جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Université Larbi Tebessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux deriveé partielles et applications

Thème:

Théorèmes du point fixe commun et leurs applications à la programmation dynamique

Présenté Par:

BORDJI Sarra **BERRAH Bouthaina**

Devant le jury:

Mr: MERGHADI Faycel	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr: BENZAHI Mourad	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr: BERRAH Khaled	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Encadrant

Date de soutenance: 25 /06/2020

Dédicace

A celui qui m'a aidé à découvrir le savoir le trésor inépuisable.

De tous les pères tu as été le meilleur

" Mon père Mohammed "

Source de bonheur de patience et de sacrifice.

À ma lumière quand je m'égare, tes prières et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie

"Ma mère Zina"

À Celui qui est toujours dans mon cœur : Mon oncle Djamel que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

À mes sœurs Asma _ Khadija et Chaïma

Tous mes sentiments d'amour et de tendresse envers vous deux mes chères sœurs.

À mes frères Abdallah et Ahmed qui m'ont apporté leurs support moral tout au long de ma démarche.

À mes chers petits neveux et nièces Jaida, Touka, Aryame, Jawad, Saja et Assaouer

Aucune dédicace ne saurait exprimer tout l'amour que j'ai pour vous. Puisse Dieu vous garder, éclairer votre route.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mes chères amies, Karima et Dalel, collègues et ma belle-sœur Bouthaina ma binôme.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis à tous : Merci.

BORDJI Sarra

Dédicace

Je dedie ce modeste travail premièrement à mon grand Dieu, qui m'a donné le courage pour finir ce travail.

Particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existences à bâtir la mienne, pour leurs soutiens et patience pour que je puisse finir ce travail.

A mon support dans ma vie, celui qui m'a éduqué et dirigé vers le sucées.

A mon père « Djemii » qui est toujours disponible et près as nous aider, je lui confirme mon attachement et mon profond respect.

A la lumière de ma vie ma mère « Aicha » qui ma encourage durant toute mes études et qui sans elle, la réussite n'aura pas eu lieu, qu'elle trouve ici mon amour et mon affection.

A toutes mes chers sœurs : Sabrina, Kawther, Wafa et Marwa.

Aussi a mes chers frères : Imad et Salah.

A mes chères amies : Karima, Dalel et spécialement ma binôme Sara.

A tous ceux qui m'ont aidé du près ou de loin pour la réalisation de ce travail et a toute la famille BERRAH et REZGUI.

BERRAH Bouthaina

Remerciements

A l'issue de ce modeste travail, nous tenons tout d'abord à remercier "Dieu" tous puissant, qui nous a donné le courage, la patience pur finir notre travail.

Nous voudrions dans un premier temps remercier notre encadrant Dr. BERRAH Khaled, pour son aide, ses précieux conseils qui ont été nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons à remercier également tous les membres du jury :

Dr. MERGHEDI Faycel, d'voir accepter de présider et juger ce travail

Monsieur BENZAHI Mourad d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail.

Nous adresses nos sincères remerciements à tous Nos enseignants et toute personnes qui par leur paroles, conseils et critiques ont orienté nos réflexions tout au long de nos études durant notre parcours universitaire.

Nous tenons à remercier nos chers collègues qui nous ont apporté leurs soutiens moral et pour les agréables moments tout au long de nos chemins.

Encore un grand merci à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail.

ملخص

في هذا العمل، درسنا مقاليين حول بعض نظريات النقطة الثابتة المشتركة.

تضمنت الشروط بالنسبة للنظرية الأولى الإستمرارية، التبادلية و الانكماش بالإضافة الى تمام الفضاء المتري. أما بالنسبة للنظرية الثانية فقد قمنا بإستخدام خاصية التوافق من نوع (P)، تحت شرط تعاقدي معمم في فضاء متري تام.

باستخدام نظريتين، قمنا بإثبات وجود ووحدانية حل مشترك لجملتين من المعادلات الدالية المندرجة ضمن البرمجة الديناميكية.

الكلمات المفتاحية :

النقطة الثابتة المشتركة، الإستمرار، التبديل، التوافق، التقلص، فضاء متري تام، المعادلات الدالية، البرمجة الديناميكية.

Abstract

In this work, we have studied two articles for some common fixed point theorems.

The conditions of the first theorem included continuity, commutativity and contractivity as well as completeness of the metric space. For the second theorem, we used the compatibility notion of type (P), under a generalized contractual condition in a complete metric space.

Using two theorems, we have proved the existence and the uniqueness of a common solution for two systems of functional equations which apear in dynamic programming.

Keywords:

Common fixed point, continuity, commutativity, compatibility, contraction, complete metric space, functional equations, dynamic programming.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudiée deux articles sur quelques théorèmes du point fixe commun.

Les conditions du premier théorème comprenaient la continuité, la commutativité et la contractivité ainsi que la complétude de l'espace métrique. Quant au deuxième théorème, nous avons utilisé la notion de compatibilité de type (P), sous une condition contractive généralisé dans un espace métrique complet.

En utilisant deux théorèmes, nous avons démontré l'existence et l'unicité d'une solution commune à deux systèmes d'équations fonctionnelles qui apparaissent en programmation dynamique.

Mots clés:

Point fixe commun, continuité, commutativité, compatibilité, contraction, espace métrique complet, équations fonctionnelles, programmation dynamique.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Dans la vie, l'exemple le plus simple qui nous permet de voir un point fixe se trouve dans le thermomètre lorsque cet outil est utilisé pour mesurer la température, les points d'ébullition et de congélation de l'eau sont des points fixes car ils sont facilement réalisables. En mathématiques, un point fixe est un point qui reste statique par une application ou une transformation.

Qu'elle est l'importance de la théorie du point fixe ?

La théorie du point fixe est considérée comme la base de l'analyse non linéaire. Il est à noter que cette théorie est l'une des outils plus utiles et important dans l'étude de plusieurs domaines notamment en biologie, chimie, économie, théorie de jeux, théorie d'optimisation et en physique. . . etc.
Dans ce travail, nous nous intéressons à des théorèmes de point fixe qui peuvent être approchés sans aucun fond topologique.

L'un de ces théorèmes génère la notion de la contractivité des auto-applications sur un espace métrique. Cela a été introduit par S. Banach en 1922, donnant un nouveau champ de recherche dans le théorie du point fixe appelé contraction d'application et connu sous le nom de principe de contraction de Banach.

Pour démontrer un point fixe commun dans un espace métrique, nous avons besoin quelques propriétés sur les applications comme la commutativité, la compatibilité et la contractivité. Ainssi que la complétude de l'espace (ou sous-espace) qui assurez la convergence de solution.

En 1982, Sessa [27] était parmi les premiers mathématiciens qui donna un théorème de point fixe commun dans lequelle il généralisa la notion de commutativité par la commutativité faible. Ensuite, Jungck [12] en 1986 introduisant la notion de la compatibilité de fonction celle plus générale.

D'autre part, la notion de la compatibilité était généralisée aux plusieurs types : la compatibilité faible, la compatibilité de type (A), la compatibilité de type (B), la compatibilité de type (C), la compatibilité de type (E) et la compatibilité de type (P).

Dans notre travail, on va étudier plusieurs articles sur des théorèmes du point fixe commun. A travers cette synthèse bibliographique on va obtenir quelques remarque et quelques résultats qu'on va résumer dans notre travail.

Dans le premier chapitre on va rappeller quelques notions élémentaires et des définitions importantes qui sont nécessaire dont on aura besoin pour notre travail comme les applications contractantes et quelques types de contractions, ainsi que quelques propriétés de commutativité et compatibilité.

Dans le deuxième chapitre nous allons prendre deux articles [10] et [22] et nous allons approuver des théorèmes :

- Un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications continues dans un espace métrique complet. Anssi que, nous allons approuvé un cas particulier pour deux applications.

- Un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications compatible de type (P) dans un espace métrique complet, et pour un paire.

Dans le dernier chapitre on va détailler la preuve de deux applications des théorèmes mentionnés dans le chapitre 2 pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution commune pour des systèmes d'équations fonctionnelles qui apparaissent dans la programmation dynamique.

Finalement notre travail sera conclu par une conclusion.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

On va mentionner dans ce chapitre quelques définitions, théorèmes, propositions et remarques on introduisant les notions de bases qu'on aura besoin dans notre travail.

1.1 Notions de base

"**Espace métrique**" Un espace métrique est un ensemble au sein duquel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie.

Définition 1.1 *[31] **(Espace métrique)** Un espace métrique (X, d) est un ensmble non vide X muni d'une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(La symétrie)*,

iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(l'inégalité triangulaire)*.

Exemple 1.1 *L'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définit par :*

$$d(x, y) = |x - y|$$

est une distance sur $\mathbb{R}$, appellée distance usuelle.

Exemple 1.2 *Dans $\mathbb{R}^n$, on peut considérer les distances suivantes :*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\},$$

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } p \geq 1.$$

Définition 1.2 [32] ***"Suite de Cauchy"*** *Soit $\{x_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X dans un espace métrique (X, d), est dite une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n(\varepsilon) : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Exemple 1.3 *Soit $\{x_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite dans $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ définie par :*

$$U_n = \frac{1}{n}$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$d(x_n, x_m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$$

$$\begin{aligned} &= \mid \frac{n-m}{nm} \mid \\ &\leq \mid \frac{n}{nm} \mid \\ &\leq \mid \frac{1}{m} \mid \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.3 *"**Suite convergente**" Soient (X, d) un espace métrique et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On dit que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

on note alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Définition 1.4 *"**Espace métrique complet**" On dit que (X, d) est un espace métrique complet si et seulement si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Proposition 1.1 1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque n'est vraie que dans un espace complet.*

2. *Toute suite de Cauchy est borné.*
3. *À partir de toute suite de Cauchy, on peut extraire une suite convergente.*

Exemple 1.4 *Soit la suite* $\{x_n\}$ *dans l'espace métrique* $(\mathbb{R}-\{1\}, |\,.\,|)$, *tel que* $x_n = \frac{n}{n+1}$.

On a $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \notin \mathbb{R}-\{1\}$, *donc la suite* $\{x_n\}$ *diverge.*

Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| \\ &= \left| \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right| \\ &\leq \frac{n}{n(m+1)} \\ &\leq \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Alors $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = 0$, *d'ou* $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$, *donc la suite* $\{x_n\}$ *est dite une suite de Cauchy.*

1.2 Applications contractantes

Tout d'abord, on va donner quelques définitions concernant les applications contractantes.

Définition 1.5 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Une application* $T : X \to X$ *est dite :*

1. *Lipschitzienne (ou k-lipshitizienne) s'il existe un nombre réel positif* k *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on a :*
$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$
2. *Contractante ou une contraction si* $k < 1$.
3. *Si* $k = 1$, *l'application* T *est dite non-expansive si et seulement si 1-lipchitizienne.*
4. *Contractive si pour tout* $x, y \in X$ *et* $x \neq y$ *on a :*
$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Remarque 1.1 *La contraction implique contractive, implique non-expansive, implique Lipschitziènne et que toute ces applications sont uniformément continues.*

Exemple 1.5 *Soit* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application définie par :*

$$Tx = \frac{1}{2}x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

alors T *est une contraction.*

Théorème 1.1 *"**Banach**" Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction. Alors :*

T admet un point fixe unique dans X, i.e.

$$\exists! u \in X \text{ tel que } Tu = u.$$

1.3 Quelques types de contraction

1- Contraction de Rakotch (1962)

Ce théorème est une généralisation de théorème du point fixe de Banach.

Théorème 1.2 *[25] Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant :*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y), \forall x,y \in X$$

où $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ est une fonction décroissante. Alors T admet un point fixe unique dans X.

2- Contraction de Kannan(1968)

Dans le théorème de Banach, la contraction de l'application entraine la continuité. Il est normal de poser la question s'il existe des conditions contractives qui n'impliquent pas la continuité de l'application (T). Cette question a été répondue d'une maniére affirmative par Kannan [14]en 1968.

Théorème 1.3 *[13] Soit (X,d) un espace métrique, et $T : X \to X$ on dit que T est une application de Kannan s'il existe $h \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, tel que pour tout $x,y \in X$:*

$$d(Tx,Ty) \leq h\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right].$$

Théorème 1.4 *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application de Kannan. Alors T admet un point fixe unique dans X.*

3- **Contraction de Boyd-Wong(1969)**

Ce théorème est une généralisation de théorème du point fixe de Banach a plusieurs des applications dans l'analyse non-linéaire.

Théorème 1.5 *[6] Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et vérifiant :*

$$d(Tx,Ty) \leq \phi(d(x,y)),$$

pour tout $x,y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^*. En outre, pour tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*.$$

Dans ce cas, T est dite ϕ-contractive ou contraction non linéaire.

4- Contraction de Meir-Keeler(1969)

En 1969, A. Meir et E. Keeler ont prouvé un théorème du point fixe pour une contraction faiblement uniformément stricte généralisant le principe de contraction de Banach.

Théorème 1.6 *[19] Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\varepsilon \leq d(x,y) < \delta \text{ implique } d(Tx,Ty) < \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X. De plus, pour tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*.$$

5- Contraction de Geraghty(1973)

Définition 1.6 *Soit (X,d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite contraction de Geraghty si et seulement s'il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1$ implique $t_n \to 0$ et pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx,Ty) \leq \beta(d(x,y)).$$

Théorème 1.7 *[9] Toute contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.*

6- Contraction de Caristi(1976)

Théorème 1.8 *[7] Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

Il existe une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}_+$ semi -continue inférieurement telle que :

$$d(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx),$$

pour tout $x \in X$, alors T admet un point fixe.

7- Contraction de Matkowski

Définition 1.7 *Une application $T : X \to X$ d'un espace métrique (X,d) est dite contraction de Matkowski (ou φ-contraction) si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. *φ strictement croissante,*
2. $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$,
3. $d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y)), \forall x, y \in X$.

Théorème 1.9 *[20] Toute φ-contraction T d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a* $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

8- Contraction de Branciari(2002)

Théorème 1.10 *[19] Soit T une application d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

pour tout $x, y \in X$, où $k \in [0, 1]$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue vérifiant :

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Alors T a un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a : $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

9- Contraction de Reich

Théorème 1.11 *[26] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

$\exists a, b, c > 0$ *avec* $a + b + c < 1$, *tel que pour tout* $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y),$$

alors T admet un point fixe unique dans X.

1.4 Propriétès des applications

1.4.1 Continuité

Définition 1.8 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $T : X \to Y$ une application et $a \in X$, on dit que T est continue au point a si :*

$$\lim_{n\to a} T(x) = T(a),$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(T(x), T(y)) < \varepsilon.$$

Définition 1.9 (*Semi-continuité inférieure*)
On dit que f est semi-continue inférieurement en x_0 si :

pour tout $t < f(x_0)$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U, f(x) \geq t$,

Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit :

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

où $\liminf$ *désigne la limite inférieure d'une fonction en un point.*

Définition 1.10 (*Semi-continuité supérieure*)
On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 si

pour tout $t > f(x_0)$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U,\ f(x) \leq t$,

Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit :

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

où $\limsup$ *désigne la limite supérieure d'une fonction en un point.*

1.4.2 Compatibilité

Le concept des applications commutative en introduisant le concept des applications faiblement commutative a été généralisé par Sessa [27]

Définition 1.11 *[11] Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. S et T sont dites commutatives si :*

$$STx = TSx,\ \forall x \in X$$

Définition 1.12 *[27] Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. S et T sont faiblement commutatives si est seulement si :*

$$d(STx, TSx) \leq d(Tx, Sx), \forall x \in X$$

Remarque 1.2 *De toute évidence la commutativité implique la commutativité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Jungck [12] a amélioré le concept des applications faiblement commutatives en introduisant le concept des applications compatibles.

Définition 1.13 [22] *Soient $S, T : X \to X$ deux applications. Les applications S et T sont compatibles si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, TSx_n\right) = 0$$

pour tout suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = z, \forall z \in X$$

Remarque 1.3 *Si S et T sont commutatives, alors elles sont faiblement commutatives, donc compatibles, mais la réciproque est fausse en général.*

Exemple 1.6 *Soit $X = \mathbb{R}$ et d la métrique euclidienne. Définissons :*

$$Sx = \frac{x+1}{2}, \text{ et } Tx = 2x - 1$$

soit la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ définie par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+1}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1$$

de plus :

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} S\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$$

donc la paire (S, T) est compatibles

Définition 1.14 *S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence, i.e., pour tout $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$, alors $STu = TSu$:*

La compatibilité était généralisée aux divers types :

Définition 1.15 [22] *Soient $S, T : X \to X$ deux applications, sont dites compatibles de type (A) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(TSx_n, SSx_n\right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, TTx_n\right) = 0$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z \;\forall z \in X.$$

Définition 1.16 *[21] On dit que S, T sont compatibles de type (B), si et seulement si*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, TTx_n\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, Sz\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Sz, SSx_n\right)\right] \text{ et} \\
\lim_{n\to\infty} d\left(TSx_n, SSx_n\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d\left(TSx_n, Tz\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Tz, TTx_n\right)\right],
\end{aligned}$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z, \forall z \in X.$$

Définition 1.17 *[22] S et T sont dites compatibles de type (P) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(SSx_n, TTx_n\right) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z \ \forall z \in X.$$

Définition 1.18 *[24] S et T sont compatibles de type (C) si et seulement si :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, TTx_n\right) &\leq \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} d\left(STx_n, Sz\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Sz, TTx_n\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Sz, SSx_n\right)\right], \\
\lim_{n\to\infty} d\left(TSx_n, SSx_n\right) &\leq \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty} d\left(TSx_n, Tz\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Tz, SSx_n\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(Tz, TTx_n\right)\right],
\end{aligned}$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z, \forall z \in X.$$

Définition 1.19 *[28] S et T sont compatibles de type (E) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} TTx_n = \lim_{n\to\infty} TSx_n = Fz, \forall z \in X$$

et

$$\lim_{n\to\infty} SSx_n = \lim_{n\to\infty} STx_n = Tz, \forall z \in X$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z, \forall z \in X.$$

Définition 1.20 *[29] $S, T : X \to X$ sont dites S-compatibles de type (E) si :*

$$\lim_{n\to\infty} SSx_n = \lim_{n\to\infty} STx_n = Tz \ \forall z \in X$$

Elles sont dit T-compatible de type (E) si :

$$\lim_{n\to\infty} TTx_n = \lim_{n\to\infty} TSx_n = Sz \ \forall z \in X$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans X vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z \ \forall z \in X.$$

Proposition 1.2 *[22] Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications continues,*
1) Si S et T sont compatibles, alors ils sont compatibles de type (A).
2) S et T sont compatibles si et seulement si ils sont compatibles de type (A).

Proposition 1.3 *[22] Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications compatibles de type (A), si l'une des applications S et T est continue, alors S et T sont compatibles.*

Proposition 1.4 *[22] Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications continues, alors S et T sont compatibles si et seulement si ils sont compatibles de type (P).*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = z,$$

pour tout $z \in X$, car S et T sont continues alors,

$$\lim_{n\to\infty} SSx_n = \lim_{n\to\infty} STx_n = Sz$$

et

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} TTx_n = Tz.$$

Supposons que S et T sont compatibles. On à

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0$$

et

$$\begin{aligned} d(SSx_n, TTx_n) &\leq d(SSx_n, STx_n) + d(STx_n, TTx_n) \\ &\leq d(SSx_n, STx_n) + d(STx_n, TSx_n) + d(TSx_n, TTx_n) \end{aligned}$$

et $\lim_{n\to\infty} d(SSx_n, TTx_n) = 0$. Donc, les applications S et T sont compatibles de type (p).

Inversement, supposons que S et T sont des applications compatibles de type (p), on à :

$$\lim_{n\to\infty} d(SSx_n, TTx_n) = 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned} d(STx_n, TSx_n) &\leq d(STx_n, SSx_n) + d(SSx_n, TSx_n) \\ &\leq d(STx_n, SSx_n) + d(SSx_n, TTx_n) + d(TTx_n, STx_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0$. ■

Proposition 1.5 [22] *Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications compatibles de type (A). Si l'une des applications S et T est continue, alors S et T sont compatibles de type (P).*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = z, \text{ pour tout } z \in X.$$

Supposons que S et T sont des applications compatibles de type (A).
Choisisant que S soit continue. Nous avons,

$$d(SSx_n, TTx_n) \leq d(SSx_n, STx_n) + d(STx_n, TTx_n).$$

Car S et T sont compatibles de type (A), donc,

$$\lim_{n\to\infty} d(SSx_n, TSx_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} d(STx_n, TTx_n) = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} d(SSx_n, TTx_n) = 0.$$

Quand choisi T continue, en trouve le même résultat. ■

Proposition 1.6 [22] *Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications continues et :*
(1) S et T sont compatibles si et seulement si sont compatibles de type (P).
(2) S et T sont compatibles de type (A) si et seulement si sont compatibles de type (P).

Proposition 1.7 [22] *Soient $S, T : (X, d) \to (X, d)$ deux applications. Si S et T sont compatibles de type (P) et $Sz = Tz$ pour tout $z \in X$, alors $SSz = STz = TSz = TTz$.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X définit par $x_n = z, n = 1, 2, ...,$ et $Sz = Tz$ pour tout $z \in X$. Alors nous avons $Sx_n \to Sz$ quand $n \to \infty$. Car S et T sont compatibles de type (P), on a

$$d(SSz, TTz) = \lim_{n\to\infty} d(SSx_n, TTx_n) = 0,$$

par conséquent, $SSz = TTz$. On a $Sz = Tz$ ce qui implique $SSz = STz = TSz = TTz$. ■

Proposition 1.8 [22] *Si S et T sont compatibles de type (P) et $Sx_n, Tx_n \to z$ quand $n \to \infty$ pour tout $z \in X$. Alors on a les égalités suivantes :*

(1) $\lim_{n\to\infty} TTx_n = Sz$ *si* S *est continue à* z,

(2) $\lim_{n\to\infty} SSx_n = Tz$ *si* T *est continue à* z,

(3) $STz = TSz$ *et* $Sz = Tz$ *si* S *et* T *sont continues à* z.

Preuve. [22] ■

1.5 Théorème du point fixe commun de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom du théorème de l'application contractante), il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.12 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application telle qu'il existe $K \in [0, 1[$ vérifiant :*

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in X \times X$. Alors il existe un point fixe x^* de X tel que :

$$T(x^*) = x^*$$

Preuve. *Soient $x_0 \in X$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définit par :*

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq Kd(x_n, x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq KKd(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq K^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Montrons que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ *avec* $p > q$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{q+1}, x_q) \\ &\leq K^{p-1} d(x_1, x_0) + K^{p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + K^q d(x_1, x_0) \\ &\leq K^q d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{p-q-1} K^i \\ &\leq K^q d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} K^i \\ &= K^q d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-K} \right) \\ &= \frac{K^q}{1-K} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Passant par la limite car $k < 1$ *donc*

$$\lim_{p,q \to \infty} d(x_p, x_q) = 0,$$

Donc la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* X*, et comme* (X, d) *complet, donc la suite* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*converge vers* z *dans* X*.*
D'après la continuité de T *on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = T(x_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$$

$$\Rightarrow z = T(\lim_{n \to \infty} x_n) = T(z).$$

Donc $z = Tz$*, d'où* z *est un point fixe de* T*.*
Supposons qu'il existe z_1*,*$z_2 \in X$ *tel que* $z_1 \neq z_2$*, avec* $z_1 = Tz_1 = z_2 = Tz_2$*, on a*

$$d(z, z') = d(T(z_1), T(z_2)) \leq K d(z_1, z_2).$$

Ce qui est possible si $d(z_1, z_2) = 0$*, donc* $z_1 = z_2$*.* ■

Un point fixe commun est un point qui reste stationaire à travers des applications données (plus d'une) ou des transformations.

Théorème 1.13 *Soient* (X, d) *un espace métrique complet,* f *et* g *deux applications s'il existe* $k \in [0, 1[$ *vérifiant :*

$$d(fx, gy) \leq K d(x, y),$$

pour tout $(x, y) \in X \times X$*. Alors il existe un point fixe commun* x^* *de* X *tel que :*

$$f(x^*) = g(x^*) = x^*$$

Preuve. Soient $x_0 \in X$. Définisons

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= f x_{2n} \\ x_{2n+2} &= g x_{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) &= d\left(f x_{2n}, g x_{2n+1}\right) \leq K d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq K K d\left(x_{2n-1}, x_{2n}\right) \\ &\vdots \\ &\leq K^n d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned}$$

si $p > q$

$$\begin{aligned} d\left(x_p, x_q\right) &\leq d\left(x_p, x_{p-1}\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + \cdots + d\left(x_{q+1}, x_q\right) \\ &\leq K^{p-1} d\left(x_0, x_1\right) + K^{p-2} d\left(x_0, x_1\right) + \cdots + K^q d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq K^q d\left(x_0, x_1\right) \sum_{i=0}^{p-q-1} K^i \\ &\leq K^q d\left(x_0, x_1\right) \sum_{i=0}^{\infty} K^i \\ &= K^q d\left(x_0, x_1\right) \left(\frac{1}{1-K}\right) \\ &= \frac{K^q}{1-K} d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $q \to \infty$,
alors, $d\left(x_p, x_q\right) \to 0$

Donc on prouve que la suite $\left(x_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X converge vers $z \in X$.

Supposons que z et z' sont deux points fixes de f et g, alors,

$$d(z, z') = d(fz, gz') \leq K d(z, z').$$

Ce qui est possible si $d(z, z') = 0$, donc $z = z'$. ■

CHAPITRE 2

THÉORÈMES DU POINT FIXE COMMUN DANS UN ESPACE MÉTRIQUE COMPLET

Dans ce chapitre nous avons présenté des théorèmes concernant le point fixe commun. Notre travail sera basé sur deux articles [10] et [22], précisément :

-Un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications continues dans un espace métrique complet et nous avons pris un cas particulier pour deux applications.

-Un théorème du point fixe commun pour deux applications compatibles de type (p) dans un espace métrique complet et aussi pour deux paires compatibles de type (p).

2.1 Théorème du point fixe commun pour deux applications

Théorème 2.1 *Soient (X, d) un espace métrique complet, f et g deux auto-applications continues dans X s'il existe $w \in \Phi$ tel que :*

$$\Phi = \{w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction continue tel que } 0 < w(r) < r \text{ pour } r > 0\}$$

satisfaisant

$$
\begin{aligned}
d(fx,gy) \quad \leq \quad & \max\left\{d(fx,x), d(gy,y), d(x,y), \frac{1}{2}[d(fx,y)+d(gy,x)],\right.\\
& \left.\frac{d(fx,x)d(gy,y)}{1+d(x,y)}, \frac{d(fx,y)d(gy,x)}{1+d(x,y)}, \frac{d(fx,y)d(gy,x)}{1+d(fx,gy)}\right\} \qquad (2.1)\\
& -w\left(\max\left\{d(fx,x), d(gy,y), d(x,y).\frac{1}{2}[d(fx,y)+d(gy,x)]\right.\right. ,\\
& \left.\left.\frac{d(fx,x)d(gy,y)}{1+d(x,y)}, \frac{d(fx,y)d(gy,x)}{1+d(x,y)}, \frac{d(fx,y)d(gy,x)}{1+d(fx,gy)}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Alors f et g admet un unique point fixe commun.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire dans X, on peut définir une suite $\{y_n\}_{n\geq 1}$ telle que

$$y_{2n+1} = fy_{2n} \text{ et } y_{2n+2} = gy_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On va démontrer

$$d_{n+1} \leq d_n - w(d_n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (2.2)$$

Pour cela en utilisant (2.1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en remplacent $x = y_{2n+1}$ et $y = y_{2n}$ on a

$$
\begin{aligned}
d(fy_{2n+1}, gy_{2n}) \quad \leq \quad & \max\{d(fy_{2n+1}, y_{2n+1}), d(gy_{2n}, y_{2n}), d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right),\\
& \frac{1}{2}\left[d(fy_{2n+1}, y_{2n}) + d(gy_{2n}, y_{2n+1})\right], , \frac{d(fy_{2n+1}, y_{2n+1})d(gy_{2n}, y_{2n})}{1+d(y_{2n+1}, y_{2n})},\\
& \left.\frac{d(fy_{2n+1},y_{2n})d(gy_{2n}, y_{2n+1})}{1+d(y_{2n}, y_{2n+1})}, \frac{d(fy_{2n+1}, y_{2n})d(gy_{2n}, y_{2n+1})}{1+d(fy_{2n+1}, gy_{2n})}\right\}\\
& -(w\{\max d(fy_{2n+1}, y_{2n+1}), d(gy_{2n}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}),\\
& \frac{1}{2}\left[d(fy_{2n+1}, y_{2n}) + d(gy_{2n}, y_{2n+1})\right], \frac{d(fy_{2n+1}, y_{2n+1})d(gy_{2n}, y_{2n})}{1+d(y_{2n+1}, y_{2n})},\\
& \left.\left.\frac{d(fy_{2n+1},y_{2n})d(gy_{2n}, y_{2n+1})}{1+d(y_{2n}, y_{2n+1})}, \frac{d(fy_{2n+1}, y_{2n})d(gy_{2n}, y_{2n+1})}{1+d(fy_{2n+1}, gy_{2n})}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) &\leq \max\{d(y_{2n+2}, y_{2n+1}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), \\ &\frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n}) + d(y_{2n+1}, y_{2n+1})\right], \frac{d(y_{2n+2}, y_{2n+1})d((y_{2n+1}, y_{2n})}{1 + d(y_{2n+1}, y_{2n})}, \\ &\left.\frac{d(y_{2n+2}, y_{2n})d(y_{2n+1}, y_{2n+1})}{1 + d(y_{2n+1}, y_{2n})}, \frac{d(y_{2n+2}, y_{2n})d(y_{2n+1}, y_{2n+1})}{1 + d(y_{2n+2}, y_{2n+1})}\right\} \\ &-w\left(\max\{d(y_{2n+2}, y_{2n+1}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}),\right. \\ &\frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n}) + d(y_{2n+1}, y_{2n+1})\right], \frac{d(y_{2n+2}, y_{2n+1})d((y_{2n+1}, y_{2n})}{1 + d(y_{2n+1}, y_{2n})}, \\ &\left.\left.\frac{d(y_{2n+2}, y_{2n})d(y_{2n+1}, y_{2n+1})}{1 + d(y_{2n+1}, y_{2n})}, \frac{d(y_{2n+2}, y_{2n})d(y_{2n+1}, y_{2n+1})}{1 + d(y_{2n+2}, y_{2n+1})}\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) &\leq \max\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n}) + 0\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\} \\ &-w\left(\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n}) + 0\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{2n+1} &\leq \max\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) + d(y_{2n+1}, y_{2n})\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\} \\ &-w\left(\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d(y_{2n+2}, y_{2n+1}) + d(y_{2n+1}, y_{2n})\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{2n+1} &\leq \max\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d_{2n+1} + d_{2n})\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}\right\} \\ &-w\left(\max\left\{d_{2n+1}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[d_{2n+1} + d_{2n})\right], \frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}}\right\}\right), \end{aligned}$$

donc

$$d_{2n+1} \leq \max\{d_{2n+1}, d_{2n}\} - w\left(\max\{d_{2n+1}, d_{2n}\}\right), \tag{2.3}$$

si $d_{2n+1} > d_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors (2.3) implique que

$$d_{2n+1} \leq d_{2n+1} - w\left(d_{2n+1}\right),$$

ce qui est une contradiction car

$$w\left(d_{2n+1}\right) < d_{2n+1},$$

on peut démontré que

$$d_{2n+1} \leq d_{2n,} \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

par (2.3) on a

$$d_{2n+1} \leq d_{2n} - w(d_{2n}), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de même, nous avons

$$d_{2n} \leq d_{2n-1} - w(d_{2n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$d_{n+1} \leq d_n - w(d_n), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} d_{n+1} &\leq \sum_{n=1}^{m} d_n - \sum_{n=1}^{m} w(d_n), \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \sum_{n=1}^{m} w(d_n) &\leq \sum_{n=1}^{m} d_n - \sum_{n=1}^{m} d_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{m} w(d_n) \leq d_1 - d_{m+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et on a

$$d_{m+1} \leq d_m \leq d_{m-1} \leq ... \leq d_0.$$

Donc d_{m+1} est bornée par d_0 alors $\sum_{n=1}^{m} w(d_n)$ est une série à terme positive bornée donc elle est convergente, alors :

$$\lim_{n \to \infty} w(d_n) = 0.$$

$\{d_n\}_{n \geq 1}$ est une suite non négative décroissante. Cette suite converge vers un certain point p, par la continuité de w on a

$$w(p) = \lim_{n \to \infty} w(d_n) = 0,$$

ce qui signifie que $p = 0$ donc,

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0.$$

Pour montrer que $\{y_n\}_{n \geq 1}$est une suite de Cauchy, on suppose que $\{y_{2n}\}_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy, il existe un nomber positif ε tel que pour chaque pair entier $2K$, il y a même des entiers $2m(K)$ et $2n(K)$ tel que

$$d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) > \varepsilon \text{ et } 2m(K) > 2n(K) > 2K,$$

pour chaque nomber pair entier $2K$, soit $2m(K)$ le plus petit nombre entier positif dépassant $2n(K)$ satisfaisant l'inégalité suivante :

$$d(y_{2m(K)-2}, y_{2n(K)}) \leq \varepsilon,\ d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) > \varepsilon$$

donc pour chaque nomber pair entier $2K$

$$\begin{aligned}
d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) &\leq d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-2}) + d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) + d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}), \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-2}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) + \\
&\quad \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\varepsilon < \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) \leq \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) = \varepsilon, \tag{2.4}$$

d'après les inégalités triangulaires suivantes

$$\left| d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) - d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) \right| \leq d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)})$$

$$\left| d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) - d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) \right| \leq d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}) + d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1})$$

et

$$\left| d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) - d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) \right| \leq d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1}),$$

nous démontrons pour (2.4) et pour chaque nombre pair d'entier $2K$ que

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) = \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) = \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) = \varepsilon, \tag{2.5}$$

on utilise (2.1) on a

$$\begin{aligned}
d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) &\leq d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1}) + d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) \\
&\leq d_{2n(K)} + d(fy_{2n(K)}, gy_{2m(K)-1}) \\
&\leq d_{2n(K)} + \max\Big\{d(fy_{2n(K)}, y_{2n(K)}), d(gy_{2m(K)-1}, y_{2m(K)-1}), \\
&\quad d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)}), \frac{1}{2}\left[d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) + d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})\right], \\
&\quad \frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2n(K)})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2m(K)-1})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \left.\frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}{1 + d(fy_{2n(K)}, gy_{2m(K)-1})}\right\} \\
&\quad -w\Big(\max\Big\{d(fy_{2n(K)}, y_{2n(K)}), d(gy_{2m(K)-1}, y_{2m(K)-1}), \\
&\quad d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)}), \frac{1}{2}\left[d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) + d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})\right], \\
&\quad \frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2n(K)})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2m(K)-1})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \left.\left.\frac{d(fy_{2n(K)}, y_{2m(K)-1})d(gy_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}{1 + d(fy_{2n(K)}, gy_{2m(K)-1})}\right\}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) &= \max\Big\{d(y_{2n(K)+1}, y_{2n(K)}), d(y_{2m(K)}, y_{2m(K)-1}), d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)}), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) + d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)})\right], \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2n(K)})d(y_{2m(K)}, y_{2m(K)-1})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1})d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})} \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1})d(y_{2m(K)}, y_{2n(K))}}{1 + d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)})}\Big\} \\
&\quad -w\Big(\max\Big\{d(y_{2n(K)+1}, y_{2n(K)}), d(y_{2m(K)}, y_{2m(K)-1}), d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)}), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) + d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)})\right], \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2n(K)})d(y_{2m(K)}, y_{2m(K)-1})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1})d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)})}{1 + d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})}, \\
&\quad \frac{d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1})d(y_{2m(K)}, y_{2n(K))}}{1 + d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)})}\Big\}\Big),
\end{aligned}$$

par (2.4) et (2.5) on trouve

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \max\{0, 0, \varepsilon, \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \varepsilon\right], 0, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\} \\
&\quad -w(\max\{0, 0, \varepsilon, \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \varepsilon\right], 0, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\}), \\
\varepsilon &\leq \varepsilon - w(\varepsilon),
\end{aligned}$$

ce qui implique que $w(\varepsilon) < 0$, alors, il y a une contradiction donc $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, par conséquent $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un point $z \in X$ donc

$$\lim_{n\to\infty} f y_{2n(K)} = \lim_{n\to\infty} g y_{2n(K)+1} = z.$$

Supposons que $fz \neq z$,

on pose $x = z$ et $y = y_{2n+1}$ dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} d(fz,z) &= d(fz, gy_{2n+1}) \\ &\leq \max\Big\{ d(fz,z), d(gy_{2n+1}, y_{2n+1}), d(z, y_{2n+1}), \frac{1}{2}\left[d(fz,, y_{2n+1}) + \right. \\ &\left. d(gy_{2n+1}, z)\right], \frac{d(fz,z)d(gy_{2n+1}, y_{2n+1})}{1+d(z,y_{2n+1})}, \\ &\frac{d(fz,y_{2n+1})d(z,gy_{2n+1})}{1+d(z,y_{2n+1})}, \frac{d(fz,y_{2n+1})d(gy_{2n+1},z)}{1+d(fz,gy_{2n+1})}\Big\} \\ &-w\left(\max\left\{d(fz,z), d(gy_{2n+1}, y_{2n+1}), d(z,y_{2n+1}),\right.\right. \\ &\frac{1}{2}\left[d(fz,,y_{2n+1}) + d(gy_{2n+1},z)\right], \frac{d(fz,z)d(gy_{2n+1},y_{2n+1})}{1+d(z,y_{2n+1})}, \\ &\left.\left.\frac{d(fz,y_{2n+1})d(z,y_{2n+1})}{1+d(z,y_{2n+1})}, \frac{d(fz,y_{2n+1})d(gy_{2n+1},z)}{1+d(fz,gy_{2n+1})}\right\}\right), \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, on trouve

$$\begin{aligned} d(fz,z) &\leq \max\{d(fz,z), 0, 0, \frac{1}{2}\left[d(fz,z)+0\right], 0, 0, 0\} \\ &\quad -w\left(\max\left\{d(fz,z), 0, 0, \frac{1}{2}\left[d(fz,z)+0\right], 0, 0, 0\right\}\right), \\ d(fz,z) &\leq d(fz,z) - w(d(fz,z)), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(fz,z) \leq 0,$$

alors il y a une contradiction ce qui donne

$$z = fz.$$

Supposons que $z \neq gz$

on pose $x = y_{2n}$ et $y = z$ dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned}
d(z, gz) &= d(fy_{2n}, gz) \\
&\leq \max\Big\{d(fy_{2n}, y_{2n}), d(gz, z), d(z, y_{2n}), \frac{1}{2}[d(fy_{2n}, z)+ \\
&\quad d(gz, y_{2n})], \frac{d(fy_{2n}, y_{2n})d(gz, z)}{1 + d(y_{2n}, z)}, \\
&\quad \frac{d(fy_{2n}, z)d(gz, y_{2n})}{1 + d(y_{2n}, z)}, \frac{d(fy_{2n}, z)d(gz, y_{2n})}{1 + d(fy_{2n}, gz)}\Big\} \\
&\quad -w\left(\max\{d(fy_{2n}, y_{2n}), d(gz, z), d(z, y_{2n}),\right. \\
&\quad \frac{1}{2}[d(fy_{2n}, z) + d(gz, y_{2n})], \frac{d(fy_{2n}, y_{2n})d(gz, z)}{1 + d(y_{2n}, z)}, \\
&\quad \left.\frac{d(fy_{2n}, z)d(gz, y_{2n})}{1 + d(y_{2n}, z)}, \frac{d(fy_{2n}, z)d(gz, y_{2n})}{1 + d(fy_{2n}, gz)}\Big\}\right),
\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, on trouve

$$\begin{aligned}
d(z, gz) &\leq \max\{0, d(gz, z), 0, \frac{1}{2}[0 + d(gz, z)], 0, 0, 0\} \\
&\quad -w\left(\max\left\{0, d(gz, z), 0, \frac{1}{2}[0 + d(gz, z)], 0, 0, 0\right\}\right) \\
d(z, gz) &\leq d(z, gz) - w(d(z, gz)),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(z, gz) \leq 0,$$

alors il y a une contradiction ce qui donne

$$z = gz.$$

Donc

$$z = gz = fz,$$

alors, z est une point fixe commun de f et g. ■

2.2 Théorème du point fixe commun pour quatre applications

Théorème 2.2 *[10] Soient (X, d) un espace métrique complet, f, g, h et T quatre applications continues dans X satisfaisant :*

(i) $ft = tf, gh = hg,$
(ii) $f(X) \subseteq h(X)$ *et* $g(X) \subseteq t(X)$
Si existe $w \in \Phi$ *tel que*

$$\Phi = \left\{ w : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}_{+} \text{ est une fonction continue tel que } 0 < w(r) < r \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_{+}^{*} \right\}$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} & d(fx, gy) \\ \leq \; & \max\{d(fx,tx), d(gy,hy), d(hy,tx), \\ & \frac{1}{2}[d(fx,hy)+d(gy,tx)], \frac{d(fx,tx)\,d(gy,hy)}{1+d(hy,tx)}, \\ & \left.\frac{d(fx,hy)\,d(gy,tx)}{1+d(hy,tx)}, \frac{d(fx,hy)\,d(gy,tx)}{1+d(fx,gy)}\right\} \\ & -w\left(\max\{d(fx,tx), d(gy,hy), d(hy,tx),\right. \\ & \frac{1}{2}[d(fx,hy)+d(gy,tx)], \frac{d(fx,tx)\,d(gy,hy)}{1+d(hy,tx)} \\ & \left.\left.\frac{d(fx,hy)\,d(gy,tx)}{1+d(hy,tx)}, \frac{d(fx,hy)\,d(gy,tx)}{1+d(fx,gy)}\right\}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Alors f, g, h *et* T *admet un unique point fixe commun*
Preuve. *Soit* x_0 *un point arbitraire dans* X, *d'après la propriété (ii) du théorème, on peut définir deux suites* $\{y_n\}_{n\geq 1}$ *et* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *telle que :*

$$y_{2n+1} = fx_{2n} = hx_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$y_{2n} = gx_{2n-1} = tx_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^{*}.$$

On va démontrer

$$d_{n+1} \leq d_n - W(d_n), \forall n \geq 1. \tag{2.7}$$

Pour cela en utilisant (2.6)pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$,*en remplacent* $x = x_{2n}$ *et* $y = x_{2n+1}$, *on a*

$$\begin{aligned}
d_{2n+1} &= d\left(y_{2n+1}, y_{2n+2}\right) = d\left(fx_{2n}, gx_{2n+1}\right) \\
&\leq \max\{d\left(fx_{2n}, tx_{2n}\right), d\left(gx_{2n+1}, hx_{2n+1}\right), d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right), \\
&\frac{1}{2}\left[d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) + d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)\right], \frac{d\left(fx_{2n}, tx_{2n}\right) d\left(gx_{2n+1}, hx_{2n+1}\right)}{1 + d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}, \\
&\frac{d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}{1 + d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}, \frac{d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}{1 + d\left(fx_{2n}, gx_{2n+1}\right)}\Big\} \\
&-w\left(\max\{d\left(fx_{2n}, tx_{2n}\right), d\left(gx_{2n+1}, hx_{2n+1}\right), d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right),\right. \\
&\frac{1}{2}\left[d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) + d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)\right], \frac{d\left(fx_{2n}, tx_{2n}\right) d\left(gx_{2n+1}, hx_{2n+1}\right)}{1 + d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}, \\
&\left.\frac{d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}{1 + d\left(hx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}, \frac{d\left(fx_{2n}, hx_{2n+1}\right) d\left(gx_{2n+1}, tx_{2n}\right)}{1 + d\left(fx_{2n}, gx_{2n+1}\right)}\Big\}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{2n+1} &\leq \max\{d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right), d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right), d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right), \\
&\frac{1}{2}\left[d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) + d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)\right], \frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right)}, \\
&\frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right)}, \frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n+2}\right)}\Big\} \\
&-w\left(\max\{d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right), d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right), d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right),\right. \\
&\frac{1}{2}\left[d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) + d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)\right], \frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right)}, \\
&\left.\frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right)}, \frac{d\left(y_{2n+1}, y_{2n+1}\right) d\left(y_{2n+2}, y_{2n+1}\right)}{1 + d\left(y_{2n+1}, y_{2n+2}\right)}\Big\}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{2n+1} &\leq \max\left\{d_{2n}, d_{2n+1}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[0 + d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)\right], \frac{d_{2n}d_{2n+1}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\}, \\
&-w\left(\max\left\{d_{2n}, d_{2n+1}, d_{2n}, \frac{1}{2}\left[0 + d\left(y_{2n+2}, y_{2n}\right)\right], \frac{d_{2n}d_{2n+1}}{1 + d_{2n}}, 0, 0\right\}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$d_{2n+1} \leq \max\{d_{2n}, d_{2n+1}\} - w\left(\max\{d_{2n}, d_{2n+1}\}\right), \tag{2.8}$$

parce que

$$\begin{aligned}
d_{2n} &< d_{2n} + 1 \\
\frac{d_{2n}}{1 + d_{2n}} &\leq 1 \\
\frac{d_{2n+1}d_{2n}}{1 + d_{2n}} &\leq d_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Si $d_{2n+1} > d_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$*, alors* (2.8) *implique que*

$$d_{2n+1} \leq d_{2n+1} - w(d_{2n+1}),$$

ce qui est une contradiction car :

$$w(d_{2n+1}) < d_{2n+1},$$

on peut démontré que

$$d_{2n+1} \leq d_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Par (2.8) *on a :*

$$d_{2n+1} \leq d_{2n} - w(d_{2n}), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de même, nous avons

$$d_{2n} \leq d_{2n-1} - w(d_{2n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$d_{n+1} \leq d_n - w(d_n), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} d_{n+1} &\leq \sum_{n=1}^{m} d_n - \sum_{n=1}^{m} w(d_n), \forall n \in \mathbb{N}^*,\\ \sum_{n=1}^{m} w(d_n) &\leq \sum_{n=1}^{m} d_n - \sum_{n=1}^{m} d_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{m} w(d_n) \leq d_1 - d_{m+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et on a

$$d_{m+1} \leq d_m \leq d_{m-1} \leq ... \leq d_0.$$

donc d_{m+1} *est bornée par* d_0*, alors* $\sum_{n=1}^{m} w(d_n)$ *est une série à terme positive bornée donc elle est convergente,*

alors :

$$\lim_{n\to\infty} w(d_n) = 0.$$

puisque $\{d_n\}_{n\geq 1}$ *est une suite non négative décroissante, cette suit converge vers un certain point* p.

Par la continuité de w *on a*

$$w(p) = \lim_{n\to\infty} w(d_n) = 0,$$

ce qui signifie que $p = 0$,

donc,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Pour montrer que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy, il suffit de montrer que* $\{y_{2n}\}_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy,*

on suppose que $\{y_{2n}\}_{n\geq 1}$ *n'est pas une suite de Cauchy,*

il existe un nombre positif ε *tel que pour chaque nombre pair entier* $2k$*, soit* $2m(k)$ *le plus petit entier positif dépassant* $2n(k)$ *satisfaisant l'inégalité suivante*

$$d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) > \varepsilon, 2m(k) > 2n(k) > 2k,$$

pour chaque nombre pair entier $2k$*, soit* $2m(k)$ *le plus petit nombre entier positif dépassant* $2n(k)$ *satisfaisant l'inégalité suivante :*

$$d\left(y_{2m(k)-2}, y_{2n(k)}\right) \leq \varepsilon, d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) \geq \varepsilon, \tag{2.9}$$

alors, pour chaque nombre pair entier $2k$*, d'après l'inégalité triangulaire on trouve :*

$$\begin{aligned} d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) &\leq d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}\right) + d\left(y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)-1}\right) + d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}\right), \\ \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) &\leq \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}\right) + \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)-1}\right) + \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}\right), \end{aligned}$$

alors,

$$\varepsilon < d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) \leq d\left(y_{2m(k)-2}, y_{2n(k)}\right) \leq \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) = \varepsilon, \tag{2.10}$$

d"aprés les inégalités triangulaires suivantes

$$\mid d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}\right) - d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}\right),$$

$$\mid d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) - d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}\right) + d\left(y_{2n(k)}, y_{2n(k)+1}\right)$$

et

$$\mid d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}\right) - d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(y_{2n(k)}, y_{2n(k)+1}\right),$$

nous démontrons pour (2.10) *et pour chaque nombre pair d"entier* $2K$ *que*

$$\lim_{k\to\infty} d\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}\right) = \varepsilon,$$

on utilise (2.6) *on a*

$$\begin{aligned}
d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) &\leq d\left(y_{2n(k)}, y_{2n(k)+1}\right) + d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}\right) \\
&\leq d_{2n(k)} + d\left(fx_{2n(k)}, gx_{2m(k)-1}\right) \\
&\leq d_{2n(k)} + \max\Big\{d\left(fx_{2n(k)}, tx_{2n(k)}\right), d\left(gx_{2m(k)-1}, hx_{2m(k)-1}\right), \\
&\quad d\left(hx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right), \frac{1}{2}\Big[d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) + \\
&\quad d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)\Big], \frac{d\left(fx_{2n(k)}, tx_{2n(k)}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, hx_{2m(k)-1}\right)}{1 + d\left(hx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}{1 + d\left(hx_{2n(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}{1 + d\left(fx_{2n(k)}, gx_{2m(k)-1}\right)}\Big\} \\
&\quad -w\Big(\max\Big\{d\left(fx_{2n(k)}, tx_{2n(k)}\right), d\left(gx_{2m(k)-1}, hx_{2m(k)-1}\right), \\
&\quad d\left(hx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right), \frac{1}{2}\Big[d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) + \\
&\quad d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)\Big], \frac{d\left(fx_{2n(k)}, tx_{2n(k)}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, hx_{2m(k)-1}\right)}{1 + d\left(hx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}{1 + d\left(hx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(fx_{2n(k)}, hx_{2m(k)-1}\right) d\left(gx_{2m(k)-1}, tx_{2n(k)}\right)}{1 + d\left(fx_{2n(k)}, gx_{2m(k)-1}\right)}\Big\}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right) &= \max\left\{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)}\right), d\left(y_{2n(k)-1}, y_{2m(k)}\right),\right. \\
&\quad d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right)+\right. \\
&\quad \left.d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)\right], \frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}\right)}{1+d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)}{1+d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \left.\frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)}{1+d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}\right)}\right\} \\
&\quad -W\left(\max\left\{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)}\right), d\left(y_{2n(k)-1}, y_{2m(k)}\right),\right.\right. \\
&\quad d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right)+\right. \\
&\quad \left.d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)\right], \frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}\right)}{1+d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)}{1+d\left(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}\right)}, \\
&\quad \left.\left.\frac{d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right) d\left(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}\right)}{1+d\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}\right)}\right\}\right),
\end{aligned}$$

quand $k \to \infty$, alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \max\left\{0, 0, \varepsilon, \varepsilon, 0, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right\} - w\left(\max\left\{0, 0, \varepsilon, \varepsilon, 0, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right\}\right), \\
\varepsilon &\leq \varepsilon - w(\varepsilon),
\end{aligned}$$

ce qui implique $w(\varepsilon) \leq 0$, alors une contradiction, donc $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy par conséquent $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un point $z \in X$ donc :

$$\lim_{n\to\infty} fx_{2n} = \lim_{n\to\infty} hx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} gx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} tx_{2n} = z.$$

Par la continuité de h, f, t et g, et la propriété (i), nous concluons que pour tout

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d\left(tfx_{2n}, hgx_{2n+1}\right) &= d\left(ftx_{2n}, ghx_{2n+1}\right) \\ &\leq \max\{d\left(ftx_{2n}, ttx_{2n}\right), d\left(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}\right), \\ &\quad d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) + \right. \\ &\quad \left. d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)\right], \frac{d\left(ftx_{2n}, ttx_{2n}\right) d\left(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}\right)}{1 + d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}, \\ &\quad \frac{d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}{1 + d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}, \\ &\quad \left.\frac{d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}{1 + d\left(ftx_{2n}, ghx_{2n+1}\right)}\right\} \\ &\quad -w\left(\max\{d\left(ftx_{2n}, ttx_{2n}\right), d\left(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}\right),\right. \\ &\quad d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) + \right. \\ &\quad \left. d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)\right], \frac{d\left(ftx_{2n}, ttx_{2n}\right) d\left(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}\right)}{1 + d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}, \\ &\quad \frac{d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}{1 + d\left(hhx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}, \\ &\quad \left.\left.\frac{d\left(ftx_{2n}, hhx_{2n+1}\right) d\left(ghx_{2n+1}, ttx_{2n}\right)}{1 + d\left(ftx_{2n}, ghx_{2n+1}\right)}\right\}\right), \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, alors

$$\begin{aligned} d\left(tz, hz\right) &\leq \max\left\{d\left(tz, tz\right), d\left(hz, hz\right), d\left(hz, tz\right), \frac{1}{2}\left[d\left(tz, hz\right) + d\left(hz, tz\right)\right],\right. \\ &\quad \left.\frac{d\left(tz, tz\right) d\left(hz, hz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(tz, hz\right)}\right\} \\ &\quad -w\left(\max\left\{d\left(tz, tz\right), d\left(hz, hz\right), d\left(hz, tz\right), \frac{1}{2}\left[d\left(tz, hz\right) + d\left(hz, tz\right)\right],\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{d\left(tz, tz\right) d\left(hz, hz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(tz, hz\right)}\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(tz, hz\right) &\leq \max\left\{0, 0, d\left(hz, tz\right), d\left(hz, tz\right), 0, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(tz, hz\right)}\right\} \\ &\quad -w\left(\max\left\{0, 0, d\left(hz, tz\right), d\left(hz, tz\right), 0, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(hz, tz\right)}, \frac{d\left(tz, hz\right) d\left(hz, tz\right)}{1 + d\left(tz, hz\right)}\right\}\right), \\ d\left(tz, hz\right) &\leq d\left(tz, hz\right) - W\left(d\left(tz, hz\right)\right), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d\left(tz, hz\right) \leq 0,$$

alors, il y a une contradiction qui donne $tz = hz$.
On a aussi

$$d(tfx_{2n}, hgx_{2n+1}) = d(ftx_{2n}, ghx_{2n+1}), \forall n \in \mathbb{N},$$

quand $n \to \infty$, *nous avons immédiatement* $d(fz, gz) = d(hz, tz)$.
Donc $fz = gz$.
Il en résulte de (2.6)

$$\begin{aligned} d(fx_{2n}, hgx_{2n+1}) &= d(fx_{2n}, ghx_{2n+1}) \\ &\leq \max\{d(fx_{2n}, tx_{2n}), d(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}), \\ &\quad d(hhx_{2n+1}, tx_{2n}), \frac{1}{2}[d(fx_{2n}, hhx_{2n+1}) + \\ &\quad d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})], \frac{d(fx_{2n}, tx_{2n})\, d(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1})}{1 + d(hhx_{2n+1}, tx_{2n})}, \\ &\quad \frac{d(fx_{2n}, hhx_{2n+1})\, d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})}{1 + d(hhx_{2n+1}, tx_{2n})}, \\ &\quad \left.\frac{d(fx_{2n}, hhx_{2n+1})\, d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})}{1 + d(fx_{2n}, ghx_{2n+1})}\right\} \\ &\quad -w(\max\{d(fx_{2n}, tx_{2n}), d(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1}), \\ &\quad d(hhx_{2n+1}, tx_{2n}), \frac{1}{2}[d(fx_{2n}, hhx_{2n+1}) + \\ &\quad d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})], \frac{d(fx_{2n}, tx_{2n})\, d(ghx_{2n+1}, hhx_{2n+1})}{1 + d(hhx_{2n+1}, tx_{2n})}, \\ &\quad \frac{d(fx_{2n}, hhx_{2n+1})\, d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})}{1 + d(hhx_{2n+1}, tx_{2n})}, \\ &\quad \left.\left.\frac{d(fx_{2n}, hhx_{2n+1})\, d(ghx_{2n+1}, tx_{2n})}{1 + d(fx_{2n}, ghx_{2n+1})}\right\}\right), \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, *nous obtenons cela*

$$\begin{aligned} d(z, hz) &\leq \max\left\{d(z, z), d(hz, hz), d(hz, z), \frac{1}{2}[d(z, hz) + d(hz, z)],\right. \\ &\quad \left.\frac{d(z, z)\, d(hz, hz)}{1 + d(hz, z)}, \frac{d(z, hz)\, d(hz, z)}{1 + d(hz, z)}, \frac{d(z, hz)\, d(hz, z)}{1 + d(z, hz)}\right\} \\ &\quad -w\left(\max\left\{d(z, z), d(hz, hz), d(hz, z), \frac{1}{2}[d(z, hz) + d(hz, z)],\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{d(z, z)\, d(hz, hz)}{1 + d(hz, z)}, \frac{d(z, hz)\, d(hz, z)}{1 + d(hz, z)}, \frac{d(z, hz)\, d(hz, z)}{1 + d(z, hz)}\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(z,hz) &\leq \max\left\{0,0,d(hz,z),d(hz,z),0,\frac{d(z,hz)\,d(hz,z)}{1+d(hz,z)},\frac{d(z,hz)\,d(hz,z)}{1+d(z,hz)}\right\} \\
&\quad -w\left(\max\left\{0,0,d(hz,z),d(hz,z),0,\frac{d(z,hz)\,d(hz,z)}{1+d(hz,z)},\frac{d(z,hz)\,d(hz,z)}{1+d(z,hz)}\right\}\right), \\
d(z,hz) &\leq d(z,hz)-W(d(z,hz)),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(z,hz)\leq 0,$$

alors, il y a une contradiction qui donne $z=hz$.
Pour cela (2.6), nous déduisons que

$$\begin{aligned}
d(ffx_{2n},gx_{2n+1}) &\leq \max\{d(ffx_{2n},tfx_{2n}),d(gx_{2n+1},hx_{2n+1}), \\
&\quad d(hx_{2n+1},tfx_{2n}),\frac{1}{2}[d(ffx_{2n},hx_{2n+1})+ \\
&\quad d(gx_{2n+1},tfx_{2n})],\frac{d(ffx_{2n},tfx_{2n})\,d(gx_{2n+1},hx_{2n+1})}{1+d(hx_{2n+1},tx_{2n})}, \\
&\quad \frac{d(ffx_{2n},hx_{2n+1})\,d(ghx_{2n+1},ttx_{2n})}{1+d(hx_{2n+1},tfx_{2n})}, \\
&\quad \left.\frac{d(ffx_{2n},hx_{2n+1})\,d(gx_{2n+1},tx_{2n})}{1+d(ffx_{2n},gx_{2n+1})}\right\} \\
&\quad -w(\max\{d(ffx_{2n},tfx_{2n}),d(gx_{2n+1},hx_{2n+1}), \\
&\quad d(hx_{2n+1},tfx_{2n}),\frac{1}{2}[d(ffx_{2n},hx_{2n+1})+ \\
&\quad d(gx_{2n+1},tfx_{2n})],\frac{d(ffx_{2n},tfx_{2n})\,d(gx_{2n+1},hx_{2n+1})}{1+d(hx_{2n+1},tx_{2n})}, \\
&\quad \frac{d(ffx_{2n},hx_{2n+1})\,d(ghx_{2n+1},ttx_{2n})}{1+d(hx_{2n+1},tfx_{2n})}, \\
&\quad \left.\left.\frac{d(ffx_{2n},hx_{2n+1})\,d(gx_{2n+1},tx_{2n})}{1+d(ffx_{2n},gx_{2n+1})}\right\}\right),
\end{aligned}$$

quand $n\to\infty$ on trouve

$$\begin{aligned}
d(fz,z) &\leq \max\left\{d(fz,fz),d(z,z),d(z,fz),\frac{1}{2}[d(fz,z)+d(z,fz)],\right. \\
&\quad \left.\frac{d(fz,fz)\,d(z,z)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(fz,z)}\right\} \\
&\quad -W\left(\max\left\{d(fz,fz),d(z,z),d(z,fz),\frac{1}{2}[d(fz,z)+d(z,fz)],\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\frac{d(fz,fz)\,d(z,z)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(fz,z)}\right\}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(fz,z) &\leq \max\left\{0,0,d(z,fz),d(z,fz),0,\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(fz,z)}\right\} \\ &\quad -w\left(\max\left\{0,0,d(z,fz),d(z,fz),0,\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(z,fz)},\frac{d(fz,z)\,d(z,fz)}{1+d(fz,z)}\right\}\right), \\ d(z,fz) &\leq d(z,fz)-w(d(z,fz)), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(z,fz)\leq 0,$$

alors, il y a une contradiction, ce qui donne $z=fz$.
Donc

$$z=fz=gz=tz=hz.$$

Alors, z *est une point fixe commun de* f,g,h *et* t. ■

2.3 Théorème du point fixe commun pour deux applications compatibles de type (P)

Théorème 2.3 *[22] Soient* (X,d) *un espace métrique complet,* A *et* B *deux applications dans* X *satisfaisant la condition suivante :*

$$\begin{aligned} d(Ax,By) \leq\; & \Phi\left(\max\left\{d(x,y),d(x,Ax),d(y,By)\right.\right. \\ & \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(x,By)+d(y,Ax)\right]\right\}\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

pour tout $x,y\in X$, $\Phi(t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *une fonction non décroissante et semi continue supérieurement et* $\Phi(t)<t$ *pour tout* $t>0$.

Alors A *et* B *admet un point fixe commun dans* X.

Preuve. *Soit* x_0 *un point arbitraire dans* X, *on peut définir une suite* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *dans* X *telle que*

$$x_{2n-1}=Ax_{2n-2} \text{ et } x_{2n}=Bx_{2n-2},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Pour démontrer

$$d_n\leq\Phi(d_{n-1})$$

En utilisant (2.11) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *en remplacent* $x=y=x_{2n-2}$ *on a :*

$$\begin{aligned} d_{2n-1} &= d(x_{2n},x_{2n-1})=d(Ax_{2n-2},Bx_{2n-2}) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d(x_{2n-2},x_{2n-2}),d(x_{2n-2},Ax_{2n-2}),d(x_{2n-2},Bx_{2n-2})\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(x_{2n-2},Bx_{2n-2})+d(x_{2n-2},Ax_{2n-2})\right]\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d(x_{2n-2},x_{2n-2}),d(x_{2n-2},x_{2n-1}),d(x_{2n-2},x_{2n})\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(x_{2n-2},x_{2n})+d(x_{2n-2},x_{2n-1})\right]\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{2n-1} &\leq \Phi\left(\max\left\{d\left(x_{2n-2}, x_{2n-2}\right), d\left(x_{2n-2}, x_{2n-1}\right),\right.\right. \\ &\quad \left.\left. d\left(x_{2n-2}, x_{2n-1}\right) + d\left(x_{2n-1}, x_{2n}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(x_{2n-1}, x_{2n}\right)\right]\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{0, d_{2n-2}, d_{2n-2} + d_{2n-1}, \frac{1}{2} d_{2n-1}\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d_{2n-2} + d_{2n-1}\right\}\right), \end{aligned}$$

on a :

$$d_{2n-2} \leq \max\left\{d_{2n-2}, d_{2n-1}\right\}$$

et

$$d_{2n-1} \leq \max\left\{d_{2n-2}, d_{2n-1}\right\},$$

donc

$$d_{2n-2} + d_{2n-1} \leq 2 \max\left\{d_{2n-2}, d_{2n-1}\right\},$$

alors,

$$d_{2n-1} \leq \Phi\left(\max\left\{d_{2n-2}, d_{2n-1}\right\}\right)$$

si $d_{2n-1} > d_{2n-2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
alors,

$$d_{2n-1} \leq \Phi\left(d_{2n-1}\right) < d_{2n-1}$$

donc une contradiction.
On peut démontrer que $d_{2n} \leq d_{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$d_{2n} \leq \Phi\left(d_{2n-1}\right) < d_{2n-1}.$$

Par conséquent, $d_{n+1} \leq d_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $\{d_n\}$ est une suite décroissante, et converge vers 0 quand $n \to \infty$ donc

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

pour montrer que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy,

On suppose que $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. Il existe donc un nombre positif ε, tel que pour chaque nombre pair entier $2k$, il y'a deux entiers $2m(k)$ et $2n(k)$ tel que :

$$d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) > \varepsilon, 2m(k) > 2n(k) > 2(k), \tag{2.12}$$

pour chaque nombre pair entier $2k$, soit $2m(k)$ le plus petit nombre entier positif dépassant $2n(k)$

$$d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}\right) \leq \varepsilon, d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) \geq \varepsilon,$$

alors pour chaque nombre pair entier $2k$, et d'après l'inégalité triangulaire on trouve :

$$d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) \leq d\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}\right) + d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2m(k)-1}\right) + d\left(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}\right).$$

Pour cela (2.12), $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ *et l'inégalité précédente en déduit quand* $k \to \infty$ *que*

$$\varepsilon < d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) \leq d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}\right) \leq \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) = \varepsilon. \tag{2.13}$$

D"aprés les inégalités triangulaire suivantes

$$\mid d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)-2}\right) - d\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2m(k)}\right) + d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)}\right)$$

$$\mid d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}\right) - d\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2m(k)}\right)$$

et

$$\mid d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)-1}\right) - d\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) \mid \leq d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)}\right) + d\left(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}\right),$$

nous démontrons pour (2.13) *et pour chaque nombre paire entier* $2K$ *que*

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)-2}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)-1}\right) = \varepsilon.$$

En utilise (2.11), *on a*

$$\begin{aligned}
d\left(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}\right) &\leq d\left(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}\right) + d\left(x_{2m(k)-1}, x_{2n(k)}\right) \\
&\leq d_{2m(k)-1} + d\left(Ax_{2m(k)-2}, Bx_{2m(k)-2}\right) \\
&\leq d_{2m(k)-1} + \Phi\left(\max\left\{d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)-2}\right), d\left(x_{2m(k)-2}, Ax_{2m(k)-2}\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. d\left(x_{2n(k)-2}, Bx_{2n(k)-2}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(x_{2m(k)-2}, Bx_{2n(k)-2}\right) + d\left(x_{2n(k)-2}, Ax_{2m(k)-2}\right)\right]\right\}\right) \\
&= \Phi\left(\max\left\{d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)-2}\right), d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2m(k)-1}\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}\right) + d\left(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)-1}\right)\right]\right\}\right),
\end{aligned}$$

quand $k \longrightarrow \infty$, *alors,*

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \Phi\left(\max\left\{\varepsilon, 0, 0, \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \varepsilon\right]\right\}\right) \\
\varepsilon &\leq \Phi\left(\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

Ce qui implique la contradiction donc $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy.*

Par conséquent $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge vers un point* $z \in X$ *par la completude de* X, *donc*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} Bx_{2n} = z.$$

En utilisant (2.11) *et remplacent* $x = Ax_{2n-2}$, $y = x_{2n-2}$. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d\left(AAx_{2n-2}, Bx_{2n-2}\right) &\leq \Phi\left(\max\left\{d\left(Ax_{2n-2}, x_{2n-2}\right), d\left(Ax_{2n-2}, AAx_{2n-2}\right),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. d\left(x_{2n-2}, Bx_{2n-2}\right), \frac{1}{2}\left[d\left(Ax_{2n-2}, Bx_{2n-2}\right) + d\left(x_{2n-2}, AAx_{2n-2}\right)\right]\right\}\right),
\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$, *alors,*

$$\begin{aligned} d(Az, z) &\leq \Phi\left(\max\left\{d(z,z), d(z,Az), d(z,z), \frac{1}{2}[d(z,z)+d(z,Az)]\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{0, d(z,Az), 0, \frac{1}{2}[0+d(z,Az)]\right\}\right), \end{aligned}$$

par la semi continuité supérieure de $\Phi(t)$, *si* $z \neq Az$, *nous avons*

$$d(Az, z) \leq \Phi(d(z, Az)) < d(z, Az)$$

ce qui implique la contradiction et ainsi $z = Az$,
par (2.11) *et* $x = x_{2n-2}$, $y = Bx_{2n-2}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(Ax_{2n-2}, BBx_{2n-2}) \leq\; & \Phi(\max\{d(x_{2n-2}, Bx_{2n-2}), d(x_{2n-2}, Ax_{2n-2}), \\ & d(Bx_{2n-2}, BBx_{2n-2}), \frac{1}{2}[d(x_{2n-2}, BBx_{2n-2}) + \\ & d(Bx_{2n-2}, Ax_{2n-2}),]\}), \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$, *donc*

$$\begin{aligned} d(z, Bz) &\leq \Phi\left(\max\left\{d(z,z), d(z,z), d(z,Bz), \frac{1}{2}[d(z,Bz)+d(z,z)]\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{0, 0, d(z,Bz), \frac{1}{2}[d(z,Bz)+0]\right\}\right), \end{aligned}$$

par la semi continuité supérieure de $\Phi(t)$, *si* $z \neq Bz$, *nous avons*

$$d(z, Bz) \leq \Phi(d(z, Bz)) < d(z, Bz),$$

ce qui implique la contradiction et ainsi $z = Bz$. *Alors,*

$$Az = Bz = z,$$

donc les deux fonctions A *et* B *admet un point fixe commun dans* X. ■

2.4 Théorème du point fixe commun pour quatre applications compatibles de type (P)

Théorème 2.4 *[22] Soient* (X, d) *est un espace métrique complet et* A, B, S *et* T *des applications de* X *dans lui-même, supposons que* S *et* T *deux applications continues satisfaisant les conditions suivantes :*
(*i*) $A(X) \subset T(X)$ *et* $B(X) \subset S(X)$,

(ii) les paires $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont compatibles de type (p),

$$d(Ax, By) \leq \Phi\left(\max\left\{d(Sx, Ty), d(Sx, Ax), d(Ty, By), \frac{1}{2}\left[d(Sx, By) + d(Ty, Ax)\right]\right\}\right) \tag{2.14}$$

pour tout $x, y \in X$, où $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction non décroissante et semi continue supérieurement et $\Phi(t) < t$ pour tout $t > 0$,

Alors A, B, S et T admet un point fixe commun unique en X.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire de X, par la propriété (i) du théorème, on peut choisir deux suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que

$$y_{2n-1} = Tx_{2n-1} = Ax_{2n-2} \text{ et } y_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

On pose

$$d_n = d\left(y_n, y_{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant (2.14) pour tout $n \in \mathbb{N}$, en remplacent $x = x_{2n}$ et $y = x_{2n-1}$on trouve

$$\begin{aligned} d_{2n} &= d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right) = d(Ax_{2n}, Bx_{2n-1}) \\ &\leq (\Phi \max\{d(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tx_{2n-1}, Bx_{2n-1}), \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(Sx_{2n}, Bx_{2n-1}) + d(Tx_{2n-1}, Ax_{2n})\right]\right\}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(y_{2n+1}, y_{2n}\right) &\leq \Phi(\max\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), \} \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(y_{2n}, y_{2n}) + d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\right]\right\}\right) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d_{2n-1}, d_{2n}, d_{2n-1}, \frac{1}{2}\left[0 + d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\right]\right\}\right), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} d(y_{2n-1}, y_{2n+1}) &\leq d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1}) \\ &\leq d_{2n-1} + d_{2n}, \end{aligned}$$

donc

$$d_{2n} \leq \Phi\left(\max\left\{d_{2n-1}, d_{2n}, d_{2n-1}, \frac{1}{2}\left[d_{2n} + d_{2n-1}\right]\right\}\right), \tag{2.16}$$

si $d_{2n} > d_{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (2.16) assure que $d_{2n} \leq \Phi\left(d_{2n}\right) < d_{2n}$ ce qui est une contradiction par la définition de semi continue supérieurement.

On peut démontrer que $d_{2n} \leq d_{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

donc

$$d_{2n} \leq \Phi\left(d_{2n-1}\right) < d_{2n-1}.$$

Par conséquent $d_{n+1} \leq d_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $\{d_n\}$ est une suite décroissante, qui converge vers 0 quand $n \to \infty$ donc

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Pour montrer que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Supposons que $\{y_{2n}\}$ n'est pas suite de Cauchy. Il existe un nombre positif ε pour chaque nombre pair entier $2K$, il y a deux nombres pairs entiers $2m(K)$ et $2n(K)$ tel que :

$$d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) > \varepsilon, 2m(K) > 2n(K),$$

pour chaque nombre pair entier $2K$, soit $2m\,(K)$ l'entier dépassant $2n(K)$ satisfaisant l'inégalité suivante :

$$d(y_{2m(K)-2}, y_{2n(K)}) \leq \varepsilon, d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) > \varepsilon,$$

alors, pour chaque nombre paire entier $2K$, et d'après l'inégalité triangulaire on trouve :

$$\begin{aligned}
d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) &\leq d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-2}) + d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) + d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}) \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-2}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-1}, y_{2m} \\
\varepsilon &< d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) \leq d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-2}) \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)} = \varepsilon,$$

par les inégalités triangulaires, nous déduisons pour chaque nombre pair entier $2K$

$$\begin{aligned}
\left|d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) - d(_{2n(K)}, y_{2m(K)})\right| &\leq d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) \\
\left|d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) - d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)})\right| &\leq d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}) + d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1})
\end{aligned}$$

et

$$\left|d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) - d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)})\right| \leq d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)+1}),$$

que

$$\begin{aligned}
d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) &\leq d(_{2n(K)}, y_{2m(K)}) + d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(_{2n(K)}, y_{2m(K)}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-2}, y_{2m(K)-1}) \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) &= \varepsilon,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) &\leq d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) + d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}) + d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1}) \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)} \\
\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) &= \varepsilon,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) &\leq d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) + d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)+1}) \\ \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(K)}, y_{2n(K)}) + \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)+1}) \\ \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) &= \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}) = \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)-1}) = \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) = \varepsilon.$$

Pour cela (2.14), nous obtenons la suite :

$$\begin{aligned} d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)}) &\leq d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)+1}) + d(y_{2n(K)+1}, y_{2m(K)}) \\ &\leq d(Ax_{2n(K)}, Bx_{2m(K)-1}) \\ &\leq \Big(\Phi\Big\{\max d(Sx_{2n(K)}, Tx_{2m(K)-1}), d(Sx_{2n(K)}, Ax_{2n(K)}), d(Tx_{2m(K)-1}, Bx_{2m(K)-1}), \\ &\qquad \frac{1}{2}\left[d(Sx_{2n(K)}, Bx_{2m(K)-1}) + d(Tx_{2m(K)-1}, Ax_{2n(K)})\right]\Big\}\Big) \\ &\leq \Big(\Phi\Big\{\max d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}), d(y_{2n(K)}, y_{2n(K)-1}), d(y_{2m(K)-1}, y_{2m(K)}), \\ &\qquad \frac{1}{2}\left[d(y_{2n(K)}, y_{2m(K)-1}), d(y_{2m(K)-1}, y_{2n(K)})\right]\Big\}\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \Phi(\varepsilon, 0, 0, \frac{1}{2}[\varepsilon + \varepsilon]) \\ \varepsilon &\leq \Phi(\varepsilon) < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'après la définition de semi continue supérieurement de $\Phi(t)$, on trouve la contradiction, alors $\{y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, par conséquent $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un point $z \in X$ donc

$$\lim_{n\to\infty} Tx_{2n(K)-1} = \lim_{n\to\infty} Ax_{2n(K)} = \lim_{n\to\infty} Sx_{2n(K)} = \lim_{n\to\infty} Bx_{2n(K)-1} = z.$$

Car $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont compatibles de type (p), il en résulte de la continuité de S et T d'après (2.14) et la proposition (1.9), on trouve :

$$\begin{aligned} Ty_{2n} &\to Tz, By_{2n} = BBx_{2n-1} \to Tz, \\ Sy_{2n-1} &\to Sz, Ay_{2n-1} = AAx_{2n-2} \to Sz, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} Sx_{2n} = z,$$

et par la continuité

$$\lim_{n\to\infty} Tx_{2n} = Tz,$$

et on a $Sx_{2n} = y_{2n}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} Ty_{2n} = Tz,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = z,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} Sy_{2n+1} = Sz,$$

$\{A, S\}$ compatibles de type (p), alors,

$$\lim_{n\to\infty} AAx_{2n-2} = Ay_{2n-1} = Sz,$$

$\{B, T\}$ compatibles de type (p), alors,

$$\lim_{n\to\infty} BBx_{2n-1} = By_{2n} = Tz,$$

quand $n \to \infty$ par (2.14) et (2.15) on trouve

$$\begin{aligned} d(Ay_{2n-1}, By_{2n}) \;\leq\; & \Phi(\max\{d(Sy_{2n-1}, Ty_{2n}), d(Sy_{2n-1}, Ay_{2n-1}), d(Ty_{2n}, By_{2n}), \\ & \frac{1}{2}\left[d(Sy_{2n-1}, By_{2n}) + d(Ty_{2n}, Ay_{2n-1})\right]\}), \end{aligned}$$

par la semi continue supérieurement de $\Phi(t)$, (2.15) et (2.17)

$$\begin{aligned} d(Sz, Tz) &\leq \Phi\left(\max\right)\left\{d(Sz, Tz), d(Sz, Sz), d(Tz, Tz), \frac{1}{2}\left[d(Sz, Tz) + d(Sz, Tz))\right]\right\} \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d(Sz, Tz), 0, 0, d(Sz, Tz)\right\}\right), \\ d(Sz, Tz) &\leq \Phi\left(d(Sz, Tz)\right) < d(Sz, Tz), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction donc $Sz = Tz$.de même (2.14) et (2.15) et (2.17) et la semi continue supérieurement de Φ, on obtient $Sz = Bz$ et $Tz = Az$ nous avons donc

$$Az = Bz = Sz = Tz. \tag{2.18}$$

Montrons que $Bz = z$, supposons que $Bz \neq z$ d'après (2.14) et (2.15), nous avons :

$$d(Ax_{2n}, Bz) \leq \Phi\left(\max\left\{d(Sx_{2n}, Tz), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tz, Bz), \frac{1}{2}\left[d(Sx_{2n}, Bz) + d(Tz, Ax_{2n})\right]\right\}\right),$$

quand $n \to \infty$

$$d(z, Bz) \leq \Phi\left(\max\left\{d(z, Tz), d(z, z), d(Tz, Bz), \frac{1}{2}\left[d(z, Bz) + d(Tz, z)\right]\right\}\right),$$

$\{B, T\}$ compatibles de type (p) donc

alors, une contradiction, par conséquent $Bz = z$ et par (2.18), on résult

$$Az = Bz = Tz = Sz = z,$$

alors, z est une point fixe commun de A, B, S et T. ■

CHAPITRE 3

APPLICATION SUR LA PROGRAMATION DYNAMIQUE

Ce chapitre concerne certaines applications. On va appliquer les théorèmes (2.2) et (2.4) pour garantir l'existence et l'unicité de la solution commune des systèmes des équations fonctionnelles qui apparaissent dans le domaine de la programmation dynamique.

Nous savons bien que les problèmes d'existence et d'unicité des solutions de diverses équations fonctionnelles découlant de la programmation dynamique ont un intérêt théoriques et pratiques. On savait que Bellman [2] a étudié en premier temps l'existence de solution pour certaines type d'équations fonctionnelles dès la programmation dynamique et il a amélioré avec Lee [3] que la forme de base des équations fonctionnelles en programmation dynamique est comme la suite :

$$f(x) = \operatorname{opt}_{y \in D} H\left(x, y, f(T(x, y))\right), \forall x \in S,$$

avec opt qui représente sup ou inf, x, y désignent respectivement les vecteurs d'état et de décision, T la transformation du processus et $f(x)$ le retour optimal avec l'état initial x.

Nous supposons que X et Y sont deux espaces de Banach, $S \subseteq X$ l'espace d'état, $D \subseteq Y$ l'espace de décision et i_x est l'application d'identité dans X.

Par la suite, Baskaran et Subrahmanyam [1], Bhakta et Choudhury [5], Bhakta et Mitra [4], Chang et Ma [8], Liu [27] -[15], Liu, Agarwal et Kang [18], Liu et Ume [17], Pathak et Fisher [23], Zhang [30] et d'autres ont étudié l'existence et l'unicité de la solution et de la solution commune pour certains types d'équations fonctionnelles et des systèmes d'équations fonctionnelles, sous plusieurs hypothèses, la programmation dynamique est le résultat de l'équation fonctionnelle (3.1) qu'on considère comme un cas particulier.

Soit $B(S)$ l'ensemble de toutes les fonctions bornées à valeur réelle sur X et

$$d(f,g) = \sup\{\mid f(x) - g(x) \mid, x \in S\}. \tag{3.1}$$

3.1 Application 1

On va utiliser le Théorème 2.2 pour établir l'existence et l'unicité de la solution commune des systèmes des équations fonctionnelles qui apparaissent dans le domaine de la programmation dynamique.

Nous supposons que X et Y sont deux espaces de Banach, $S \subseteq X$ l'espace d'état, $D \subseteq Y$ l'espace de décision et i_x est l'application d'identité dans X.

Soit $B(S)$ l'ensemble de toutes les fonctions bornées à valeur réelle sur X et

$$d(f,g) = \sup\{\mid f(x) - g(x) \mid, x \in S\}$$

$(B(S), d)$ est un espace métrique complet.

Par le Théorème 2.2, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution commune du système d'équation fonctionnelle suivant découlant de la programmation dynamique :

$$f_i(x) = \sup\{u(x,y) + H_i(x,y,f_i(T(x,y)))\}, \forall x \in S, i = \{1,2,3,4\} \tag{3.2}$$

avec

$$u : S \times D \to \mathbb{R}, T : S \times D \to S \text{ et } H_i : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

Théorème 3.1 *[10] Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) u et H_i sont bornés pour $i \in \{1,2,3,4\}$,

(ii) Il exist $w \in \Phi$ et les applications A_1, A_2, A_3 et A_4 sont définit par :

$$A_i g_i(x) = \sup\{u(x,y) + H_i(x,y,g_i(T(x,y)))\}, \forall x \in S, g_i \in B(S), i \in \{1,2,3,4\},$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} &\mid H_1(x,y,g(t)) - H_2(x,y,h(t)) \mid \\ \leq\ & \max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\ & \frac{1}{2}[d(A_1g,A_3h) + d(A_2h,A_4g)], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\ & \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\} \\ & -w\Big(\max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\ & \frac{1}{2}[d(A_1g,A_3h) + d(A_2h,A_4g)], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\ & \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\}\Big), \end{aligned}$$

pour tout $(x,y) \in S \times D,\ g,h \in B(S), t \in S,$

(iii) $A_1(B(S)) \subseteq A_3(B(S)), A_2(B(S)) \subseteq A_4(B(S)),$

(iv) *Il existe certain* $A_i \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *tel que pour toute suite* $\{h_n\}_{n\geq 1} \subseteq B(S)$ *et* $h \in B(S)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \mid h_n(x) - h(x) \mid = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \mid A_i h_n(x) - A_i h(x) \mid = 0$$

(v) $A_1A_4 = A_4A_1, A_2A_3 = A_3A_2$

Alors le systéme d'équation fonctionelle (3.2) *à une unique solution commune en* $B(S)$.

Preuve. *Par les propriétés* $(i), (ii), (iii)$ *et* (iv) *du théorème il en résulte que* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *sont des applications continues de* $B(S)$.

Pour tout $g,h \in B(S), x \in S, \varepsilon > 0\ \exists\ y,z \in D$ *tel que :*

$$A_1 g(x) < u(x,y) + H_1(x,y,g(T(x,y))) + \varepsilon, \tag{3.3}$$

$$A_2 h(x) < u(x,z) + H_2(x,z,h(T(x,z))) + \varepsilon, \tag{3.4}$$

notez que :

$$A_1 g(x) \geq u(x,z) + H_1(x,z,g(T(x,z))), \tag{3.5}$$

$$A_2 h(x) \geq u(x,y) + H_2(x,y,h(T(x,y))), \tag{3.6}$$

pour cela (3.3), (3.6) *et la propriété* (ii) *du théorème on trouve*

$$\begin{aligned} A_1 g(x) - A_2 h(x) &< H_1(x,y,g(T(x,y))) - H_2(x,y,h(T(x,y))) + \varepsilon \\ &< \max\{d(A_1g, A_4g), d(A_2h, A_3h), d(A_3h, A_4g), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(A_1g, A_3h) + d(A_2h, A_4g)], \frac{d(A_1g, A_4g)\, d(A_2h, A_3h)}{1 + d(A_3h, A_4g)}, \\ &\quad \frac{d(A_1g, A_3h)\, d(A_2h, A_4g)}{1 + d(A_3h, A_4g)}, \frac{d(A_1g, A_3h)\, d(A_2h, A_4g)}{1 + d(A_1g, A_2h)}\Bigg\} \\ &\quad -w(\max\{d(A_1g, A_4g), d(A_2h, A_3h), d(A_3h, A_4g), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(A_1g, A_3h) + d(A_2h, A_4g)], \frac{d(A_1g, A_4g)\, d(A_2h, A_3h)}{1 + d(A_3h, A_4g)}, \\ &\quad \frac{d(A_1g, A_3h)\, d(A_2h, A_4g)}{1 + d(A_3h, A_4g)}, \frac{d(A_1g, A_3h)\, d(A_2h, A_4g)}{1 + d(A_1g, A_2h)}\Bigg\}\Bigg) + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.7}$$

par (3.4), (3.5) *et* (*ii*) *nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
A_1g(x) - A_2h(x) &\geq H_1(x,z,g(T(x,z))) - H_2(x,z,h(T(x,z))) - \varepsilon \\
&\geq -\max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(A_1g,A_3h)+d(A_2h,A_4g)\right], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\
&\quad \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\} \qquad (3.8)\\
&\quad +w\Big(\max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(A_1g,A_3h)+d(A_2h,A_4g)\right], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\
&\quad \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\}\Big) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

Par (3.7) *et* (3.8) *on trouve :*

$$\begin{aligned}
d(A_1g,A_2h) &= \sup_{x\in S} \mid A_1g(x) - A_2h(x) \mid \\
&\leq \mid H_1(x,y,g(T(x,y))) - H_2(x,y,h(T(x,y))) \mid +\varepsilon \\
&\leq \max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(A_1g,A_3h)+d(A_2h,A_4g)\right], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\
&\quad \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\} \qquad (3.9)\\
&\quad -w\Big(\max\Big\{d(A_1g,A_4g), d(A_2h,A_3h), d(A_3h,A_4g), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d(A_1g,A_3h)+d(A_2h,A_4g)\right], \frac{d(A_1g,A_4g)\,d(A_2h,A_3h)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \\
&\quad \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_3h,A_4g)}, \frac{d(A_1g,A_3h)\,d(A_2h,A_4g)}{1+d(A_1g,A_2h)}\Big\}\Big) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$ *dans* (3.9) *on trouve*

$$\begin{aligned}
d\left(A_1 g(x), A_2 h(x)\right) &= \sup_{x\in S}\left\{\mid A_1 g(x) - A_2 h(x) \mid\right\} \\
&\leq \mid H_1\left(x,y,g\left(T(x,y)\right)\right) - H_2\left(x,y,h\left(T(x,y)\right)\right) \mid \\
&\leq \max\Big\{d\left(A_1 g, A_4 g\right), d\left(A_2 h, A_3 h\right), d\left(A_3 h, A_4 g\right), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d\left(A_1 g, A_3 h\right) + d\left(A_2 h, A_4 g\right)\right], \frac{d\left(A_1 g, A_4 g\right) d\left(A_2 h, A_3 h\right)}{1 + d\left(A_3 h, A_4 g\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(A_1 g, A_3 h\right) d\left(A_2 h, A_4 g\right)}{1 + d\left(A_3 h, A_4 g\right)}, \frac{d\left(A_1 g, A_3 h\right) d\left(A_2 h, A_4 g\right)}{1 + d\left(A_1 g, A_2 h\right)}\Big\} \qquad (3.10) \\
&\quad - w\Big(\max\Big\{d\left(A_1 g, A_4 g\right), d\left(A_2 h, A_3 h\right), d\left(A_3 h, A_4 g\right), \\
&\quad \frac{1}{2}\left[d\left(A_1 g, A_3 h\right) + d\left(A_2 h, A_4 g\right)\right], \frac{d\left(A_1 g, A_4 g\right) d\left(A_2 h, A_3 h\right)}{1 + d\left(A_3 h, A_4 g\right)}, \\
&\quad \frac{d\left(A_1 g, A_3 h\right) d\left(A_2 h, A_4 g\right)}{1 + d\left(A_3 h, A_4 g\right)}, \frac{d\left(A_1 g, A_3 h\right) d\left(A_2 h, A_4 g\right)}{1 + d\left(A_1 g, A_2 h\right)}\Big\}\Big),
\end{aligned}$$

il en résulte de (v) *et* (3.10) *que la Théorème 2.2 implique que les applications* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *admet un unique point fixe commun* $z \in B(S)$ *c'est à dire que* $z(x)$ *est une unique solution commune du système d'équation fonctionnelle.* ∎

3.2 Application 2

On va utiliser le Théorème (2.4) pour établir l'existence et l'unicité de la solution commune des systèmes des équations fonctionnelles qui apparaissent dans le domaine de la programmation dynamique.

Dans cette section, nous supposons que X, Y sont des espaces de Banach, $S \subset X$ est l'espace d'état et $D \subset Y$ est l'espace de décision. Notons $B(S)$ l'ensemble des fonctions bornés à valeurs réelles sur S.

Nous étudierons l'existence et l'unicité de la solution commune de l'équation fonctionnelle suivante dans la programmation dynamique :

$$f_i(x) = \sup_{y\in D} H_i(x, y, f_i(T(x,y))), x \in S, \tag{3.11}$$

$$g_i(x) = \sup_{y\in D} F_i(x, y, g_i(T(x,y))), x \in S, \tag{3.12}$$

avec

$$T : S \times D \to S \text{ et } H_i, F_i : S \times R \to R, i = 1, 2.$$

Théorème 3.2 *[22] Supposons que les conditions suivantes sont satisfaisantes :*

(i) H_i *et* F_i *sont bornés pour* $i = 1, 2$,

(ii)

$$\begin{aligned}
&|H_1(x,y,h(t)) - H_2(x,y,k(t))| \\
\leq\ & \Phi\left(\max\left\{|T_2 h(t) - T_2 k(t)|, |T_1 h(t) - A_1 h(t)|, |T_2 k(t) - A_2 k(t)|,\right.\right. \\
& \left.\left.\frac{1}{2}\left[|T_1 h(t) - A_2 k(t)| + |T_2 k(t) - A_1 h(t)|\right]\right\}\right),
\end{aligned}$$

pour tout

$$(x,y) \in S \times D, h, k \in B(S) \text{ et } t \in S$$

où $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction semi continue supérieurement,* $\Phi(t) < t$ *pour tout* $t > 0$ *et les applications* A_i *et* T_i *sont définis comme suit :*

$$A_i h(x) = \sup_{y \in D} H_i(x,y,h(T(x,y))) \quad x \in S, h \in B(S), i = 1,2,$$

$$T_i k(x) = \sup_{y \in D} F_i(x,y,k(T(x,y))) \quad x \in S, h \in B(S), i = 1,2,$$

(iii) pour tout $\{k_n\} \subset B(S)$ *et* $k \in B(S)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} |k_n(x) - k(x)| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} |T_i k_n(x) - T_i k(x)| = 0, i = 1,2,$$

(iv) pour tout $h \in B(S)$*, il existe* $k_1, k_2 \in B(S)$ *tel que*

$$A_1 h(x) = T_1 k_1(x), A_2 h(x) = T_1 k_2(x), x \in S,$$

(v) pour tout $\{k_n\} \subset B(S)$ *s'il existe* $h \in B(S)$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} |A_i k_n(x) - h(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} |T_i k_n(x) - h(x)| = 0, i = 1,2,$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} |T_i T_i k_n(x) - A_i A_i k_n(x)| = 0, i = 1,2.$$

alors, le système d'équations fonctionnelles (3.12) et (3.12) à une solution commune unique dans $B(S)$.

Preuve. *Pour tout* $h, k \in B(S)$, *soit*

$$d(h,k) = \sup\left\{|h(x) - k(x)| : x \in S\right\}.$$

Alors $(B(S), d)$ *est un espace métrique complet. Par* $(i)-(v)$, A_i *et* T_i *sont des applications de* $B(S)$ *et* T_i *sont continues,* $i = 1,2$, $A_1(B(S)) \subset T_2(B(S))$, $A_2(B(S)) \subset T_1(B(S))$ *et les paires des applications* A_i, T_i *sont compatibles de type (p),* $i = 1,2$. *Soit* $h_i (i = 1,2)$ *deux points de* $B(S)$, $x \in S$ *et* ε *est un nombre positif. Supposons qu'il existe* $y_i (i = 1,2)$ *dans* D *tel que*

$$A_i h_i(x) < H_i(x, y_i, h_i(x_i)) + \varepsilon, \tag{3.13}$$

où $x_i = T(x, y_i)$,$i = 1, 2$, *on a aussi*

$$A_1h_1(x) \geq H_1(x, y_2, h_1(x_2)), \tag{3.14}$$

$$A_2h_2(x) \geq H_2(x, y_1, h_2(x_1)). \tag{3.15}$$

De (3.13), (3.15) *et la propriétè (ii) du théorème on trouve*

$$\begin{aligned} A_1h_1(x) - A_2h_2(x) &< H_1(x, y_1, h_1(x_1)) - H_2(x, y_1, h_2(x_1)) + \varepsilon \\ &\leq |H_1(x, y_1, h_1(x_1)) - H_2(x, y_1, h_2(x_1))| + \varepsilon \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{|T_2h_1(x_1) - T_2h_2(x_1)|, |T_1h_1(x_1) - A_1h_1(x_1)|,\right.\right. \\ &\quad |T_2h_2(x_1) - A_2h_2(x_1)|, \frac{1}{2}\left[|T_1h_1(x_1) - A_2h_2(x_1)| + \right. \\ &\quad \left.\left.\left.|T_2h_2(x_1) - A_1h_1(x_1)|\right]\right\}\right) + \varepsilon \qquad (3.16) \\ &\leq \Phi\left(\max\left\{d(T_2h_1, T_2h_2), d(T_1h_1, A_1h_1),\right.\right. \\ &\quad \left.\left. d(T_2h_2, A_2h_2), \frac{1}{2}\left[d(T_1h_1, A_2h_2), d(T_2h_2, A_1h_1)\right]\right\}\right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

par (3.13),(3.14) *et la propriétè (ii) du théorème*

$$\begin{aligned} A_1h_1(x) - A_2h_2(x) &\geq H_1(x, y_2, h_1(x_2)) - H_2(x, y_2, h_2(x_2)) - \varepsilon \\ &\geq |H_1(x, y_2, h_1(x_2)) - H_2(x, y_2, h_2(x_2))| - \varepsilon \\ &\geq -\Phi\left(\max\left\{|T_2h_1(x_2) - T_2h_2(x_2)|, |T_1h_1(x_2) - A_1h_1(x_2)|,\right.\right. \\ &\quad |T_2h_2(x_2) - A_2h_2(x_2)|, \frac{1}{2}\left[|T_1h_1(x_2) - A_2h_2(x_2)| + \right. \qquad (3.17) \\ &\quad \left.\left.\left.|T_2h_2(x_2) - A_1h_1(x_2)|\right]\right\}\right) - \varepsilon \\ &\geq -\Phi\left(\max\left\{d(T_2h_1, T_2h_2), d(T_1h_1, A_1h_1), d(T_2h_2, A_2h_2),\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(T_1h_1, A_2h_2), d(T_2h_2, A_1h_1)\right]\right\}\right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour cela (3.16) *et* (3.17)

$$\begin{aligned} |A_1h_1(x) - A_2h_2(x)| &\leq \Phi\left(\max\left\{d(T_2h_1, T_2h_2), d(T_1h_1, A_1h_1), d(T_2h_2, A_2h_2),\right.\right. \qquad (3.18) \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(T_1h_1, A_2h_2), d(T_2h_2, A_1h_1)\right]\right\}\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Car (3.18) *est vrai pour tout* $x \in S$ *et* ε *est n'importe quel nombre positif, nous avons en prenant pour tout* $x \in S$,

$$\begin{aligned} d(A_1h_1, A_2h_2) &\leq \Phi\left(\max\left\{d(T_1h_1, T_2h_2), d(T_1h_1, A_1h_1), d(T_2h_2, A_2h_2),\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{1}{2}\left[d(T_1h_1, A_2h_2), d(T_2h_2, A_1h_1)\right]\right\}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent et par le théorème (2.4) A_1, A_2, T_1 *et* T_2 *admet un point fixe commun unique* $h^* \in B(S)$, *i.e,* $h^*(x)$ *est une solution unique d'équations fonctionnelles* (3.11) *et* (3.12). ∎

Conclusion

A travers ce modeste travail, nous avons tenté de mettre en lumière sur des théorèmes du point fixe commun, qui ont des applications dans divers domaines notamment les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, les inéquations variationnelles et la programmation dynamique. L'essentielle de notre travail est prouvé de deux théorèmes du point fixe commun dans un espace métrique complet avec déférent types des contractions. Dans la partie des applications nous établissons l'existence et l'unicité de la solution commune des systèmes des équations fonctionnelles apparaissent dans le domaine de la programmation dynamique. Alors, tant que notre recherche est achevée, nous espérons que nous avons pu ajouter de nouvelles informations dans ce large domaine, nous voudrions bien confirmer que ce travail est juste une pierre au grand édifice de la mathématique. Ce travail reste ouvert à d'autres recherches plus profondes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Baskaran and P. V. Subrahmanyam, A note on the solution of a class of functional equations, Appl. Anal. 22 (1986), no. 3-4, 235–241.

[2] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,1957.

[3] R.BELLMAN, E.STANLY LEE, Functionel equations in dynamique programming, Aequationes Mathematicae 17(1978)1-8

[4] P. C. Bhakta and S. Mitra, Some existence theorems for functional equations arising in dynamic programming, J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), no. 2, 348–362.

[5] P. C. Bhakta and S. R. Choudhury, Some existence theorems for functional equations arising in dynamic programming. II, J. Math. Anal. Appl. 131 (1988), no. 1, 217–231.

[6] D. W. Boyd and S.W.Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969),458-464.

[7] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer.Math. Soc., 215 (1976), 241-251

[8] S. S. Chang and Y. H. Ma, Coupled fixed points for mixed monotone condensing operators and an existence theorem of the solutions for a class of functional equations arising in dynamic programming, J. Math. Anal. Appl. 160 (1991), no. 2, 468–479.

[9] M. Geraghty, On contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 604-608.

[10] L.Jinsong , F.Minjie, L.Zeqing, S.M Kang, A Common Fixed Point Theorem and its Application in Dynamic Programming, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 17, 829 – 842.

[11] G. Jungck, Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83 (4) (1976), 261-263

[12] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Internet. I.Math and Math. Sci, 9 (1986), 127-179.771-779

[13] R.Kannan, some results on fixed points, Bull.Calcutta. Math. Soc. 60(1968), 71-76

[14] R.Kannan, Some reults on fixed-point–II, Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 405-408.

[15] Z.Liu, Compatible mappings and fixed points, Acta Sci. Math. (Szeged) 65 (1999), no.1-2, 371–383.

[16] Z.Liu,.. Existence theorems of solutions for certain classes of functional equations arising in dynamic programming. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 262(2) (2001), 529-553.

[17] Z. Liu , J. S. Ume, On properties of solutions for a class of functional equations arising in dynamic programming, J. Optim. Theory Appl. 117 (2003), no. 3, 533–551.

[18] Z. Liu, R. P. Agarwal, and S. M. Kang, On solvability of functional equations and system of functional equations arising in dynamic programming, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), no. 1, 111–130.

[19] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969),326-329.

[20] J. A.Meszaros, A comparison of various definitions of contractive type mappings, Bull. Calcutta Math. Soc., 84 (2) (1992), 167-194

[21] H. K.Pathak,M. S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type, Czechoslovak Math. J, 45 (120) (1995), 685-698.

[22] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Kang, B. S. Lee, Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and application to dynamic programming, Le Matematiche (Fasc. I),50 (1995), 15 -33.

[23] H. K. Pathak, B. Fisher, Common fixed point theorems with applications in dynamic programming, Glas. Mat. Ser. III 31(51) (1996), no. 2, 321–328.

[24] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Khan, B. Madharia, Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type, Demonstratio Math., 31 (3) (1998), 499-518.

[25] E.Rakotch, Anote on contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 459-465.

[26] S.Reich, A comparison of various definitions, Trans.Amer. Math. Soc. 226(1977), 257-290

[27] S.Sessa, On a weak Commutativityb Condition of Mappings in a Fxed point Consideration, Publ. Inst Math. Deber,32 (1982),149-153.

[28] M. R. Singh and Y. Mahendra Singh, Compatible mappings of type (E) and common fixed point theorems of Meir-Keeler type, Int. J. Math. Sci. Engg. Appl., 1 (2),(2007) 299-315.

[29] M. R. Singh and Y. Mahendra Singh, On various types of compatible maps and common fixed point theorems for non-continuous maps, Hacet. J. Math. Stat., 40 (4) (2011) 503 -513.

[30] S. S. Zhang, Some existence theorems of common and coincidence solutions for a class of systems of functional equations arising in dynamic programming, Appl. Math. Mech. 12 (1991), no. 1, 31–37.

[31] J.SAINT RAYMOND, Topologie, Espaces Normés, Calcul Différentiel et Variable Complexe, (2003),(2) 5

[32] Y.SONNTAG.Topologieet analyse fonctionnelle,ellipes,(cours de licence avec 240 exercices et 30 problémes corrigés),1998,