République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme *de MASTER*
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux deriveé partielles et applications

Thème

Présenté Par:

Touati Imene / Zemouli Iméne

Existence et multiplicité de solutions de certains systèmes elliptiques

Devant le jury:

Pr. Zarai Abderrahmane	Pr	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Dr. Guefaifia Rafik	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Dr. Akrout kamel	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance :25/06/2020

Remerciements

Au début et avant tout, nous rendons grâce à dieu tout puissant qui nous a aidés à terminer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance au **Dr. Akrout Kamel** d'avoir encadrer ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il a consacré pour nous suivre pendant la rédaction de ce travail.

Nous adressons nos sincères remerciements au

Pr. Zarai Abderrahmane qui a accepté la présidentielle des jurys.

Nous remercions également **Dr. Guefaifia Rafik** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

En fin, nos plus sincères remerciements vont à mos parents qui nous ont toujours encouragés dans la poursuite de mos études, ainsi que pour leur aide, leur compréhension et leur soutien tout au long de ces années.

Nous remercions également ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص

نقدم في هذه المذكرة, لنيل شهادة الماستر في الرياضيات, نتائج وجود وتعدد الحلول الضعيفة و كذلك عدم وجود حلول غير تافهة لنظام شبه خطي اهليجي يحتوي على المؤثرات **p-q-laplacien** , في مفتوحات محدودة من $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, مع معطيات حافوية المعدومة من نوع **Dirichlet**.

تعتمد نتائج وجود وتعدد الحلول على طريقة الألياف, ونتائج عدم وجود الحلول غير تافهة تعتمد على متطابقات تكاملية من شكل **Pohožaev**

.

Résumé

On présente dans ce mémoire de master de mathématiques, des résultats d'existence, multiplicité de solutions faibles, et des un résultat de non-existence de solutions classiques non trivial d'une classe des systèmes elliptiques quasi-linéaires qui contient les opérateurs p et q-laplacien, dans des domaines bornés $\mathbb{R}^N$, avec des conditions aux limites de type Dirichlet nulles sur le bord.
Les résultats d'existence et de la multiplicité des solutions sont obtenues en utilisant la méthode des fibering, et le résultat de non- existence de solutions non triviales est obtenu moyennant une identitée intégrale de type Pohožaev.

Abstract

We present in this memory of master in mathematics, existence and multiplicity results of weak solutions, and non-existence result of classical non-trivial solutions of a class of quasilinear elliptic systems which contains the operators p and q-laplacian, in bounded domains $\mathbb{R}^N$, with boundary conditions of type Dirichlet null on the edge.

The results of existence and multiplicity of solutions are obtained using the fibering method, and the result of the non-existence of non-trivial solutions is obtained by means of integral identitie of the Pohožaev type.

Introduction

L'opérateur p-Laplacien est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que l'écoulement des fluides non-Newtoniens, les systèmes de réaction-diffusion, l'élasticité non-linéaire, extraction de pétrole, l'astronomie, la propagation à travers des milieux poreux, et la glaciologie. A titre d'exemple dans les années 70 M.C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le p-Laplacien.

La technique principale que nous utiliserons pour étudier l'existence et la multiplicité des solutions est la **méthode de fibering**, introduite et développée par **S. I. Pohožaev** dans [**16**, **17**, **18**], qui fournit un outil puissant pour prouver les théorèmes d'existence, en particulier pour les problèmes qui obéissent à une certaine homogénéité de la forme :

$$A(u) = h.$$

Où A est un opérateur (non-linéaire en général) de X dans Y, tel que X et Y deux espaces de Banach.

Les méthodes variationnelles pour étudier de telles équations ont été suffisamment développées et sont largement utilisées dans divers problèmes de physique mathématique. **Drábek et Pohožaev** [**5**] ont appliqué la méthode à une équation p-laplacien de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)\left|u\right|^{p-2} u + b(x)\left|u\right|^{q-2} u \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, tel que $p, \lambda, q \in \mathbb{R}, 1 < p < q < p^*$, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ pour $p < N$ et $p^* = \infty$ pour $p \geqslant N$.

Dans [19] **Jean Vélin** et **François De Thélin** ont étendu l'étude de l'existence et non-existence de solutions non trivial positive du problème elliptique quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p = f(x, u, v) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_q = g(x, u, v) \text{ dans } \Omega, \\ \quad u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans [4] **Philippe Clément** et **Jacqueline Fleckinger** ont prouvé un théorème d'existence des solutions radiales positives du système suivant d'équations différentielles quasi-linéaires

$$\begin{cases} -\Delta_p = u^\alpha v^\beta \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_q = u^\gamma v^\delta \text{ dans } \Omega, \\ \quad u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où $\Omega = B_R$ est une boule dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$.
Pour prouver le résultat de non-existence de solutions classiques, nous avons utilisé l'identité des du type **Pohožaev**.
L'objet de notre mémoire est l'étude de l'existence et de non-existence des solutions d'une classe des systèmes elliptiques quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)\,|u|^{p-2}\,u + (\alpha+1)c(x)\,|u|^{\alpha-1}\,u\,|v|^{\beta+1} \text{ dans } \Omega, \\ \\ -\Delta_q v = \mu b(x)\,|v|^{q-2}\,v + (\beta+1)c(x)\,|u|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta-1}\,v \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tel que $\alpha, \beta, \lambda, \mu, p > 1, q > 1$ sont des nombres réels, Δ_p et Δ_q sont en conséquence les opérateurs p et q laplacien, et $a(x), b(x), c(x)$ sont des fonctions données.
Notre travail est organisé de la manière suivante :
Le premier chapitre est un préliminaire, nous commençons par rappeler quelques notions et résultats sur les espaces de Sobolev et quelques éléments de base de la théorie des points critiques qui seront utilisés tout au long de ce travail. De plus, d'étudier les différentes propriétés de l'opérateur p-Laplacien défini sur un espace de Sobolev.
Le deuxième chapitre contient l'existence et la multiplicité des solutions, on a utilisé la méthode de fibering. Dans la section 1, nous introduisons une certaine notation, définissons les espaces de fonctions qui seront utilisés tout au long du chapitre et énonçons nos hypothèses de base. Pour la commodité du lecteur, nous collectons également certains des propriétés des valeurs propres p-laplaciennes et fonctions propres correspondantes. Section 2 contient une légère modification de la méthode de fibering, adaptée aux problèmes vectoriels. Les principaux résultats de ce chapitre, c'est-à-dire les théorèmes d'existence et de multiplicité pour le problème sont présentés dans la section 3.
Le troisième chapitre comporte l'identité intégrale obtenue par **S. I. Pohožaev** qui permet d'obtenir la non-existence de solutions non triviale de certaines équations non-linéaires dans des domaines bornés ou non de $\mathbb{R}^N$, avec des conditions de Dirichlet nulles sur le bord. Ce chapitre contient aussi un résultat de non-existence pour le système identifié précédemment.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Sommaire

1.1 Espace des fonctions continues

On donne ici quelques notations et conventions utilisées dans la suite.
Notons par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \text{ et } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 .$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x) .$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega))^m$ est l'ensemble des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b\left(\bar{\Omega}\right)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\bar{\Omega}$, on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| .$$

Pour $k \geqslant 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.
$C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.
Nous définissons aussi $C^k\left(\bar{\Omega}\right)$, comme l'ensemble des restrictions à $\bar{\Omega}$ des éléments de $C^k(\mathbb{R}^N)$ ou bien comme étant l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, telle que pour tous $0 \leqslant j \leqslant k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$, la limite $\lim\limits_{x \to x_0} D^j u(x)$ existe et dépend uniquement de x_0.
$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $D(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions tests.

1.2 Espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On désigne par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et il existe } C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.
Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω et on écrit :

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compacte } K \text{ de } \Omega\right\}.$$

Remarque 1.1 **1.** *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

2. *L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, séparable pour $1 \leqslant p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*

1.3 Espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de **H. Brezis** [**3**] ou **R. A. Adams** [**1**]. Soit p un réel avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^p(\Omega)$ est dans $W^{1,p}(\Omega)$ s'il existe N fonctions $v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$ tels que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

On note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $p = 2, W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.1 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, il est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*
L'espace $\left(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)}\right)$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.2 *Soit $1 \leqslant p < \infty, W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1 *On suppose que Ω est de classe C^1. Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ avec } 1 \leqslant p < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$.

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.2 ***(Inégalité de Poincaré voir** [3]**)***

Soit p un réel avec $1 \leqslant p < \infty$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ alors

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \ \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

De plus, l'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à celle induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.3 *L'espace* $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$ *est uniformément convexe.*

Définition 1.3 *Soit* p *et* q *deux réels vérifiant,* $1 < q \leqslant \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *On désigne par* $W^{-1,q}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.2 (*voir* [11]) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, p *et* q *deux réels,* $1 < p < +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors l'opérateur défini sur $L^p(\Omega)$ *par*

$$u \longmapsto |u|^{p-2} u,$$

est à valeurs dans $L^q(\Omega)$, *de plus il est continu.*

1.3.1 Théorème d'injections de Sobolev

*Énonçons les théorèmes "**d'injection**" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.4 *On dit qu'un espace de Banach* X *s'injecte de façon continue dans un espace de Banach* Y *et on note* $X \hookrightarrow Y$ *si :*

(a) X *est un sous-espace de* Y.

(b) $\exists C > 0$ *tel que pour tout* $u \in X$: $\|u\|_Y \leqslant C \|u\|_X$.

Définition 1.5 *On dit qu'un espace de Banach* X *s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach* Y *et on note* $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ *si :*

(i) X *s'injecte de façon continue dans* Y.

(ii) *toute suite faiblement convergente dans* X *converge fortement dans* Y.

Théorème 1.4 ***(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)*** *Soit* $1 \leqslant p < N$ *alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } p^* \text{est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ *telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $1 \leqslant p < N$, *alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \forall q \in [p, p^*] .$$

Et pour le cas limite $p = N$, on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [N, +\infty[.$$

Corollaire 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on a :*
Si $1 \leqslant p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[$.
Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.
De plus, si $p > N$ alors on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^\alpha \text{ p.p } x, y \in \Omega,$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C dépend seulement de Ω, p et N. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

Théorème 1.5 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. On a :*
Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$.
Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.
En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, pour tout p.

1.4 Quelques éléments de la théorie des points critiques

1.4.1 Différentiabilité et points critiques

Définition 1.6 ***(Dérivée directionnelle)****. Soient w une partie d'un espace de Banach X et $J : w \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in w$ et $v \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in w$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

existe. On notera cette limite par $J'_v(u)$.

Définition 1.7 ***(Différentiabilité au sens de Gâteaux)****. On dit que la fonction J d'un ouvert w d'un espace de Banach X, à valeurs réelles, est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en*

$u \in w$, s'il existe $\varphi \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J(u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle \varphi, v \rangle .$$

L'application φ est appelée la différentielle de J au sens de Gâteaux au point u (ou la G-différentielle de J au point u), on note $J'(u) = \varphi$.

Définition 1.8 *Soient X un espace de Banach, $w \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(w, \mathbb{R})$. On dit que $u \in w$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$, avec $J'(u)$ est la G-différentielle de J au point u. Si u n'est pas un point critique alors on dit que u est un point régulier de J. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in w$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique alors on dit que c est une valeur régulière de J.*

Définition 1.9 *Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes :*

$$S = \{v \in X : F(v) = 0\} .$$

On suppose que pour tout $u \in S$, on a $F'(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ on dit que $c \in \mathbb{R}$ est valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$J(u) = c \text{ et } J'(u) = \lambda F'(u).$$

Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé ***multiplicateur de Lagrange*** *pour la valeur critique c (ou le point critique u).*
Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = \lambda F'(u)$ correspond à une équation aux d´erivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation ***d'Euler-Lagrange*** *(ou* ***l'équation d'Euler****) satisfaite par le point critique u sur la contrainte S.*

Proposition 1.3 *Sous les hypothèses et notations de la* ***définition*** (**1.9**)*, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \inf\limits_{v \rightarrow S} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Lemme 1.1 *Soient $F_1, ..., F_m \in C^1(X, \mathbb{R})$ et :*

$$S = \{u \in X : F_j(u) = 0, 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Soit J une fonction de classe C^1 dans un voisinage de S à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \min\limits_{v \rightarrow S} J(v)$ et que les formes linéaires $F'_1(u_0), F'_2(u_0), ..., F'_m(u_0)$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tels que :

$$J'(u_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F'_j(u_0).$$

1.4.2 Semi-continuité inférieure

Définition 1.10 *Soit X un espace de Banach et w est une partie de X. Une fonction $J : w \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour toute suite $(u_n)_n$ de w convergeant faiblement vers $u \in w$ on a :*

$$J(u) \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf J(u_n).$$

Proposition 1.4 ***(voir** [10]**)** *Soit X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(u_n)_n$ de K telle que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, on a $J(u_n) \longrightarrow \infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e.*

$$\exists u \in K, J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

Théorème 1.6 *Soit X un espace de Banach, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi continue inférieurement et bornée inférieurement. On suppose de plus que φ est Gâteaux différentielle en tout point $u \in X$, alors*

$$\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon \in X \text{ tel que } u_\epsilon \leqslant \inf_X \varphi + \epsilon,$$

et

$$\|D\varphi(u_\epsilon)\| \leqslant \epsilon.$$

Formule d'intégration par parties

Définition 1.11 *Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, on a :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} v u v_i ds.$$

Où $v_i(x) = cos(v, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle de la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x avec l'axe x_i.

Formule de Green

Définition 1.12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulière et v le vecteur normale unité vers l'extérieure sur $\Gamma = \partial\Omega$. Alors pour $u, v \in H^2(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial v} - v\frac{\partial u}{\partial v} \right) d\Gamma.$$

Domaine étoilé

Définition 1.13 (**voir** [10]) *un domaine Ω est dit étoilé s'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que les segments $\overline{x_0 x}$ sont contenues dans Ω pour tout $x \in \Omega$. Si Ω est étoilé par rapport à l'origine, alors on a $x \cdot \upsilon \geqslant 0$ sur $\partial\Omega$.*

1.4.3 Théorème de regularité

Théorème 1.7 *Soit Ω un ouvert de classe C^2 et supposons que les coefficients de A appartiennent à $C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^2(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ au sens de } D'(\Omega) : u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}\right),$$

où C ne dépend pas de f et g. De plus, l'équation est vérifiée presque sous la forme

$$-a_{ij}\partial_{ij}u - \partial_i a_{ij}\partial_j u + cu = f.$$

1.5 Quelques critères de convergence

Théorème 1.8 ***(de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $\|f_n\| \leqslant g$ p.p sur Ω, alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \int\limits_{\Omega} f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_{\Omega} f_n(x)dx.$$

Proposition 1.5 *Soient $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite extraite $(f_{n_i})_i$ telles que :*

(i) $f_{n_i}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur Ω.*

(ii) $|f_{n_i}(x)| \leqslant g(x)$ *pour tout i et p.p sur Ω.*

1.6 Opérateurs monotones

Dans ce qui suit, X est un espace de Banach réflexif et séparable et A un opérateur de X dans X'.

Définition 1.14 *On dit que*

(i) *A est monotone si $\forall u, v \in X, \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geqslant 0$.*

(ii) *A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ implique $u = v$.*

(iii) *A est hémicontinu si pour tous $u, v \in X$, l'application $t \to \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.15 *On dit que*

(a) *A est demi-continu (continu de X fort dans X'faible)*

$$\text{si } u_n \to u \text{ quand } \infty \text{ implique } Au_n \rightharpoonup Au \text{ quand } n \to \infty.$$

(b) *A est fortement continu si*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ quand } n \to \infty \text{ implique } Au_n \to Au \text{ quand } n \to \infty.$$

(c) *A est borné si l'image par A de tout borné de X est un borné de X'.*

Définition 1.16 *On dit que A est coercif si*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

1.7 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par :

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = |\nabla u|^{p-4} \left\{ |\nabla u|^{p-2} \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\},$$

avec $1 < p < +\infty$. Cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$, le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel Δ.

1.7.1 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien

Considérons maintenant l'opérateur p-Laplacien défini sur l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p et q deux réels, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Quel que soit u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant N$, on déduit de la **proposition** (**1**.**2**) que $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient à $L^q(\Omega)$, d'où on peut définir l'application suivante sur $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Théorème 1.9 *Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto a(u,v),$$

est une forme linéaire continue, d'où il existe un unique élément, noté $A(u)$ de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, tel que :

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)', u \longmapsto A(u)$, est notée :

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Preuve. Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ qui à v associe $a(u,v)$ est bien linéaire, de plus elle vérifie

$$|a(u,v)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^p} \leqslant C\,\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où elle est continue et il existe un unique f de $W^{-1,q}(\Omega)$, tel que $a(u,v) = \langle f, v\rangle$. De l'unicité de f on déduit l'existence d'une application A de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, telle que $A(u) = f$.
Pour tout φ de $D(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

D'où, $A = -\Delta_p$, avec

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

$-\Delta_p$ est l'opérateur p-Laplacien. ∎

Définition 1.17 *Soit $r \longmapsto \Phi(r)$ une fonction continue monotone strictement croissante de $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \Phi(0) = 0, \Phi(r) \longrightarrow \infty$ si $r \longrightarrow \infty$. Une application J de $X \longrightarrow X'$ avec X un espace de Banach, est dite "application de dualité" relative à Φ si les conditions suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned} \langle J(u), u\rangle &= \|J(u)\|_* \|u\| \,\forall u \in X, \\ \|J(u)\|_* &= \Phi(\|u\|) \,\forall u \in X. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Naturellement cette notion dépend de la norme choisie sur X.*
Par exemple

Si $X = L^p(\Omega), \|u\| = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \Phi(r) = r^{p-1}$ *alors* $J(u) = |u|^{p-2} u$.

Si $X = W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \Phi(r) = r^{p-1}$ *alors*

$$J(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\Delta_p(u).$$

Avec $\|-\Delta_p(u)\|_* = \Phi(\|u\|) = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}$.

Proposition 1.6 *L'opérateur $-\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve. De l'expression de la norme dans un espace dual, on déduit :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|v\| \leqslant 1} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle|.$$

Pour tout v de $W_0^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$|\langle -\Delta_p(u), v\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{p}{q}}\right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Donc

$$\|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{q}}.$$

Soit B un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\exists M > 0, \forall u \in B, \|u\| \leqslant M \Longrightarrow \|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leqslant M^{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi l'image par $-\Delta_p$ d'un borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$. ■

Proposition 1.7 *L'opérateur $-\Delta_p$ est monotone de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve. L'application qui à t de $\mathbb{R}$ associe $|t|^p$ dans $\mathbb{R}$ étant convexe, on déduit que sa dérivée est une fonction croissante, donc

$$\forall (t,r) \in \mathbb{R}^2, \left(|t|^{p-2} t - |r|^{p-2} r\right)(t - r) \geqslant 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta_p(u) - (-\Delta_p(v)), u - v\rangle \\ &= \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx \geqslant 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $-\Delta_p$ est monotone. ■

Proposition 1.8 *L'opérateur $-\Delta_p$ est coercive de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve. Comme Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on déduit de l'inégalité de Poincaré que

$$\langle -\Delta_p(u), u\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|} = \lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\|u\|^p}{\|u\|} = \lim\limits_{\|u\|\to\infty} \|u\|^{p-1} = +\infty$ car $p>1$. ■

Corollaire 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p un réel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors l'opérateur $-\Delta_p$ est surjectif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Lemme 1.2 (***voir***[8]) *Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$. Alors*

$$\left||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right| \leqslant \begin{cases} c_p\,|x-y|\,(|x|+|y|)^{p-2} \text{ si } p \geqslant 2 \\ c_p\,|x-y|^{p-1} \text{ si } 1 \leqslant p < 2 \end{cases},$$

avec c_p indépendante de x et y.

Lemme 1.3 *Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y\right\rangle \geqslant \begin{cases} c_p\,|x-y|^p \text{ si } p \geqslant 2 \\ c_p\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \text{ si } 1 < p < 2 \end{cases}.$$

Théorème 1.10 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*

a) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ *est uniformément continu sur tout ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

b) $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ *est continu.*

c) *L'opérateur composé $(-\Delta_p)^{-1}$:*

$$W^{-1,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

est compact si $1 \leqslant q < \frac{Np}{N-p}$.

Preuve. a) Considérons un ensemble borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e.

$$\exists M > 0, \forall u \in B : \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M.$$

Alors pour tout $u, v \in B$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|-\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \left|\langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v), \varphi\rangle\right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \left|\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla\varphi dx\right|. \end{aligned}$$

D'après le **Lemme** $(\mathbf{1}.\mathbf{2})$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\|-\Delta_p u-(-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\\ \leqslant&\left\{\begin{array}{c} c_p \sup\limits_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|+|\nabla v|\right)^{p-2}|\nabla u-\nabla v|\,|\nabla \varphi|\,dx,\ \text{si } p\geqslant 2\\ c_p \sup\limits_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int\limits_{\Omega} |\nabla u-\nabla v|^{p-1}|\nabla \varphi|\,dx,\ \text{si } 1<p<2\end{array}\right. .\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on conclut que :

$$\|-\Delta_p u-(-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\leqslant\left\{\begin{array}{c} 2C_pM^{p-2}\|\nabla u-\nabla v\|_{L^p(\Omega)},\ \text{si } p\geqslant 2\\ C_pM\|\nabla u-\nabla v\|_{L^p(\Omega)},\ \text{si } p<2\end{array}\right. .$$

D'où $-\Delta_p$ est uniformément continu sur B.
b) D'après le **Corollaire** $(\mathbf{1}.\mathbf{2})$, on a $-\Delta_p$ est surjectif, il reste a montrer l'unicité d'un élément u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $-\Delta_p(u)=f$. Soit $u_1,u_2\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que :

$$-\Delta_p u_1=f_1,-\Delta_p u_2=f_2.$$

Alors

$$\langle -\Delta_p(u_1)-(-\Delta_p(u_2)),(u_1-u_2)\rangle=\langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle\,.$$

D'après le **Lemme** $(\mathbf{1}.\mathbf{3})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p(u_1)-(-\Delta_p(u_2)),(u_1-u_2)\rangle &= \int\limits_{\Omega}\left\langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2,\nabla(u_1-u_2)\right\rangle dx\\ &\geqslant \left\{\begin{array}{c} C_p\int\limits_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx,\ \text{si } p\geqslant 2\\ C_p\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}dx,\ \text{si } 1<p<2,\end{array}\right. .\end{aligned}$$

Si $p\geqslant 2$, alors

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx\leqslant D_p\|f_1-f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^p}\,.$$

D'où

$$\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^p}\leqslant D_p^{\frac{1}{p-1}}\|f_1-f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}},$$

tel que $D_p=\frac{1}{C_p}$. En particulier, si $f_1\equiv f_2$ alors $u_1\equiv u_2$.
Si $1<p<2$ alors

$$\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}dx\leqslant D_p\|f_1-f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\frac{\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\|u_1\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{2-p}{p}}} \leqslant D_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)} .$$

Dans ce cas, on a démontré à la fois l'existence et la continuité de l'inverse de l'opérateur $-\Delta_p$.
c) D'après **b)**, on a $(-\Delta_p)^{-1}$ est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$ si $1 \leqslant q < \frac{Np}{N-p}$, alors l'opérateur composé

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ est compact.}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 1.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 3$. Pour $p \in]1, +\infty[$, nous définissons la fonctionnelle $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx.$$

Alors Ψ est différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\langle \Psi'(u), v \rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx = \langle -\Delta_p u, v \rangle .$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{p} |x|^p$, qui est une fonction de classe C^1et $\nabla \varphi(x) = |x|^{p-2} x$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x + ty) - \varphi(x)}{t} = |x|^{p-2} x \cdot y.$$

Par conséquent

$$\lim_{t \to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

Par le théorème de Lagrange il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $|\theta| \leqslant |t|$ et

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} \right| \\ \leqslant \quad & \left| |\nabla u + \theta \nabla v|^{p-2} (\nabla u + \theta \nabla v) \cdot \nabla v \right| \leqslant C \left(|\nabla u|^{p-1} |\nabla v| + |\nabla v|^p \right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx.$$

Enfin Ψ est Gâteaux différentiable et

$$\langle \Psi_G'(u), v\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Nous allons maintenant montrer que $\Psi_G' : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ est continue. A cet effet nous considérons une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_k \longrightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la **proposition** $(\mathbf{1}.\mathbf{6})$, il existe une sous-suite qu'on note aussi (u_k) telle que :

- $\nabla u_k(x) \longrightarrow \nabla u(x)$ p.p sur Ω quand $k \longrightarrow \infty$.
- Il existe $w \in L^1(\Omega)$ telle que $|\nabla u_k(x)|^p \leqslant w(x)$ p.p sur Ω, et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons,

$$\langle \Psi_G'(u) - \Psi_G'(u_k), v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right) \nabla v dx,$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right) \nabla v dx\right| \\
\leqslant &\left(\int\limits_{\Omega} \left||\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant &\left(\int\limits_{\Omega} \left||\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Comme on a :

$$\|\Psi_G'(u) - \Psi_G'(u_k)\| = \sup\left\{|\langle \Psi_G'(u) - \Psi_G'(u_k), v\rangle| , v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| = 1\right\},$$

donc

$$\|\Psi_G'(u) - \Psi_G'(u_k)\| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} \left||\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Or

$$|\nabla u_k(x)|^{p-2} \nabla u_k(x) \longrightarrow |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \text{ p.p sur } \Omega,$$

et

$$\left||\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C\left(|\nabla u_k|^p + |\nabla u|^p\right) \leqslant C\left(w + |\nabla u|^p\right) \in L^1(\Omega).$$

Par le théorème de la convergence dominée, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \longrightarrow 0,$$

et donc

$$\| \Psi'_G(u_k) - \Psi'_G(u) \| \longrightarrow 0.$$

D'où Ψ'_G est continue.

■

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ DE SOLUTIONS POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DE FIBERING

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de quelques solution pour le système quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)\,|u|^{p-2}\,u + (\alpha+1)c(x)\,|u|^{\alpha-1}\,u\,|v|^{\beta+1}\,, \\ \\ -\Delta_q v = \mu b(x)\,|v|^{q-2}\,v + (\beta+1)c(x)\,|u|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta-1}\,v. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tel que $\alpha, \beta, \lambda, \mu, p > 1, q > 1$ sont des nombres réels, Δ_p et Δ_q sont en conséquence les opérateurs p et q laplacien, et $a(x), b(x), c(x)$ sont des fonctions données.
Le système $(\mathbf{2}.\mathbf{1})$ sera considéré dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec la condition aux limites Dirichlet homogène

$$u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

2.1 Première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné et $1 < p, q < \infty$. Nous définissons les espaces de Sobolev $Y_p = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $Y_q = W_0^{1,q}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \|v\|_q = \left(\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.3}$$

respectivement. Nous désignons $Y = Y_p \times Y_q$ et pour $(u, v) \in Y$,

$$\|(u,v)\| = \|u\|_p^p + \|v\|_q^q\,. \tag{2.4}$$

Considérons maintenant l'équation de valeur propre pour l'opérateur p-laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)\,|u|^{p-2}\,u \text{ dans } \Omega, \\ \\ \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$. Le problème $(\mathbf{2}.\mathbf{5})$ est associée à notre problème principale $(\mathbf{2}.\mathbf{1}), (\mathbf{2}.\mathbf{2})$. Car nous avons besoin du **Lemme** suivant.

Lemme 2.1 ***(voir Anane*** $[\mathbf{2}]$, ***Drábek et Pohožaev*** $[\mathbf{5}]$ ***et Lundqvist*** $[\mathbf{13}]$*). Il existe un nombre* $\lambda_1 > 0$ *tel que :*

1. $$\lambda_1 = \inf \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int\limits_\Omega a(x) \, |u|^p \, dx}, \tag{2.6}$$

où l'infimum est repris $u \in Y_p$ tel que $\int\limits_\Omega a(x) \, |u|^p \, dx > 0$.

2. *Il existe une fonction positive $\varphi \in Y_p \cap L^\infty(\bar{\Omega})$ qui est la solution de $(\mathbf{2.5})$ avec $\lambda = \lambda_1$.*

3. *λ_1 est simple, dans le sens que deux fonctions propres quelconques, correspondant à λ_1, défini par un multiplicateur constant.*

4. *λ_1 est isolé, ce qui signifie qu'il n'y pas des valeurs propres inférieurs à λ_1 et pas valeurs propres dans l'intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ pour certain $\delta > 0$ suffisamment petits.*

Notez que nous considérons $(\mathbf{2.5})$ dans un sens faible, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z dx = \lambda \int\limits_\Omega a(x) \, |u|^{p-2} \, uzdx, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour tout $z \in Y_p$.
Maintenant, nous énonçons les hypothèses suivants.
Soit $\alpha, \beta, \lambda, \mu, p > 1, q > 1$ des nombres réels. Nous supposons que :

$$1 < p < p^*, 1 < q < q^*, \tag{2.7}$$

$$\frac{N-p}{p}(\alpha+1) + \frac{N-q}{q}(\beta+1) < N, \tag{2.8}$$

tel que

$$p^* = \frac{Np}{N-p}, q^* = \frac{Nq}{N-q},$$

sont les exposants critiques bien connus (**voir** $[\mathbf{14}, \mathbf{19}]$).
Nous supposons que le système $(\mathbf{2.1})$ est super-homogène dans le sans où :

$$\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} > 1. \tag{2.9}$$

On peut voir que cette dernière condition équivalent à

$$d = (\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha-p+1)(\beta-q+1) > 0. \tag{2.10}$$

De plus, $(\mathbf{2.8})$ est équivalent à

$$N < \frac{\alpha+\beta+2}{\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} - 1}. \tag{2.11}$$

En effet,

$$\begin{aligned} N &< \frac{\alpha+\beta+2}{\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}-1\right)N < \alpha+\beta+2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{p}N+\frac{\beta+1}{q}N-N < \alpha+\beta+1+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{p}N-(\alpha+1)+\frac{\beta+1}{q}N-(\beta+1) < N \\ &\Leftrightarrow \frac{N-p}{p}(\alpha+1)+\frac{N-q}{q}(\beta+1) < N. \end{aligned}$$

On peut observer que notre système est sous-critique $[\mathbf{14}]$, ce qui évite la non-compacité problèmes. **voir** $[\mathbf{14}]$, pour plus de détails concernant ce point.
Notez que $(\mathbf{2.8})$ impliques

$$\alpha+1<p^*, \beta+1<q^*.$$

Les fonctions $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont supposée être bornée dans Ω :

$$a, b, c \in L^{\infty}(\Omega), \tag{2.12}$$

et

$$a(x)=a_1(x)-a_2(x); a_1, a_2 \geqslant 0, a_1(x) \neq 0, \forall x \in \Omega, \tag{2.13}$$

$$b(x)=b_1(x)-b_2(x); b_1, b_2 \geqslant 0, b_1(x) \neq 0, \forall x \in \Omega. \tag{2.14}$$

Par l'inégalité de Sobolev, on peut facilement **voir que** $(\mathbf{2.7}), (\mathbf{2.8})$ et $(\mathbf{2.12})$ impliquées dans l'intégrale

$$\int_{\Omega} a(x)\,|u|^p\,dx,$$

et

$$\int_{\Omega} b(x)\,|v|^q\,dx,$$

sont fini pour $(u, v) \in Y$. Maintenant on peut définir les fonctions suivants sur Y_p et Y_q :

$$f_1(u)=\int_{\Omega} a(x)\,|u|^p\,dx, \tag{2.15}$$

et

$$f_2(v)=\int_{\Omega} b(x)\,|v|^q\,dx. \tag{2.16}$$

Puisque a et b sont borné, il est standard de vérifier que $f_1$et f_2 sont faiblement inférieur continu. De même, les conditions $(\mathbf{2.7})$, $(\mathbf{2.8})$ et $(\mathbf{2.12})$ impliquent que la fonctionnel

$$f_3(u,v) = \int_\Omega c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} dx, \tag{2.17}$$

est continuellement faiblement inférieur en Y.
On supposons que

$$c^+(x) \neq 0, \forall x \in \Omega, \tag{2.18}$$

et

$$\int_\Omega c(x) |\varphi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} dx < 0. \tag{2.19}$$

Les fonction $\varphi \in Y_p$ et $\psi \in Y_q$ ci-dessus sont les premières fonctions propres le Δ_p et Δ_q en conséquence.

Définition 2.1 ***(solution faible)****. On dit que* $(u, v) \in Y$ *est solution faible de* $(\mathbf{2.1})$ *si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z dx = \lambda \int_\Omega a(x) |u|^{p-2} u z dx + (\alpha+1) \int_\Omega c(x) |u|^{\alpha-1} u |v|^{\beta+1} z dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w dx = \mu \int_\Omega b(x) |v|^{q-2} v w dx + (\beta+1) \int_\Omega c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v w dx,$$

pour toute $(z, w) \in Y$.

2.2 Méthode de fibering pour des systèmes d'EDPs quasi-linéaires

Le système $(\mathbf{2.1})$ a une structure variationnelle. En effet, dénoter

$$F(x,u,v) = \frac{\lambda}{p} a(x) |u|^p + \frac{\mu}{q} b(x) |v|^q + c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1}, \tag{2.20}$$

et considérer

$$\mathcal{F}(x,u,v,\nabla u,\nabla v) = \frac{1}{p} |\nabla u|^p + \frac{1}{q} |\nabla v|^q - F(x,u,v). \tag{2.21}$$

Soit $J : Y \to \mathbb{R}$ défini par

$$J(u,v) = \int_\Omega \mathcal{F}(x,u,v,\nabla u,\nabla v) dx,$$

où, sous une forme plus détaillée,

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\Omega} a(x)\,|u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |\nabla v|^q\,dx - \frac{\mu}{q}\int_{\Omega} b(x)\,|v|^q\,dx \\ &\quad - \int_{\Omega} c(x)\,|u|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta+1}\,dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Tel que les dérivé aux sens de Gâteaux de la fonction J sont

$$\begin{aligned} J(u+\varepsilon z,v) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla(u+\varepsilon z)|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\Omega} a(x)\,|u+\varepsilon z|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |\nabla v|^q\,dx - \frac{\mu}{q}\int_{\Omega} b(x)\,|v|^q\,dx \\ &\quad - \int_{\Omega} c(x)\,|u+\varepsilon z|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta+1}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} &= \int_{\Omega} |\nabla(u+\varepsilon z)|^{p-2}\,\nabla(u+\varepsilon z)\,\nabla z dx - \lambda\int_{\Omega} a(x)\,|u+\varepsilon z|^{p-2}\,(u+\varepsilon z) z dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\alpha+1)c(x)\,|u+\varepsilon z|^{\alpha-1}\,(u+\varepsilon z)\,z\,|v|^{\beta+1}\,dx \\ \left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \nabla z dx - \lambda\int_{\Omega} a(x)\,|u|^{p-2}\,u z dx - \int_{\Omega} (\alpha+1)c(x)\,|u|^{\alpha-1}\,u z\,|v|^{\beta+1}\,dx \\ &= \int_{\Omega} \left(-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) - \lambda a(x)\,|u|^{p-2}\,u - (\alpha+1)\,c(x)\,|u|^{\alpha-1}\,u\,|v|^{\beta+1}\right) z dx \\ &= \left\langle -\Delta_p u - \lambda a(x)\,|u|^{p-2}\,u - (\alpha+1)c(x)\,|u|^{\alpha-1}\,u\,|v|^{\beta+1}, z\right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(u,v+\rho w) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\Omega} a(x)\,|u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |\nabla(v+\rho w)|^q\,dx - \frac{\mu}{q}\int_{\Omega} b(x)\,|v+\rho w|^q\,dx \\ &\quad - \int_{\Omega} c(x)\,|u|^{\alpha+1}\,|v+\rho w|^{\beta+1}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \rho} &= \int_{\Omega} |\nabla(v+\rho w)|^{q-2}\,\nabla(v+\rho w)\,\nabla w dx - \mu\int_{\Omega} b(x)\,|v+\rho w|^{q-2}\,(v+\rho w) w dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\beta+1)\,c(x)\,|u|^{\alpha+1}\,|v+\rho w|^{\beta-1}\,(v+\rho w)\,w dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial J}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} &= \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w dx - \mu \int_{\Omega} b(x) |v|^{q-2} v w dx - \int_{\Omega} (\beta+1) c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v w dx \\
&= \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(|\nabla v|^{q-2} \nabla v) - \mu b(x) |v|^{q-2} v - (\beta+1) c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v) w dx \\
&= \left\langle -\Delta_q v - \mu b(x) |v|^{q-2} v - (\beta+1) c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v, w \right\rangle .
\end{aligned}$$

Clairement, les points critiques de J sont les solutions faibles du problème $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$.
La pierre angulaire de la méthode de fibering est la suivant. Nous exprimerons $(u, v) \in Y$ sous la forme :

$$u = rz, v = \rho w, \tag{2.23}$$

ou les fonctions $z \in Y_p, w \in Y_q$, et r, ρ sont des nombres réels. Puisque on recherche des solutions non-triviales on suppose que $r \neq 0$ et $\rho \neq 0$. En remplaçant $(\mathbf{2.23})$ par $(\mathbf{2.22})$ on obtient :

$$\begin{aligned}
J(rz, \rho w) &= \frac{|r|^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla z|^p dx - \frac{\lambda |r|^p}{p} \int_{\Omega} a(x) |z|^p dx + \frac{|\rho|^q}{q} \int_{\Omega} |\nabla w|^q dx - \frac{\mu |\rho|^q}{q} \int_{\Omega} b(x) |w|^q dx \\
&\quad - |r|^{\alpha+1} |\rho|^{\beta+1} \int_{\Omega} c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Si $(u, v) \in Y$ est un point critique de J alors

$$\frac{\partial J}{\partial r}(rz, \rho w) = 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial \rho}(rz, \rho w) = 0. \tag{2.25}$$

Supposant que

$$A = \int_{\Omega} |\nabla z|^p dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |z|^p dx \neq 0, \tag{2.26}$$

$$B = \int_{\Omega} |\nabla w|^q dx - \mu \int_{\Omega} b(x) |w|^q dx \neq 0, \tag{2.27}$$

$$C = \int_{\Omega} c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx \neq 0, \tag{2.28}$$

on peut écrire $(\mathbf{2.24})$ de la manière suivante :

$$J(rz, \rho w) = \frac{|r|^p}{p} A + \frac{|\rho|^q}{q} B - |r|^{\alpha+1} |\rho|^{\beta+1} C. \tag{2.29}$$

Les conditions $(\mathbf{2.25})$ sont équivalentes à

$$\frac{\partial J}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow |r|^{p-2} r A - (\alpha+1) |r|^{\alpha-1} r |\rho|^{\beta+1} C = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} = 0 \Leftrightarrow |\rho|^{q-2} \rho B - (\beta+1) |r|^{\alpha+1} |\rho|^{\beta-1} \rho C = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} |r|^{p-2} A - (\alpha+1) |r|^{\alpha-1} |\rho|^{\beta+1} C = 0, \\ |\rho|^{q-2} B - (\beta+1) |r|^{\alpha+1} |\rho|^{\beta-1} C = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Résolution de système $(\mathbf{2}.\mathbf{30})$ on obtient :

$$|r|^{p-\alpha-1} = (\alpha+1) |\rho|^{\beta+1} \frac{C}{A}.$$

Par conséquence, A et C doivent avoir le même signe, de façon analogue,

$$|\rho|^{q-\beta-1} = (\beta+1) |r|^{\alpha+1} \frac{C}{B}.$$

Et B et C doivent avoir le même signe. Ainsi A, B et C doivent avoir le même signe ! Il est à noter que les conditions $(\mathbf{2}.\mathbf{26}) - (\mathbf{2}.\mathbf{28})$ ont été essentiellement utilisées. D'où la solution de $(\mathbf{2}.\mathbf{30})$ est donnée par

$$|r| = \left(\frac{(\alpha+1)^{(\beta-q+1)} |B|^{(\beta+1)}}{(\beta+1)^{(\beta+1)} |C|^{q} |A|^{(\beta-q+1)}} \right)^{\frac{1}{d}}, \tag{2.31}$$

$$|\rho| = \left(\frac{(\beta+1)^{(\alpha-p+1)} |A|^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)} |C|^{p} |B|^{(\alpha-p+1)}} \right)^{\frac{1}{d}}, \tag{2.32}$$

où $d > 0$ est donné en $(\mathbf{2}.\mathbf{9})$.

En effet, on a :

$$|r| = \left((\alpha+1) |\rho|^{\beta+1} \frac{C}{A} \right)^{\frac{1}{p-\alpha-1}}, \tag{2.33}$$

et

$$|\rho| = \left((\beta+1) |r|^{\alpha+1} \frac{C}{B} \right)^{\frac{1}{q-\beta-1}}. \tag{2.34}$$

On remplaçons $(\mathbf{2}.\mathbf{34})$ en $(\mathbf{2}.\mathbf{33})$ on obtient :

$$|r| = \left(\frac{|r|^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{q-\beta-1}} C^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} (\beta+1)^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} C(\alpha+1)}{B^{\frac{(\beta+1)}{(q-\beta-1)}} A} \right)^{\frac{1}{(p-\alpha-1)}}$$

$$|r|^{\frac{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)-(\alpha+1)(\beta+1)}{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)}} = \left(\frac{C^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} (\beta+1)^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} C(\alpha+1)}{B^{\frac{(\beta+1)}{(q-\beta-1)}} A} \right)^{\frac{1}{(p-\alpha-1)}}$$

$$|r| = \left(\frac{C^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} (\beta+1)^{\frac{(\beta+1)}{q-\beta-1}} C(\alpha+1)}{B^{\frac{(\beta+1)}{(q-\beta-1)}} A} \right)^{\frac{1}{(p-\alpha-1)} \left(\frac{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)}{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)-(\alpha+1)(\beta+1)} \right)}$$

alors

$$|r| = \left(\frac{(\alpha+1)^{\beta-q+1} |B|^{(\beta+1)}}{(\beta+1)^{(\beta+1)} |C|^q |A|^{(\beta-q+1)}} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

D'autre part, on remplaçons (**2.33**) en (**2.34**) on obtient :

$$|\rho| = \left(\frac{|\rho|^{\frac{(\beta+1)(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} C^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} (\alpha+1)^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} C(\beta+1)}{BA^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}}} \right)^{\frac{1}{(q-\beta-1)}}$$

$$|\rho|^{\frac{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)-(\beta+1)(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)}} = \left(\frac{C^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} (\alpha+1)^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} C(\beta+1)}{BA^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}}} \right)^{\frac{1}{(q-\beta-1)}}$$

$$|\rho| = \left(\frac{C^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} (\alpha+1)^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}} C(\beta+1)}{BA^{\frac{(\alpha+1)}{(p-\alpha-1)}}} \right)^{\frac{1}{(q-\beta-1)}\left(\frac{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)}{(p-\alpha-1)(q-\beta-1)-(\beta+1)(\alpha+1)}\right)}$$

alors

$$|\rho| = \left(\frac{(\beta+1)^{(\alpha-p+1)} |A|^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)} |C|^p |B|^{(\alpha-p+1)}} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Le fait que A, B, C doit avoir simultanément le même signe nous amène à considérer deux cas. Dons les section suivantes, nous supposons que :

$$A > 0, B > 0, C > 0. \tag{2.35}$$

Où

$$A < 0, B < 0, C < 0. \tag{2.36}$$

Ainsi, dans les deux cas (**2.35**) et (**2.36**), les fonctions $r = r(z, w)$ et $\rho = \rho(z, w)$ sont bien définies. Maintenant, nous insérons les expressions pour $r = r(z, w)$ et $\rho = \rho(z, w)$, déterminées par (**2.31**) et (2.32), en (2.29). De cette façon, nous obtenons un fonctionnel

$$I(z, w) = J(r(z, w)z, \rho(z, w)w), \tag{2.37}$$

on a :

$$\begin{aligned} & J(rz, \rho w) \\ = & \left(\frac{(\alpha+1)^{p(\beta-q+1)/d}}{p(\beta+1)^{p(\beta+1)/d}} + \frac{(\beta+1)^{q(\alpha-p+1)/d}}{q(\alpha+1)^{q(\alpha+1)/d}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{q(\alpha+1)/d} (\beta+1)^{p(\beta+1)/d}} \right) \\ & .sign\left(\int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx \right) \frac{|A|^{q(\alpha+1)/d} |B|^{p(\beta+1)/d}}{|C|^{pq/d}} \end{aligned}$$

donc

$$I(z,w) = K\frac{\left|\int\limits_{\Omega}|\nabla z|^p\,dx - \lambda\int\limits_{\Omega}a(x)\,|z|^p\,dx\right|^{(\alpha+1)q/d}\left|\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^q\,dx - \mu\int\limits_{\Omega}b(x)\,|w|^q\,dx\right|^{(\beta+1)p/d}}{\left|\int\limits_{\Omega}c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx\right|^{pq/d}}, \tag{2.38}$$

tel que :

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{(\alpha+1)^{(\beta-q+1)p/d}}{p(\beta+1)^{(\beta+1)p/d}} + \frac{(\beta+1)^{(\alpha-p+1)q/d}}{q(\alpha+1)^{(\alpha+1)q/d}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)q/d}(\beta+1)^{(\beta+1)p/d}}\right) \\ &\quad .sign\left(\int\limits_{\Omega}c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, à condition que z et w satisfassent $(\mathbf{2.35})$ ou $(\mathbf{2.36})$, nous avons

$$\left.\frac{\partial J}{\partial r}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} = 0, \tag{2.39}$$

et

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \rho}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} = 0. \tag{2.40}$$

En suite, nous introduisons la notation suivante : pour tout $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ nous dénotons par

$$f'(z,w)(h_1,h_2),$$

la dérivée de Gâteaux de f à $(z,w) \in Y$ en direction de $(h_1,h_2) \in Y$.
Soit

$$E_1(z) = \int\limits_{\Omega}|\nabla z|^p\,dx - \lambda\int\limits_{\Omega}a(x)\,|z|^p\,dx, \tag{2.41}$$

$$E_2(w) = \int\limits_{\Omega}|\nabla w|^q\,dx - \mu\int\limits_{\Omega}b(x)\,|w|^q\,dx. \tag{2.42}$$

Et

$$\begin{aligned} E_i^{(1)}(z,w)(h_1,h_2) &= \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0,\sigma=0} E_i(z+\varepsilon h_1, w+\sigma h_2), \\ E_i^{(2)}(z,w)(h_1,h_2) &= \left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_{\varepsilon=0,\sigma=0} E_i(z+\varepsilon h_1, w+\sigma h_2), \\ I^{(1)}(z,w)(h_1,h_2) &= \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0,\sigma=0} I(z+\varepsilon h_1, w+\sigma h_2), \\ I^{(2)}(z,w)(h_1,h_2) &= \left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_{\varepsilon=0,\sigma=0} I(z+\varepsilon h_1, w+\sigma h_2). \end{aligned}$$

Lemme 2.2 (1) *la fonction* I *est homogène de degré* 0*, c'est-à-dire pour tout* $z \in Y_p, w \in Y_q$ *tel que* $\int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx \neq 0$ *et pour chaque* $t \neq 0$ *on a :*

$$I(tz, tw) = I(z, w).$$

(2) I *est paire et*

$$I'(z, w)(z, w) = 0.$$

Remarque 2.1 *Si* $(z, w) \in Y$ *est un point critique de* I*, par les propriétés bien connues de l'intégrale de Dirichlet p-Laplacien* (***voir*** [**12**]) *, il s'en suit que* $(|z|, |w|) \in Y$ *est également un point critique de* I*.*

les **deux lemmes** suivants sont des conséquences directes des résultats prouvés dans [**16** − **18**] .

Lemme 2.3 *soit* (z, w) *un point critique de* I*, qui satisfait* (**2.35**) *ou* (**2.36**)*. En suite la fonction* (u, v) *définie par :*

$$u(x) = rz(x), v(x) = \rho w(x),$$

où $r \neq 0$ *et* $\rho \neq 0$ *sont déterminés par* (**2.31**) *et* (**2.32**)*, est un point critique de* J*.*

Preuve. Depuis (z, w) est un point critique de I, on a :

$$I'(z, w)(h_1, h_2) = (I^{(1)}(z, w)(h_1, h_2), I^{(2)}(z, w)(h_1, h_2)) = 0.$$

Par conséquent, étant donné que :

$$\left.\frac{\partial J}{\partial r}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} = \left.\frac{\partial J}{\partial \rho}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} = 0,$$

(**voir** (**2.39**) et (**2.40**)), on appliquant la règle de chaîne nous allons savoir

$$\begin{aligned} 0 &= I^{(1)}(z, w)(h_1, h_2) \\ &= r(z, w) J^{(1)}(rz, \rho w)(h_1, h_2) + \left.\frac{\partial J}{\partial r}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} \frac{\partial r}{\partial z} + \left.\frac{\partial J}{\partial \rho}\right|_{r=r(z,w),\rho=\rho(z,w)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ &= r(z, w) J^{(1)}(rz, \rho w)(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Ainsi $J^{(1)}(u, v) = 0$. Analoguement, $J^{(2)}(u, v) = 0$ et donc $J'(u, v) = 0$. ■

Lemme 2.4 *Soit* E_1 *et* E_2 *définie par* (**2.41**) *et* (**2.42**)*. Considéré :*

$$E_1(z, w) = c_1 \text{ et } E_2(z, w) = c_2,$$

où $c_i \in \mathbb{R}^*(i = 1, 2)$. *Supposons que :*

$$\det \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & E_2^{(1)} \\ E_1^{(2)} & E_2^{(2)} \end{pmatrix} \neq 0 \textit{ si } E_1(z, w) = c_1 \textit{ et } E_2(z, w) = c_2. \tag{2.43}$$

En suite chaque point critique de I *avec les conditions* $E_1(z, w) = c_1$ *et* $E_2(z, w) = c_2$ *est un point critique de* I.

Preuve. Soit (z, w) un point critique conditionnel de I. D'après le **Lemme** $(\mathbf{1.1})$ il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$I'(z, w) = m_1 E_1'(z, w) + m_2 E_2'(z, w). \tag{2.44}$$

Par le **Lemme** $(\mathbf{2.2})$ on a $I'(z, w)(z, w) = 0$, par $(\mathbf{2.44})$ on obtient :

$$m_1 E_1^{(1)} + m_2 E_2^{(1)} = 0,$$

$$m_1 E_1^{(2)} + m_2 E_2^{(2)} = 0.$$

Maintenant par $(\mathbf{2.43})$ nous avons :

$$\det \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & E_2^{(1)} \\ E_1^{(2)} & E_2^{(2)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Donc $m_1 = m_2 = 0$. Ainsi $I'(z, w) = 0$, c'est-à-dire, (z, w) est un point critique de I.
Les deux derniers **lemmes** sont fondamentaux dans ce qui suit.
Notre premier objectif est de prouver l'existence d'un point critique de I avec des conditions appropriées $E_1(z, w) = c_1$ et $E_2(z, w) = c_2$.
Ce sera à son tour un point critique réel de I et donc un point critique de J est une solution faible de $(\mathbf{2.1})$. ■

2.3 Résultats d'existence et multiplicité de solutions

Nous avons déjà souligné que les résultats d'existence et la multiplicité sont en relation avec les premières valeurs propres λ_1 et μ_1 des p et q-laplaciens respectivement.
Nous distinguons les six cas suivants :

(1) $0 \leqslant \lambda < \lambda_1, 0 \leqslant \mu < \mu_1$,

(2) $0 \leqslant \lambda < \lambda_1, \mu = \mu_1$,

(3) $0 \leqslant \lambda < \lambda_1, \mu > \mu_1$,

(4) $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$,

(5) $\lambda = \lambda_1, \mu > \mu_1,$

(6) $\lambda > \lambda_1, \mu > \mu_1.$

Les trois autres cas possible peuvent être traités de manière analogue. Nous ne présenterons pas les détails des cas $(2), (3)$ et (5) soulignant simplement que les méthodes des sous-sections suivantes s'appliquent à ces cas.

2.3.1 Existence de deux solutions distinctes pour $\lambda \in [0, \lambda_1), \mu \in [0, \mu_1)$

On considère

$$E_1(z) = 1 \text{ et } E_2(w) = 1. \tag{2.45}$$

Comme les contraintes dans le **Lemme** $(\mathbf{2}.4)$. En effet, nous calculons

$$E_1^{(1)} = pE_1(z) = pA,$$

$$E_1^{(2)} = E_2^{(1)} = 0,$$

$$E_2^{(2)} = qE_2(w) = qB.$$

Par conséquent

$$\det \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & E_2^{(1)} \\ E_1^{(2)} & E_2^{(2)} \end{pmatrix} = pqAB > 0,$$

et les conditions de **Lemme** $(\mathbf{2}.4)$ sont remplies. De plus, puisque nous supposons $(\mathbf{2}.45)$, les inégalités $(\mathbf{2}.35)$ réalisé, c'est-à-dire, $1 = E_1 = A > 0, 1 = E_2 = B > 0$ et

$$C = \int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx > 0.$$

De plus, le fonctionnel I devient

$$I(z, w) = K \left(\int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx \right)^{-pq/d}. \tag{2.46}$$

Le principal résultat de cette sous-section est le suivant.

Théorème 2.1 *Supposons que les conditions* $(\mathbf{2}.7)-(\mathbf{2}.18)$ *sont satisfaites, tel que,* $\lambda \in [0, \lambda_1), \mu \in [0, \mu_1)$. *Alors le problème* $(\mathbf{2}.1), (\mathbf{2}.2)$ *admet au moins deux solutions faibles positives* $(u_i, v_i) \in Y$, $i = 1, 2.$

La preuve de ce théorème sera une conséquence des deux propositions suivantes.

Proposition 2.1 *Supposons que les conditions* $(\mathbf{2.7})-(\mathbf{2.18})$ *sont satisfaites, tel que,* $\lambda \in [0, \lambda_1)$, $\mu \in [0, \mu_1)$. *Alors le problème* $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$ *admet au moins une solution faible positive* $(u_1, v_1) \in Y$.

Preuve. Les formules $(\mathbf{2.41})$ et $(\mathbf{2.42})$ suggèrent de considérer un problème auxiliaire : trouver un maximiseur (z^*, w^*) de

$$0 < M_{\lambda,\mu} = \sup \left\{ \int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx > 0 : E_1(z) = 1 \text{ et } E_2(w) = 1 \right\}. \tag{2.47}$$

On dit que le problème $(\mathbf{2.47})$ admet a une solution.

En effet, les ensembles

$$X_\lambda = \{z \in Y_p : E_1(z) = 1\},$$

et

$$X_\mu = \{w \in Y_q : E_2(w) = 1\},$$

ne sont pas vides. D'après **Lemme** $(\mathbf{2.1})$, on a pour tout $z \in X_\lambda$:

$$\|z\|_p^p = \lambda \int_\Omega a(x) |z|^p dx + 1 \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_1} \|z\|_p^p + 1,$$

d'où,

$$\|z\|_p^p \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda},$$

et de façon analogue

$$\|w\|_q^q \leqslant \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu}.$$

Puisque $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$ et $0 \leqslant \mu < \mu_1$, on a :

$$\|(z, w)\| = \|z\|_p^p + \|w\|_q^q \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu}.$$

Par conséquent, on peut supposer qu'une suite maximisante (z_n, w_n) pour $(\mathbf{2.47})$ est borné en Y. On peut donc supposer que (z_n, w_n) converge faiblement en Y vers certains (z^*, w^*) . Par $(\mathbf{2.17})$

$$\int_\Omega c(x) |z_n|^{\alpha+1} |w_n|^{\beta+1} dx \to \int_\Omega c(x) |z^*|^{\alpha+1} |w^*|^{\beta+1} dx = M_{\lambda,\mu} > 0.$$

En particulier $z^*(x) \neq 0, w^*(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$.
Le semi-continuité faiblement inférieure des normes correspondantes, $(\mathbf{2.7}), (\mathbf{2.8})$ et $E_1(z_n) = 1, E_2(w_n) = 1$ implique que :

$$E_1(z^*) \leqslant 1, E_2(w^*) \leqslant 1.$$

En effet

$$\|z^*\|_p^p \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|z_n\|_p^p\,,$$
$$\|w^*\|_q^q \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|w_n\|_q^q\,,$$
$$\int_\Omega a(x)\,|z^*|^p\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)\,|z_n|^p\,dx,$$
$$\int_\Omega b(x)\,|w^*|^q\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b(x)\,|w_n|^q\,dx.$$

Si $E_1(z^*) < 1$, alors il existe un nombre $t_1 > 1$ tel que $E_1(t_1 z^*) = 1$ et donc $t_1 z^* \in X_\lambda$.
Si $E_2(w^*) < 1$, alors il existe un nombre $t_2 > 1$ tel que $E_2(t_2 w^*) = 1$ et donc $t_2 w^* \in X_\mu$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_\Omega c(x)\,|t_1 z^*|^{\alpha+1}\,|t_2 w^*|^{\beta+1}\,dx &= t_1^{\alpha+1}t_2^{\beta+1}\int_\Omega c(x)\,|z^*|^{\alpha+1}\,|w^*|^{\beta+1}\,dx \\ &= t_1^{\alpha+1}t_2^{\beta+1}M_{\lambda,\mu} \\ &> M_{\lambda,\mu} = \sup\left\{\int_\Omega c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx > 0\right\},\end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi $E_1(z^*) = 1$ ou $E_2(w^*) = 1$. Si $E_1(z^*) = 1, E_2(w^*) < 1$ ou $E_1(z^*) < 1, E_2(w^*) = 1$ nous pouvons obtenir une autre contradiction.
D'où $(z^*, w^*) \in X_\lambda \times X_\mu$ est une solution de $(\mathbf{2.47})$. Par le **Lemme** $(\mathbf{2.4})$, il s'ensuit que (z^*, w^*) est un point critique de I. Par la **Remarque** $(\mathbf{2.1})$ nous pouvons supposer $z^* \geqslant 0$ et $w^* \geqslant 0$.
Et d'autre part, le **Lemme** $(\mathbf{2.3})$, $(u_1 = r_1 z^*, v_1 = \rho_1 w^*)$ est un point critique de J. Donc $(u, v) \in Y$ est une solution faible non négative de $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$. ■

Proposition 2.2 *Supposons que* $(\mathbf{2.7})-(\mathbf{2.18})$ *sont satisfaites, tel que,* $\lambda \in [0, \lambda_1), \mu \in [0, \mu_1)$. *Alors le problème* $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$ *admet une autre solution faible positive* $(u_2, v_2) \in Y$.

Preuve. On considère :

$$0 < \hat{M}_{\lambda,\mu} = \sup\left\{\int_\Omega c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx > 0 : E_1(z) + E_2(w) = 1\right\}. \tag{2.48}$$

Ensuite, l'ensemble de solution est :

$$X_{\lambda,\mu} = \{(z, w) \in Y : E_1(z) + E_2(w) = 1\}\,,$$

n'est pas vide. Par $E_1(z) + E_2(w) = 1$ et le **Lemme** $(\mathbf{2.1})$, pour tout $(z, w) \in X_{\lambda,\mu}$, on a :

$$\|z\|_p^p + \|w\|_q^q \leqslant 1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\|z\|_p^p + \frac{\mu}{\mu_1}\|w\|_q^q\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\|z\|_p^p+\frac{\mu_1-\mu}{\mu_1}\|w\|_q^q\leqslant 1.$$

Comme chacun des sommes ci-dessus est strictement pousitif (rappelons que $\lambda<\lambda_1,\mu<\mu_1$), cette dernière inégalité implique

$$\|z\|_p^p\leqslant\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda},$$

et

$$\|w\|_q^q\leqslant\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu}.$$

Alors $\|(z,w)\|$ est borné.
Par conséquent, on peut supposer qu'une suite maximisante (z_n,w_n) pour $(\mathbf{2.48})$ est borné en $Y.$ on peut donc supposer que (z_n,w_n) converge faiblement en Y vers certains (z^*,w^*) . En $(\mathbf{2.17})$, il en résulte que :

$$\int\limits_\Omega c(x)\,|z_n|^{\alpha+1}\,|w_n|^{\beta+1}\,dx\to\int\limits_\Omega c(x)\,|z^*|^{\alpha+1}\,|w^*|^{\beta+1}\,dx=\hat{M}_{\lambda,\mu}>0.$$

En particulier $z^*(x)\neq 0$ et $w^*(x)\neq 0,\forall x\in\Omega.$
Le semi-continuité faiblement inférieure des normes correspondantes, $(\mathbf{2.7}),(\mathbf{2.8})$ et $E_1(z_n)+E_2(w_n)=1$ impliquent que :

$$E_1(z^*)+E_2(w^*)\leqslant 1,$$

c'est-à-dire,

$$\left(\|z^*\|_p^p-\lambda\int\limits_\Omega a(x)\,|z^*|^p\,dx\right)+\left(\|w^*\|_q^q-\mu\int\limits_\Omega b(x)\,|w^*|^q\,dx\right)\leqslant 1.$$

Depuis $\lambda<\lambda_1,\mu<\mu_1$. Les deux termes ci-dessus sont positifs. D'où

$$0<E_1(z^*)+E_2(w^*)\leqslant 1.$$

Nous affirmons que fait :

$$E_1(z^*)+E_2(w^*)=1.$$

En effet, si $E_1(z^*)+E_2(w^*)<1$ alors il existe $t>1$ tel que :

$$t(E_1(z^*)+E_2(w^*))=1.$$

Alors $\left(t^{1/p}z^*, t^{1/q}w^*\right) \in X_{\lambda,\mu}$ et

$$\begin{aligned}\int_\Omega c(x)\left|t^{1/p}z^*\right|^{\alpha+1}\left|t^{1/q}w^*\right|^{\beta+1}dx &= t^{\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}}\int_\Omega c(x)\left|z^*\right|^{\alpha+1}\left|w^*\right|^{\beta+1}dx \\ &= t^{\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}}\hat{M}_{\lambda,\mu} \\ &> \hat{M}_{\lambda,\mu}=\sup\left\{\int_\Omega c(x)\left|z\right|^{\alpha+1}\left|w\right|^{\beta+1}dx > 0 : E_1(z)+E_2(w)=1\right\},\end{aligned}$$

une contradiction. Nous avons donc prouvé cette affirmation. D'où $(z^*, w^*) \in X_{\lambda,\mu}$ est une solution de $(\mathbf{2.48})$. Par un analogue du **Lemme** $(\mathbf{2.4})$ pour une contrainte de type $E(z,w) = const$, (z^*, w^*) est un point critique de I. En effet, puisque dans notre cas $E(z,w) = E_1(z) + E_2(w) = 1$ la condition $E'(z,w)(z,w) \neq 0$ si $E(z,w) = 1$ est facilement vérifiable. Le reste de la preuve est le même que celui de la **proposition** $(\mathbf{2.1})$. ■

Preuve du théorème 2.1. Il reste à montrer que les solutions trouvées dans les **propositions** $(\mathbf{2.1})$ et $(\mathbf{2.2})$ sont distinctes. La preuve est par contradiction. Supposons que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Par les preuves des **propositions** $(\mathbf{2.1})$ et $(\mathbf{2.2})$ il en résulte que :

$$\frac{E_1(u_1)}{r_1^p} = \frac{E_2(v_1)}{\rho_1^q} = 1,$$

et

$$\frac{E_1(u_2)}{r_2^p} + \frac{E_2(v_2)}{\rho_2^q} = 1,$$

où $r_i, \rho_i, i = 1, 2$ sont déterminés par $(\mathbf{2.31})$ et $(\mathbf{2.32})$, avec $z_i^*, w_i^*, i = 1, 2$. Ces relations impliquent que si les solutions ne sont pas distinctes alors il existe un nombre $m > 1$ tel que :

$$r_1^p = \frac{r_2^p}{m}, \rho_1^q = \frac{\rho_2^q}{m'}, \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1.$$

D'après $(\mathbf{2.31})$ et $(\mathbf{2.32})$ on a :

$$r_1 = (c_1C^{-q})^{1/d}, \rho_1 = (c_2C^{-p})^{1/d},$$

$$r_2 = \left(c_1C^{-q}\frac{(1-s)^{\beta+1}}{s^{\beta+1-q}}\right)^{1/d}, \rho_2 = \left(c_2C^{-p}\frac{s^{\alpha+1}}{(1-s)^{\alpha+1-p}}\right)^{1/d},$$

où nous avons introduit le paramètre $s = E_1(z_2^*)$. Nous notons que les valeurs exactes de c_1 et c_2 ne sont pas importantes pour la preuve. Depuis $s \in (0,1)$, il est facile de montrer que les conditions $m > 1$ et $m' > 1$ sont équivalentes à :

$$s^{\beta+1-q} < (1-s)^{\beta+1},$$

et

$$s^{\alpha+1} > (1-s)^{\alpha+1-p}.$$

D'après les deux dernières inégalités, nous avons :

$$s^d > 1,$$

où $d > 0$ est donné par (**2**.**10**). C'est impossible pour $s \in (0,1)$. Nous avons ainsi atteint une contradiction. Ceci conclut la preuve. ■

2.3.2 Existence d'une solution pour $\lambda = \lambda_1$ et $\mu = \mu_1$

Nous considérons le problème (**2**.**48**) avec $\lambda = \lambda_1$ et $\mu = \mu_1$. Dans ce cas l'ensemble correspondant $X_{\lambda,\mu}$ n'est pas borné dans Y. Par conséquent, nous devons imposer une condition supplémentaire à nous données. Désormais nous supposons que la condition (**2**.**19**) est remplie.

Théorème 2.2 *Supposons que* (**2**.**7**) $-$ (**2**.**19**) *sont satisfaites, tel que,* $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$. *Alors le problème* (**2**.**1**), (**2**.**2**) *admet au moins une solution faible positive* $(u,v) \in Y$.

Preuve. Les arguments de la preuve de ce théorème seraient les mêmes que ceux de la **proposition** (**2**.**2**) si l'on peut prouver que ce problème (**2**.**48**) avec $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ admet une solution. Soit (z_n, w_n) être une suite de maximisation telle que :

$$E_1(z_n) + E_2(w_n) = 1, \int\limits_\Omega c(x)\,|z_n|^{\alpha+1}\,|w_n|^{\beta+1}\,dx = \hat{m}_n \to \hat{M}_{\lambda_1,\mu_1} > 0.$$

Supposons que $\|(z_n, w_n)\| \to \infty$ et notons

$$s_n = \frac{z_n}{\|(z_n,w_n)\|^{1/p}}, t_n = \frac{w_n}{\|(z_n,w_n)\|^{1/q}}, \|(s_n,t_n)\| = 1.$$

Alors

$$\|(z_n,w_n)\|\left[\left(\|s_n\|_p^p - \lambda_1 \int\limits_\Omega a(x)\,|s_n|^p\,dx\right) + \left(\|t_n\|_q^q - \mu_1 \int\limits_\Omega b(x)\,|t_n|^q\,dx\right)\right] = 1.$$

Donc

$$\|s_n\|_p^p - \lambda_1 \int\limits_\Omega a(x)\,|s_n|^p\,dx + \|t_n\|_q^q - \mu_1 \int\limits_\Omega b(x)\,|t_n|^q\,dx = \frac{1}{\|(z_n,w_n)\|} \to 0, n \to \infty.$$

Par conséquent

$$\|(s_n,t_n)\| - \lambda_1 \int\limits_\Omega a(x)\,|s_n|^p\,dx - \mu_1 \int\limits_\Omega b(x)\,|t_n|^q\,dx = \frac{1}{\|(z_n,w_n)\|} \to 0, \tag{2.49}$$

et ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lambda_1 \int_\Omega a(x)\,|s_n|^p\,dx + \mu_1 \int_\Omega b(x)\,|t_n|^q\,dx\right] = 1,$$

depuis $\|(s_n, t_n)\| = 1$. On peut supposer que (s_n, t_n) converge faiblement en Y vers certains (s^*, t^*). Ainsi

$$\lambda_1 \int_\Omega a(x)\,|s^*|^p\,dx + \mu_1 \int_\Omega b(x)\,|t^*|^q\,dx = 1,$$

ce qui implique que $(s^*(x), t^*(x)) \neq (0,0) \forall x \in \Omega$. En outre,

$$\|(s^*, t^*)\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|(s_n, t_n)\| = 1.$$

Maintenant de (**2**.**49**) on déduit que :

$$\left(\|s^*\|_p^p - \lambda_1 \int_\Omega a(x)\,|s^*|^p\,dx\right) + \left(\|t^*\|_q^q - \mu_1 \int_\Omega b(x)\,|t^*|^q\,dx\right) = 0.$$

Les propriétés variationnelles de la première valeur propre des p et q-laplaciens impliquent que les deux termes dans la relation ci-dessus est strictement positifs. Par conséquent, les deux sont nuls, ce qui signifie, par le **Lemme** (**2**.**1**), que

$$s^* = c_1\varphi, t^* = c_2\psi.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_\Omega c(x)\,|z_n|^{\alpha+1}\,|w_n|^{\beta+1}\,dx &= \|(z_n, w_n)\|^{\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}} \int_\Omega c(x)\,|s_n|^{\alpha+1}\,|t_n|^{\beta+1}\,dx \\ &= \hat{m}_n \to \hat{M}_{\lambda_1,\mu_1} > 0,\end{aligned}$$

nous concluons que :

$$\int_\Omega c(x)\,|s^*|^{\alpha+1}\,|t^*|^{\beta+1}\,dx \geqslant 0,$$

et donc

$$\int_\Omega c(x)\,|\varphi|^{\alpha+1}\,|\psi|^{\beta+1}\,dx \geqslant 0,$$

ce qui contredit (**2**.**19**). On peut donc prendre (z_n, w_n) est borné et

$$\lim_{n\to\infty} (z_n, w_n) = (z^*, w^*),$$

faiblement en Y. Alors

$$\int_\Omega c(x)\,|z_n|^{\alpha+1}\,|w_n|^{\beta+1}\,dx \to \int_\Omega c(x)\,|z^*|^{\alpha+1}\,|w^*|^{\beta+1}\,dx = M_{\lambda_1,\mu_1} > 0.$$

Cela signifie que $z^*(x) \neq 0$ et $w^*(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$. En outre,

$$0 \leqslant E_1(z^*) + E_2(w^*) \leqslant 1.$$

Il claire que

$$0 < E_1(z^*) + E_2(w^*) \leqslant 1.$$

En effet, supposons que

$$E_1(z^*) + E_2(w^*) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left(\|z^*\|_p^p - \lambda_1 \int_\Omega a(x) |z^*|^p \, dx \right) + \left(\|w^*\|_q^q - \mu_1 \int_\Omega b(x) |w^*|^q \, dx \right) = 0.$$

Par conséquent, par **Lemme** $(\mathbf{2}.\mathbf{1})$, nous savons que :

$$z^* = k_1 \varphi, w^* = k_2 \psi,$$

pour certains $k_1, k_2 \neq 0$, et cela

$$\int_\Omega c(x) |z^*|^{\alpha+1} |w^*|^{\beta+1} \, dx = |k_1|^{\alpha+1} |k_2|^{\beta+1} \int_\Omega c(x) |\varphi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} \, dx = \hat{M}_{\lambda_1,\mu_1} > 0,$$

ce qui est une contradiction puisque $(\mathbf{2}.\mathbf{19})$ est vrai. Ensuite, supposons que

$$0 < E_1(z^*) + E_2(w^*) < 1.$$

On peut alors trouver $t > 1$ tel que :

$$t(E_1(z^*) + E_2(w^*)) = 1.$$

Plus

$$\begin{aligned}
\int_\Omega c(x) \left| t^{\frac{1}{p}} z^* \right|^{\alpha+1} \left| t^{\frac{1}{q}} w^* \right|^{\beta+1} dx &= t^{\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q}} \int_\Omega c(x) |z^*|^{\alpha+1} |w^*|^{\beta+1} \, dx \\
&= t^{\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q}} \hat{M}_{\lambda_1,\mu_1} \\
&> \hat{M}_{\lambda_1 \mu_1} \\
&= \sup \left\{ \int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} \, dx > 0 : E_1(z) + E_2(w) = 1 \right\},
\end{aligned}$$

une autre contradiction. De cette façon, nous avons prouvé que :

$$E_1(z^*) + E_2(w^*) = 1,$$

et donc (z^*, w^*) est un maximiseur de problème $(\mathbf{2}.\mathbf{48})$ avec $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$. Le reste de la preuve est la même que celle de la **proposition** $(\mathbf{2}.\mathbf{1})$. Ceci complète la preuve. ■

2.3.3 Existence de trois solutions distinctes pour $\lambda > \lambda_1$ et $\mu > \mu_1$

Théorème 2.3 *Supposons que* $(\mathbf{2.7}) - (\mathbf{2.19})$ *sont satisfaites, tel que,* $\lambda > \lambda_1$ *et* $\mu > \mu_1$. *Alors il existe* $\delta > 0$ *et* $\sigma > 0$, *tels que pour tout* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta), \mu \in (\mu_1, \mu_1 + \sigma)$, *le problème* $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$ *admet au moins trois solutions faibles positives dans* Y.

La preuve du théorème sera une conséquence de plusieurs **lemmes.** Pour commencer, nous définissons

$$M_{\lambda,\mu} = \sup \left\{ \int_{\Omega} c(x) \left|z\right|^{\alpha+1} \left|w\right|^{\beta+1} dx > 0 : E_1(z) = 1 \text{ et } E_2(w) = 1 \right\}, \tag{2.50}$$

et

$$\tilde{M}_{\lambda,\mu} = \sup \left\{ \int_{\Omega} c(x) \left|z\right|^{\alpha+1} \left|w\right|^{\beta+1} dx > 0 : E_1(z) \leqslant 1 \text{ et } E_2(w) \leqslant 1 \right\}. \tag{2.51}$$

Lemme 2.5 *Les problèmes* $(\mathbf{2.50})$ *et* $(\mathbf{2.51})$ *sont équivalents.*

Preuve. Depuis $c^+(x) \neq 0 \; \forall x \in \Omega$ **(voir** $(\mathbf{2.18})$**)**, tout maximiseur de $(\mathbf{2.50})$ est un maximiseur de $(\mathbf{2.51})$. Supposons un instant que $(z^*, w^*) \in Y$ est un maximiseur de $(\mathbf{2.51})$ et $E_1(z^*) < 1$ ou $E_2(w^*) < 1$. Par exemple, soit $E_1(z^*) < 1$. Par conséquent, il existe $k > 1$ tel que $E_1(kz^*) = 1$. Alors

$$\int_{\Omega} c(x) \left|kz^*\right|^{\alpha+1} \left|w^*\right|^{\beta+1} dx = k^{\alpha+1} \int_{\Omega} c(x) \left|z^*\right|^{\alpha+1} \left|w^*\right|^{\beta+1} dx = k^{\alpha+1} \tilde{M}_{\lambda,\mu} > \tilde{M}_{\lambda,\mu}, \tag{2.52}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi $E_1(z^*) = E_2(w^*) = 1$. Par conséquent tout maximiseur de $(\mathbf{2.51})$ est un maximiseur de $(\mathbf{2.50})$. ■

Lemme 2.6 *Soit* $(\mathbf{2.7}) - (\mathbf{2.19})$ *sont satisfaites. Alors il existe* $\delta_1 > 0$ *et* $\varepsilon_1 > 0$, *tel que pour tout* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1)$ *et* $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \varepsilon_1)$, *le problème* $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$ *admet une solution non triviale* $(z_1, w_1) \in Y$.

Preuve. Du **Lemme** $(\mathbf{2.5})$ nous déduirons l'existence de $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ correspondant au problème (2.51). Supposons que l'hypothése n'est pas vraie, c'est-à-dire, qu'il existe des suites $\delta_s \to 0, \delta_s > 0$, et $\varepsilon_s \to 0, \varepsilon_s > 0$, tel que le problème $(\mathbf{2.51})$ avec $\lambda = \lambda_s = \lambda_1 + \delta_s$ et $\mu = \mu_s = \mu_1 + \varepsilon_s$ n'a pas de solution. Fixons un entier s et considérons $(\mathbf{2.51})$ avec λ_s et μ_s. Dénotant par (z_n^s, w_n^s) la suite de maximisation correspondant, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} c(x) \left|z_n^s\right|^{\alpha+1} \left|w_n^s\right|^{\beta+1} dx = \tilde{M}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

$$E_1(z_n^s) \leqslant 1,$$

et

$$E_2(w_n^s) \leqslant 1.$$

Si (z_n^s, w_n^s) est borné, on peut supposer qu'il converge faiblement en Y vers certains (z_0^s, w_0^s), quand $n \to \infty$. Alors

$$\int_\Omega c(x)\,|z_n^s|^{\alpha+1}\,|w_n^s|^{\beta+1}\,dx \to \int_\Omega c(x)\,|z_0^s|^{\alpha+1}\,|w_0^s|^{\beta+1}\,dx = \tilde{M}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

$$\int_\Omega |\nabla z_0^s|^p\,dx - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|z_0^s|^p\,dx \leqslant 1.$$

$$\int_\Omega |\nabla w_0^s|^q\,dx - \mu_s \int_\Omega b(x)\,|w_0^s|^q\,dx \leqslant 1.$$

Donc (z_0^s, w_0^s) est une solution de $(\mathbf{2.51})$, une contradiction. On peut donc prendre (z_n^s, w_n^s) n'est pas bornes. Soit

$$(h_n^s, t_n^s) = \frac{(z_n^s, w_n^s)}{\|(z_n^s, w_n^s)\|}.$$

Depuis $\|(h_n^s, t_n^s)\| = 1$ nous pouvons supposer que

$$\lim_{n\to\infty} (h_n^s, t_n^s) = (h_0^s, t_0^s),$$

faiblement en Y. Alors

$$\int_\Omega c(x)\,|z_n^s|^{\alpha+1}\,|w_n^s|^{\beta+1}\,dx = \|(z_n^s, w_n^s)\|^{\alpha+\beta+2} \int_\Omega c(x)\,|h_n^s|^{\alpha+1}\,|t_n^s|^{\beta+1}\,dx \to \tilde{M}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

donc

$$\int_\Omega c(x)\,|h_0^s|^{\alpha+1}\,|t_0^s|^{\beta+1}\,dx \geqslant 0. \tag{2.53}$$

De l'inégalité $E_1(z_n^s) \leqslant 1$, c'est-à-dire,

$$\|(z_n^s, w_n^s)\|^p \left(\|h_n^s\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_n^s|^p\,dx \right) \leqslant 1,$$

il en résulte que :

$$\|h_n^s\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_n^s|^p\,dx \leqslant \frac{1}{\|(z_n^s, w_n^s)\|^p}.$$

Quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\|h_0^s\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_0^s|^p\,dx \leqslant 0. \tag{2.54}$$

D'autre part,

$$\lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_n^s|^p\,dx \geqslant \|h_n^s\|_p^p - \frac{1}{\|(z_n^s,w_n^s)\|^p},$$

et

$$\mu_s \int_\Omega b(x)\,|t_n^s|^q\,dx \geqslant \|t_n^s\|_q^q - \frac{1}{\|(z_n^s,w_n^s)\|^q},$$

et quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_0^s|^p\,dx + \mu_s \int_\Omega b(x)\,|t_0^s|^q\,dx \geqslant 1. \tag{2.55}$$

Il est clair que $\|(h_0^s,t_0^s)\| \leqslant 1$. Cela nous permet de supposer que (h_0^s,t_0^s) converge faiblement en Y vers certains (h_0,t_0) . Quand $s \to \infty$ dans (**2.55**), on obtient que :

$$\lambda_1 \int_\Omega a(x)\,|h_0|^p\,dx + \mu_1 \int_\Omega b(x)\,|t_0|^q\,dx \geqslant 1.$$

Par conséquent, $(h_0(x),t_0(x)) \neq (0,0)$ $\forall x \in \Omega$. Ensuite, à partir de l'inégalité (**2.54**) on obtient :

$$0 \leqslant \|h_0\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|h_0|^p\,dx \leqslant 0.$$

Ce dernier et le **Lemme** (**2.1**) impliquent que $h_0 = l\varphi, l \neq 0$. En commençant par $E_2\left(w_n^s\right) \leqslant 1$ nous pouvons obtenir $t_0 = k\psi, k \neq 0$, d'une manière similaire. Ensuite, par (2.53), nous obtenons que :

$$\int_\Omega c(x)\,|h_0|^{\alpha+1}\,|t_0|^{\beta+1}\,dx \geqslant 0,$$

et ainsi

$$|l|^{\alpha+1}\,|k|^{\beta+1} \int_\Omega c(x)\,|\varphi|^{\alpha+1}\,|\psi|^{\beta+1}\,dx \geqslant 0.$$

Cela contredit notre hypothèse (**2.19**).

Donc il existe $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que pour tout $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta_1)$ et $\mu \in (\mu_1, \mu_1+\varepsilon_1)$ le problème (**2.51**) admet une solution $(z_1,w_1) \in Y$. Par le **Lemme** (**2.5**), $(z_1,w_1) \in Y$ est une solution de (**2.50**). ■

Lemme 2.7 *L'ensemble*

$$W^- = \left\{(z,w) \in Y : \int_\Omega c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx = -1\right\},$$

n'est pas vide et $m_{\lambda,\mu} < 0, \lambda > \lambda_1, \mu > \mu_1$, *où*

$$m_{\lambda,\mu} = \inf \left\{ E_1(z) + E_2(w) : \int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx = -1 \right\}. \tag{2.56}$$

Preuve. Soit $z = \varphi$ et $w = \psi$. Puis par $(\mathbf{2}.\mathbf{19})$ nous avons :

$$\int_\Omega c(x) |z|^{\alpha+1} |w|^{\beta+1} dx = \int_\Omega c(x) |\varphi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} dx < 0.$$

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_\Omega c(x) |k\varphi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} dx = -1.$$

Puisque, $\lambda > \lambda_1$ et $\mu > \mu_1$, on a :

$$E_1(k\varphi) = |k|^p (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega a(x) |\varphi|^p dx < 0,$$

et

$$E_2(l\psi) = |l|^q (\mu_1 - \mu) \int_\Omega b(x) |\psi|^q dx < 0.$$

Ces inégalités impliquent que $m_{\lambda,\mu} < 0$. ■

Lemme 2.8 *Supposons que* $(\mathbf{2}.\mathbf{7}) - (\mathbf{2}.\mathbf{19})$ *sont satisfaites. Alors il existe* $\delta_2 > 0$ *et* $\varepsilon_2 > 0$*, tel que pour tout* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_2)$ *et* $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \varepsilon_2)$ *, le problème* $(\mathbf{2}.\mathbf{1}), (\mathbf{2}.\mathbf{2})$ *admet une solution non triviale* $(z_2, w_2) \in Y$ *satisfaisant* $E_1(z_2) + E_2(w_2) < 0$.

Preuve. *La preuve est par contradiction et elle est analogue à celle du* ***Lemme*** $(\mathbf{2}.\mathbf{6})$**.**
Supposons que l'hypothése n'est pas vraie. Alors il existe des suites $\delta_s \to 0, \delta_s > 0$*, et* $\varepsilon_s \to 0, \varepsilon_s > 0$*, tel que problème* $(\mathbf{2}.\mathbf{56})$ *avec* $\lambda = \lambda_s = \lambda_1 + \delta_s$ *et* $\mu = \mu_s = \mu_1 + \varepsilon_s$ *est n'a pas de solution. Fixons un entier* s *et considérons* $(\mathbf{2}.\mathbf{56})$ *avec* λ_s *et* μ_s.
Notons (z_n^s, w_n^s) *la suite de maximisation correspondant :*

$$\int_\Omega c(x) |z_n^s|^{\alpha+1} |w_n^s|^{\beta+1} dx = -1,$$

$$\int_\Omega |\nabla z_n^s|^p dx - \lambda_s \int_\Omega a(x) |z_n^s|^p dx + \int_\Omega |\nabla w_n^s|^q dx - \mu_s \int_\Omega b(x) |w_n^s|^q dx \to m_{\lambda_s,\mu_s} < 0.$$

Si (z_n^s, w_n^s) *est borné, on peut obtenir comme avant cela, il existe une solution* (z_0^s, w_0^s) *de* $(\mathbf{2}.\mathbf{56})$ *:*

$$\int_\Omega c(x) |z_0^s|^{\alpha+1} |w_0^s|^{\beta+1} dx = -1,$$

et

$$\int_\Omega |\nabla z_0^s|^p\,dx - \lambda_s \int_\Omega a(x)\,|z_0^s|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla w_0^s|^q\,dx - \mu_s \int_\Omega b(x)\,|w_0^s|^q\,dx = m_{\lambda_s,\mu_s} < 0,$$

ce qui est une contradiction. On peut donc prendre (z_n^s, w_n^s) *n'est pas bornes. Avec la même notation que dans le* ***Lemme*** $(\mathbf{2.6})$, *il s'ensuit que :*

$$\int_\Omega c(x)\,|h_n^s|^{\alpha+1}\,|t_n^s|^{\beta+1}\,dx = -\frac{1}{\|(z_n^s, w_n^s)\|^{\alpha+\beta+2}} \to 0.$$

Puisque la fonction f_3 *(**voir*** $(\mathbf{2.17})$*) est faiblement inférieure continue on obtient :*

$$\int_\Omega c(x)\,|h_0^s|^{\alpha+1}\,|t_0^s|^{\beta+1}\,dx = 0. \tag{2.57}$$

De manière analogue aux preuves précédentes, $(\mathbf{2.57})$ *nous permet de conclure que*

$$\int_\Omega c(x)\,|\varphi|^{\alpha+1}\,|\psi|^{\beta+1}\,dx = 0.$$

Cela contradiction $(\mathbf{2.19})$.

Le fait que $E_1(z_2) + E_2(w_2) < 0$ *découle du* ***lemme*** $(\mathbf{2.7})$. *Ceci complète la preuve.* ■

Lemme 2.9 *Supposons que* $(\mathbf{2.7}) - (\mathbf{2.19})$ *sont satisfaites. Alors il existe* $\delta_3 > 0$ *et* $\varepsilon_3 > 0$, *tel que pour tout* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_3)$ *et* $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \varepsilon_3)$, *le problème* $(\mathbf{2.1}), (\mathbf{2.2})$ *admet une autre solution non triviale* $(z_3, w_3) \in Y$.

Preuve. L'ensemble

$$N_{\lambda,\mu} = \sup\left\{\int_\Omega c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx > 0 : E_1(z) + E_2(w) = 1\right\}, \tag{2.58}$$

et

$$\hat{N}_{\lambda,\mu} = \sup\left\{\int_\Omega c(x)\,|z|^{\alpha+1}\,|w|^{\beta+1}\,dx > 0 : E_1(z) + E_2(w) \leqslant 1\right\}. \tag{2.59}$$

Suivant l'argument du **Lemme** $(\mathbf{2.5})$, il est facile de prouver que les problèmes $(\mathbf{2.58})$ et $(\mathbf{2.59})$ sont équivalents (**voir** la fins de la preuve de la **proposition** $(\mathbf{2.2})$). Donc, on déduira l'existence de $\delta_3 > 0$ et $\varepsilon_3 > 0$ correspondant au problème $(\mathbf{2.59})$. Supposons que l'hypothése n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'il existe des suites $\delta_s \to 0, \delta_s > 0$, et $\varepsilon_s \to 0, \varepsilon_s > 0$, tel que le problème $(\mathbf{2.59})$ avec $\lambda = \lambda_s = \lambda_1 + \delta_s$ et $\mu = \mu_s = \mu_1 + \varepsilon_s$ n'a pas de solution. Fixons un entier s et considérons $(\mathbf{2.59})$ avec λ_s et μ_s. Dénotant par (z_n^s, w_n^s) la suite de maximisation correspondante, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega c(x)\,|z_n^s|^{\alpha+1}\,|w_n^s|^{\beta+1}\,dx = \hat{N}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

$$E_1(z_n^s) + E_2(w_n^s) \leqslant 1.$$

Si (z_n^s, w_n^s) est borné, on peut supposer qu'il converge faiblement en Y vers certains (z_0^s, w_0^s), quand $n \to \infty$. Alors

$$\int_\Omega c(x) \left|z_n^s\right|^{\alpha+1} \left|w_n^s\right|^{\beta+1} dx \to \int_\Omega c(x) \left|z_0^s\right|^{\alpha+1} \left|w_0^s\right|^{\beta+1} dx = \hat{N}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

$$E_1(z_0^s) + E_2(w_0^s) \leqslant 1.$$

Donc (z_0^s, w_0^s) est une solution de $(\mathbf{2}.\mathbf{59})$ une contradiction. On peut donc prendre (z_n^s, w_n^s) n'est pas bornes. Soit

$$h_n^s = \frac{z_n^s}{\left\|z_n^s, w_n^s\right\|^{1/p}}, t_n^s = \frac{w_n^s}{\left\|z_n^s, w_n^s\right\|^{1/q}}, \left\|h_n^s, t_n^s\right\| = 1.$$

On peut donc supposer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left(h_n^s, t_n^s\right) = \left(h_0^s, t_0^s\right),$$

faiblement en Y. Alors

$$\int_\Omega c(x) \left|z_n^s\right|^{\alpha+1} \left|w_n^s\right|^{\beta+1} dx = \left\|(z_n^s, w_n^s)\right\|^{\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}} \int_\Omega c(x) \left|h_n^s\right|^{\alpha+1} \left|t_n^s\right|^{\beta+1} dx \to \hat{N}_{\lambda_s,\mu_s} > 0,$$

donc

$$\int_\Omega c(x) \left|h_0^s\right|^{\alpha+1} \left|t_0^s\right|^{\beta+1} dx \geqslant 0. \tag{2.60}$$

De l'inégalité $E_1(z_n^s) + E_2(w_n^s) \leqslant 1$, c'est-à-dire,

$$\left\|(z_n^s, w_n^s)\right\| \left[\left(\left\|h_n^s\right\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x) \left|h_n^s\right|^p dx\right) + \left(\left\|t_n^s\right\|_q^q - \mu_s \int_\Omega b(x) \left|t_n^s\right|^q dx\right)\right] \leqslant 1,$$

il en résulte que :

$$\left\|h_n^s\right\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x) \left|h_n^s\right|^p dx + \left\|t_n^s\right\|_q^q - \mu_s \int_\Omega b(x) \left|t_n^s\right|^q dx \leqslant \frac{1}{\left\|(z_n^s, w_n^s)\right\|}. \tag{2.61}$$

Quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\left(\left\|h_0^s\right\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x) \left|h_0^s\right|^p dx\right) + \left(\left\|t_0^s\right\|_q^q - \mu_s \int_\Omega b(x) \left|t_0^s\right|^q dx\right) \leqslant 0. \tag{2.62}$$

D'autre part, nous pouvons obtenir de $(\mathbf{2}.\mathbf{61})$ cela

$$\lambda_s \int_\Omega a(x) \left|h_0^s\right|^p dx + \mu_s \int_\Omega b(x) \left|t_0^s\right|^q dx \geqslant 1. \tag{2.63}$$

Il est clair que $\|(h_0^s, t_0^s)\| \leqslant 1$. Cela nous permet de supposer que (h_0^s, t_0^s) converge faiblement en Y vers certains (h_0, t_0) . Quand $s \to \infty$ dans (**2**.**63**), il en résulte que :

$$\lambda_1 \int_\Omega a(x) |h_0|^p \, dx + \mu_1 \int_\Omega b(x) |t_0|^q \, dx \geqslant 1.$$

Par conséquent $(h_0(x), t_0(x)) \neq (0,0) \ \forall x \in \Omega$. Maintenant à partir de (**2**.**62**), quand $s \to \infty$, nous déduisons :

$$\left(\|h_0\|_p^p - \lambda_1 \int_\Omega a(x) |h_0|^p \, dx \right) + \left(\|t_0\|_q^q - \mu_1 \int_\Omega b(x) |t_0|^q \, dx \right) \leqslant 0.$$

Par la définition de λ_1 et μ_1 les deux termes ci-dessus est strictement pousitif. Donc,

$$\|h_0\|_p^p - \lambda_s \int_\Omega a(x) |h_0|^p \, dx = 0,$$

et

$$\|t_0\|_q^q - \mu_s \int_\Omega b(x) |t_0|^q \, dx = 0.$$

Les deux dernières égalités et le **Lemme** (**2**.**1**) impliquent que $h_0 = l\varphi, l \neq 0$ et $t_0 = k\psi, k \neq 0$.

Puis par (**2**.**60**), quand $s \to \infty$, nous obtenons cela

$$\int_\Omega c(x) |h_0|^{\alpha+1} |t_0|^{\beta+1} \, dx \geqslant 0,$$

et ainsi

$$|l|^{\alpha+1} |k|^{\beta+1} \int_\Omega c(x) |\varphi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} \, dx \geqslant 0,$$

une contradiction avec (**2**.19). Ceci complète la preuve. ■

Prouve du Théorème 2.3. Soit $\delta_1, \varepsilon_1, (z_1, w_1) \in Y, \delta_2, \varepsilon_2, (z_2, w_2) \in Y$ et $\delta_3, \varepsilon_3, (z_3, w_3) \in Y$ être comme dans les **Lemmes** (**2**.**6**), (**2**.**8**) et (**2**.**9**) respectivement. Notons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ et $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Maintenant, nous substituons $(z_i, w_i), i = 1, 2, 3,$ dans (**2**.**31**) et (**2**.**32**). De cette façon nous obtenons trois paires de nombres positifs : $(r_i, \rho_i), i = 1, 2, 3$. L'ensemble :

$$u_i = r_i z_i, v_i = \rho_i w_i, i = 1, 2, 3.$$

Par le **Lemme** (**2**.**3**), $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ et (u_3, v_3) sont des solutions faibles de (**2**.**1**) et (**2**.**2**). Par le **Lemme** (**2**.**6**) il s'ensuit que :

$$\frac{E_1(u_1)}{r_1^p} = E_1(z_1) = 1,$$

et

$$\frac{E_2(v_1)}{\rho_1^q} = E_2(w_1) = 1.$$

Donc

$$(u_1, v_1) \in S = \left\{ (u, v) : \frac{E_1(u)}{r^p} = 1 \text{ et } \frac{E_2(v)}{\rho^q} = 1 \right\}.$$

D'autre part, d'après le **Lemme** $(\mathbf{2.8})$ nous avons :

$$\frac{E_1(u_2)}{|r_2|^p} + \frac{E_2(v_2)}{|\rho_2|^q} = E_1(z_2) + E_2(w_2) < 0.$$

Par conséquence, au moins l'un de $E_1(u_2)$ et $E_2(v_2)$ est négatif. Donc (u_2, v_2) n'appartient pas à S. Nous concluons que (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont distincts. De même (u_2, v_2) et (u_3, v_3) sont distincts. Un argument analogue à celui de la preuve du **Théorème** $(\mathbf{2.1})$ montre que (u_1, v_1) et (u_3, v_3) sont aussi distincts. Le reste de la preuve est le même que celui du **Théorème** $(\mathbf{2.1})$. Ceci complète la preuve du **Théorème** $(\mathbf{2.3})$. ■

CHAPITRE 3

RÉSULTAT DE NON-EXISTENCE DE SOLUTIONS CLASSIQUES

Sommaire

Dans ce chapitre, nous établirons un résultat de non-existence de solutions classiques pour un système potentiel associé à (p, q) opérateurs q-laplaciens. Cependant, il est clair que « les solutions envisagées sont classiques» ne semble pas être une hypothèse naturelle pour ce type de problème. En effet, la classe naturelle à considérer devrait être la classe des solutions faibles.

3.1 Identité de Pohožaev

Le résultat suivant a été établi en 1965 par **S.I. Pohožaev** dans le cas où l'ouvert Ω est borné. Ce résultat a des conséquences importantes.

Proposition 3.1 ***(Identité de Pohožaev)(voir*** [**10**]). *Soient Ω un ouvert de classe C^1, g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont on désignera par G la primitive s'annulant en zéro et $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant l'équation*

$$-\Delta u = g(u).$$

Si de plus $G(u) \in L^1(\Omega)$ et $\upsilon(\sigma)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$, alors pour tout $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixé, u satisfait l'identité

$$\frac{N-2}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*)\upsilon(\sigma) d\sigma = N \int\limits_{\Omega} G(u(x)) dx. \tag{3.1}$$

En particulier si $\Omega = \mathbb{R}^N$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$ on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} |\partial_j u(x)|^2 \, dx &= \int\limits_{\Omega} |\partial_1 u(x)|^2 \, dx, \\ (N-2) \int\limits_{\Omega} |\partial_j u(x)|^2 \, dx &= 2 \int\limits_{\Omega} G(u(x)) dx. \end{aligned}$$

Preuve. Soit une fonction φ_0 de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ telle que $\varphi_0(t) = 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $\varphi_0(t) = 0$ pour $t \geqslant 2$. En posant, pour $j \geqslant 1$ entier,

$$\varphi_j(x) = \varphi_0 \left(\frac{|x|}{j} \right),$$

on vérifie facilement que $\left|\nabla \varphi_j(x)\right| \leqslant C$, où C est une constante indépendante de j et que :

$$|x| \left|\nabla \varphi_j\right| \leqslant \frac{|x|}{j} \left| \varphi_0' \left(\frac{|x|}{j} \right) \right| \leqslant C \left\| \varphi_0' \right\|_\infty .$$

On peut alors, pour un indice i fixé, multiplier les deux membres de l'équation $-\Delta u = g(u)$ par

$$(x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \varphi_j(x).$$

En intégrant par parties le terme de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx &= \int_\Omega (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i G(u(x))dx \\ &= -\int_\Omega \varphi_j(x)G(u(x))dx - \int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i\varphi_j(x)G(u(x))dx,\end{aligned}$$

et par un passage à la limite et après utilisation du théorème de convergence dominée et le fait que $\partial_i\varphi_j(x)$ tend vers zéro lorsque $j \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_\Omega G(u(x))dx. \tag{3.2}$$

D'autre part, après intégration par parties le terme de gauche de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \Delta u(x)\cdot((x_i - z_i^*)\partial_i u(x))\varphi_j(x)dx = \\ &-\int_{\partial\Omega}((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma))\varphi_j(\sigma)\nabla u(\sigma)\cdot\upsilon(\sigma)d\sigma \\ &+\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Or le dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx \\ =\ &\frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i\left[|\nabla u(x)|^2\right]dx + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2\varphi_j(x)dx \\ &+\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)dx.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Notons par E_{1j}, E_{2j} et E_{3j} respectivement les trois termes de droite dans (**3.3**), on a, lorsque $j \to \infty$

$$E_{3j} \to 0, \text{ et } E_{2j} \to \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx. \tag{3.4}$$

D'autre part, en intégrant par parties, E_{1j} s'écrit :

$$\begin{aligned}E_{1j} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\partial_i[(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)]dx \\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\varphi_j(\sigma)\upsilon_i(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

et donc lorsque $j \to \infty$, on a :

$$E_{1j} \to -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*)\upsilon_i(\sigma)d\sigma.$$

Finalement en reportant cette dernière limite ainsi que $(\mathbf{3}.\mathbf{4})$ dans la relation $(\mathbf{3}.\mathbf{3})$, on a grâce à $(\mathbf{3}.\mathbf{2})$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \, dx \\ & +\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*)\upsilon_i(\sigma)d\sigma \\ & -\int\limits_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\nabla u(\sigma)\upsilon(\sigma)d\sigma \\ = & -\int\limits_{\Omega} G(u(x))dx, \end{aligned} \tag{3.5}$$

ce qui, en faisant la somme sur i et sachant que lorsque $u = 0$ sur le bord alors le gradient $\nabla u(\sigma)$ est parallèlle à $\upsilon(\sigma)$, conduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*)\upsilon(\sigma)d\sigma \\ = \; & N\int\limits_{\Omega} G(u(x))dx. \end{aligned}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors $\partial\Omega = \varnothing$ de sorte que la relation $(\mathbf{3}.\mathbf{5})$ et le fait que

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx = N\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx,$$

impliquent $\|\partial_i u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\partial_1 u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$, cela termine la preuve de la proposition. ■

Remarque 3.1 *Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^N$, en multipliant l'équation $-\Delta u = g(u)$ par u on déduit :*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)g(u(x))dx,$$

*ce qui donne avec l'identité de **Pohožaev** :*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{N-2}{2N}u(x)g(u(x)) - G(u(x))\right) dx = 0. \tag{3.6}$$

Cela implique en particulier que la fonction

$$s \mapsto \frac{N-2}{2N} sg(s) - G(s),$$

doit prendre des valeurs positives et négatives, si elle n'est pas identiquement nulle. Par exemple si $g(s) = \lambda |s|^{p-1} s$ *avec* $p \geqslant 1$ *et* $\lambda \neq 0$ *on en déduit que, si* $N \geqslant 3$*, le seul exposant* p *pour lequel l'équation*

$$-\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u,$$

peut avoir une solution non nulle dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ *est* $p = \frac{N+2}{N-2}$*, alors que si* $N = 2$ *l'équation n'a aucune solution non nulle. Il est aussi intéressant de noter que cet argument appliqué à* $p = 1$ *permet de voir que le Laplacien n'a pas de fonction propre sur* $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 3.2 *Soient* Ω *un ouvert borné régulier, et* $g(s) = |s|^{p-1} s$*. L'identité de* ***Pohožaev*** *implique que si* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *vérifie*

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u,$$

comme on a aussi

$$\int_\Omega [-\Delta u(x)] u(x) dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx,$$

alors :

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \upsilon(\sigma) d\sigma = 0. \tag{3.7}$$

Supposons que l'ouvert Ω *est étoilé par rapport à un point* z^* *de* $\mathbb{R}^N$*, par exemple (pour simplifier)* $z^* = 0$*, plus précisément supposons que pour tout* $\sigma \in \partial\Omega$*, on a* $\sigma \cdot \upsilon(\sigma) > 0$*. On déduit de* (3.7) *que si*

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1} > 0,$$

alors $u \equiv 0$*. Si*

$$\frac{N-2}{2} = \frac{N}{p+1},$$

alors $\nabla u = 0$ *sur* $\partial\Omega$*, et si de plus* $u \geqslant 0$*, d'après la formule de Green en obtient :*

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \nabla u(\sigma) \cdot \upsilon(\sigma) d\sigma = \int_\Omega -\Delta u(x) dx = \int_\Omega u(x)^p dx,$$

ce qui implique que $u \equiv 0$*, c'est le résultat de* ***S. I. pohožaev*** *(en fait on peut montrer que même si on ne suppose pas que* $u \geqslant 0$*, alors* $u \equiv 0$*). Nous attirons l'attention sur le fait que le résultat de non-existence de solution non nulle est spécifique au cas où* $g(s) = |s|^{p-1} s, p = \frac{N+2}{N-2}$ *est l'exposant critique de Sobolev et* Ω *est étoilé.*

3.2 Résultat de non-existence pour le système(p,q)-Laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier. Considérons le système de potentiel quasi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) \text{ dans } \Omega, \\ \\ -\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{q-2}\nabla v\right) = \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Où $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Soit $(u,v) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^2$ être une solution classique de (3.8).
Alors i'dentité de **Pohožaev** $[\mathbf{15}]$ pour $(\mathbf{3.8})$ peut être écrit sous la forme :

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx + \left(\frac{N-q}{q}\right)\int_{\Omega}|\nabla v|^q\,dx - N\int_{\Omega}F(x,u,v)\,dx - \int_{\Omega}(x,\nabla F)\,dx \tag{3.9}$$
$$= -\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma - \left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^q(\sigma,\upsilon)\,d\sigma.$$

Preuve. Multipliant la première équation par $(x,\nabla u)$ est intégrant par partie sur Ω, on obtient :

$$-\int_{\Omega}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(x,\nabla u)\,dx = \int_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)(x,\nabla u)\,dx.$$

Où

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(x,\nabla u)\,dx \\
= & -\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \\
= & \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx - \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \sigma_j}\frac{\partial u}{\partial \sigma_i}\sigma_i\upsilon_j d\sigma \\
= & \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}x_i|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx \\
& -\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \sigma_j}\frac{\partial u}{\partial \sigma_i}\sigma_i\upsilon_j d\sigma \\
= & \int_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx + \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}x_i|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx - \int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma,
\end{aligned}$$

il est facile de voir que :

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^p\right) = |\nabla u|^{p-2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(x,\nabla u)\,dx \\
&= \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^p\right)dx - \int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma \\
&= \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{p}\int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma \\
&= \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx - \frac{N}{p}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{p}\int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma \\
&= \left(1-\frac{N}{p}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx - \left(1-\frac{1}{p}\right)\int\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,\upsilon)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Alors, de même manière, multipliant la deuxième équation par $(x,\nabla v)$ est intégrant par partie sur Ω, on obtient :

$$-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{q-2}\nabla v\right)(x,\nabla v)\,dx = \left(1-\frac{N}{q}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^q\,dx - \left(1-\frac{1}{q}\right)\int\limits_{\partial\Omega}|\nabla v|^q(\sigma,\upsilon)\,d\sigma.$$

Pour le second terme, on a :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)(x,\nabla u) + \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)(x,\nabla v)\right)dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) + \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)\right)dx,
\end{aligned}$$

d-autre part, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F(x,u,v)\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,v) + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) + \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v).$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)(x,\nabla u)+\frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)(x,\nabla v)\right)dx\\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} x_i\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(F(x,u,v))-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,v)\right]dx\\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}(F(x,u,v))\,dx-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,v)\,dx\\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} F(x,u,v)\,dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\Omega} F(\sigma,u,v)\,\sigma_i\nu_i d\sigma-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,v)\,dx\\
&= -N\int_{\Omega} F(x,u,v)\,dx-\int_{\Omega}(x,\nabla F(x,u,v))\,dx+\int_{\partial\Omega} F(\sigma,u,v)(\sigma,v)\,d\sigma\\
&= -N\int_{\Omega} F(x,u,v)\,dx-\int_{\Omega}(x,\nabla F(x,u,v))\,dx.
\end{aligned}
$$

Finalement, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{N-p}{p}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx+\left(\frac{N-q}{q}\right)\int_{\Omega}|\nabla v|^q\,dx-N\int_{\Omega}F(x,u,v)\,dx-\int_{\Omega}(x,\nabla F(x,u,v))\,dx\\
&= -\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(\sigma,v)\,d\sigma-\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^q(\sigma,v)\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

■

Théorème 3.1 *Supposons que Ω est strictement étoilé par rapport à l'origine. Soit $a,b,c\in C^1(\bar{\Omega})$ et $(u,v)\in(C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega}))^2$ est une solution de* (**2.1**) *et* (**2.2**). *Supposons que les hypothèses de la* ***chapitre*** **02** *satisfaites. De plus, supposons que pour tout $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$
\begin{aligned}
\frac{N-p}{p}+\gamma\geqslant 0,\\
\frac{N-q}{q}+\delta\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

et pour $x\in\Omega$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{\lambda N}{p}-\gamma\lambda\right)a(x)-\frac{\lambda}{p}(\nabla a(x),x)\geqslant 0,\\
\left(-\frac{\mu N}{q}-\delta\mu\right)b(x)-\frac{\mu}{q}(\nabla b(x),x)\geqslant 0,\\
-Nc(x)-(\nabla c(x),x)-(\gamma(\alpha+1)+\delta(\beta+1))c(x)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Alors $u=v=0$ dans Ω.

Preuve. Pour notre problème $(\mathbf{2.1})$, on a :

$$F(x,u,v)=\frac{\lambda}{p}a(x)|u|^{p}+\frac{\mu}{q}b(x)|v|^{q}+c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}.$$

L'identité devient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{N-p}{p}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx+\left(\frac{N-q}{q}\right)\int_{\Omega}|\nabla v|^{q}dx-\frac{\lambda N}{p}\int_{\Omega}a(x)|u|^{p}dx \qquad (3.10)\\
&-\frac{\mu N}{q}\int_{\Omega}b(x)|v|^{q}dx-\int_{\Omega}\left[Nc(x)+(\nabla c(x),x)\right]|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx\\
&-\frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}(\nabla a(x),x)|u|^{p}dx-\frac{\mu}{q}\int_{\Omega}(\nabla b(x),x)|v|^{q}dx\\
=\;&-\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p}(\sigma,\upsilon)\,d\sigma-\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^{q}(\sigma,\upsilon)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

D'autre part, multipliant la première équation de (2.1) par γu et la deuxième par δv est intégrant par partie sur Ω,on obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx&=\gamma\lambda\int_{\Omega}a(x)|u|^{p}dx+\gamma(\alpha+1)\int_{\Omega}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx. \qquad (3.11)\\
\delta\int_{\Omega}|\nabla v|^{q}dx&=\delta\mu\int_{\Omega}b(x)|v|^{q}dx+\delta(\beta+1)\int_{\Omega}c(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx.
\end{aligned}$$

Combinant les identité $(\mathbf{3.10})$ et $(\mathbf{3.11})$, on aura :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{N-p}{p}+\gamma\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx+\left(\frac{N-q}{q}+\delta\right)\int_{\Omega}|\nabla v|^{q}dx\\
&+\int_{\Omega}\left[\left(-\frac{\lambda N}{p}-\gamma\lambda\right)a(x)-\frac{\lambda}{p}(\nabla a(x),x)\right]|u|^{p}dx\\
&+\int_{\Omega}\left[\left(-\frac{\mu N}{q}-\delta\mu\right)b(x)-\frac{\mu}{q}(\nabla b(x),x)\right]|v|^{q}dx \qquad (3.12)\\
&+\int_{\Omega}\left[-Nc(x)-(\nabla c(x),x)-(\gamma(\alpha+1)+\delta(\beta+1))c(x)\right]|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx\\
=\;&-\int_{\partial\Omega}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)|\nabla u|^{p}+\left(1-\frac{1}{q}\right)|\nabla v|^{q}\right)(\sigma,\upsilon)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Alors, d'après les conditions

$$\frac{N-p}{p}+\gamma \geq 0,$$
$$\frac{N-q}{q}+\delta \geq 0,$$
$$\left(-\frac{\lambda N}{p}-\lambda\gamma\right) a\left(x\right)-\frac{\lambda}{p}\left(\nabla a\left(x\right), x\right) \geq 0,$$
$$\left(-\frac{\mu N}{q}-\delta\mu\right) b\left(x\right)-\frac{\mu}{q}\left(\nabla b\left(x\right), x\right) \geq 0,$$
$$-Nc\left(x\right)-\left(\nabla c\left(x\right), x\right)-\left(\gamma\left(\alpha+1\right)+\delta\left(\beta+1\right)\right)c(x) \geq 0.$$

On trouve que le deux termes de l'identité intégrale (**3**.**12**) sont de signes différents, ce qui donne une contraduction, donc tous les termes sont nulles. ■

Conclusions

Dans ce mémoire, on a présenté des résultats d'existence et de non-existence des solutions non triviales pour une classe des systèmes elliptiques gouvernés par les opérateur p, q- Laplaciens. Les résultats d'existence ont été établie en utilisant la méthode de fibering, qui permet d'étudier l'existence des solutions dans trois cas différents, sous des différentes contraintes, les trois cas étudiés pour ce problème concerne la relation entre les paramètres λ et μ cité dans les équations du système et les premières valeurs propres des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$.

Le résultat de non-existence est obtenu en utilisant une identitée de type **Pohožaev** qui est un outil puissant, permet de montrer q'un problème n'admet que la solution triviale, sous des hypothèses bien déterminés.

Les méthodes utilisés dans ce travail peuvent être utilisés dans différents équations est systèmes semi-linaires avec des différents conditions sur le bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Anane, Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids, C.R. Acad.Sci. Paris Seér. I 305 (1987) 725 − 728.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson. Paris 1983.

[4] Ph. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri, F. de Thelin, Existence of positive solutions for quasilinear elliptic systems, J. Differential Equations 166 (2) (2000) 455 − 477.

[5] P. Drábek, S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian : application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 127 A (1997) 703 − 726.

[6] I. Ekeland. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl, 47 : 323 353, 1974.

[7] J.P. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian's nonlinear eigenvalues, Comm. Partial Differential Equations 12 (1987) 1389 − 1430.

[8] R. Glowinski and A. Marroco. Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires, Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle, Analyse numérique, tome (9), $n°2$, $p.41 - 76, 1975$.

[9] M. Guedda, L. Veron, Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Nonlinear Anal. 13 (8) (1989) 879 − 902.

[10] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Ellitiques. Springer-Verlag, 1993.

[11] M. T. Lacroix-Sonrier. Distributions, Espaces de Sobolev, Applications. Ellipses marketing, Paris, 1999.

[12] E. H. Lieb, M. Loss, Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[13] P. Lundqvist, On the equation $\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+\lambda |u|^{p-2} u=0$, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990) 157 – 164.

[14] E. Mitidieri, G. Sweers, R. van der Vorst, Non-existence theorems for systems of quasilinear partial differential equations, Differential Integral Equations 8(6) (1995) 1331 – 1354.

[15] S. I . Pohožaev, On eigenfunctions of quasilinear elliptic problems, Mat. Sb. 82 (1970) 192 – 212.

[16] S.I. Pohožaev, On one approach to nonlinear equations, Dokl. Akad. Nauk 247(1979) 1327 – 1331(in Russian) (20(1979) 912 – 916 (in English)).

[17] S.I. Pohožaev, On a constructive method in calculus of variations, Dokl. Akad. Nauk 298 (1988)1330 – 1333 (in Russian) (37(1988) 274 – 277 (in English)).

[18] S.I. Pohožaev, On fibering method for the solutions of nonlinear boundary value problems, TrudyMat. Inst. Steklov 192 (1990) 146 – 163 (in Russian).

[19] F. De Thélin, J. Vélin, Existence and non-existence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic systems, Rev. Mat. Univ. Complutense Madrid 6 (1993) 153 – 154.