r = 1$ .

**2-La stabilité de l'équilibre pour  $r > 1$  :**

Les valeurs propres de la matrice jacobienne sont solutions de l'équation en  $\lambda$  :

$$\lambda^3 + (\delta + b + 1)\lambda^2 + b(\delta + r)\lambda + 2\delta b(r - 1) = 0. \quad (2.21)$$

Selon les valeurs du paramètre  $r$ , ce polynôme de degré trois peut avoir trois racines réelles négatives (l'équilibres stables) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut chercher s'il existe une valeur critique de  $r$  pour laquelle les équations deviennent instables. La déstabilisation de ces équations par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si  $\lambda = 0$  on a forcément  $r = 1$ . On peut donc rechercher pour quelles valeurs de  $r$  on peut obtenir deux racines  $i\omega$  et  $-\omega i$  de partie réelle nulle. En reportant la valeur  $\lambda = i\omega$  dans l'équation.

On obtient les deux conditions :

$$\begin{cases} -\omega^2(\delta + b + 1) + 2\delta b(r - 1) = 0, \\ -i\omega^3 + i\omega b(\delta + r) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

L'élimination de  $\omega^2$  entre les deux équations permet d'obtenir la valeur  $r_c$  critique :

$$r_c = \frac{\delta(\delta + b + 3)}{(\delta - b - 1)}. \quad (2.23)$$

Pour les valeurs :  $a = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ . la valeur critique est  $r_c = \frac{470}{19} \simeq 24.73$ .

La déstabilisation des équilibres correspond à une bifurcation de Hopf. Deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre  $r$  franchit la valeur critique  $r_c$ .

Lorsque  $r > r_c$  le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour l'un des deux équilibres instables comme si elle  $y$  convergeait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour  $y$  répéter le même type de comportement. On montre que la distance entre deux conditions très proches simplifie très rapidement. Toutes les trajectoires convergent vers l'attracteur étrange.

### **Exemple 2.2** (Système de Rössler)

Ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposé par le biochimiste Allemand Otto Rössler en 1976[16], il découle des équations de Navier Stokes, ainsi il est lié à l'étude de l'écoulement des fluides.

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \beta - \gamma z + xz. \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  des constantes (paramètres de bifurcation).

Pour  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  et  $c = 5.7$  nous obtenons l'évolution aléatoire dans le temps de la coordonnée  $z$  et l'attracteur de Rössler (**FIG.2.4**).

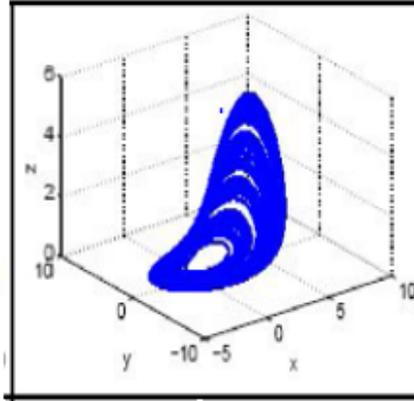


FIG 2.4-Attracteur étrange de Rössler.

## 2.9 Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques

Un attracteur hyperchaotique est généralement défini, comme étant un comportement chaotique avec au moins deux exposants de **Lyapunov** positifs.

**Remarque 2.1** La dimension minimale d'un système hyperchaotique (continu) est quatre (4).

**Exemple 2.3** (Le système hyperchaotique de Rössler)

Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par **Rössler** [17],[18]. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay + \omega, \\ \dot{z} = b + xz, \\ \dot{\omega} = -cz + d\omega. \end{cases} \quad (2.25)$$

Le système suit un comportement hyperchaotique (**FIG.2.5**), quand les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  prennent les valeurs suivantes :  $a = 0.25$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0.5$  et  $d = 0.05$ .

Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes :  $x_0 = -10$ ,  $y_0 = -6$ ,  $z_0 = 0$ ,  $w_0 = 10$ .

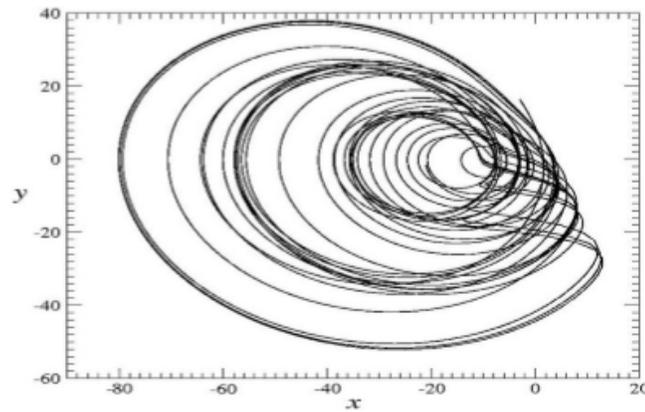


FIG.2.5-Projection plane de l'attracteur hyperchaotique de Rössler en 4-D.

Les quatre exposants de Lyapunov correspondants sont :  $\lambda_1 = 0.112$ ,  $\lambda_2 = 0.119$ ,  $\lambda_3 = 0$  et  $\lambda_4 = -25.118$ . On constate bien que ce système répond aux conditions de passage du chaos vers l'hyperchaos. Le caractère hyperchaotique de ce comportement n'est pas si évident à partir de cette projection d'avion, qui ressemble un peu à un attracteur chaotique "bruyant".

**Exemple 2.4** (*Les systèmes hyperchaotiques de Liu et de Chen*)

Le système de **Liu** [19] est proposé en 2001, il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 + x_1x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 + x_1x_2 + x_4, \\ \dot{x}_4 = x_4x_1 + x_2. \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 35$ ,  $a_3 = 1, 4$  et  $a_4 = 5$ .

Le système hyperchaotique de **Chen** est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1 + a_1x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + a_2x_2 + 4x_4 - 10x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 + x_2^2, \\ \dot{x}_4 = -a_4x_1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Où  $a_1 = 35$ ,  $a_2 = 21$ ,  $a_3 = 3$  et  $a_4 = 2$ .

**Remarque 2.2** *Seulement peu de comportements hyperchaotiques expérimentaux ont été identifiés. L'occurrence du comportement hyperchaotique a été trouvée, par exemple, dans un circuit électronique [20].*

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu historique du chaos et quelques définitions sur le phénomène .ainsi que les caractéristiques du chaos (sensibilité aux conditions initiales, attracteur étrange, sa dimension fractale et au moins l'un de ses exposants de Lyapunov est positif). Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui permettent de décrire l'évolution d'un système dynamique.

Pour clôturer le chapitre, nous avons présenté quelques exemples, les plus célèbres, qui illustrent le comportement des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques en temps continu.

# Chapitre 3

## Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques

### 3.1 Introduction

La synchronisation des systèmes dynamiques au comportement complexe tels que les oscillateurs et les systèmes chaotiques a suscité un intérêt croissant de par l'existence de nombreux champs d'applications ou d'investigations potentiels (exemples en télécommunication, neurosciences, informatique, ...).

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de **Yamada et Fujisaka (1983)** [21] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite **Afraimovich et al** [22].ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement **Pecora et Carroll (1990-1991)** [23],[24] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave, Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications [25].

Le principe de ce chapitre est de donner la définition, nous introduisons différents types de synchronisation savoir la synchronisation complète (**CS**), l'anti-synchronisation (**AS**), la synchronisation généralisée (**GS**), la synchronisation projective (**PS**), la synchronisation **Q.S** et la synchronisation **HPS**, enfin la synchronisation **HFPS**. Aussi les méthodes de synchronisation les plus performantes.

## 3.2 Définitions de la synchronisation

### Définition 3.1 (Cas générale)

► Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties :

-**Syn** veut dire ensemble,

-**Chrono** veut dire temps,

C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.

► La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

### Définition 3.2 (En mathématiques)

Au cours de la dernière décennie, après plusieurs tentatives pour définir un mouvement de synchronisation, **Brown** et **Kocarev** [26] sont récemment arrivés à une définition mathématique généralisée.

Pour construire la définition, ils supposent que le système dynamique peut être divisé en deux systèmes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X(t)), \\ \dot{Y} = g(Y(t)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit  $\varphi(\omega_0)$  une trajectoire du système globale donné par (3.1) avec la condition initiale

$$\omega_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Pour chaque sous-système on forme une trajectoire  $\varphi_x(\omega_0)$  et  $\varphi_y(\omega_0)$  ( $\omega_0$  étant une condition initiale donnée).

On note par  $\chi$  l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par  $\zeta$  l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés)

$g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , qui ne sont pas identiquement nulle, le premier  $\mathbb{R}$  représente le temps, nous disons que les fonctions,  $g_x$  et  $g_y$  sont des propriétés des sous-systèmes définis par (3.1) respectivement.

Enfin, pour définir un état synchronisé, **Brown** et **Kocarev** [26] exigent une fonction

$h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\|h\| = 0$  ou  $\|h\| \rightarrow 0$  (où  $\|\cdot\|$  est toute norme). Nous disons que la fonction  $h$  qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes.

Les deux mesures conviennent dans le temps si et seulement si  $h(g_x, g_y) = 0$ .

Avec ces préliminaires, propose la définition suivante pour la synchronisation :

**Définition 3.3** *Brown et Kocarev [26]* Les sous-systèmes dans les équations (3.1) sont synchronisés, par rapport aux propriétés  $g_x$  et  $g_y$ , s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_x, g_y)\| = 0$  sur toutes les trajectoires.

Avec le choix de  $g_x$  et  $g_y$  et  $h$  on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation qui pourraient être englobés dans un même formalisme.

**Théorème 3.1** Le système *maître* et le système *esclave* sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de *Lyapunov* du système esclave, appelés les exposants de *Lyapunov* conditionnels, sont négatifs.

- Le **maître** est un système indépendant.
- L'**esclave** est un système qui est dépendant du système maître.

**Définition 3.4** (*Synchronisation unidirectionnelle*)

Dans la synchronisation unidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques a et b est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens.

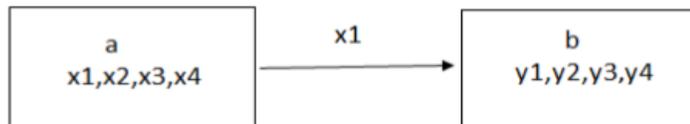


FIG.3.1-Le couplage unidirectionnelle .

**Définition 3.5** (*Synchronisation bidirectionnelle*)

Dans la synchronisation bidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques a et b est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans les deux sens.

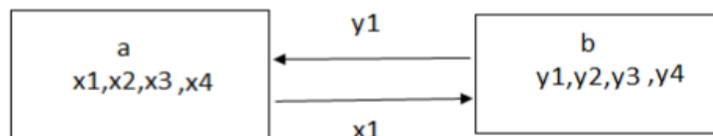


FIG.3.2-Le couplage bidirectionnelle.

### 3.3 Différents types de synchronisation

Depuis le résultat de Pecora et Carroll [23],[24], une multitude d'articles a été consacrée à la synchronisation de systèmes chaotiques et de nombreux critères de synchronisabilité ont alors été définis.

Dans cette section, au sens d'une étude bibliographique extensive, nous avons recueilli différents types et schémas de la synchronisation telle que la synchronisation complète (CS), l'anti-synchronisation (AS), la synchronisation généralisée (GS), la synchronisation projective (PS), la synchronisation Q-S, la synchronisation HPS, la synchronisation HFPS .

#### 3.3.1 Synchronisation complète

Nous étudier la synchronisation complète notée par CS (en anglais : **Complete Synchronization**), a été réalisé grâce aux effet des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes c'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique.

**Définition 3.6** On considère un couple de systèmes chaotiques *maître-esclave* représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X(t)), \\ \dot{Y} = g(Y(t)) + U. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où

$X(t)$  : le vecteur d'état du système maître de dimension  $n$ .

$Y(t)$  : le vecteur d'état du système esclave de dimension  $m$ .

$f$  et  $g$  sont des champs de vecteur tel que :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

$U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  à déterminer le vecteur de contrôle

L'erreur de la Synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t), \forall x(0), y(0) \quad \text{tel que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0. \quad (3.3)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

**Remarque 3.1** La Synchronisation complète ou la Synchronisation identique a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnel des systèmes dynamiques, elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus.

- Si  $f = g$ , la relation devient une synchronisation complète identique.
- Si  $f \neq g$ , c'est une synchronisation complète non identique.

### 3.3.2 Anti-synchronisation

**Définition 3.7** *Théoriquement, deux système sont **anti-synchronisés (AS)** si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés, et que d'autre part la somme de ces vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. L'erreur de l'anti-synchronisation peut donc être définie comme suite :*

$$e(t) = Y(t) + X(t). \quad (3.4)$$

### 3.3.3 Synchronisation généralisée

Nous étudier la synchronisation généralisée notée par **GS** (en anglais : **Generalized Synchronization**), Elle est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. la synchronisation généralisée à été introduite pour des systèmes couplés uni-directionnellement par **Rulkov et Al** [27] en 1995.

Pour définir la **GS**, on considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X(t)), \\ \dot{Y} = g(Y(t)) + U. \end{cases} \quad (3.5)$$

**Définition 3.8** *S'il existe une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| Y(t) - \phi(X(t)) \| = 0, \forall x(0), y(0). \quad (3.6)$$

Alors, les systèmes maître-esclave (3.5) se synchronisent au sens **généralisé** par rapport à la fonction  $\phi$ .

### 3.3.4 Synchronisation projective

Nous étudier la synchronisation projective notée par **PS** (en anglais : **Projective Synchronization**), a été d'abord rapportée par **Mainieri et Rehacek** [28] dans les systèmes chaotiques partiellement linéaires, dans les quels les réponses des deux systèmes identiques synchronisent jusqu'à un facteur d'échelle constant  $\alpha_i$ . **Xu et Al** [29] ont également introduit plusieurs régimes de contrôle basés sur la théorie stabilité de **Lyapunov** pour mener le facteur échelle à une valeur souhaitée et dérivé une condition générale pour la synchronisation projective que tous conditionnels des exposants de **Lyapunov** sont non positifs pour les systèmes en temps continu.

**Définition 3.9** On dit qu'on a une synchronisation **PS** si les variables d'état  $y_i(t)$  du système chaotique esclave  $Y(t) = y_i(t)_{1 \leq i \leq n}$  se synchronisent avec une constante multiple de l'état  $x_i(t)$  du système chaotique maître  $X(t) = x_i(t)_{1 \leq i \leq n}$  tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \| y_i(t) - \alpha_i x_i(t) \| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

- Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux  $-1$  représente un cas d'anti-synchronisation complète.

### 3.3.5 Synchronisation Q-S

La synchronisation **Q-S** est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [30].

**Définition 3.10** Nous disons qu'un système maître,  $n$ -dimensionnelle,  $X(t)$  et un système esclave,  $m$ -dimensionnelle,  $Y(t)$  sont en synchronisation **Q-S** dans la dimension  $d$ , s'il existe un contrôleur  $U \in \mathbb{R}^n$  et deux fonctions  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que l'erreur de synchronisation défini comme suit :

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)), \quad (3.8)$$

vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e(t) \| = 0.$$

### 3.3.6 Synchronisation HPS

La synchronisation notée **HPS** (en anglais : **Hybrid Projective Synchronization**) a été proposé par **Manfeng Hu** et **Al** [31]. Elle peut être considérée comme une extension de la synchronisation projective **PS**, Dans ce type de synchronisation les deux systèmes émetteur et récepteur peuvent synchroniser jusqu'à des différents facteurs d'échelle.

Pour définir la synchronisation **HPS**, le terme d'erreur est présenté par :

$$e(t) = H(t)Y(t) - X(t), \quad (3.9)$$

Où  $H(t) = \text{diag}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$  est une matrice de mise à l'échelle,  $h_i(t)$  est un facteur d'échelle et  $h_i(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 3.11** Pour le système (3.2), s'il existe une matrice réversible de mise l'échelle  $H$  d'ordre  $n$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e(t) \| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \| H(t)Y(t) - X(t) \| = 0. \quad (3.10)$$

Alors, il y a une synchronisation **HPS**.

- Si  $H = I$ , où  $I$  est la matrice unité, alors la synchronisation est appelée Synchronisation complète (CS).
- Si  $H = -I$ , alors la synchronisation est nommée Anti-synchronisation (AS).
- Si  $H = \alpha I$ , et  $\alpha \neq \pm 1$  un réel constant différent de zéro, alors la synchronisation est appelée synchronisation projective (PS).

Donc CS, AS, PS sont des cas particuliers de la **HPS**.

### 3.3.7 Synchronisation HFPS

Zhang et Li [32] ont développé un nouveau type de synchronisation notée par **HFPS** (en anglais : **Hybrid Function Projective Synchronization**), dans laquelle les deux systèmes émetteur et récepteur se synchronisent jusqu'à une matrice de fonction de mise à échelle.

Pour définir la synchronisation **HFPS**, le terme d'erreur est présenté par :

$$e(t) = Y(t) - H(t)X(t),$$

Où  $H(t) = \text{diag}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$  est une matrice de mise à l'échelle,  $h_i(t)$  est une fonction continûment différentiable bornée tel que  $h_i(t) \neq 0, \forall t$ .

**Définition 3.12** Pour le système (3.2), s'il existe une matrice de fonction de mise à échelle  $H$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e(t) \| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \| Y(t) - H(t)X(t) \| = 0. \quad (3.11)$$

Alors, il y a une synchronisation **HFPS**.

## 3.4 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

### 3.4.1 Méthode du contrôleur actif

#### ► Avantages de la méthode

-La technique du contrôleur actif est efficace non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques.

-La Méthode du contrôleur actif offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [33].

►Le Principes de cette méthode

Soit un couple des systèmes chaotiques maître et esclave représenté par :

$$\dot{X} = f(X(t)), \quad (3.12)$$

$$\dot{Y} = g(Y(t)) + U. \quad (3.13)$$

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| \dot{e}(t) \| = 0,$$

Où  $\dot{e}(t)$  l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes est obtenue comme suit :

$$\dot{Y}(t) - \dot{X}(t) = g(Y(t)) - f(X(t)) + U. \quad (3.14)$$

Si on peut écrire

$$g(Y(t)) - f(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)). \quad (3.15)$$

L'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U. \quad (3.16)$$

Où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante,  $N$  une fonction non linéaire et

$$U = V - N(X(t), Y(t)), \quad (3.17)$$

Où  $V$  est le contrôleur actif défini par :

$$V = -Le(t). \quad (3.18)$$

Où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue.

On obtient la formule finale suivante de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t). \quad (3.19)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (3.12) et le système esclave (3.13) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (3.19).

**Théorème 3.2** *Le système maître (3.12) et le système esclave (3.13) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (3.19), si et seulement si la matrice de contrôle  $L$  est choisie telles que les valeurs propres de  $(A - L)$  se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité.*

### 3.4.2 La méthode backstepping

#### ► Avantages de la méthode

- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

#### ► Le Principes de cette méthode

En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.20)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{y}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + u. \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $f_1$  est une fonction linéaire,

$f_i, (i = 2, \dots, n)$  sont des fonctions non-linéaires,

$u$  est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (3.20) et (3.21).

L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n. \end{cases} \quad (3.22)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u. \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $g_1$  est une fonction linéaire et  $g_i, (i = 2, \dots, n)$  sont des fonctions non-linéaires.

L'objectif est de calculer une loi de contrôle  $u$  qui assure la convergence du système  $e_i$ , ( $i = 2, \dots, n$ ) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping.

Pour cela, le système d'erreur (3.23) doit être décomposé en sous-système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, \dots, e_n). \quad (3.24)$$

et pour chaque sous-système on définit une fonction de Lyapunov  $V$  positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j). \quad (3.25)$$

d'où  $j$  est l'ordre du sous-système,

$u_j, \alpha_j$  représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre  $j$ .

$u_j$  et  $\alpha_j$  sont calculés à chaque fois de tel sorte que  $\dot{V}_j < 0$ .

### 3.4.3 Exemple numérique

► **Synchronisation du système chaotique de Lorenz via méthode de contrôleur actif [34] :**

Considérons les systèmes identiques chaotiques complète de Lorenz (d'après l'erreurs) sous la forme paramétrique triangulaire suivant comme système **maître** (émetteur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -10(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_1 = (x_1 - y_1) - z_1(9 + x_1), \\ \dot{z}_1 = 9(x_1 + y_1) - 3z_1 + x_1y_1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Soit le système **esclave** (récepteur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -10(x_2 - y_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 = (x_2 - y_2) - z_2(9 + x_2) + u_2, \\ \dot{z}_2 = 9(x_2 + y_2) - 3z_2 + x_2y_2 + u_3. \end{cases} \quad (3.27)$$

ou  $u_i, i = 1, 2, 3$  sont les fonctions du contrôle actifs qui seront déterminées ultérieurement.

Pour la synchronisation complète, définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1, \\ e_y = y_2 - y_1, \\ e_z = z_2 - z_1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Et suivons les étapes de la procédure du contrôle actif, par soustraction des équations du systèmes (3.26) de ceux des équations du systèmes (3.28) on utilisant la définition du système (3.27), on

obtient les dynamiques du système erreur suivant.

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_y + u_1, \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z - z_2x_2 + z_1x_1 + u_2, \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + x_2y_2 - x_1y_1 + u_3. \end{cases} \quad (3.29)$$

D'après la méthode de contrôleur actif, l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U. \\ \begin{pmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \\ \dot{e}_z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -9 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2x_2 + z_1x_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$U = V - N(X(t), Y(t)).$$

On définit le contrôleur  $U$  comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = z_2x_2 - z_1x_1 + v_2, \\ u_3 = -x_2y_2 + x_1y_1 + v_3. \end{cases} \quad (3.30)$$

Les dynamiques du système erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_y + v_1, \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z + v_2, \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + v_3. \end{cases} \quad (3.31)$$

$V$  le contrôleur actif défini par  $V = -Le(t)$  nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -10e_x, \\ v_2 = -e_x - 2e_y + 9e_z, \\ v_3 = 9e_x + 9e_y + 8e_z. \end{cases} \quad (3.32)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

On obtiens la formule finale d'erreur

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \\ \dot{e}_z(t) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -9 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique et on trouve les valeurs propres  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -11$ .

Tout  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  sont négatives, donc le système est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**, ce qui assure que pour tout  $t \rightarrow +\infty$  l'erreur  $e_i \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) c'est-à-dire la synchronisation complète de deux système est réalisée.

► **Synchronisation du système chaotique de Lorenz via Backstepping [34] :**

Soit le système esclave :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -10(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_2 = (x_2 - y_2) - z_2(9 + x_1), \\ \dot{z}_2 = 9(x_2 + y_2) - 3z_2 + x_2y_2 + U. \end{cases} \quad (3.33)$$

Pour la synchronisation complète, l'erreur est défini par :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1, \\ e_y = y_2 - y_1, \\ e_z = z_2 - z_1. \end{cases} \quad (3.34)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \\ \dot{e}_y = \dot{y}_2 - \dot{y}_1, \\ \dot{e}_z = \dot{z}_2 - \dot{z}_1. \end{cases} \quad (3.35)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_y & \dots (1) \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z - x_2e_z - z_1e_x & \dots (2) \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + y_2e_x + x_1e_y + U & \dots (3) \end{cases} \quad (3.36)$$

**Première étape :**

Considérons la stabilité du deuxième sous système, ses dynamiques sont calculés en prenant :

$$\dot{e}_x = -10e_x + 10e_y,$$

Définissons la première variable virtuelle du " **backstepping** "  $w_1$  et la commande virtuelle  $\alpha_1$  comme :

$$\begin{cases} w_1 = e_x, \\ w_2 = e_y - \alpha_1. \end{cases} \quad (3.37)$$

$\alpha_1$  est la fonction linéarisante du sous-système (1),  $w_2$  est une nouvelle variable. D'où, le sous système (1) devient :

$$\dot{w}_1 = \dot{e}_x = -10w_1 + 10w_2 + 10\alpha_1. \quad (3.38)$$

Choisissons une fonction de **Lyapunov** :

$$V_1(w_1) = \frac{1}{2}w_1^2, \quad (3.39)$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_1(w_1) = w_1\dot{w}_1 = -10w_1^2 + 10w_1w_2 + 10w_1\alpha_1, \quad (3.40)$$

Pour rendre  $\dot{V}_1(w_1)$  négative définie, on choisi la fonction stabilisant  $\alpha_1 = 0$ , Alors l'équation du premier sous système devient :

$$\dot{w}_1 = 10w_2 - 10w_1, \quad (3.41)$$

Les coordonnées de conception ont changées de  $(e_x, e_y)$  vers  $(w_1, w_2)$ ,

**Seconde étape :**

Considérons la stabilité du deuxième sous-système, ses dynamiques sont calculées en prenant :

$$\dot{e}_y = e_x(1 - z_1) - e_y - e_z(9 + x_2),$$

Donc les dynamiques du deuxième sous-système en  $(w_1, w_2)$  sont :

$$\dot{w}_2 = \dot{e}_y - \dot{\alpha}_1 = e_x(1 - z_1) - e_y - e_z(9 + x_2) = w_1(1 - z_1) - w_2 - e_z(9 + x_2), \quad (3.42)$$

La nouvelle loi de contrôle virtuelle est choisie de telle façon à avoir :

$$w_3 = e_z - \alpha_2, \quad (3.43)$$

$\alpha_2$  est la fonction stabilisante pour le deuxième sous-système et  $w_3$  est une nouvelle variable d'état.

$$\dot{w}_2 = w_1(1 - z_1) - w_2 - w_3(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2), \quad (3.44)$$

Et une fonction de **Lyapunov** appropriée au second sous système (3.44) comme :

$$V_2(w_1, w_2) = V_1(w_1) + \frac{1}{2}w_2^2, \quad (3.45)$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10w_1^2 - w_2^2 + w_2(w_1(11 - z_1) - w_3(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2)), \quad (3.46)$$

Pour rendre  $\dot{V}_2(w_1, w_2)$  négative définie, on choisi :

$$\alpha_2 = \frac{(11 - z_1)w_1}{(9 + x_2)}. \quad (3.47)$$

Alors

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10w_1^2 - w_2^2 - w_2w_3(9 + x_2), \quad (3.48)$$

Alors l'équation du second sous-système devient :

$$\dot{w}_2 = -10w_1 - w_2 - w_3(9 + x_2). \quad (3.49)$$

**Troisième étape :**

L'équation du troisième sous-système devient :

$$\dot{w}_3 = \dot{e}_z - \dot{\alpha}_2,$$

Avec

$$\dot{e}_z = w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1) - 3w_3 - 3\alpha_2 + U, \quad (3.50)$$

et

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \quad (3.51)$$

Donc

$$\dot{w}_3 = w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1) - 3w_3 - 3\alpha_2 + U - \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2},$$

Choisissons une fonction de **Lyapunov** :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = V_1(w_1) + V_2(w_1, w_2) + \frac{1}{2}w_3^2, \quad (3.52)$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -10w_1^2 - w_2^2 - 3w_3^2 + w_3(-w_2(9 + x_2) + w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1)) \\ & - 3\frac{11w_1}{(9 + x_2)} + U - \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \end{aligned}$$

Pour rendre  $\dot{V}_3(w_1, w_2)$  négative définie, on choisi  $U$  comme :

$$U = w_2(9 + x_2) - w_1(9 + y_2) - w_2(9 + x_1) + 3\frac{11w_1}{(9 + x_2)} + \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \quad (3.53)$$

Alors la dérivée de la fonction de **Lyapunov** globale du système est :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = -10w_1^2 - w_2^2 - 3w_3^2, \quad (3.54)$$

Le système final en  $(e_x, e_y, e_z)$  est :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{w}_1 = 10w_2 - 10w_1, \\ \dot{e}_y = \dot{w}_2 = -10w_1 - w_2 - w_3(9 + x_2), \\ \dot{e}_z = -3w_3 + w_2(9 + x_2). \end{cases} \quad (3.55)$$

### 3.5 conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes.

Le contrôleur actif et le backstepping sont les méthodes les plus utilisées pour réaliser la synchronisation des systèmes dynamiques.

# Chapitre 4

## Méthode et application pour un type de synchronisation IHFPS des systèmes chaotiques

### 4.1 Introduction

Ces dernières années synchronisation du chaos est devenu un domaine de recherche actif, en raison de ces applications potentielles dans la communication sécurisée. Dans la synchronisation **HFPS**, le système maître et le système esclave pourraient être synchronisés avec une matrice de fonction de mise l'échelle, l'imprévisibilité de la matrice de fonction de mise l'échelle dans le schéma **HFPS** peut améliorer la sécurité dans la télécommunication. Ainsi, nous avons contribué présenter une nouvelle méthode de synchronisation notée **IHFPS** (en anglais : **Inverse Hybrid Function Projective Synchronization**) qui est l'inverse de **HFPS**. Cette nouvelle méthode de synchronisation pourrait être, de sa part, utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de la fonction de matrice de mise en échelle dans ce concept de synchronisation peut en outre améliorer la sécurité de la communication.

Ce chapitre, nous introduisons la synchronisation **IHFPS** pour une classe générale de systèmes chaotiques en 5-Dimensions dans un temps continu, le résultat tiré est prouvé en utilisant la théorie de stabilité de **Lyapunov**. Afin d'atteindre nos objectifs, ce travail est scindé en trois section tels que, une description des systèmes maître-esclave chaotiques, puis définition de la synchronisation **IHFPS**, nous fournissons un exemple consiste à valider la nouvelle méthode de synchronisation chaotique **IHFPS**. Des simulations sont données pour montrer l'efficacité du nouveau résultat. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication internationale : "A General Control Method for inverse Hybrid Function Projective Synchronization of a Class of Chaotic Systems"[35].

## 4.2 Description des systèmes maître-esclave chaotiques

Considérons le système chaotique maître sous la forme suivante :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{q_n=1}^m \dots \sum_{q_1=1}^m \alpha_{q_1 \dots q_n}^{(i)} x_1^{q_1}(t) x_n^{q_n}(t) + c_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.1)$$

d'où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$  est le vecteur d'état du système maître,  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(\alpha_{q_1 \dots q_n}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tels que :  $\alpha_{10 \dots 0}^{(i)} = 0$ ,  $\alpha_{01 \dots 0}^{(i)} = 0$ , ...,  $\alpha_{00 \dots 1}^{(i)} = 0$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $(c_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}$ .

Pour le système esclave, nous considérons le système chaotique décrit par :

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j + \sum_{q_n=1}^m \dots \sum_{q_1=1}^m \beta_{q_1 \dots q_n}^{(i)} y_1^{q_1}(t) y_n^{q_n}(t) + d_i + u_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.2)$$

d'où  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$  est le vecteur d'état du système esclave,  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(\beta_{q_1 \dots q_n}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tels que  $\beta_{10 \dots 0}^{(i)} = 0$ ,  $\beta_{01 \dots 0}^{(i)} = 0$ , ...,  $\beta_{00 \dots 1}^{(i)} = 0$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}$ ,  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des contrôleurs.

## 4.3 Définition de la synchronisation IHFPS

Pour définir la synchronisation **IHFPS**, les erreurs de synchronisation sont fournis par :

$$e_i(t) = x_i - h_i(t)y_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.3)$$

Où  $h_i(t)$  des fonctions continûment différentiables bornées ( $h_i(t) \neq 0$  pour tous  $t, 1 \leq i \leq n$ ).

**Définition 4.1** Pour le système maître (4.1) et le système esclave (4.2), s'il existe des contrôleurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et des fonctions continûment différentiables bornées  $h_i(t) \neq 0$  pour tous  $t, 1 \leq i \leq n$ , telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0, 1 \leq i \leq n$ , Il est dit qu'il ya une synchronisation **IHFPS (Inverse Hybrid Function Projective Synchronization)**.

## 4.4 Méthode de la synchronisation IHFPS

Le système d'erreur entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) (selon la Définition 4.1) peuvent être décrits comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j(t) + \phi_i + \varphi_i + \psi_i - h_i(t)u_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.4)$$

Où

$$\phi_i = \sum_{q_n=1}^m \dots \sum_{q_1=1}^m \alpha_{q_1 \dots q_n}^{(i)} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.5)$$

$$\varphi_i = -h_i(t) \sum_{q_n=1}^m \dots \sum_{q_1=1}^m \beta_{q_1 \dots q_n}^{(i)} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.6)$$

$$\psi_i = h_i(t) \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) y_j - \dot{h}_i(t) y_i + c_i - h_i(t) d_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.7)$$

Pour atteindre la synchronisation **IHFPS** entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2), nous choisissons la loi de contrôle suivant :

$$u_i = \frac{1}{h_i(t)} \left( \sum_{j=1}^{i-1} (2a_{ij} + a_{ji}) e_j(t) \right) + s_i e_i(t) - \sum_{j=i+1}^n a_{ji} e_j(t) + \phi_i + \varphi_i + \psi_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.8)$$

Où  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des constantes de contrôle déterminer ultérieurement.

En remplacement l'équation (4.8) dans l'équation (4.4), le système d'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - s_1 & a_{21} + a_{12} & \dots & a_{n1} + a_{1n} \\ -(a_{21} + a_{12}) & a_{22} - s_2 & \dots & a_{n2} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1} + a_{1n}) & -(a_{n2} + a_{2n}) & \dots & a_{nn} - s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Donc

$$\dot{e}(t) = (L + S - L^T) e(t). \quad (4.10)$$

Où  $S = \text{diag} \{(a_{11} - s_1), \dots, (a_{nn} - s_n)\}$  et

$$L = (l_{ij})_{n \times n} \text{ tels que : } \begin{cases} -(a_{ij} + a_{ji}) & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Théorème 4.1** Si les constantes de contrôle  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont choisies telles que :

$s_i > a_{ii}, 1 \leq i \leq n$ , alors les deux systèmes maître (4.1) et le système esclave (4.2) sont globalement synchronisés au sens **IHFPS** sous les contrôleurs (4.8).

**Preuve.** Considérons la fonction de **Lyapunov** sous la forme :

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t), \quad (4.12)$$

Alors nous obtenons :

$$\dot{V}(e(t)) = \frac{1}{2} (\dot{e}^T(t) e(t) + e^T(t) \dot{e}(t)) \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{2} (e^T(t) (L^T + K^T - L) e(t) + e^T(t) (L + K - L^T) e(t)) \quad (4.14)$$

$$= e^T(t) K e(t) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} - s_i) e_i^2(t) < 0. \quad (4.15)$$

■

Ainsi, par la théorie de stabilité de **Lyapunov**, il est montré immédiatement que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, 1 \leq i \leq n. \quad (4.16)$$

► Nous concluons que les systèmes *maître* (4.1) et le système *esclave* (4.2) sont globalement synchronisés au sens de la synchronisation **IHFPS**.

## 4.5 Application de la synchronisation IHFPS pour deux systèmes chaotiques en temps continu

**Exemple 4.1** Cet exemple consiste à valider la nouvelle méthode de synchronisation chaotique (**IHFPS**) (en 5-Dimensions).

Considérons le système chaotique **maître** décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4 x_5, \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 x_5, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 0.1x_1^2, \\ \dot{x}_4 = -a_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5, \\ \dot{x}_5 = -a_4(x_5 - x_4) - a x_1 + x_1 x_2 x_3 x_4. \end{cases} \quad (4.17)$$

et le système **esclave** décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1(y_2 - y_1) + y_2 y_3 y_4 y_5 + u_1, \\ \dot{y}_2 = a_2(y_1 + y_2) - y_1 y_3 y_4 y_5 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -y_3 + 0.1y_1^2 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -a_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_5 + u_4, \\ \dot{y}_5 = -a_4(y_5 - y_4) - a_5 y_1 + y_1 y_2 y_3 y_4 + u_5. \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  sont des paramètres de bifurcations et  $(u_i)_{1 \leq i \leq 5}$  sont des contrôleurs de synchronisation.

Le système maître a un attracteur chaotique, quand  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (37, 14.5, 10.5, 15, 9.5)$  [36].

En appliquant la méthode de contrôle présentée, nous dérivons l'erreur de synchronisation entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = a_1(e_2(t) - e_1(t)) + R_1 - h_1(t)u_1, \\ \dot{e}_2(t) = a_2(e_1(t) + e_2(t)) + R_2 - h_2(t)u_2, \\ \dot{e}_3(t) = -e_3(t) + R_3 - h_3(t)u_3, \\ \dot{e}_4(t) = -a_3e_4(t) + R_4 - h_4(t)u_4, \\ \dot{e}_5(t) = -a_4(e_5(t) - e_4(t)) - a_5e_1(t) + R_5 - h_5(t)u_5. \end{cases} \quad (4.19)$$

où

$$\begin{cases} R_1 = x_2x_3x_4x_5 - h_1(t)y_2y_3y_4y_5 - \dot{h}_1(t)y_1, \\ R_2 = -x_1x_3x_4x_5 + h_2(t)y_1y_3y_4y_5 - \dot{h}_2(t)y_2, \\ R_3 = 0.1x_1^2 - h_3(t)(0.1y_1^2) - \dot{h}_3(t)y_3, \\ R_4 = x_1x_2x_3x_5 - h_4(t)y_1y_2y_3y_5 - \dot{h}_4(t)y_4, \\ R_5 = x_1x_2x_3x_4 - h_5(t)y_1y_2y_3y_4 - \dot{h}_5(t)y_5. \end{cases} \quad (4.20)$$

Et  $(h_i(t))_{1 \leq i \leq 5}$  sont les fonctions de mise à l'échelle.

Pour atteindre la synchronisation IHFPS entre les deux systèmes maître (4.1) et le système esclave (4.2), nous choisissons les contrôleurs de synchronisation comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{h_1(t)}(a_2e_2(t) + a_5e_5(t) + R_1), \\ u_2 = \frac{1}{h_2(t)}(a_1e_1(t) + se_2(t) + R_2), \\ u_3 = \frac{1}{h_3(t)}R_3, \\ u_4 = \frac{1}{h_4(t)}(a_4e_5(t) + R_4), \\ u_5 = \frac{1}{h_5(t)}R_5. \end{cases} \quad (4.21)$$

Où  $s$  est une constante de contrôle à déterminer.

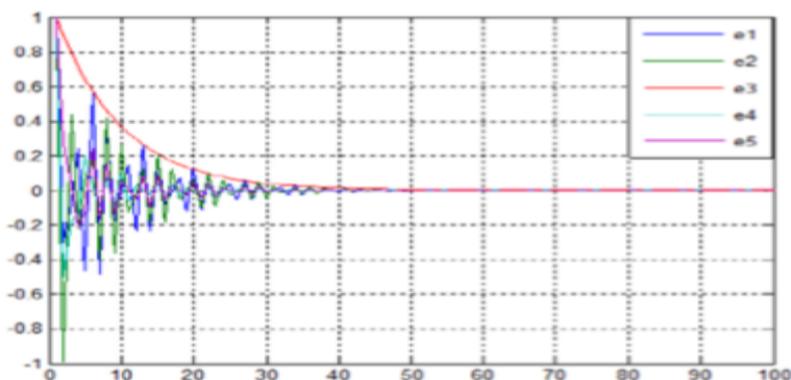
Les erreurs de synchronisation (4.19) peuvent être décrites comme :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \\ \dot{e}_4(t) \\ \dot{e}_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 - a_2 & 0 & 0 & a_5 \\ a_2 - a_1 & a_2 - s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ -a_5 & 0 & 0 & a_4 & -a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

► En utilisant la même procédure de la preuve du **Théorème 4.1**, nous pouvons obtenir le résultat suivant :

Si une constante de contrôle  $s$  est choisie telle que :  $s > a_2$ , alors les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés de type **IHFPS** sous la loi de contrôle (4.21).

Afin de valider les résultats théoriques obtenus, une simulation numérique est élaborée (**FIG. 4.1**).



**FIG.4.1**-Évolution du temps des erreurs de la synchronisation **IHFPS** entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2).

## 4.6 conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter la synchronisation **IHFPS** l'inverse de **HFPS**, pour une classe générale  $n$ -dimensionnelle des systèmes chaotiques en temps continu. une simulation numérique est montrée l'efficacité de la méthode **IHFPS** en 5-D. Cette nouvelle méthode de synchronisation pourrait être, de sa part, utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée.

---

## Conclusion générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude d'un type de synchronisation noté « **IHFPS** » des systèmes chaotiques. Pour atteindre nos objectifs, nous avons organisé notre travail en quatre chapitres : Le premier chapitre présente les notations de base sur les systèmes dynamiques en temps continu et discret avec la stabilité et la linéarisation de ces systèmes.

Le deuxième chapitre est un panorama sur la théorie du chaos tels que, la définition du chaos et ses caractéristiques du chaos, les attracteurs et leurs différents types en donnant des exemples des systèmes chaotiques et hyperchaotiques.

Le troisième chapitre est réservé à la synchronisation des systèmes chaotiques pour donner les types de synchronisation les plus utilisés tels que : **CS**, **AS**, **GS**,...etc. Les nouvelles types hybrides de synchronisation tels que : **HPS** et **HFPS** sont étalés. Les méthodes les plus usées tels que : la méthode backstepping et la méthode de contrôleur actif sont aussi exposées.

Récemment, la synchronisation projective hybride (**HPS**), dont les différentes variables d'état peuvent synchroniser jusqu'à des facteurs de mise en échelle différents, est évoquée. Cependant, la synchronisation projective fonction hybride (**HFPS**) pour des systèmes chaotiques est largement considérée. Dans le schéma de synchronisation (**HFPS**), le système maître et le système esclave pourraient être synchronisés avec une matrice de fonction de mise en échelle, et l'imprévisibilité de la matrice de fonction de mise en échelle peut améliorer la sécurité dans la télécommunication. D'autre part, étudiant le problème inverse de ce schéma produit un nouveau type de synchronisation notée (**IHFPS**).

Notre contribution, qui parvient à travers le quatrième chapitre du présent mémoire, est de formuler une nouvelle approche et un nouveau critère de la synchronisation de ce nouveau type de synchronisation (**IHFPS**). Basée sur la théorie de Lyapunov, ses performances sont prouvées à partir de leurs applications pour la synchronisation de deux systèmes dynamiques identiques hyperchaotiques. Cette nouvelle méthode de synchronisation pourrait être, de sa part, utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de la fonction de matrice de mise en échelle dans ce concept de synchronisation peut en outre améliorer la sécurité de la communication. Afin de montrer l'efficacité de cette méthode proposée, elle a été appliquée pour synchroniser des systèmes dynamiques hyperchaotiques identiques continus en 5-D. Un exemple numérique est exploité pour illustrer l'efficacité de la méthode.

# Bibliographie

- [1] **LORENZ E.** Deterministic non periodic flow. *J Atm Sci* 1963, 20, (130-141) : 386377.
- [2] **C.M.MARLE**, "Systèmes dynamiques : une introduction.", P.Pilibossian, ellipsesédition 2003.
- [3] **J.HUBBARD, B.ZEST**, "Equations différentielles et systèmes mécaniques.", Cassini édition 1999.
- [4] **R. L. Devaney.** "An introduction to chaotic dynamical dystems", Addison-Wesley, New York, 1987.
- [5] **D. Ruelle.** "Chaotic Evolution and Strange Attractors", Cambridge : Cambridge University Press, 1989*b*.
- [6] **E. Zeraoulia, J. C. Sprott.** "A two-dimensional discrete mapping with C1-multifold chaotic attractors", *Electronic Journal of Theoretical Physics*, vol.5(17), pp .107-120, 2008.
- [7] **D. Ruelle, F. Takens.** "On the nature of turbulence", communication in *Mathematica physics*, vol. 20, pp .167-192 ; 1971.
- [8] **P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal.** "Order Within Chaos", Hermann and John Wiley and Sons, Paris, France, 1984.
- [9] **J. D. Farmer, J. J. Sidorowich.** "Predicting chaotic time series", *Phys. Rev.Lett.*, vol. 59, 845,1987.
- [10] **L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G. Q. Zhong.** "A universal circuit for studying and generating chaos, part II : Routes to chaos", *IEEE Trans. Circuit syst I : Fundamental Theory applications*, vol. 40(10), pp .733 ; 1993.
- [11] **T. Y. Li, J. A. Jorke.** "Period three implies chaos", *American Mathematical Monthly*", vol. 82, pp. 481-485, 1975.
- [12] **D. Kaplan, L. Glass.** "Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics", New-York : Springer-Verlag, pp. 1-53, 1995.

- [13] **R. Hilborn.** "Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers", Oxford Student Edition, 1994.
- [14] **Y. Pomeau, P. Manneville.** "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Commun. Math. Phys., vol. 74(2), pp. 189-197, 1980.
- [15] **J. P. Eckmann.** "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", Rev. Mod. Phys., vol. 53, pp. 643-5, 1981.
- [16] **O. E. Rössler.** "An equation for continuous chaos", Phys. Lett. A, vol. 57(5), pp. 397-398, 1976.
- [17] **O. E. Rössler.** "Continuous chaos-four prototype equations", Bifurcation theory and applications in scientific disciplines, Ann. New York Acad. Sci., vol. 316, pp. 376-392, 1979.
- [18] **O. E. Rössler.** "An equation for hyperchaos", Phys. Lett. A., vol. 71, pp. 155-157, 1979.
- [19] **Z. Liu.** "Strange nonchaotic attractors from periodically excited Chua's circuit", Int. J. of Bifurcation and Chaos in App. Sci. and Eng., vol. 11(1), pp. 225-230, 2001.
- [20] **T. Matsumoto.** "A chaotic attractor from Chua's circuit", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 31(12), pp. 1055-1058, 1984.
- [21] **T. Yamada, H. Fujisaka.** "Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator." Progress of Theoretical Physics, 1983 : 32-47.
- [22] **V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, M.N. Rabinovich.** "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems." Radiophys. and Quantum Electronics, 1986 : 747751.
- [23] **L.M. Pecora, T.L. Carroll.** "Synchronization in chaotic systems." PHYSICAL REVIEW LETTERS, February 19, 1990 : 821-825.
- [24] **L.M. Pecora, T.L. Carroll.** "Synchronizing non-autonomous chaotic circuits." IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, Oct 1993 : 646-650.
- [25] **A. Khadra, X. Liu, X. Shen.** "Robust impulsive synchronization and application to communication security ." Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems– Series B : Applications & Algorithms, 2003 : 403-417.
- [26] **R. Brown, L. Kocarev.** "A unifying definition of synchronization for dynamical systems", Chaos, vol. 10(2), pp. 344-349, 2000.
- [27] **N. F. Rulkov, K. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel.** "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", Phys. Rev. E, vol. 51, pp. 980-994, 1995.
- [28] **R. Mainieri, J. Rehacek.** "Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems", Phys. Rev. Lett., vol. 82, pp. 3042-5, 1999.

- 
- [29] **D. Xu, Z. Li, R. Bishop.** "Manipulating the scaling factor of projective synchronization in three-dimensional chaotic systems", *Chaos*, vol.11(3), 439-42, 2001.
- [30] **M. Manfeng, Z. Xu.** "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems", *Nonlinear Analysis : Theory, methods and applications*, vol.69(4), pp. 1091-1099, 2008.
- [31] **M. Hu, Y. Yang, Z. Xu, L. Guo.** "Hybrid projective synchronization in chaotic complex non-linear system", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, pp. 449-457, 2008.
- [32] **C. L. Zhang, J. M. Li.** " Hybrid Function projective synchronization of chaotic systems with uncertain Time-varying parameters via Fourier eeries expansion", *International Journal of Automation and Computing*, vol. 9(4), pp. 388-394, 2012.
- [33] **M. A. Ahan.** "Synchronization of different 3-D chaotic systems by generalized active control", *J. Infor. Comp. Sci.*, vol. 7(4), pp. 272-283, 2012.
- [34] **Guessas, Mme Laarem.** "Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques." Université de Biskra (2012).
- [35] **A. Gasri, A. Ouannas,** "A General Control Method for Inverse Hybrid Function Projective Synchronization of a Class of Chaotic Systems", *International Journal of Mathematical Analysis*, vol. 9(5), pp. 429-436, 2015.
- [36] **A. Gasri,** "Chaos et synchronisation ( généralisé) dans les systèmes dynamiques", Thèse de Doctorat en Sciences en Université Frères Mentouri- Constantine-1, 2018.