



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique



كلية العلوم الدقيقة والعلوم الطبيعية والبيئة
FSES NV
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équation aux dérivées partielles et applications

Thème

**Cycles limites de certains systèmes différentiels
polynomiaux continus et discontinus**

Présenté Par :

ALIOUAT Abd el haq

HASSAD Abd el wahed

Devant le jury :

Mr : <i>SMAAL Hichem</i>	MAA	Université Larbi Tébessi	Président
Mr : <i>SAIDANE Ridha</i>	MAA	Université Larbi Tébessi	Examineur
Mr : <i>DIAB Zouhair</i>	MCB	Université Larbi Tébessi	Encadreur
Mr : <i>DEGAICHI Nouar</i>	MAA	Université Larbi Tébessi	Invité

Anné Universitaire: 2019/2020

Résumé

Dans ce travail, on étudie le nombre maximum de cycles limites du système différentiel polynomial continu

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$

et après nous avons également étudié le nombre maximum de cycles limites du système différentiel polynomial discontinu formé par deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan $y = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), & \text{si } y > 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon Q_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_b(x, y, z), & \text{si } y < 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon Q_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$

où $\ell = 1, \dots, d$, ε est un paramètre suffisamment petit, $z \in \mathbb{R}^d$ et $P_a, P_b, P_{c_\ell}, Q_a, Q_b, Q_{c_\ell}$ sont des polynômes de degré n .

Dans la seconde partie de ce travail, on étudie le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m, \end{cases}$$

lorsqu'il est perturbé par une classe de systèmes différentiels polynomiaux discontinus par morceaux de degré n avec k pièces.

Mots clés : Cycle limite, hyperplan, centre non linéaire, systèmes différentiels polynomiaux.

Abstract

In this work, we study the maximum number of limit cycles of the continuous polynomial differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$

and after we also study the maximum number of limit cycles of the discontinuous piecewise polynomial differential system formed by two polynomial differential systems separated by the hyperplane $y = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), & \text{if } y > 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon Q_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_b(x, y, z), & \text{if } y < 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon Q_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$

where $\ell = 1, \dots, d$, ε is a small parameter, $z \in \mathbb{R}^d$ and $P_a, P_b, P_{c_\ell}, Q_a, Q_b, Q_{c_\ell}$ are polynomials of degree n .

In the second part of this work, we study the maximum number of limit cycles of which can bifurcate from the nonlinear center

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m, \end{cases}$$

when it is perturbed inside a class of discontinuous piecewise polynomial differential systems of degree n with k pieces.

Keywords : Limit cycle, hyperplane, nonlinear center, polynomial differential systems.

المخلص

في هذا العمل، ندرس الحد الاعظمي لعدد الدورات المنتهية لجملة المعادلات التفاضلية المستمرة الاتية

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{cl}(x, y, z), \end{cases}$$

وبعدها ندرس ايضا الحد الاعظمي لعدد الدورات المنتهية لجملة معادلات تفاضلية متقطعة تتكون من جملتين تفاضليتين مفصولتين بواسطة المستوي الفائق الذي معادلته $y = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), & y > 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{cl}(x, y, z), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon Q_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_b(x, y, z), & y < 0 \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon Q_{cl}(x, y, z), \end{cases}$$

حيث ε هو وسيط ذو قيمة صغيرة، $\ell = 1, \dots, d$ و $z \in \mathbb{R}^d$ و $P_a, P_b, P_{cl}, Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma$ كثيرات حدود من الدرجة n .

في الجزء الثاني من هذا العمل، ندرس العدد الاعظمي للدورات الحدودية التي تنتشعب من المركز غير الخطي الاتي

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m, \end{cases}$$

وذلك باستعمال اضطراب مكون من جملة كثيرات حدود متقطعة من الدرجة n ، مع k قطعة.

الكلمات المفتاحية: دورة منتهية، مستوي فائق، مركز غير خطي، جمل كثيرات حدود تفاضلية.

إهداء

بسم الله الذي تنزهه عن جميع الأشكال والأحجام، الذي لا تحوم حول دائرته الظنون والأوهام ، ثم الحمد لله على
مته وامتنانه، والشكر لله على نعمه وإنعامه، حمدا كثيرا طيبا يليق بجلال وجهه وعظيم سلطانه، والصلاة و
السلام على خير الأنام محمد صلى الله عليه وسلم.

أهدي هذا العمل المتواضع.

إلى ملاكي في الحياة، من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي .. أُمي الحبيبة ..

إلى من حصد الأشواك في دربي ليتمد لي طريق العلم .. والدي الغالي ..

أرجو أن يمد الله عمريكما لتريا ثمار تضحياتكما، ستبقى كلماتكما نجوي أهتدي بها، اليوم .. غدا .. و إلى الأبد ..

إلى الإخوة من تحلوا بالإخاء و تميزوا بالوفاء .. رفقاء الدرب .. عبد المغني، عائشة، خديجة، وفاء، منال، و

العزيز على قلبي ياسين

إلى الذين حملوا أقدس رسالة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم و المعرفة .. اساتذتنا الأفاضل ..

إلى زملاء المسار الدراسي ..

عبد الحق عليوات

إهداء

إلى الشمعة التي تحترق لتنير دربي .. إلى الإبتسامة البراقة .. إلى حضن
الحنان و عنوان الأمان .. إلى أحلى كلمة نطقها شفتاي :أمي الغالية ...

إلى طيف الأمل .. و رمز الأخلاق و العمل .. إلى الذي كان لي سندا و
عونا في حياتي .. إلى أعلى رجل في الوجود :أبي الغالي ...

إلى من ترعرعت معه .. إلى من ينجلي همي و تعبي .. إلى من يسري في
عروقه دمائي .. أخي الشقيق "عبدالعزيز"

إلى كل الأهل و الأقارب .

إلى كل الأصدقاء و الأحباب .

إلى الذين حملوا أقدس رسالة .. إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم و
المعرفة .. أساتذتنا الأفاضل .. إلى زملاء المسار الدراسي ..

إلى كل هؤلاء أهدي العمل المتواضع.

عبدالواحد حصاد

شكر وتقدير

مصادقا لقوله عز وجل

« وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ »

سورة ابراهيم الآية (7)

نحمد الله تعالى على سخاءه أن وفقنا إلى إتمام هذا العمل المتواضع

وعملا بقول الرسول الأمين صلى الله عليه وسلم

{ مَنْ لَمْ يَشْكُرْ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرْ اللَّهَ }

رواه أحمد و الترمذي

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل أولا إلى المشرف على هذا العمل
الأستاذ الدكتور "زهير ذياب" على الثقة التي منحنا إياها، ونود أيضا أن
نشكر جميع أعضاء لجنة المناقشة:

الأستاذ المساعد سماويل هشام، الأستاذ سعيدان رضا

والأستاذ دقايشي نوار.

وجميع أساتذتنا الأفاضل في قسم الرياضيات على تفانيهم طيلة فترة

دراستنا في جامعة العربي التبسي،

ونشكر جميع زملائنا وكل من دعمنا من قريب او بعيد.

نعرب عن امتناننا لهم جميعا.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Notions préliminaires	4
1.1 Système différentiel polynômial du plan	4
1.2 Système dynamique	4
1.3 Champ de vecteurs	4
1.4 Système quadratique dans \mathbb{R}^3	5
1.5 Système différentiel autonome	5
1.6 Flot du système différentiel autonome	5
1.7 Point d'équilibre	5
1.8 Linéarisation du système différentiel	5
1.9 Point critique hyperbolique	6
1.10 Solution périodique	6
1.11 Plan et portrait de phase	6
1.12 Intégrale première	7
1.13 Cycle limite	7
1.14 Cycle limite hyperbolique	7
1.15 Fonction Lipschitzienne et localement Lipschitzienne	7
1.16 Stabilité d'une solution (cas d'un point d'équilibre)	8
1.17 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire	8
1.18 Théorème de Bezout	8
1.19 Portrait de phase des systèmes différentiels linéaires en dimension 2	9
2 Méthode de moyennisation	13
2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels continus	13
2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus	13

TABLE DES MATIÈRES

2.3	Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les champs de vecteurs discontinus	15
3	Naissance de cycles limites par une classe des systèmes différentiels continue et discontinus de dimension $d + 2$	17
3.1	Introduction et résultats principaux	17
3.2	Preuve des résultats principaux	20
3.2.1	Preuve du théorème 3.1.1	20
3.2.2	Preuve du théorème 3.1.2	23
3.2.3	Preuve de corollaire 3.1.1	25
3.2.4	Preuve de corollaire 3.1.2	25
4	Cycles limites des champs de vecteurs polynomiaux discontinus par morceaux	27
4.1	Introduction et résultats principaux	27
4.2	Preuve du théorème 4.1.1	30
4.3	Exemples	33
	Conclusion	35
	Bibliographie	36

TABLE DES FIGURES

Fig 1.1- Nœud impropre stable.....	09
Fig 1.2- Nœud impropre instable.....	09
Fig 1.3- Selle ou Col.....	10
Fig 1.4- Nœud propre stable.....	10
Fig 1.5- Nœud propre instable.....	10
Fig 1.6-Noeud exceptionnel stable.....	11
Fig 1.7-Noeud exceptionnel instable.....	11
Fig 1.8- Foyer stable.....	11
Fig 1.8- Foyer instable.....	11
Fig 1.10-Centre.....	12
Fig 4.1-Les secteurs S_i et les rayons L_i , pour $i = 1, \dots, k$	29

Un grand nombre de problèmes provenant de la mécanique et de l'électrotechnique, de la théorie de la commande automatique, de l'économie, des systèmes d'impact, entre autres, ne peuvent pas être décrits avec des systèmes dynamiques lisses. Ce fait a motivé de nombreux chercheurs à étudier les aspects qualitatifs de l'espace de phase des systèmes dynamiques non lisses.

L'un des principaux problèmes de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires réels continus et discontinus est la détermination de leurs cycles limites. La non-existence, l'existence, l'unicité et d'autres propriétés des cycles limites ont été largement étudiées par les mathématiciens et les physiciens, et plus récemment également par les chimistes, les biologistes, les économistes, etc. (voir par exemple les livres [9], [16], [75]). Ce problème limité aux équations différentielles polynomiales planes continues est le problème bien connu du 16^{ème} problème de Hilbert [31]. Puisque le problème de Hilbert s'est avéré très difficile, Smale [68] l'a particularisé aux équations différentielles polynomiales de Lienard dans sa liste de problèmes pour le siècle actuel.

Les équations différentielles polynomiales de Lienard classiques

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1)$$

où $f(x)$ et $g(x) = x$ revient à [37]. Cette équation différentielle de second ordre (I) peut être écrite comme un système différentiel planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \quad (2)$$

où $F(x) = \int_0^x f(s)ds$.

De nombreux résultats sur le nombre des cycles limites ont été obtenus pour les équations différentielles polynomiales généralisées (I) étant $f(x)$ et $g(x)$ sont des

polynômes de degrés $n - 1, m$ respectivement. Les équations différentielles polynomiales de Lienard classiques continues (1) ont été étudiées en 1977 par Lins, de Melo et Pugh [39] qui ont déclaré la conjecture :

Si $f(x)$ de degré $n - 1 > 0$ et $g(x) = x$, alors (1) a au plus $[(n - 1)/2]$ cycles limites. Ici $[z]$ désigne la fonction de partie entière de $z \in \mathbb{R}$. Ils ont également prouvé la conjecture pour $n = 2, 3$. Pour $n = 4$, cette conjecture a été prouvée en 2012 (voir [40]). Pour $n \geq 7$ Dumortier, Panazzolo et Roussarie ont prouvé que cette conjecture n'est pas vraie dans [21], ils montrent que ces équations différentielles peuvent avoir $[(n - 1)/2] + 1$ cycles limites. De Maesschalck et Dumortier ont récemment prouvé dans [59] que l'équation classique de Lienard de degré $n \geq 6$ peut avoir $[(n - 1)/2] + 2$ cycles limites. La conjecture pour $n = 5$ est toujours ouvert.

Les résultats sur le nombre de cycles limites pour les équations différentielles polynomiales Liénard généralisées continues peuvent être trouvés dans [43] où les auteurs montrent qu'il existe des équations différentielles (1) ayant au moins $[(n + m - 2)/2]$ cycles limites. Voir aussi [4], [10], [17], [26], [55], [56], [57], [58], [76].

Ce travail comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre, nous donnerons quelques notions préliminaires des systèmes dynamiques et le comportement des systèmes différentiels. Nous avons commencé par définir le système différentiel polynomial du plan, le système dynamique, le champ de vecteurs, le système quadratique dans \mathbb{R}^3 , le système différentiel autonome, le flot, le point d'équilibre, la linéarisation du système différentiel, le point critique hyperbolique, la solution périodique, le plan et portrait de phase, l'intégrale première, la notion de cycle limite et cycle limite hyperbolique, la fonction Lipschitzienne et localement Lipschitzienne, la stabilité d'une solution, et nous donnons les conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire, enfin, nous donnons une explication de la théorème de Bezout et le portrait de phase des systèmes différentiels linéaires en dimension 2.

Dans le second chapitre, dans ce chapitre, nous présentons les méthodes des moyennisations pour les systèmes différentiels continus et discontinus que nous utilisons dans les troisième et quatrième chapitres.

Dans le troisième chapitre, on étudie le nombre maximum de cycles limites du système différentiel polynomial continu

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases}$$

et après nous avons également étudié le nombre maximum de cycles limites du système différentiel polynomial discontinu formé par deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan $y = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases} \quad \text{si } y > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon Q_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon Q_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases} \quad \text{si } y < 0$$

où $\ell = 1, \dots, d$, ε est un paramètre suffisamment petit, $z \in \mathbb{R}^d$ et $P_a, P_b, P_{c_\ell}, Q_a, Q_b, Q_{c_\ell}$ sont des polynômes de degré n .

Dans le quatrième chapitre, on étudie le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m, \end{cases}$$

lorsqu'il est perturbé par une classe de systèmes différentiels polynomiaux discontinus par morceaux de degré n avec k pièces.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions préliminaires des systèmes dynamiques et le comportement des systèmes différentiels.

1.1 Système différentiel polynômial du plan

Définition 1.1.1 on appelle système différentiel polynômial du plan un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Où P et Q sont des polynômes à coefficients réels. Si les fonctions P et Q sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

1.2 Système dynamique

Définition 1.2.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

- (1) $U(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- (2) $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- (3) $U(0, x) = x$,
- (4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Champ de vecteurs

Définition 1.3.1 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une application

$$X : x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

de classe C^k définie sur U à valeurs dans \mathbb{R}^n est appelée un champ de vecteurs de classe C^k sur U . À un tel champ de vecteur, on associe le système différentiel

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \dot{x} = X(x).$$

1.4 Système quadratique dans \mathbb{R}^3

Définition 1.4.1 Un système quadratique dans \mathbb{R}^3 est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0,0} + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 + a_{0,1,0}y + a_{1,1,0}xy + a_{0,2,0}y^2 + \\ a_{0,0,1}z + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2 \\ \dot{y} = b_{0,0,0} + b_{1,0,0}x + b_{2,0,0}x^2 + b_{0,1,0}y + b_{1,1,0}xy + b_{0,2,0}y^2 + \\ b_{0,0,1}z + b_{1,0,1}xz + b_{0,1,1}yz + b_{0,0,2}z^2 \\ \dot{z} = c_{0,0,0} + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 + c_{0,1,0}y + c_{1,1,0}xy + c_{0,2,0}y^2 + \\ c_{0,0,1}z + c_{1,0,1}xz + c_{0,1,1}yz + c_{0,0,2}z^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

1.5 Système différentiel autonome

Définition 1.5.1 On appelle système différentiel autonome un système différentiel pour lequel f ne dépend pas du temps

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

1.6 Flot du système différentiel autonome

Définition 1.6.1 On appelle flot du système différentiel (1.3), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ où $\phi(t, x_0)$ est la solution de (1.3) telle que $\phi(0, x_0) = x_0$.

1.7 Point d'équilibre

Définition 1.7.1 On appelle point d'équilibre du système différentiel (1.3) tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que : $f(x_0) = 0$.

1.8 Linéarisation du système différentiel

Définition 1.8.1 Considérons le système différentiel (1.3)
Le système différentiel

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0,$$

est appelé le linéarisé de (1.3) en x_0 .

1.9 Point critique hyperbolique

Définition 1.9.1 Un point d'équilibre x_0 de système différentiel (1.3) est dit hyperbolique lorsque toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ sont à partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, il est dit non-hyperbolique.

1.10 Solution périodique

Définition 1.10.1 Supposons que $x(t) = \psi(t)$ est une solution de système différentiel (1.3) et supposons qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\psi(t + T) = \psi(t) \text{ pour } T > 0.$$

Alors $\psi(t)$ s'appelle une solution périodique de système (1.3). Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie la formule précédent est appelé période.

Définition 1.10.2 On appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

1.11 Plan et portrait de phase

Définition 1.11.1 Soit le système différentiel planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.4) représentent dans le plan (xoy) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.12 Intégrale première

Définition 1.12.1 Une fonction $H(x, y)$ est dite intégrale première d'un système différentiel (1.4) sur un domaine D du plan si $H(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel. Lorsqu'une intégrale première existe, elle n'est pas unique. Le fait que $H(x(t), y(t))$ soit intégrale première implique qu'elle vérifie la relation suivante

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y} g(x, y) = 0.$$

1.13 Cycle limite

Définition 1.13.1 Pour un système plan, on appelle cycle limite est une orbite fermée isolé. C'est à dire, au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermé. La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.

Poincaré introduit cette notion dans son second mémoire de 1882, à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment.

1.14 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.14.1 soit le système (1.4) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Soit

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

Si $\delta > 0$ (resp. < 0) alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite in stable (resp. stable). Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande $\delta = 0$.

Une orbite périodique $(x(t), y(t))$ ayant $\delta \neq 0$ est un cycle limite hyperbolique.

1.15 Fonction Lipschitzienne et localement Lipschitzienne

Définition 1.15.1 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite k -Lipschitzienne si

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in U, k > 0.$$

une fonction est dite Lipschitzienne si elle est k -Lipschitzienne pour un k .

Définition 1.15.2 Une fonction est dite localement Lipschitzienne si pour chaque point $a \in U$ il existe un voisinage V de a , tel que $f|_V$ soit Lipschitzienne.

1.16 Stabilité d'une solution (cas d'un point d'équilibre)

Définition 1.16.1 Une solution $x(t)$ d'un système différentiel

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.5}$$

est dite stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution $y(t)$

$$\|(x - y)(t_0)\| \leq \delta \implies \forall t \geq t_0, \|(x - y)(t)\| \leq \varepsilon.$$

Si, de plus, $\|y - x\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, la solution est dite asymptotiquement stable.

1.17 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire

Considérons le système différentiel linéaire $x' = Ax$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réelles constants.

Définition 1.17.1 Si toutes les valeurs propres de la matrice A ont leur partie réelle strictement négative, alors toutes les solutions de $x' = Ax$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et l'origine est un équilibre stable.

Si l'une au moins des valeurs propres est de partie réelle strictement positive, l'origine est un point d'équilibre instable.

Si la matrice A est diagonalisable et si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative ou nulle, alors l'origine est un point d'équilibre stable.

1.18 Théorème de Bezout

Théorème 1.18.1 [67] Soient $P_j, j = 1, \dots, n$ des polynômes en ces variables (x_1, x_2, \dots, x_d) de degré $d_j, j = 1, \dots, n$. Considérons le système polynomial suivant

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0. \end{cases}$$

Où $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n.$$

1.19 Portrait de phase des systèmes différentiels linéaires en dimension 2

Considérons le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On supposera $\det A \neq 0$; L'origine est un seul point critique de ce système.

1. Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 négatives et différentes, on parle de **nœud impropre** (asymptotiquement stable).

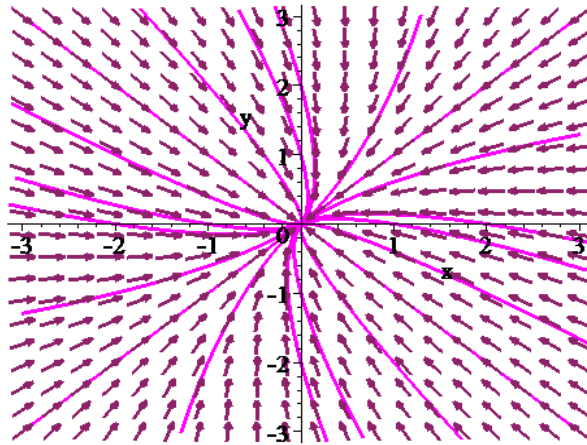


Fig 1.1. Nœud impropre stable

2. Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 positives et différentes, on parle aussi de **nœud impropre** (instable).

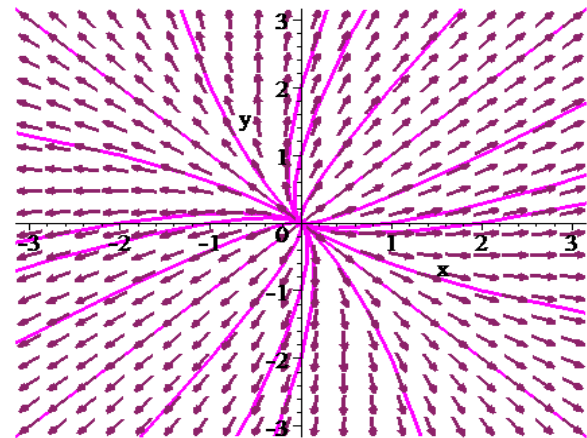


Fig 1.2. Nœud impropre instable

1.19. PORTRAIT DE PHASE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES EN DIMENSION 2

3. Si une des valeurs propres est positive et l'autre négative, il existe au moins une direction instable et on parle de point **selle** ou de **col**.

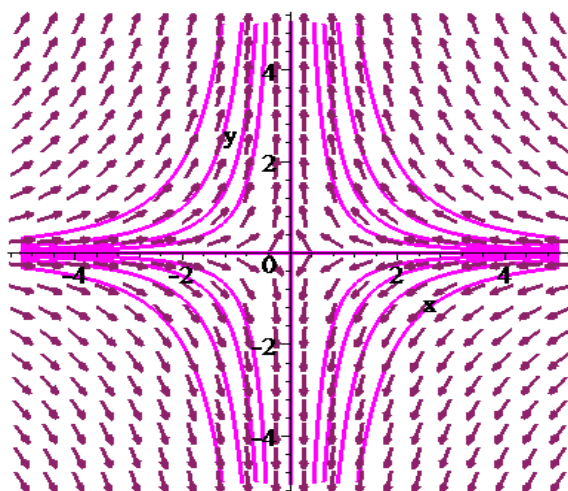


Fig 1.3. Selle ou Col.

4. Dans le cas de valeurs propres identiques, il y a deux cas sont possibles

4.1. A est diagonalisable, on parle de **nœud propre** (stable ou instable)

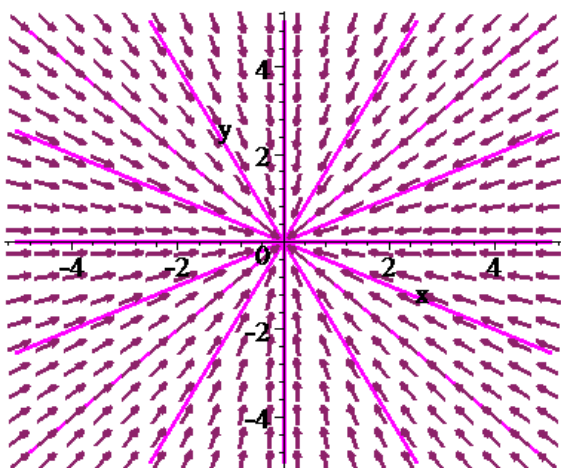


Fig 1.4. Nœud propre stable

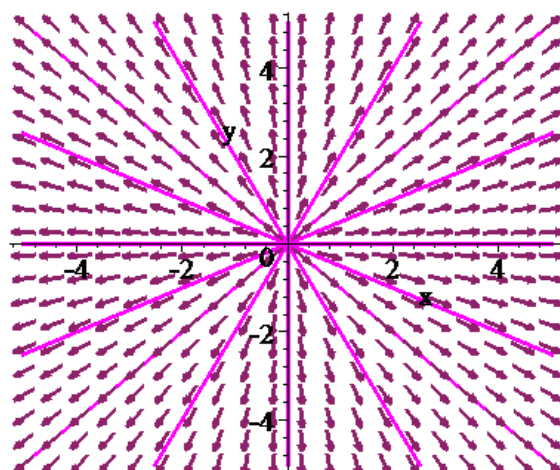


Fig 1.5. Nœud propre instable

4.2. A est non diagonalisable, on parle de **nœud exceptionnel** (stable ou instable).

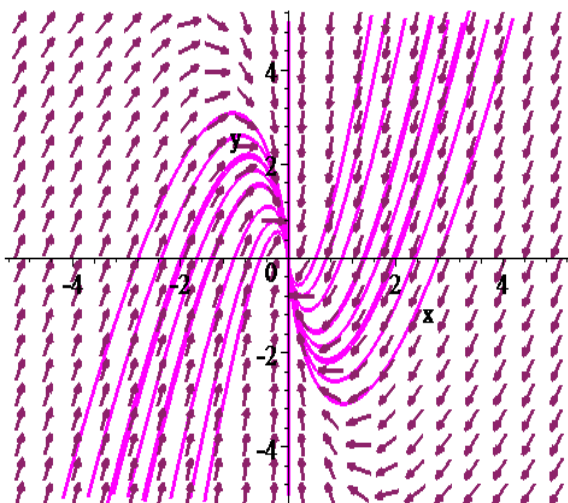


Fig 1.6. Nœud exceptionnel stable

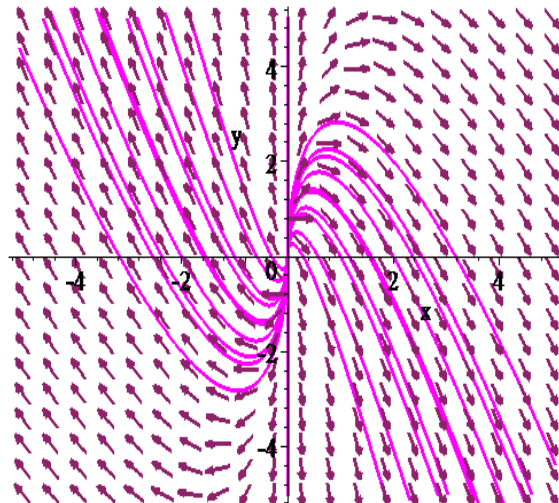


Fig 1.7. Nœud exceptionnel instable

5. Dans le cas des valeurs propres conjuguées, les trajectoires sont des spirales logarithmiques lorsque la partie réelle des valeurs propres $\alpha \neq 0$ et on parle de **foyers** (stable ou instable).

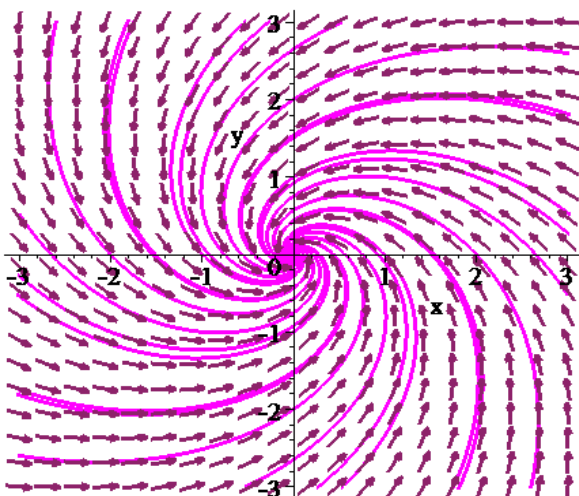


Fig 1.8. Foyer stable

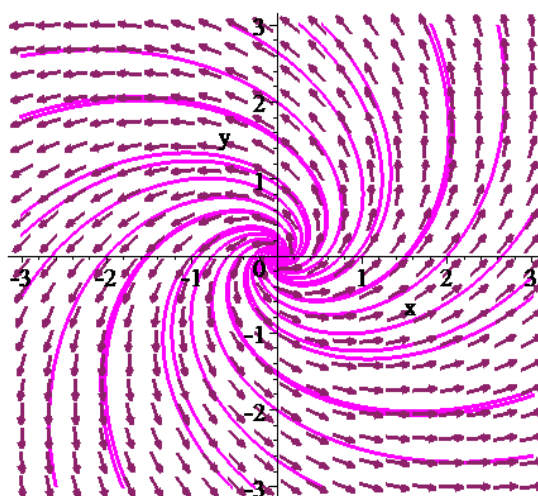


Fig 1.9. Foyer instable

1.19. PORTRAIT DE PHASE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES
EN DIMENSION 2

6. Dans le cas où $\alpha = 0$, les trajectoires sont périodiques, il s'agit de **centres**.

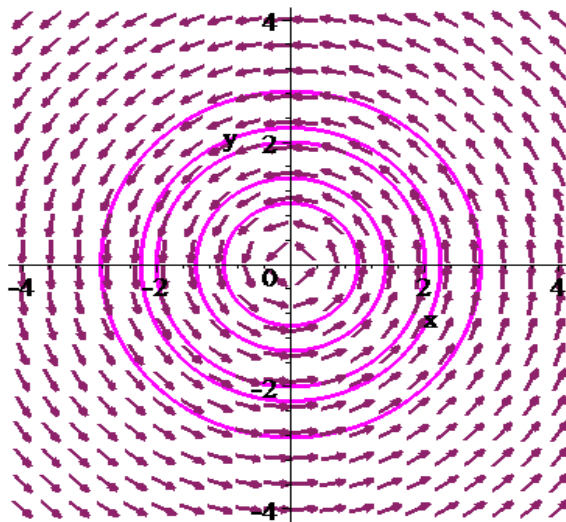


Fig 1.10. Centre

CHAPITRE 2

Méthode de moyennisation

2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels continus

Théorème 2.1.1 [74] *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = 0, \quad (2.1)$$

où $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $R : \mathbb{R} \times U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable, et D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . On définit la fonction moyenne $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f(x) = \int_0^T F(s, x) ds, \quad (2.2)$$

et on suppose que

- (i) les fonctions $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont définies, continues et bornées par une constante M (indépendant de ε) dans $[0, \infty) \times D$ et pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,
- (ii) pour $p \in D$ avec $f(p) = 0$, nous avons $|J_f(p)| \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1) tel que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus

Soit $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 avec $0 \in \mathbb{R}$ comme valeur régulière, et $\Sigma = h^{-1}(0)$. Soit $X, Y : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux champs des vecteurs continus et

2.2. MÉTHODE DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DISCONTINUS

supposons que h, X et Y sont T -périodiques en la variable t .

On considère le système différentiel discontinu par morceaux suivant

$$\dot{x} = Z(t, x) = \begin{cases} X(t, x) & \text{si } h(t, x) > 0, \\ Y(t, x) & \text{si } h(t, x) < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Nous réécrivons le système différentiel discontinu comme suit. On considère la fonction de signe définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0, \\ -1 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Alors le système (2.3) peut s'écrire comme suit

$$\dot{x} = Z(t, x) = F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x), \quad (2.4)$$

où

$$F_1(t, x) = \frac{1}{2}(X(t, x) + Y(t, x)) \quad \text{et} \quad F_2(t, x) = \frac{1}{2}(X(t, x) - Y(t, x)).$$

Le théorème suivant est une version du théorème 2.1.1 pour étudier les solutions périodiques des systèmes différentiels discontinus.

Théorème 2.2.1 *On considère le système différentiel discontinu suivant*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x), \\ R(t, x, \varepsilon) &= R_1(t, x, \varepsilon) + \text{sign}(h(t, x))R_2(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R_1, R_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions T -périodiques en la première variable t . On suppose que h est une fonction de classe C^1 ayant 0 comme valeur régulière et nous désignons $\Sigma = h^{-1}(0)$. On définit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f(x) = \int_0^T F(s, x) ds, \quad (2.6)$$

et on suppose que

- (i) les fonctions F_1, F_2, R_1, R_2 et h sont localement Lipschitzienne par rapport à x ,
 - (ii) $\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \neq 0$ pour tous $(t, x) \in \Sigma$,
 - (iii) pour $p \in C$ avec $f(p) = 0$, il existe un voisinage $U \subset C$ de p tel que $f(z) \neq 0$ pour tous $z \in \bar{U} \setminus \{p\}$ et $d_B(f, U, 0) \neq 0$ (d_B est le degré de Brouwer de f en p).
- Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.5) tel que $x(t, \varepsilon) \rightarrow p$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour une preuve du théorème 2.2.1, voir le théorème A et la proposition 2 dans [45]. Ici, nous soulignons que si f dans (2.6) est de classe C^1 alors l'hypothèse $d_B(f, U, 0) \neq 0$ est valable si $|J_f(p)| \neq 0$, voir pour plus de détails [54].

2.3 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les champs de vecteurs discontinus

On considère le champ de vecteur discontinu par morceaux suivant

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \chi(\theta, \rho) = \varepsilon F(\theta, \rho) + \varepsilon^2 R(\theta, \rho, \varepsilon), \quad (2.7)$$

où $\rho \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi Z)$ et

$$F(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^k \chi_{S_i}(\theta) F_i(\theta, \rho), \quad R(\theta, \rho, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \chi_{S_i}(\theta) R(\theta, \rho, \varepsilon),$$

où $F_i : S_1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $R_i : S_1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ pour $i = 1, \dots, k$ sont des fonctions continues, 2π -périodiques par rapport à la première variable, et D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} . Ici, les S_i sont les intervalles ouverts (θ_i, θ_{i+1}) pour $i = 1, \dots, k$ et $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_k < 2\pi \leq \theta_{k+1} = \theta_1 + 2\pi$. On définit

$$D_\rho F(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^k \chi_{S_i}(\theta, \rho) D_\rho F_i(\theta, \rho). \quad (2.8)$$

La fonction moyenne $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(\rho) = \int_0^T F(\theta, \rho) d\theta. \quad (2.9)$$

Nous rappelons que si (θ, ρ_0) est la solution du champ de vecteur $\chi(\theta, \rho)$ tel que $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$, alors

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho_0 = \varepsilon f(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.10)$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les racines simples de la fonction moyenne $f(\rho)$ fournissent des cycles limites du champ de vecteur $\chi(\theta, \rho)$.

Dans le résultat suivant, nous présentons une version de méthode de la moyennisation pour les champs de vecteurs discontinus, qui est prouvée dans [44]. Nous notons que dans [44] la méthode de moyennisation utilise que le degré de Brouwer d'une fonction f au voisinage d'un zéro de la fonction $f(\rho)$ est non nul, alors que nous substituons ici cette condition en disant que le zéro $\bar{\rho}$ est simple (c'est-à-dire $\frac{df}{d\rho}(\bar{\rho}) \neq 0$), car cette dernière condition implique que le degré de Brouwer mentionné n'est pas nul. Pour plus détails voir [13], [54].

Théorème 2.3.1 *Supposons que les conditions suivantes s'appliquent au champ de vecteur discontinu $\chi(\theta, \rho)$.*

2.3. MÉTHODE DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS DISCONTINUS

(i) pour $i = 1, \dots, k$ les fonctions $F_i(\theta, \rho)$ et $R_i(\theta, \rho)$ sont localement Lipschitzienne par rapport à ρ , et T -périodiques en la variable θ .

(ii) Soit $\bar{\rho} \in D$ un racine simple de la fonction moyenne $f(\rho)$.

Alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique (θ, ε) du champ de vecteur $\chi(\theta, \rho)$ tel que $(\theta, \varepsilon) \rightarrow \bar{\rho}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

CHAPITRE 3

Naissance de cycles limites par une classe des systèmes différentiels continue et discontinus de dimension $d + 2$

3.1 Introduction et résultats principaux

Les cycles limites ont été utilisés pour modéliser le comportement de nombreux processus réels et différents dispositifs modernes. En général, il est très difficile de prouver l'existence de cycles limites. Une façon de produire des cycles limites est de perturber les systèmes différentiels qui ont un centre linéaire. Dans ce cas, les cycles limites dans un système perturbé bifurquent des orbites périodiques du centre non perturbé. La recherche du nombre maximum de cycles limites que les systèmes différentiels polynomiaux d'un degré donné peuvent avoir fait partie du 16^{ème} problème de Hilbert et de nombreuses contributions ont été faites dans ce sens, voir par exemple [31], [34], [38] et les références qui y sont citées. Récemment, la théorie des cycles limites a également été étudiée dans des systèmes différentiels discontinus. L'analyse de ces systèmes peut être retracée à partir d'Andronov et al. [2] et continue de recevoir l'attention des chercheurs. Les systèmes différentiels discontinus sont un sujet qui a été développé très rapidement en raison de ses fortes applications à d'autres branches de la science. Actuellement, ces systèmes sont l'un des 2 liens entre les mathématiques, la physique et l'ingénierie. Ces systèmes modélisent plusieurs phénomènes dans les systèmes de contrôle, l'impact dans les systèmes mécaniques, les oscillations non linéaires et l'économie voir par exemple [5], [8], [12], [19], [35], [61]. Récemment, il s'est avéré qu'ils étaient également pertinents en tant que modèles idéalisés pour la biologie [36] et modèles d'activité cellulaire [20], [72], [73]. Pour plus de détails, voir Teixeira [71] et toutes ses références. Comme nous l'avons dit, il n'est pas simple de déterminer l'existence de cycles limites dans un système différentiel. Le cas le plus simple pour déterminer les cycles limites est celui des systèmes linéaires continus par morceaux dans \mathbb{R}^2 , lorsqu'ils n'ont que deux sys-

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

tèmes différentiels linéaires séparés par une ligne droite. Même dans ce cas simple, seulement après une analyse délicate, il a été possible de montrer l'existence d'au plus d'un cycle limite pour de tels systèmes, voir [24] ou une preuve plus simple dans [46]. Des systèmes différentiels linéaires discontinus avec seulement deux régions de linéarité séparées par une ligne droite ont été étudiés récemment dans [30], [32], entre autres articles. Dans [30], certains résultats sur l'existence de deux cycles limites sont apparus, de sorte que les auteurs ont supposé que le nombre maximal de cycles limites pour cette classe de systèmes différentiels linéaires par morceaux est exactement deux. Cependant, dans [32] on a des preuves numériques de l'existence de trois cycles limites ont été obtenues. Jusqu'à présent, nous connaissons l'exemple de [32] qui représente le premier système différentiel linéaire discontinu avec deux zones, avec 3 cycles limites entourant un équilibre unique. Il a été récemment prouvé dans [48], un tel système contient déjà trois cycles limites. Il existe plusieurs articles qui étudient les cycles limites des systèmes différentiels linéaires continus par morceaux dans \mathbb{R}^3 , voir par exemple [18], [47], [49], [50], [51]. Notre objectif est d'étudier les solutions périodiques des systèmes différentiels polynomiaux discontinus dans \mathbb{R}^{d+2} . Plus précisément, l'objectif de ce travail est d'étudier l'existence des cycles limites de systèmes différentiels polynomiaux continus et discontinus dans \mathbb{R}^{d+2} , où le système différentiel discontinu a deux zones de continuité séparées par un hyperplan $y = 0$ dans \mathbb{R}^{d+2} .

On considère le système différentiel linéaire dans \mathbb{R}^{d+2}

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z}_\ell = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

pour $\ell = 1, \dots, d$ et $x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d$, où le point désigne une dérivée par rapport t , qui est réversible par rapport $\phi(x, y, z) = (x, -y, z)$. Tout d'abord, nous sommes intéressés à étudier l'existence des cycles limites du système différentiel polynomial continu

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases} \quad (3.2)$$

et après nous avons également étudié l'existence de cycles limites du système différentiel polynomial discontinu formé par deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan $y = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon P_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon P_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases} \quad \text{si } y > 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon Q_a(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_b(x, y, z), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon Q_{c_\ell}(x, y, z), \end{cases} \quad \text{si } y < 0$$

CHAPITRE 3. NAISSANCE DE CYCLES LIMITES PAR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS CONTINUE ET DISCONTINUS DE DIMENSION $D + 2$

où ε est un paramètre suffisamment petit, $\ell = 1, \dots, d$ et $P_a, P_b, P_{c_\ell}, Q_\alpha, Q_\beta, Q_{\gamma_\ell}$ sont des polynômes de degré n , plus précisément

$$\begin{aligned} P_a(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k, & P_b(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n b_{ijk} x^i y^j z^k, \\ P_{c_\ell}(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n c_{\ell ijk} x^i y^j z^k, & Q_\alpha(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n \alpha_{ijk} x^i y^j z^k, \\ Q_\beta(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n \beta_{ijk} x^i y^j z^k, & Q_{\gamma_\ell}(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n \gamma_{\ell ijk} x^i y^j z^k, \end{aligned}$$

Dans ces expressions, k est un multi-indice et $i + j + k$ désigne $i + j + k_1 + \dots + k_d$, z^k désigne le produit $z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$ avec $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$, et a_{ijk} désigne le coefficient $a_{ijk_1 \dots k_d}$ de $x^i y^j z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$. Il est clair que les systèmes (3.2) et (3.3) coïncident pour $\varepsilon = 0$ et ils ont des centres linéaires à chaque plan $z = \text{constant}$. Dans ce travail, nous établissons pour ε est un paramètre suffisamment petit le nombre maximum de cycles limites de ces systèmes qui bifurquent à partir des orbites périodiques de ces centres linéaires en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Le résultat suivant présente les résultats du cas continu.

Théorème 3.1.1 *En appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal des cycles limites du système différentiel polynomial (3.2) est au plus $n^d(n-1)/2$, et ce nombre est atteint.*

Dans le théorème suivant, nous présentons les résultats pour le système différentiel polynomial discontinu par morceaux (3.3).

Théorème 3.1.2 *En appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal des cycles limites du système différentiel polynomial discontinu par morceaux (3.3) est au plus n^{d+1} , et ce nombre est atteint.*

Corollaire 3.1.1 *Selon les hypothèses du théorème 3.1.1 si $a_{00k} = b_{00k} = 0$ pour tout k , les cycles limites peuvent être choisis aussi près de l'origine de \mathbb{R}^{d+2} que nous le voulons.*

Corollaire 3.1.2 *Selon les hypothèses du théorème 3.1.2 si $a_{00k} = b_{00k} = \alpha_{00k} = \beta_{00k} = 0$ pour tout k , le nombre de cycles limites du système différentiel polynomial discontinu par morceaux (3) est au plus $n^d(n-1)$, et ce nombre est atteint. De plus, les cycles limites peuvent être choisis aussi près de l'origine de \mathbb{R}^{d+2} que nous le voulons.*

Les corollaires 3.1.1 et 3.1.2 fournissent des informations sur la bifurcation de Hopf des systèmes (3.2) et (3.3). Plus précisément, les corollaires 3.1.1 et 3.1.2

3.2. PREUVE DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

montrent qu'au moins $n^d(n-1)/2$ et $n^d(n-1)$ cycles limites des systèmes (3.2) et (3.3) peuvent bifurquer depuis l'origine de \mathbb{R}^{d+2} , respectivement. Les résultats du corollaire 3.1.1 dans le cas particulier $n=2$ coïncident avec le résultat obtenu dans le Théorème 1 de [53].

Pour prouver ces résultats, nous utilisons la méthode de moyennisation, voire par exemple [66], [74] pour une introduction générale à ce sujet. Cette méthode est utilisée depuis des années pour traiter des systèmes différentiels continus. Le principe de la moyenne a été étendu dans de nombreuses directions et récemment dans [45], les auteurs étendent la méthode de moyennisation pour détecter les cycles limites de certains systèmes différentiels discontinus, via le degré de Brouwer et la théorie de la régularisation.

À notre connaissance, cette méthode est l'une des meilleures pour déterminer les cycles limites dans les systèmes différentiels discontinus et a déjà été utilisée par certains auteurs. Dans [41], la méthode est utilisée pour déterminer le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent à partir des solutions périodiques de certaines familles de centres polynomiaux cubiques isochrones perturbés par des systèmes différentiels polynomiaux cubiques discontinus avec deux zones séparées par une ligne droite. Dans [42] les cycles limites pour les systèmes différentiels quadratiques discontinus avec deux zones ont été étudiés en utilisant la théorie de moyennisation. Toujours dans [62], la théorie de moyennisation a été appliquée pour fournir des conditions suffisantes pour l'existence de cycles limites de centres perturbés discontinus lorsque l'ensemble de discontinuité est une union des courbes régulières.

3.2 Preuve des résultats principaux

3.2.1 Preuve du théorème 3.1.1

En faisant le changement en coordonnées cylindriques

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ et } z = z, \quad (3.4)$$

le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{r} \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + b_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta), \\ \dot{r} = \varepsilon \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + b_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta), \\ \dot{z} = \varepsilon \sum_{i+j+k=0}^n c_{ijk} r^{i+j} z^k \cos^i \theta \sin^j \theta, \end{cases} \quad (3.5)$$

essentiellement pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, nous étudions l'existence de cycles limites bifurquant des orbites périodiques de ce système lorsque $\varepsilon = 0$, et qui est contenu dans l'anneau cylindrique

$$\tilde{A} = \{(\theta, r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, \theta \in \mathbb{S}^1, z \in \mathbb{R}^d\}. \quad (3.6)$$

CHAPITRE 3. NAISSANCE DE CYCLES LIMITES PAR UNE CLASSE DES
 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS CONTINUE ET DISCONTINUS DE
 DIMENSION $D + 2$

Donc pour ε suffisamment petit, $\dot{\theta} > 0$ pour chaque $(\theta, r, z) \in \tilde{A}$.

Maintenant en prenant θ comme variable indépendante, le système (3.5) devient

$$\begin{cases} r' = \varepsilon F_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z'_\ell = \varepsilon F_{\ell+1}(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.7)$$

pour $\ell = 1, \dots, d$, où le prime désigne la dérivée par rapport à la variable θ , et

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + b_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta), \\ F_{\ell+1}(\theta, r, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k c_{\ell ijk} \cos^i \theta \sin^j \theta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

pour $\ell = 1, 2, \dots, d$.

Le système (3.5) est 2π -périodique par rapport à la variable indépendante θ , et satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 pour ε_0 suffisamment petit et D fixe.

Maintenant, nous calculons la fonction moyenne $f = (f_1, f_2, \dots, f_{d+1})$ avec $T = 2\pi$.

Prenant maintenant

$$\mu_{(p,q)} = \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^q \theta d\theta,$$

notons que $\mu_{(p,q)} \neq 0$ si seulement si p et q sont simultanément pairs.

On obtient donc

$$\begin{aligned} f_1(r, z) &= \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, z) d\theta = \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n r^{i+j} z^k a_{ijk} \mu_{(i+1,j)} + \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^n r^{i+j} z^k b_{ijk} \mu_{(i,j+1)}, \\ f_{\ell+1}(r, z) &= \int_0^{2\pi} F_{\ell+1}(\theta, r, z) d\theta = \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i, j \text{ pair}}}^n r^{i+j} z^k c_{\ell ijk} \mu_{(i,j)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour $\ell = 1, 2, \dots, d$.

Nous avons divisé la preuve en deux parties. si n est impair, alors

$$f_1(r, z) = A_1 r + A_3 r^3 + \dots + A_n r^n,$$

où

$$A_p = \sum_{k=0}^{n-p} z^k \left(\sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n a_{ijk} \mu_{(i+1,j)} + \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^n b_{ijk} \mu_{(i,j+1)} \right), \quad (3.10)$$

pour $p = 1, 2, \dots, n$. On écrit donc $f_1 = r \bar{f}_1$ avec

$$\bar{f}_1(r, z) = A_1 + A_3 r^2 + \dots + A_n r^{n-1},$$

3.2. PREUVE DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

puisque $r > 0$ il suffit de résoudre $(\bar{f}_1, f_2, \dots, f_{d+1}) = (0, \dots, 0)$ pour déterminer le nombre de solutions de $f \equiv 0$. Comme \bar{f}_1 est un polynôme de degré $n - 1$ en les variables r et $z \in \mathbb{R}^d$ et $f_{\ell+1}$ sont des polynômes de degré n en les variables r et $z \in \mathbb{R}^d$ pour $\ell = 1, 2, \dots, d$, par le théorème de Bézout [25], $(\bar{f}_1, f_2, \dots, f_{d+1})$ a au plus $n^d(n - 1)$ solutions. Cependant \bar{f}_1 est pair par rapport r alors nous considérons uniquement les solutions avec $r > 0$, dans ce cas, le nombre maximum de solutions de $f \equiv 0$ est $n^d(n - 1)/2$. Maintenant, nous montrons que ce nombre est atteint. Pour cela, nous présentons un cas particulier pour lequel cela se produit. Soit $a_{ij0}, b_{ij0} \neq 0$ et on prend zéro tous les autres a_{ijk}, b_{ijk} , alors $\bar{f}_1(r, z)$ est un polynôme réel de degré $n - 1$ ne dépend pas de $z \in \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire

$$\bar{f}_1 = A_1 + A_3 r^2 + \dots + A_n r^{n-1},$$

où

$$A_p = \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n a_{ij0} \mu_{(i+1, j)} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^n b_{ij0} \mu_{(i, j+1)},$$

par contre, on prend $c_{\ell i j k} = 0$ si $i, j, k_1, k_{\ell-1}, k_{\ell+1}, \dots, k_d \neq 0$ pour chaque $\ell = 1, 2, \dots, d$ pour que

$$f_{\ell+1}(r, z) = \sum_{k_\ell=0}^n z_\ell^{k_\ell} (2\pi c_{\ell 0 0 k_\ell}),$$

Dans ce cas particulier, nous pouvons prendre a_{ij0}, b_{ij0} et $c_{\ell 0 0 k_\ell}$ pour que tous les coefficients de \bar{f}_1 et $f_{\ell+1}$ sont linéairement indépendants pour tout $\ell = 1, 2, \dots, d$. On peut donc choisir ces coefficients tel que \bar{f}_1 admet $(n - 1)/2$ racines réelles simples positives et $f_{\ell+1}$ a n racines réelles simples pour tout $\ell = 1, 2, \dots, d$. Alors $(\bar{f}_1, f_2, \dots, f_{d+1})$ a $n^d(n - 1)/2$ solutions avec $r > 0$. si n est pair, on écrit donc $f = r\bar{f}$ avec

$$\bar{f}_1(r, z) = A_1 + A_3 r^2 + \dots + A_{n-1} r^{n-2},$$

avec A_p est donné par la formule (3.10). On note que \bar{f}_1 est un polynôme de degré $n - 1$ en les variables r et z et $f_{\ell+1}$ est donné par (3.9) sont des polynômes de degré n en les variables r et z pour tout $\ell = 1, 2, \dots, d$, donc $(f_1, f_2, \dots, f_{d+1})$ a au plus $n^d(n - 1)/2$ solutions de type (r, z) avec $r > 0$.

Pour prouver que ce nombre est atteint, on considère $a_{10k_1}, b_{01k_1} \neq 0$ et on prend zéro tous les autres a_{ijk}, b_{ijk} . Alors

$$\bar{f}_1(r, z) = A_1 = \sum_{k_1=0}^{n-1} z_1^{k_1} (a_{10k_1} \mu_{(2,0)} + b_{01k_1} \mu_{(0,2)}),$$

est un polynôme de degré n en la variable z_1 . Maintenant, pour $\ell = 2, 3, \dots, d$ on prend $c_{1ij0}, c_{\ell 00k_\ell} \neq 0$ et on prend zéro tous les autres c_{lijk} pour que

$$\begin{aligned} f_2(r, z) &= \sum_{\substack{i+j=0 \\ i,j \text{ pair}}}^n r^{i+j} c_{1ij0} \mu_{(i,j)}, \\ f_{\ell+1}(r, z) &= \sum_{k_\ell=0}^n z_\ell^{k_\ell} c_{\ell 00k_\ell} 2\pi, \end{aligned}$$

pour $\ell = 2, 3, \dots, d$. Nous pouvons prendre $a_{10k_1}, b_{01k_1}, c_{1ij0}$ et $c_{\ell 00k_\ell}$ pour que tous les coefficients de f_1 et $f_{\ell+1}$ pour $\ell = 1, 2, \dots, d$, sont linéairement indépendants. On peut donc choisir ces coefficients tel que f_1 a $n - 1$ racines réelles simples, f_2 a $n/2$ racines réelles positives simples et $f_{\ell+1}$ a n racines réelles simples pour chaque $\ell = 2, 3, \dots, d$. Dans ce cas $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{d+1}) = (0, \dots, 0)$ a $n^4(n - 1)/2$ solutions avec $r > 0$. De plus, par l'indépendance des coefficients, ces solutions peuvent être prises de manière à ce que le jacobien de f dans toutes ces solutions soit non nul.

3.2.2 Preuve du théorème 3.1.2

De façon analogue à ce que nous avons fait dans la preuve du théorème précédente (théorème 3.1.1), nous étudierons l'existence de cycles limites bifurquant des solutions périodiques du système (3.3) lorsque $\varepsilon = 0$ qui sont contenus dans l'anneau cylindrique \tilde{A} défini par (3.6).

Dans \tilde{A} on a pour ε suffisamment petit $\dot{\theta} > 0$ pour tout $(\theta, r, z) \in \tilde{A}$. En prenant θ comme variable indépendante, le système (3.3) devient

$$\begin{cases} \begin{cases} r' = \varepsilon F_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z'_\ell = \varepsilon F_{\ell+1}(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases} & \text{si } h(\theta, r, z) > 0, \\ \begin{cases} r' = \varepsilon G_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z'_\ell = \varepsilon G_{\ell+1}(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases} & \text{si } h(\theta, r, z) < 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} G_1(\theta, r, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (\alpha_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \beta_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta), \\ G_\ell(\theta, r, z) &= \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k \gamma_{lijk} \cos^i \theta \sin^j \theta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

pour $\ell = 1, 2, \dots, d$, F_1 et F_2 donné par (3.5), et $h(\theta, r, z) = \sin \theta$. Alors pour $(\theta, r, z) \in h^{-1}(0)$ on a

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, r, z)|_{\theta \in \{0, \pi\}} = \cos \theta|_{\theta \in \{0, \pi\}} = \pm 1 \neq 0.$$

3.2. PREUVE DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Prenant maintenant

$$I_{(p,q)} = \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^q \theta d\theta \quad \text{et} \quad I_{(p,q)} = \int_{\pi}^{2\pi} \cos^p \theta \sin^q \theta d\theta.$$

Alors $(-1)^q J_{(p,q)} = I_{(p,q)}$ et $I_{(p,q)} = J_{(p,q)} = 0$ si seulement si p est impair. Nous avons donc

$$\begin{aligned} f_1(r, z) &= \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, z) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} G_1(\theta, r, z) d\theta, \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ impair}}}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} + (-1)^j \alpha_{ijk}) I_{(i+1,j)} \\ &\quad + \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ pair}}}^n r^{i+j} z^k (b_{ijk} - (-1)^j \beta_{ijk}) I_{(i,j+1)}, \quad (3.13) \\ f_{\ell+1}(r, z) &= \int_0^{\pi} F_{\ell+1}(\theta, r, z) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} G_{\ell+1}(\theta, r, z) d\theta, \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=0 \\ i \text{ pair}}}^n r^{i+j} z^k (c_{\ell ijk} + (-1)^j \gamma_{\ell ijk}) I_{(i,j)}, \end{aligned}$$

pour $\ell = 1, 2, \dots, d$.

Alors $f_{\ell+1}$ sont des polynômes de degré n pour chaque $\ell = 0, 1, \dots, d$. Par le théorème de Bézout, f a au plus n^{d+1} solutions (avec $r > 0$).

Pour prouver que ce nombre est atteint, nous choisissons un exemple particulier. on considère $a_{ij0} - (-1)^j \alpha_{ij0}$, $b_{ij0} - (-1)^j \beta_{ij0} \neq 0$ et on prend zéro tous les autres $a_{ijk} - (-1)^j \alpha_{ijk}$, $b_{ijk} - (-1)^j \beta_{ijk}$. Alors f_1 est un polynôme de degré n en la variable r et ne dépend pas de z .

De façon analogue pour chaque $\ell = 1, 2, \dots, d$. On prend $c_{\ell 00k_\ell} + \gamma_{\ell 00k_\ell} \neq 0$ et on prend zéro tous les autres $c_{\ell ijk} + \gamma_{\ell ijk}$, pour que

$$f_{\ell+1}(r, z) = \sum_{k_\ell=0}^n z_\ell^{k_\ell} (c_{\ell 00k_\ell} + \gamma_{\ell 00k_\ell}) \pi.$$

Dans ces conditions, tous les coefficients de f_1 et $f_{\ell+1}$ pour $\ell = 1, 2, \dots, d$. peut être considérée comme étant linéairement indépendante du choix approprié de a_{ij0} , α_{ij0} , b_{ij0} , β_{ij0} , $c_{\ell 00k_\ell}$ et $\gamma_{\ell 00k_\ell}$. De telles valeurs peuvent être prises pour que f_1 est un polynôme de degré n en variable r , et donc il peut avoir n racines réelles positives simples. De plus pour chaque $\ell = 1, 2, \dots, d$, $f_{\ell+1}$ sont des polynôme en variable z_ℓ a n racines

réelles simples. Donc pour ce cas particulier, le nombre de racines de f est n^{d+1} . par l'indépendance des coefficients, de telles solutions peuvent être prises pour que le jacobien de f évalué à elles ne soit pas nul.

3.2.3 Preuve de corollaire 3.1.1

En faisant le changement en coordonnées cylindriques (3.4) et on prend $a_{00k} = b_{00k} = 0$ pour tout k , le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + b_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta), \\ \dot{r} = \varepsilon \sum_{i+j+k=0}^n r^{i+j} z^k (a_{ijk} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + b_{ijk} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta), \\ \dot{z}_\ell = \varepsilon \sum_{i+j+k=0}^n c_{\ellijk} r^{i+j} z^k \cos^i \theta \sin^j \theta, \end{cases}$$

pour $\ell = 1, 2, \dots, d$.

Comme r n'apparaît pas dans le dénominateur de $\dot{\theta}$, si ε est suffisamment petit $\theta > 0$ pour chaque (θ, r, z) dans une boule B d'un rayon donné arbitraire autour de l'origine de \mathbb{R}^{d+2} . Dans la boule B la variable r peut être approchée à zéro que nous voulons, cela ne peut se produire avec l'anneau cylindrique \tilde{A} . Ici les calculs sont effectués de manière analogue comme dans la preuve du théorème 3.1.1, et on obtient le même nombre maximal de zéros de la fonction de moyenne pour le système (3.7) avec $a_{00k} = b_{00k} = 0$.

3.2.4 Preuve de corollaire 3.1.2

Le même argument ci-dessus peut être utilisé pour prouver le corollaire 3.1.2 et nous suivons les étapes présentée dans la preuve du théorème 3.1.2. Plus précisément, en faisant le changement en coordonnées cylindriques (3.4) au système (3) et on prend $a_{00k} = \alpha_{00k} = b_{00k} = \beta_{00k} = 0$ pour tout k afin d'obtenir une expression pour θ dans les deux systèmes $y > 0$ et $y < 0$ avec un dénominateur qui ne dépend pas de r . Donc pour ε suffisamment petit, on a $\dot{\theta} > 0$ pour tout (r, θ, z) dans la boule B de la preuve du corollaire 3.1.1. Puisque l'exposant $i + j$ de la variable r dans le polynôme f_1 , donné par (3.13), est au moins un car i est impair, on a

$$f_1(r, z) = A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n, \quad (3.14)$$

avec

$$A_p = \sum_{k=0}^{n-p} \sum_{\substack{i+j=p \\ i \text{ impair}}}^n z^k (a_{ijk} + (-1)^j \alpha_{ijk}) I_{(i+1, j)} + \sum_{k=0}^{n-p} \sum_{\substack{i+j=p \\ i \text{ pair}}}^n z^k (b_{ijk} - (-1)^j \beta_{ijk}) I_{(i, j+1)}, \quad (3.15)$$

3.2. PREUVE DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

pour $p = 1, 2, \dots, n$.

Par conséquent, on obtient $f_1 = r\bar{f}_1$ où

$$\bar{f}_1(r, z) = A_1 + A_2r + \dots + A_nr^{n-1}.$$

Comme $r > 0$, les solutions de $(f_1, f_2, \dots, f_{d+1}) = (0, \dots, 0)$ sont équivalent à résoudre $(\bar{f}_1, f_2, \dots, f_{d+1}) = (0, \dots, 0)$. où \bar{f}_1 est un polynôme de degré $n - 1$ et les fonctions $f_{\ell+1}$ données par (3.13) sont des polynômes de degré n pour chaque $\ell = 1, 2, \dots, d$. Par le théorème de Bézout f a au plus $n^d(n - 1)$ solutions (avec $r > 0$).

Pour prouver que ce nombre est atteint, nous choisissons un exemple particulier. Cette étape de cette preuve est effectuée comme dans la preuve du théorème 3.1.1 pour obtenir le nombre maximum de zéros de la fonction de moyenne pour le système (3.11) avec $a_{00k} = \alpha_{00k} = b_{00k} = \beta_{00k} = 0$. Encore une fois dans la boule B , la variable r peut être approchée à zéro comme nous le voulons.

CHAPITRE 4

Cycles limites des champs de vecteurs polynomiaux discontinus par morceaux

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m, \end{cases}$$

lorsqu'il est perturbé par une classe de systèmes différentiels polynomiaux discontinus par morceaux de degré n avec k pièces.

4.1 Introduction et résultats principaux

L'un des principaux problèmes dans la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires réels est la détermination de leurs cycles limites. La notion de cycle limite d'un système différentiel plane a été définie par Poincaré [63], comme étant une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système différentiel. Van der Pol [64], Liénard [37] et Andronov [1] à la fin des années 1920 ont prouvé qu'une orbite périodique d'une oscillation auto-soutenue survenant dans un circuit de tubes à vide était un cycle limite au sens défini par Poincaré. Après ces résultats sur l'existence, la non-existence et d'autres propriétés des cycles limites, ceux-ci ont été étudiés avec intérêt par les mathématiciens et les physiciens, et plus récemment aussi par de nombreux scientifiques de différents domaines (voir par exemple les livres [16], [75]).

Dans la dernière partie du XIXe siècle, Poincaré [63] a défini la notion de centre d'un véritable système différentiel planaire, c'est-à-dire d'un point d'équilibre isolé ayant un voisinage tel que toutes les orbites de ce voisinage sont périodiques à l'exception unique du point d'équilibre. Plus tard, une façon de produire des cycles

4.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

limites est de perturber les orbites périodiques d'un centre [65].

Iliev [33] en 1999 a considéré le champ de vecteurs polynomiaux

$$\chi(x, y) = (-y + \varepsilon P(x, y, \varepsilon), x + \varepsilon Q(x, y, \varepsilon)),$$

de degré $n > 1$ (c'est-à-dire le degré maximal des polynômes P et Q est n), qui dépendent analytiquement du petit paramètre ε , et il a étudié combien de cycles limites peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Buicà, Giné et Llibre [14] ont étudié le même problème d'Iliev mais pour le champ de vecteurs polynomiaux

$$\chi(x, y) = \left(-y \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^m + \varepsilon P(x, y, \varepsilon), x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^m + \varepsilon Q(x, y, \varepsilon) \right),$$

de degré maximal $2m + 1$ et n étant le degré maximal des polynômes P et Q , où ε est un paramètre suffisamment petit, et $m \geq 1$ est un nombre entier. Sachant que les cycles limites bifurquant des solutions périodiques du centre non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m. \end{cases}$$

Andronov, Vitt et Khaikin [2] ont commencé l'étude des systèmes différentiels continus et discontinus par morceaux. Ces systèmes jouent un rôle important à l'intérieur des systèmes dynamiques non-linéaires. Ils sont apparus de manière naturelle dans les modèles d'ingénierie non linéaires, et plus tard dans l'ingénierie électronique, les systèmes de contrôle non linéaires, la biologie, ... voir par exemple les livres de Di Bernardo, Budd, Champneys et Kowalczyk [7], Simpson [70], et l'enquête de Markarenkov et Lamb [60], et les centaines de références citées dans ces trois derniers ouvrages.

Il existe de nombreuses études sur les cycles limites des systèmes différentiels continus et discontinus par morceaux dans \mathbb{R}^2 avec deux pièces séparés par une ligne droite. En général, ces systèmes différentiels sont linéaires, voir par exemple [3], [11], [15], [24], [22], [23], [27], [30], [32], [28], [29], [46], [48], [52], [69]. Mais il y a très peu de travaux sur les systèmes différentiels continus et discontinus par morceaux avec un nombre arbitraire k , de pièces. L'objectif de ce travail est d'étudier le nombre de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre

$$\begin{cases} \dot{x} = -y((x^2 + y^2)/2)^m, \\ \dot{y} = x((x^2 + y^2)/2)^m. \end{cases} \quad (4.1)$$

lorsqu'il est perturbé par une classe de systèmes différentiels polynomiaux discontinus par morceaux de degré n avec k pièces. Plus précisément, nous considérons le champ de vecteurs polynomiaux planaires

$$\chi = \chi(x, y) = \left(-y \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^m, x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^m \right),$$

CHAPITRE 4. CYCLES LIMITES DES CHAMPS DE VECTEURS
POLYNOMIAUX DISCONTINUS PAR MORCEAUX

avec $m = 0$ (centre linéaire) ou m un entier positif (centre non linéaire), et nous perturbons χ par un champ de vecteurs polynomiaux discontinu par morceaux comme suit

$$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x, y) = \chi(x, y) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \chi_{S_i}(x, y) (P_i(x, y), Q_i(x, y)) \quad (4.2)$$

où P_i et Q_i sont des polynômes de degré au plus n , la fonction caractéristique χ_K d'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^2$ est définie par

$$\chi_K(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in K, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin K, \end{cases}$$

et les ensembles S_1, \dots, S_k satisfaisant $\bigcup_{i=1}^k \overline{S_i} = \mathbb{R}^2$ et $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ sont définis comme suit. Pour un entier positif donné k , considérons k angles $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_k < 2\pi$. Alors, l'ensemble de discontinuité Σ pour le champ de vecteurs différentiel polynomiaux discontinus χ_ε est $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k L_i$, où L_i est le rayon commençant à l'origine et passant par le point $(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ pour $i = 1, \dots, k$, S_i est l'intérieur du secteur avec des frontières les rayons L_{i-1} et L_i allant de L_{i-1} à L_i dans le sens des aiguilles, et S_1 est l'intérieur du secteur avec des frontières les rayons L_k et L_1 allant de L_k à L_1 dans le sens contraire des aiguilles

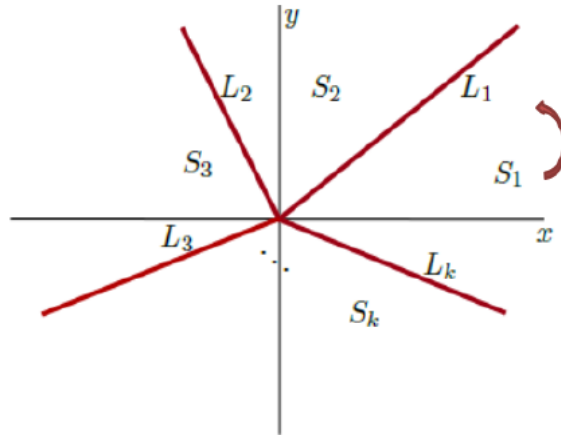


Fig 4.1. Les secteurs S_i et les rayons L_i ,
pour $i = 1, \dots, k$.

Théorème 4.1.1 *Supposons que la fonction moyenne de premier ordre associée au système différentiel polynomial discontinu par morceaux χ_ε est différent de zéro. Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites de χ_ε est n . De plus, cette borne supérieure est atteinte.*

4.2 Preuve du théorème 4.1.1

Nous écrivons les polynômes P_i et Q_i qui apparaissent dans la définition du champ de vecteurs χ_ε comme suit

$$P(x, y) = \sum_{s=0}^n \sum_{j=s}^n a_{s,j-s}^i x^s y^{j-s} \text{ and } Q(x, y) = \sum_{s=0}^n \sum_{j=s}^n b_{s,j-s}^i x^s y^{j-s},$$

avec $i = 1, \dots, k$. Faire le changement de variables $(x, y) \mapsto (\theta, \rho)$, où (θ, ρ) sont les coordonnées polaires définies par $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, avec $\rho > 0$. Alors le système différentiel associée au champ de vecteurs χ_ε en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon \sum_{i=1}^k (\cos \theta (\chi_{S_i} \cdot P_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + (\chi_{S_i} \cdot Q_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)), \\ \dot{\theta} = \frac{\rho^{2m}}{2^m} + \frac{\varepsilon}{\rho} \sum_{i=1}^k (\cos \theta (\chi_{S_i} \cdot Q_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \sin \theta (\chi_{S_i} \cdot P_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)). \end{cases} \quad (4.3)$$

En prenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système différentiel précédent devient

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \varepsilon F(\theta, \rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.4)$$

où

$$F(\theta, \rho) = \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^k (\cos \theta (\chi_{S_i} \cdot P_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta (\chi_{S_i} \cdot Q_i) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)), \quad (4.5)$$

Par conséquent, la fonction moyenne associée à l'équation différentielle (4.4) est

$$\begin{aligned} f_n(\rho) &= \int_0^{2\pi} F(\theta, \rho) d\theta, \quad (4.6) \\ &= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\cos \theta P_i (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta Q_i (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)) d\theta, \\ &= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\cos \theta \sum_{s=0}^n \sum_{j=s}^n a_{s,j-s}^i \rho^i \cos^s \theta \sin^{j-s} \theta \\ &\quad + \sin \theta \sum_{s=0}^n \sum_{j=s}^n b_{s,j-s}^i \rho^j \cos^s \theta \sin^{j-s} \theta) d\theta, \end{aligned}$$

Extrait du résumé de la méthode de la moyennisation du premier ordre pour les champs de vecteurs discontinus de la forme (4.4) donnée dans le chapitre 2, on sait

que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, chaque zéro simple de la fonction moyenne $f_n(\rho)$ fournit un cycle limite de l'équation différentielle (4.4). Pour étudier les zéros simples de la fonction $f_n(\rho)$ nous appliquerons le théorème de Descartes. Nous rappelons le théorème de Descartes sur le nombre des racines d'un polynôme réel (pour une preuve voir par exemple [6]).

Théorème 4.2.1 (Théorème de Descartes). *On considère le polynôme réel $p(\rho) = a_{i_1}\rho^{i_1} + a_{i_2}\rho^{i_2} + \dots + a_{i_r}\rho^{i_r}$ avec $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ et $a_{i_j} \neq 0$ constantes réelles pour $j \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$. lorsque $a_{i_j}a_{i_{j+1}} < 0$, nous disons que a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ ont une variation de signe. Si le nombre de variations de signes est m , alors $p(\rho)$ a au plus m racines réelles positives. De plus, il est toujours possible de choisir les coefficients de $p(\rho)$ de telle sorte que $p(\rho)$ a exactement r racines réelles positives.*

Lemme 4.2.1 *La fonction moyenne $f_n(\rho)$ est une combinaison linéaire de l'ensemble de fonctions linéairement indépendantes $\mathcal{F}_n = \{\rho^{-2m}, \rho^{-2m+1}, \dots, \rho^{-2m+n}\}$. Plus précisément*

$$f_n(\rho) = \sum_{r=0}^n 2^m A_r \rho^{-2m+1},$$

où

$$A_r = \sum_{r=0}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{s=0}^r \left(a_{s,r-s}^i \cos^{s+1} \theta \sin^{r-s} \theta + b_{s,r-s}^i \cos^s \theta \sin^{r+1-s} \theta \right) d\theta,$$

pour $r = 0, 1, \dots, n$.

Preuve. Il est clair que \mathcal{F}_n est un ensemble linéairement indépendant de $n + 1$ fonctions. Nous allons maintenant prouver par récurrence pour n la fonction $f_n(\rho)$ est une combinaison linéaire de l'ensemble de fonctions linéairement indépendant \mathcal{F}_n . En effet, si $n = 1$ par calcul direct, nous avons

$$f_1(\rho) = 2^m \rho^{-2m} [A_0 + A_1],$$

où

$$A_0 = \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (a_{0,0}^i \cos \theta + b_{0,0}^i \cos^s \theta \sin \theta) d\theta,$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\cos \theta (a_{0,1}^i \sin \theta + a_{1,0}^i \cos \theta) + \sin \theta (b_{0,1}^i \sin \theta + b_{1,0}^i \cos \theta)) d\theta,$$

4.2. PREUVE DU THÉORÈME 4.1.1

Le lemme est donc valable pour $n = 1$.

Par l'hypothèse d'induction, nous supposons que $f_{n-1}(\rho)$ est une combinaison linéaire des fonctions dans \mathcal{F}_{n-1} , c'est-à-dire

$$f_{n-1}(\rho) = \sum_{r=0}^{n-1} 2^m A_r \rho^{-2m+r},$$

où

$$A_r = \sum_{r=0}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{s=0}^r \left(a_{s,r-s}^i \cos^{s+1} \theta \sin^{r-s} \theta + b_{s,r-s}^i \cos^s \theta \sin^{r+1-s} \theta \right) d\theta,$$

pour $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Pour n , par intégration directe de la fonction moyenne, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(\rho) &= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(\cos \theta \sum_{s=0}^n \sum_{j=0}^n a_{s,j-s}^i \rho^i \cos^s \theta \sin^{j-s} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \sum_{s=0}^n \sum_{j=0}^n b_{s,j-s}^i \rho^j \cos^s \theta \sin^{j-s} \theta \right) d\theta, \\ &= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{j=s}^{n-1} a_{s,j-s}^i \rho^i \cos^{s+1} \theta \sin^{j-s} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=0}^n a_{s,j-s}^i \rho^n \cos^{s+1} \theta \sin^{n-s} \theta + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{j=s}^{n-1} b_{s,j-s}^i \rho^i \cos^s \theta \sin^{j-s+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=0}^n b_{s,j-s}^i \rho^n \cos^s \theta \sin^{n+1-s} \theta \right) d\theta, \\ &= f_{n-1}(\rho) + \frac{2^m}{\rho^{2m-n}} \sum_{i=1}^k \left(\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(\sum_{s=0}^n a_{s,n-s}^i \cos^{s+1} \theta \sin^{n-s} \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{s=0}^n b_{s,n-s}^i \cos^s \theta \sin^{n+1-s} \theta \right) d\theta, \right. \\ &= f_{n-1}(\rho) + 2^m \rho^{-2m+n} A_n, \end{aligned}$$

où

$$A_n = \sum_{i=1}^k \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{s=0}^n \left(a_{s,n-s}^i \cos^{s+1} \theta \sin^{n-s} \theta + b_{s,n-s}^i \cos^s \theta \sin^{n+1-s} \theta \right) d\theta,$$

Ceci complète la preuve de l'induction et par conséquent du lemme. Pour chaque $r = 0, 1, \dots, n$, le lemme 4.2.1 s'assure que les coefficients $a_{s,r-s}^i$ et $b_{s,r-s}^i$ du champ

de vecteurs χ_ε qui apparaissent dans A_r sont choisis arbitrairement. Il s'ensuit donc que la fonction de moyenne $f_n(\rho)$ est une combinaison arbitraire de fonctions dans l'ensemble \mathcal{F}_n . En utilisant le théorème de Descartes, il s'ensuit que $f_n(\rho)$ peut avoir au plus n racines simples, et donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit le champ de vecteurs discontinus χ_ε peut avoir au plus n cycles limites si $f_n(\rho)$ n'est pas identique à zéro. Ceci complète la preuve du théorème 4.1.1. ■

4.3 Exemples

Afin d'illustrer le résultat du théorème 4.1.1, nous fixons $m = 1$ et supposons que \mathbb{R}^2 se divise en deux secteurs S_1 et S_2 définis par les valeurs $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = 3\pi/2$. Pour $n = 1$ on considère le champ de vecteurs polynomiaux discontinus par morceaux

$$\chi_\varepsilon(x, y) = \left(-\frac{y}{2}(x^2 + y^2), \frac{x}{2}(x^2 + y^2) \right) + \begin{cases} \left(\frac{2\varepsilon x}{\pi}, \varepsilon y \right) & \text{si } (x, y) \in S_1, \\ (\varepsilon(1 - y), -\varepsilon y) & \text{si } (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

en appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre pour le champ de vecteurs discontinus on trouve la fonction moyenne

$$f_1(\rho) = (2\rho - 4)/\rho^2,$$

ayant une racine simple positive unique $\rho = 2$. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le champ de vecteurs discontinus χ_ε a un cycle limite $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ tel qu'il tend vers le cercle de rayon 2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour $n = 2$ on considère le champ de vecteurs polynomiaux discontinus par morceaux

$$\chi_\varepsilon(x, y) = \left(-\frac{y}{2}(x^2 + y^2), \frac{x}{2}(x^2 + y^2) \right) + \begin{cases} (\varepsilon(1 - x^2 - xy + y^2), -\varepsilon y^2) & \text{si } (x, y) \in S_1, \\ \left(-2\varepsilon y, -\varepsilon y \left(\frac{10}{3\pi} + \frac{3x}{2} \right) \right) & \text{si } (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

Puis sa fonction moyenne

$$f_2(\rho) = (2\rho^2 - 10\rho + 12)/(3\rho^2),$$

ayant deux racines positives, 2 et 3. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le champ de vecteurs discontinus χ_ε admet deux cycles limites $(x_i(t, \varepsilon), y_i(t, \varepsilon))$ pour $i = 1, 2$ de telle sorte qu'ils tendent vers les cercles de rayon 2 et 3 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3. EXEMPLES

pour $n = 3$ on considère le champ de vecteurs polynomiaux discontinus par morceaux

$$\chi_\varepsilon(x, y) = \left(-\frac{y}{2}(x^2 + y^2), \frac{x}{2}(x^2 + y^2) \right) + \begin{cases} (\varepsilon(2 + 4xy + y^3), -4\varepsilon x) & \text{si } (x, y) \in S_1, \\ \left(6\varepsilon y, \varepsilon \left(-\frac{26y}{3\pi} - \frac{9xy}{4} - \frac{4x^2y}{3\pi} \right) \right) & \text{si } (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

Puis sa fonction moyenne

$$f_3(\rho) = (-\rho^3 + 9\rho^2 - 26\rho + 24)/(3\rho^2),$$

ayant trois racines simples positives, 2, 3 et 4. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le champ de vecteurs discontinus χ_ε admet trois cycles limites $(x_i(t, \varepsilon), y_i(t, \varepsilon))$ pour $i = 1, 2, 3$ de telle sorte qu'ils tendent vers les cercles de rayon 2, 3 et 4 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Conclusion

On s'intéresse, dans ce mémoire, au nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire et non linéaire. Plus précisément, nous avons étudié le nombre maximum des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire perturbé par une classe des systèmes différentiels polynomiaux continus et discontinus dans \mathbb{R}^{d+2} . Nous avons aussi étudié le nombre maximum des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre non linéaire perturbé par une classe des champs de vecteurs polynomiaux discontinus dans \mathbb{R}^2 .

L'application de la méthode de moyennisation aux systèmes différentiels polynomiaux continus et discontinus a donné des résultats importants.

Dans notre travail futur, si Dieu le veut, on pensera d'étudier les cycles limites par la méthode de moyennisation en utilisant de nouvelles idées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.A. Andronov, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 559 – 561.
- [2] A. Andronov, A. Vitt and S. Khaikin, Theory of Oscillations, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [3] J.C. Artés, J. Llibre, J.C. Medrado and M.A. Teixeira, Piecewise linear differential systems with two real saddles, Math. Comp. Sim. **95** (2013), 13 – 22.
- [4] S. Badi, A. Makhlof, Limit cycles of the generalized Liénard differential equation via averaging theory, Electron. J. Differential Equations 2012, No. 68, 11 pp.
- [5] E.A. Barbashin, Introduction to the Theory of Stability (T. Lukes, Ed.), Noordhoff, Groningen (1970).
- [6] I.S. Berezin and N.P. Zhidkov, Computing Methods, Volume II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [7] M. Di Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys and P. Kowalczyk, Piecewise-smooth dynamical systems : theory and applications, Appl. Math. Sci. Vol. **163**, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [8] F. Bizzari, M. Storace and A.Colombo, Bifurcation analysis of an impact model for forest fire prediction, Int. J. Bifurcation and Chaos **18** (2008), 2275 – 2288.
- [9] N. N. Bogoliubov, On some statistical methods in mathematical physics, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [10] I. Boussaada, A. R. Chouikha, Existence of periodic solution for perturbed generalized Li enard equations, Electron. J. Differential Equations 2006, No. 140, 10 pp.
- [11] D.C. Braga and L.F. Mello, Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane, Nonlinear Dynamics **73** (2013), 1283 – 1288.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] B. Brocisinto, *Nonsmooth Mechanics*, New York ; Springer-Verlag, 1999.
- [13] F. Browder, Fixed point theory and nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1983), 1 – 39.
- [14] A. Buică, J. Giné, J. Llibre, Bifurcation of limit cycles from a polynomial degenerate center, *Advanced Nonlinear Studies* **10** (2010), 597 – 609.
- [15] C. Buzzzi, C. Pessoa and J. Torregrosa, Piecewise linear perturbations of a linear center, *Discrete Continuous Dyn. Syst.* **9** (2013), 3915 – 3936.
- [16] S.N. Chow, C. Li and D. Wang, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [17] C. J. Christopher, S. Lynch ; Small-amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic dumping or restoring forces, *Nonlinearity* **12** (1999), 1099 – 1112.
- [18] A. Cima, J. Llibre and M.A. Teixeira, Limit cycles of some polynomial differential systems in dimension 2,3 and 4, via averaging, *Applicable Analysis, an International J.* **87** (2007), 149 – 164.
- [19] D.R.J. Chillingworth, Discontinuity geometry for an impact oscillator, *Dyn. Syst.* **17** (2002), 389 – 420
- [20] S. Coombes, Neuronal networks with gap junctions : A study of piecewise linear planar neuron models, *SIAM Applied Mathematics* **7** (2008), 1101 – 1129.
- [21] F. Dumortier, D. Panazzolo, R. Roussarie, More limit cycles than expected in Liénard systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 1895 – 1904.
- [22] E. Freire, E. Ponce and F. Torres, Canonical Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems, *SIAM J. Applied Dynamical Systems* **11** (2012), 181 – 211.
- [23] E. Freire, E. Ponce and F. Torres, A general mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones, *Nonlinear Dynamics* **78** (2014), 251 – 263.
- [24] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo and F. Torres, Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **8** (1998), 2073 – 2097.
- [25] W. Fulton, *Algebraic curves*, *Mathematics Lecture. Note Series*, Benjamin, 1974.
- [26] A. Gasull, J. Torregrosa, Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity, *J. Differential Equations* **159** (1998), 1015 – 1039.
- [27] F. Giannakopoulos and K. Pliete, Planar systems of piecewise linear differential equations with a line of discontinuity, *Nonlinearity* **14** (2001), 1611 – 1632.
- [28] S.M. Huan and X.S. Yang, On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node–node types, *J. Math. Anal. Appl.* **411** (2013), 340 – 353.

- [29] S.M. Huan and X.S. Yang, Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle–saddle dynamics, *Nonlinear Anal.* **92** (2013), 82 – 95.
- [30] M. Han and W. Zhang, On Hopf bifurcation in non–smooth planar systems, *J. of Differential Equations* **248** (2010), 2399 – 2416.
- [31] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 253 – 297; English transl., *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902), 437 – 479; *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **37** (2000), 407 – 436.
- [32] S.M. Huan and X.S. Yang, On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A* **32** (2012), 2147 – 2164.
- [33] I.D. Iliev, The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator, *Mat. Proc. Camb. Phil. Soc.* **127** (1999), 317 – 322.
- [34] Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert’s 16th problem, *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **39** (2002), 301 – 354.
- [35] T. Ito, A Filippov solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides, *Economic Letters* **4** (1979), 349 – 354.
- [36] V. Krivan, On the Gause predator-prey model with a refuge : A fresh look at the history, *J. of Theoretical Biology* **274** (2011), 67 – 73.
- [37] A. Liénard, Etude des oscillations entretenues, *Rev. Générale de l’Electricité* **23** (1928), 901 – 912, 946 – 954.
- [38] J. Li, Hilbert’s 16 th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **13** (2003), 47 – 106.
- [39] A. Lins, W. de Melo, C.C. Pugh; On Liénard’s Equation, *Lecture Notes in Math* **597**, Springer, Berlin, (1977), pp. 335 – 357.
- [40] C. Li, J. Llibre; Uniqueness of limit cycle for Liénard equations of degree four, *J. Differential Equations* **252** (2012), 3142 – 3162.
- [41] J. Llibre, B.D. Lopes and J.R. de Moraes, Limit cycles for a class of continuous and discontinuous cubic polynomial differential systems, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **13** (2014), 129 – 148.
- [42] J. Llibre and A. C. Mereu, Limit cycles for discontinuous quadratic differential systems with two zones, *J. of Mathematical Analysis and Applications (Print)*, **413** (2013), 763 – 775.
- [43] J. Llibre, A. C. Mereu, M. A. Teixeira, Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **148** (2010) 363 – 383.
- [44] J. Llibre, A.C. Mereu and D.D. Novaes, Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems, *J. Differential Equations* **258** (2015), 4007–4032.

- [45] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems, arXiv :1205.4211 [math.DS].
- [46] J. Llibre, M. Ordóñez and E. Ponce, On the existence and uniqueness of limit cycles in a planar piecewise linear systems without symmetry, *Nonlinear Analysis Series B : Real World Applications* **14** (2013), 2002 – 2012.
- [47] J. Llibre and E. Ponce, Global first harmonic bifurcation diagram for nonlinear control systems, *Dynamics and Stability of Systems* **11** (1996), 49 – 88.
- [48] J. Llibre and E. Ponce, Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Serie B* **19** (2012), 325 – 335.
- [49] J. Llibre, E. Ponce and J. Ros, Algebraic determination of limit cycles in 3 - dimensional piecewise linear differential systems, *Nonlinear Analysis* **74** (2011), 6712 – 6727.
- [50] J. Llibre, E. Ponce, J. Ros and F. Torres, On the fold-Hopf bifurcation for continuous piecewise differential systems with symmetry, *Chaos* **20** (2010), 033119, pp 13.
- [51] J. Llibre, E. Ponce and A. Teruel, Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in \mathbb{R}^3 , *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **17** (2007), 1171 – 1184.
- [52] J. Llibre, M.A. Teixeira and J. Torregrosa, Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **23** (2013), 1350066, pp. 10.
- [53] J. Llibre and X. Zhang, Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method, *Pacific J.of Math.* **240** (2009), 321 – 341.
- [54] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [55] S. Lynch, Limit cycles if generalized Liénard equations, *Applied Math. Letters* **8** (1995), 15 – 17.
- [56] S. Lynch, Generalized quadratic Li enard equations, *Applied Math. Letters* **11** (1998), 7 – 10.
- [57] S. Lynch, Generalized cubic Li enard equations, *Applied Math. Letters* **12** (1999), 1 – 6.
- [58] S. Lynch, C. J. Christopher, Limit cycles in highly non-linear differential equations, *J. Sound Vib.* **224** (1999), 505 – 517.
- [59] P. De Maesschalck, F. Dumortier ; Classical Liénard equation of degree $n \geq 6$ can have $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$ limit cycles, *J. Differential Equations* **250** (2011), 2162–2176.
- [60] O. Makarenkov and J.S.W. Lamb, Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems : A survey, *Physica D* **241** (2012), 1826 – 1844.

- [61] N. Minorski, *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, New York, 1962.
- [62] D.D. Novars, On nonsmooth perturbations of nondegenerate planar centers, to appear in *Publicacions Matemàtiques*, Vol. Extra (2014), 395 – 420.
- [63] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I, II, *J. Math. Pures Appl.* **7** (1881), 375 – 422; **8** (1882), 251 – 96; Sur les courbes définies par les équation différentielles III, IV 1 (1885), 167 – 244; **2** (1886), 155 – 217.
- [64] van der Pol, On relaxation–oscillations, *Phil. Mag.* **2** (1926), 978 – 992.
- [65] L.S. Pontrjagin, Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **6** (1934), 25 – 28.
- [66] J.A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, *Applied Mathematical Sci.*, vol. **59**, Springer, New York, 2007.
- [67] I.R. Shafarevich, *IR Basic algebraic geometry*, Translated from the Russian by KA Hirsch. Revised printing of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **213** (1974).
- [68] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, *Mathematical Intelligencer* **20** (1998), 7 – 15.
- [69] S. Shui, X. Zhang and J. Li, The qualitative analysis of a class of planar Filippov systems, *Nonlinear Anal.* **73** (2010), 1277 – 1288.
- [70] D.J.W. Simpson, *Bifurcations in Piecewise–Smooth Continuous Systems*, *World Scientific Series on Nonlinear Science A*, vol **69**, World Scientific, Singapore, 2010.
- [71] M.A. Teixeira, *Perturbation theory for non-smooth systems*, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* **22**, Springer, New York (2009), 6697 – 6719.
- [72] A. Tonnelier, The McKean’s caricature of the FitzHugh-Nagumo model I. The space-clamped system, *SIAM J. Appl. Math.* **63** (2003), 459 – 484.
- [73] A. Tonnelier and W. Gerstner, Piecewise linear differential equations and integrate-and-fire neurons : Insights from two-dimensional membrane models, *Phys Rev. E* **67** 021908 (2003).
- [74] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [75] Ye Yanqian, *Theory of Limit Cycles*, *Translations of Math. Monographs* **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [76] P. Yu, M. Han, Limit cycles in generalized Liénard systems, *Chaos, Solitons and Fractals* **30** (2006), 1048 – 1068.

Appendice

Dans cet appendice on utilise le logiciel de Maple pour simplifier les expressions mathématiques, calculer les intégrales, tracer les courbes etc...