



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux derivée partielles et applications

Thème :

Stabilité Globale d'un modèle épidémique (SVEIR) avec vaccination et temps de latence

Présenté Par :

GHERBI Aida

MALKIA Roukaia

Devant le jury :

Mr : NOURI Boumaaza	MCA	Université Larbi Tébessi	Président
Ms : MAZHOUD Rachida	MAA	Université Larbi Tébessi	Examinatrice
Mr : NABTI Abderrazak	MCA	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 25 /06/2020

Remerciements

A l'issue de ce modeste travail, nous tenons tout d'abord à remercier "Dieu"

Qui nous donné le courage, la patience a fini notre travail.

Nous voudrions dans un premier temps à remercier notre encadrant

ABDERRAZAK Nabti, pour son aide, ses précieux conseils qui ont été nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Je remercie également tous les membres du jury Ms: MAZHOUD Rachida,

Mr : BOUMAAZA Nouri d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.

Nous adressés nos sincères remerciements à tous les enseignants et toute les personnes qui par leur paroles, conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions au long de nos études de notre parcours universitaire.

Nous tenons à remercier nos chers collègues qui m'ont apporté leurs soutiens moral et leurs agréables moments au long de nos chemins.

Un grand merci également à tous ceux qui nous soutiennent de près ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail premièrement à mon dieu, qui ma donne le courage pour fini ce travail

Je suis très heureux de dédier cet humble travail en signe de ma gratitude et de mes profonds remerciements pour ce qui suit:

Pour mon héros, le capitaine du navire familial, mon père que Dieu le garde.

" Mon père Lhadj Med Saleh "

À la bonne dame que toutes les familles souhaitent avoir une maman, le pilier de notre maison.

"Ma mère Lhadja Rabiaa"

À mes chères sœurs Lamia, Fella et à ma jumelle Douaa, Fadia ... que Dieu vous protège.

À mes frères Abdallah et son épouse Asma, Mossadak.

À mes chers petits neveux et nièces Hanine, Djoumana, Iyad

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ma belle-sœur, Linda et ma belle Roukaia ma binôme. À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis merci

AIDA GHERBI

Dédicace

Je dédie ce modeste travail premièrement a mon dieu, qui ma donne le courage pour fini ce travail

Je suis très heureux de dédier cet humble travail en signe de ma gratitude et de mes profonds remerciements pour ce qui suit:

Pour mon héros, le capitaine du navire familial, mon père que Dieu le garde.

" Mon père Lhadj Mohamed Laswed"

À la bonne dame que toutes les familles souhaitent avoir une maman, le pilier de notre maison.

Ma mère Houria"

À mes chères sœurs Nadia, Hanen et Soulaf ... que Dieu vous protège.

À mes frères ... Messoud, Chams eddin, Zakaria et Fawzi

À mes chers petits neveux et nièces Djana Al Firdawce, Karim, Wassim, Nouh Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mes chères amies et ma belle-sœur Aydoucha ma binôme

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis merci

ROUKAIA MALKIA

Résumé

La période de vaccination (c'est-à-dire la période de rétention de l'immunité acquise après la vaccination) et la période de latence sont deux facteurs importants de la dynamique de la maladie. Les modèles de maladies compartimentales classiques supposent de manière irréaliste que ces périodes sont distribuées de manière exponentielle. Dans ce travail, on suppose que les distributions de ces deux âges sont arbitraires et représentées par des taux spécifiques à l'âge quittant les classes vaccinées et exposées, ce qui donne un modèle SVEIR avec une dynamique de population. Nous étudions le comportement global de ce modèle et en déduisons le nombre de reproduction de base. Le nombre de reproduction de base détermine complètement la dynamique globale du modèle, c'est-à-dire que l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable et que la maladie s'éteint toujours lorsque le nombre de reproduction de base est inférieur à l'unité; alors que lorsque le nombre de reproduction de base est supérieur à l'unité, il existe un équilibre endémique unique, globalement asymptotiquement stable, et la maladie persiste à cet équilibre endémique, s'il existe initialement. Les contributions du taux de diminution du vaccin au nombre de reproduction de base et au niveau de l'équilibre endémique sont affichées.

Abstract

The vaccination period (i.e, the time period retaining acquired immunity following vaccination) and the latent period are two important factors affecting disease dynamics. Classical compartmental disease models unrealistically assume that these periods are exponentially distributed. In this paper, these two ages are assumed to have arbitrary distributions that are represented by age-specific rates leaving the vaccinated and the exposed classes, resulting in an SVEIR model with population dynamics. We investigate the global behavior of this model, and derive its basic reproduction number. The basic reproduction number completely determines the global dynamics of the model, i.e., the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable and the disease always dies out when the basic reproduction number is less than unity; whereas when the basic reproduction number is larger than unity, there exists a unique endemic equilibrium which is globally asymptotically stable and the disease persists at this endemic equilibrium if it initially exists. The contributions of the vaccine-wane rate to the basic reproduction number and the level of the endemic equilibrium are displayed.

ملخص

تعتبر فترة التطعيم فترة مهمة لتحفيز الجهاز المناعي لمقاومة

الأمراض ،

يعتبر التطعيم أكثر الطرق المؤثرة للوقاية من الأمراض المعدية . قد يكون

العامل الفعال في المصل سالم لكنه غير ناشط أو في هيئات مُوهنة (مُخفض

تأثير العدوى)، أو مركبات نقية من المواد الممرضة التي وجد أنها ذات مناعة

عالية (مثل الغلاف الخارجي البروتيني للفيروسات)

في هذه المذكرة يطرح نموذجاً وبائياً في مجتمع حجمه الإجمالي N ،

تتمثل في الأشخاص المحتملين للإصابة بالمرض و الأشخاص الحاملين

للمرض و الأشخاص المعزولين على التوالي . النموذج يحتوي على

توازن عند المؤشرات البديهية و الغير بديهية حيث قمنا بدراسة

الإستقرار و التوازن عند مختلف المؤشرات هذه المذكرة تسمح لنا بالحصول

على الدراسة التالية.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Généralités sur les systèmes dynamiques	4
1.2 Définition de la stabilité	5
1.3 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov	8
1.4 Le taux de reproduction de base	10
1.5 Persistance uniforme	11
2 Étude de la Stabilité locale et persistance uniforme	14
2.0.1 Analyse du modèle	16
2.1 Stabilité locale et persistance uniforme	21
2.1.1 La formulation de Volterra	21
2.1.2 Formulation de semi-groupe intégrale	21
2.2 Étude de la stabilité locale	23
2.2.1 La stabilité locale du point d'équilibre sans maladie	24
2.2.2 La stabilité locale du point d'équilibre endémique	26
2.2.3 Persistance uniforme	28
3 Étude de la stabilité globale	38
3.1 Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie	38
3.2 Stabilité globale du point d'équilibre endémique	44
Conclusion	51
Bibliographie	51

Introduction

Les systèmes dynamiques sont très répandus en modélisation biologique, et en particulier en épidémiologie. Il est donc naturel de penser à utiliser des méthodes classiques et des théories pour étudier de tels systèmes.

Durant ces dernières années les méthodes algébriques, et les logiciels de calcul, ont été largement utilisés pour étudier les systèmes issus de la modélisation biologique. Une application classique de telles méthodes consiste en la détection et l'étude de la stabilité des équilibres de ces modèles. La définition moderne de l'épidémiologie est l'étude de la distribution des états ou des événements liés à la santé dans des populations spécifiques, et l'utilisation de cette connaissance pour le contrôle des problèmes de santé.

Une maladie est dite endémique si elle persiste dans une population. Elle est dite épidémique si elle apparaît pendant une période relativement courte dans une population (moins d'une année). L'épidémiologie s'occupe aussi bien des facteurs comme les agents infectieux, le mode de transmission, la période de latence, la période infectieuse, la susceptibilité, la vaccination et la résistance que des facteurs sociaux, culturels, démographiques, économiques et géographiques liés à cette maladie.

La modélisation épidémiologique a pour but essentiel de comprendre et contrôler la propagation d'une maladie infectieuse transmissible.

Le modèle classique Susceptible – Exposé – Infecté – Rétablis (**SEIR**) (voir par exemple, [1, 6]) a été bien étudié et sa dynamique est bien connue d'être déterminée par le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 . Pour le modèle **SEIR** avec une dynamique de population, si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre sans maladie est instable, et il y a une stabilité globale et asymptotique du point d'équilibre endémique. D'autre part, si $\mathcal{R}_0 < 1$ l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable, et il n'y a pas d'équilibre endémique.

La vaccination a été la mesure de prévention la plus efficace contre nombreuses maladies telles que la rougeole, polio, coqueluche et grippe. On peut observer que le vaccin peut diminuer au cours du temps pour la rougeole, la polio, les oreillons, etc. Un modèle **SVEIR** décrivant le déclin du vaccin pour les maladies infantiles a été développé et étudié par Moghadas et Gumel [7]. Dans leur modèle, les nouveau-nés sont vaccinés et entrent dans une classe V_1 et les individus vaccinés dans V y quittent avec un taux de déclin constant, et deviennent susceptible (voir par exemple, [8, 13] pour des modèles similaires). Comme dans le modèle classique **SEIR**, la dynamique du modèle de Moghadas et Gumel est déterminée par le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 . Autrement, Arino et al. [14] ont montré que, si les vaccins sont imparfaits, c'est-à-dire que les individus vaccinés peuvent être infectés, alors il pourrait y avoir des bifurcations en arrière.

Pour comprendre l'effet de la distribution de la période de vaccination et de la distribution de

l'âge latent sur la dynamique globale, nous formulons ce modèle **SVEIR** en tant que modèle **EDP** structuré en âge, avec un taux de quittant des classes de vaccination et de latence qui dépend de l'âge. Nous caractérisons la condition de seuil du modèle avec une formule explicite pour le nombre reproducteur d'infection qui détermine la stabilité de l'équilibre sans maladie.

Nous obtenons aussi une formule explicite pour l'équilibre endémique et l'équation caractéristique de cet équilibre, qui détermine sa stabilité locale. Le point essentiel de ce mémoire est d'étudier le comportement dynamique global de cet équilibre endémique.

Les fonctionnelles de Lyapunov ont été développées pour les modèles structurés en âge [24, 25, 30, 31]. Inspiré par cette méthode, nous construisons des fonctionnelles de Lyapunov et obtenons la stabilité globale de l'équilibre sans maladie et équilibre endémique.

Dans ce travail nous concentrons sur l'étude et l'analyse, par des méthodes de la stabilité locale et globale, des points d'équilibre sans maladie et endémique dans les modèles épidémiologiques structurés en âge **SVEIR**. On va appliquer des critères et des théorèmes classiques de la stabilité du Lyapunov.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, (Preliminaires) est consacré aux résultats préliminaires, des définitions et des théorèmes très importants utilisés dans le mémoire ainsi que des outils mathématiques dont nous aurons besoin.

Le **deuxième chapitre**, est un étude générale d'un modèle **SVEIR** structuré en âge de la vaccination a , et de latence θ . en introduisant un taux de reproduction basic. En analysant les équations caractéristiques correspondantes et on discute de la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique. on vas prouver que l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable si le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0 < 1$ et que des conditions suffisantes sont obtenues pour la stabilité asymptotiquement locale de l'équilibre endémique. On vas appliquée la notion de la persistance uniforme pour prouver la stabilité.

Le **troisième chapitre**, on discute de la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique. Par la théorie de Lyapunov, on vas prouver que l'équilibre sans maladie est globalement stable si $\mathcal{R}_0 < 1$, est que l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable si le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0 > 1$.

Des conclusions et des perspectives sont données à la fin de ce mémoire, qui se termine par une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Les concepts que nous rappelons ici sont classiques et pour la plupart de nature élémentaire pour un mathématicien. Nous les introduisons ici dans le but de rendre plus facile, pour un épidémiologiste, la lecture des autres chapitres. Nous renvoyons aux ouvrages classiques [48],[49],[50] pour plus de détails.

1.1 Généralités sur les systèmes dynamiques

Définition 1.1 (*Équation différentielle*).

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à f l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)). \quad (1.1)$$

où $f(t, x) = (f_1(t; x), \dots, f_n(t; x))$ et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction f est appelée champs de vecteurs, l'équation représente un système de n équations différentielles ordinaires. Dans la pratique, l'équation (1.1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t , et x représente l'état du système étudié.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) & t \in (0, b) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \Omega$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2 Définition de la stabilité

Considérons un système continu autonome décrit par une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Définition 1.2

\bar{x} est appelé point d'équilibre pour le système (1.1) s'il est vérifie l'équation

$$f(\bar{x}) = 0. \quad (1.4)$$

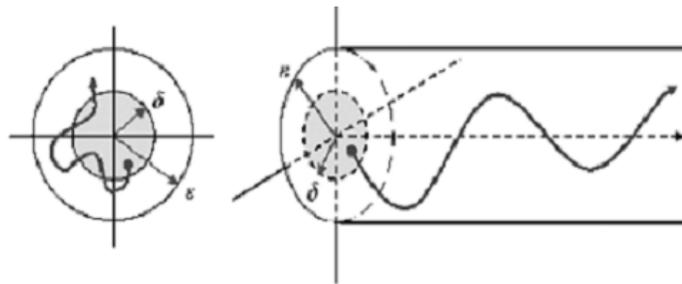
Définition 1.3

le point d'équilibre \bar{x} est stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \rho \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad . \quad (1.5)$$

sinon il est instable.

Cela signifie que, quel que soit le rayon ϵ d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon $\rho(\epsilon)$, telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon ρ ne quittera jamais la boule de rayon ϵ .



Définition 1.4 Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il est stable et il existe $\gamma > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.1) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (1.6)$$

Définition 1.5

Le point d'équilibre x^* est dit attractif s'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\|x(0) - x^*\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

L'attractivité signifie que, si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant (même infini)

Définition 1.6 (*Stabilité asymptotique*)

Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Outre la stabilité, la stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage du point d'équilibre, tel que pour toute condition initiale appartenant à ce voisinage, l'état $x(t)$ converge vers x^* lorsque le temps tend vers l'infini

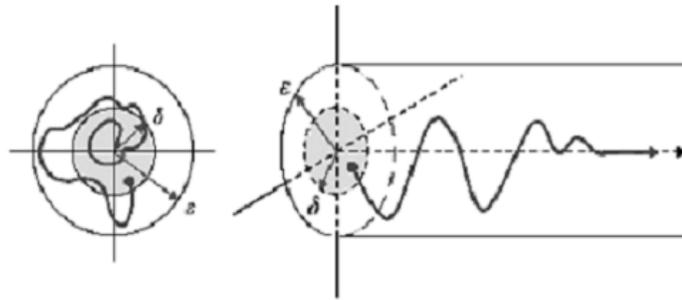


Figure 11 Illustration de la stabilité asymptotique

Cependant, la définition de la stabilité asymptotique ne donne pas une idée sur la rapidité de convergence de la trajectoire $x(t)$ vers le point d'équilibre. D'où la notion de stabilité exponentielle.

Définition 1.7

Le point d'équilibre x^* est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ tel que, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\rho(\epsilon)$ tel que

$$\forall t > t_0, \|x_0 - x^*\| < \rho \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon \|x^* - x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)).$$

Cette définition traduit le fait que toute trajectoire issue d'une condition initiale appartenant à la boule ouverte de rayon ρ converge vers le point d'équilibre x^* plus rapidement qu'une fonction exponentielle. α est appelé dans ce cas le taux de convergence. On note que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique ainsi que la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans chacune des définitions précédentes 1.3 et 1.4, la stabilité est définie localement, puisque les conditions initiales sont prises dans un voisinage $V(x^*)$ autour du point d'équilibre x^* .

Si $V(x^*) = R^n$, le point d'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

Définition 1.8 (Stabilité Globale).

Si la condition de stabilité asymptotique (resp. exponentielle) est vérifiée dans tout \mathbb{R}^n , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.

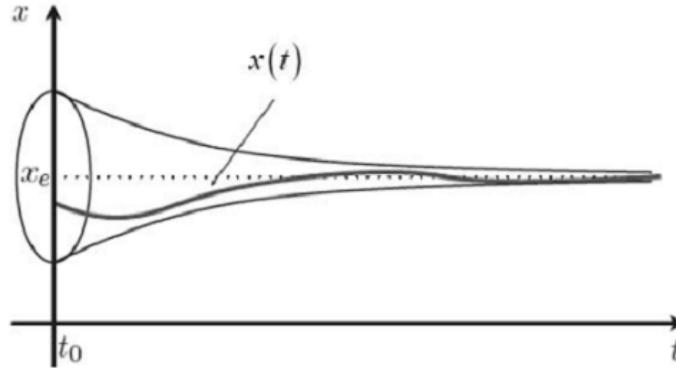


Figure 12 Illustration de la stabilité asymptotique

Définition 1.9

L'équilibre x^* de (1.1) est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Soit $J_f(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* . Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax.$$

où $A = J_f(x^*)$ s'appelle le linéarisé ou l'approximation linéaire du système non linéaire (1.1) en x^* . L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x de (1.1). Plus précisément on a.

Théorème 1.1 [46]

Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative alors l'équilibre x^* du problème (1.1) est stable.

S'il existe au moins une valeur propre de la matrice A de partie réelle strictement positive alors x^* est instable.

Lorsqu'un équilibre x^* est stable mais pas asymptotiquement stable on dit que la stabilité est neutre, c'est-à-dire les trajectoires qui commencent au voisinage de x^* restent au voisinage de cette équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* .

1.3 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov

Définition 1.10 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathbb{C}^1 , V est dite définie positive si :

- i) $V(0) = 0$, et
- ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$

Définition 1.11 V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

Définition 1.12 V est dite semi-définie positive si :

- i) $V(0) = 0$, et
- ii) $V(u) \geq 0$ pour $u \in \Omega$.

Définition 1.13 V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

Définition 1.14 (Fonction de Lyapunov).

Soient $U = \text{Vois}(x^*) \subset E$ et $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L est une fonction de Lyapunov en x^* si :

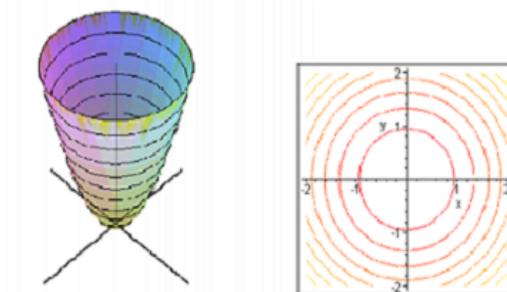
- 1 $L(x) > L(x^*)$ pour $x \neq x^*$ dans U ,
- 2 Pour toute solution $x(\cdot), t \mapsto L(x(t))$ décroissante i.e.

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) \leq 0 \forall t \in I_0$$

L une fonction de Lyapunov stricte en x^* Si de plus :

- 3 Pour toute solution $x(\cdot), t \mapsto L(x(t))$ est strictement décroissante i.e.

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) < 0 \forall t \in I_0$$



courbe d'une fonction de lyapunov

Théorème 1.2 (Stabilité au sens de Lyapunov).

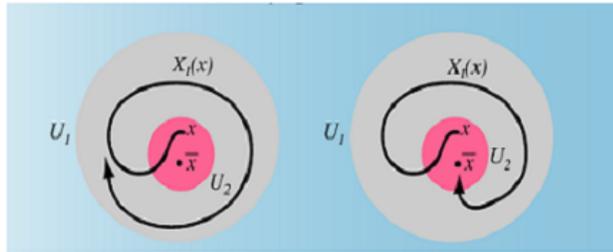
Soit $x(t)$ solution de $\dot{x} = f(x)$

et soit V une fonction de classe \mathbb{C}^1 définie positive sur Ω un voisinage de $x^* = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

(i) Si $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative alors x^* est stable.

(ii) Si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative alors x^* est asymptotiquement stable.

Dans le cas (i) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

**Théorème 1.3** (Théorème de LaSalle)[46]

Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n , supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (1.1) en x^*

Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (1.3) en x^* telle que :

$$\dot{V} \leq 0 \text{ sur } \Omega.$$

— Soit $E = \left\{ x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0 \right\}$ et est le plus grand ensemble invariant par Φ et contenu dans E

contrairement aux théorème de Lyapunov, le principe d'invariance de LaSalle ne requiert pas que la fonction $V(x(t))$ soit définie positive.

Théorème 1.4 (Théorème de Liapunov-LaSalle)

V est une fonction de Liapunov si elle est continue et $\dot{V} \leq 0$.

$$E = \left\{ \emptyset : \dot{V}(\emptyset) = 0 \right\}$$

E le plus grand ensemble de E invariant par rapport aux équations.

1.4 Le taux de reproduction de base

Définition 1.15

Le **taux de reproduction** est le nombre moyen de cas secondaires générés par une personne durant la période où elle est infectieuse, symptomatique ou non. Lors de l'introduction d'une infection dans une population entièrement susceptible, on parle de taux de reproduction de base (\mathcal{R}_0). Si ce taux est inférieur à 1, chaque cas donne naissance en moyenne à moins d'un cas secondaire, le nombre de cas diminue à chaque génération et la chaîne de transmission finit par s'interrompre. Inversement, si $\mathcal{R}_0 > 1$, le nombre de cas s'accroît à chaque génération créant une situation épidémique.

le **taux de reproduction de base** joue le rôle d'un coefficient multiplicatif. En effet si on introduit un petit nombre d'infecté n , on obtiendra tout d'abord $\mathcal{R}_0 n$ nouveaux infectés, puis $\mathcal{R}_0^k n$ au bout de k étapes. Ce raisonnement est évidemment intuitif. Il s'agit d'une approximation au voisinage d'une situation où il y a peu d'infectieux, par rapport à la population totale. On a l'impression que si $\mathcal{R}_0 > 1$ alors on observera une augmentation des cas, donc une épidémie, et que si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors les cas disparaîtront. Le taux de reproduction de base apparaît donc comme susceptible de jouer le rôle d'un seuil, pour les apparitions d'épidémie.

quelques termes qui seront fréquemment utilisables au cours de ce mémoire[\[44\]](#)

Maladie infectieuse :

maladie provoquée par la transmission d'un agent pathogène : virus, bactérie, parasite,...etc

Epidémie :

augmentation rapide de l'incidence d'une pathologie. Bien que souvent utilisée dans un contexte de maladies infectieuses.

Seuil épidémique : seuil théorique présent dans les modèles mathématiques au dessus du quel il y aura (ou pourra y avoir) une épidémie.

Vaccination :

un procédé consistant à introduire un agent extérieur (le vaccin) dans un organisme vivant afin de créer une réaction immunitaire positive contre une maladie infectieuse.

1.5 Persistance uniforme

Soit F le flot associé au système (1.1) et soit d une métrique. On note par ∂F la restriction de F à ∂E où ∂F n'est pas nécessairement positivement invariant et soit N l'ensemble invariant maximal de ∂F dans ∂E , de plus N est fermé et il existe un recouvrement $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de N où A est un ensemble d'index non vide et $N_\alpha \subset \partial E$, $N \subset \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$ et N_α sont des ensembles invariants fermés disjoints deux à deux. Nous proposons les hypothèses suivantes

i) Tous les $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sont des ensembles invariants isolés du flot F .

ii) tout sous ensemble compact de E contient de nombreux recouvrements $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Théorème 1.5

Soit $E \subset X$ ensemble fermé positivement invariant, et soit F le flot défini sur E . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que F est un point dissipatif dans $S[\partial E, \alpha] \cap \overset{\circ}{E}$ est satisfaite. Alors, le flot F est uniformément persistant si et seulement si :

$$W^+(N_\alpha) \cap S[\partial E, \alpha] \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset.$$

pour tout $\alpha \in A$, où $W^+(N_\alpha) = \{y \in X, \Lambda^+(y) \subset N_\alpha\}$.

Supposons que T est asymptotiquement régulière et uniformément persistant, et que T a un attracteur global A . Alors $T(M_0, d) \rightarrow (M_0, d)$ a un attracteur global A_0 . De plus, pour chaque sous-ensemble B de M_0 , s'il existe $k \geq 0$ tel que $\gamma^+(T^k(B))$ est fortement borné, alors A_0 attire B pour T .

Définition 1.16 (Attracteur)[45]

Soit (X, N, f) un système dynamique. Une partie A de X est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées

i) A est fermée.

ii) A est positivement invariante.

iii) A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

Définition 1.17 (Attracteur locale)

un ensemble $A \subset M$ est un **attracteur (locale)** si

A est positivement invariant c'est -à-dire $U^t(A) = A$ pour tout $t > 0$

A attire un voisinage de lui-même, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert B contenant A tel que pour tout ouvert N contenant A , il existe $t_0 \in T$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $U^t(B) \subset N$. Plus simplement, pour un espace métrique, la distance entre $U^t(B)$ et A tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$,

Le bassin d'attraction de A est l'union de tous les ensembles B attirés par A . Il existe certaines variantes de cette définition principal, typiquement sur la forme de l'invariance requise.

Un point fixe attractif est un exemple typique d'attracteur local, qui est réduit à un singleton.

Définition 1.18 (Attracteur globale)

Un attracteur globale est un attracteur dont le bassin d'attraction est l'espace des phases M tout entier. Il contient donc l'ensemble de la dynamique asymptotique et aussi l'ensemble des trajectoires invariantes comme les points d'équilibres, les trajectoires périodiques, les cycles limites etc.

Définition 1.19 (la persistance faible)

Le semi-flot $U : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ - faiblement persistant , si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(U(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.20 (la persistance forte).

Le semi-flot $U : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ - fortement persistant, si

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(U(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.21 (Semi flot).

On appelle le semi-flot de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ à un instant t , l'application suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_t(x_0) = f(U_t(x_0)) \\ U_t(x_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 1.22 (L'ensemble Oméga Limite)

soit X un espace métrique et soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue. L'ensemble ω – Limite de $x \in X$, noté par $\omega(x, f)$, est l'ensemble des points de l'orbite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Cela exprimer par

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k > n\}}.$$

Définition 1.23 (*L'ensemble Alpha Limite*).

La même définition s'applique dans le cas où t devient très petit, on parle d'ensemble $\alpha - Limite$

$$\alpha(x, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) : k > n\}}$$

Définition 1.24 (*Point dissipatif*).

Soit $U : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot U continu est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tout les points dans X .

Définition 1.25 Le semi-flot $U : J \times X \rightarrow X$ est appelé **fortement dissipatif**, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} U(t, X) > c.$$

Définition 1.26 (*Ensemble invariant*)

Un sous ensemble D de K est dit positivement (respectivement négativement) invariant à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ si $U(t, D) \subset D$ pour tout $t > 0$ (respectivement $t < 0$) D est un ensemble invariant si seulement si $U(x, D) = D$ pour tout t .

Espace de Sobolev

Définition 1.27 (*Espace de Sobolev*)

Soit a, b un intervalle borné et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p \mid \exists g \in L^p \text{ tel que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \right\}.$$

On utilisant le lemme fondamentale de la solution des variation qui dit soit $f \in L^1_{Loc}$ tel que $\int_I f \varphi = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$.

Définition 1.28 (*Espace L^p*)

un espace L^p est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ de fonctions bornées. Les espaces L^p sont appelés espaces de Lebesgue.

Chapitre 2

Étude de la Stabilité locale et persistance uniforme

Différents modèles mathématiques existent dans la littérature et le choix du modèle dépend de la maladie étudiée. Parmi les modèles les plus connus, le modèle **SVEIR** (Susceptibles-Vaccinés-Exposés-Infectieux-Rétablis), qui est une extension du modèle **SEIR** (Susceptibles-Exposés-Infectés-Rétablis).

Ce chapitre présente un modèle **SVEIR** structuré en âge d'infection et de latence, qui joue un rôle important dans la transmission des maladies infectieuses.

Dans notre modèle, nous considérons une population N divisée en classes des individus : la densité des susceptibles S , la densité des infectés I , la densité des vaccinés V , la densité des exposés E et la densité des réfractaires R . Nous abusons également de la notation et exploités $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$, $E(t)$ et $R(t)$ pour désigner le nombre d'individus dans chaque classe, respectivement. Les susceptible sont vaccinés avec le taux ψ , et ensuite passer à la classe vaccinée où ils sont complètement protégés contre l'infection. Nous supposons que le vaccin diminue avec le temps, et les individus vaccinés finissent par redevenir susceptibles. Nous notons l'âge de vaccination, c'est-à-dire le temps entre la vaccination jusqu'à présent, par a . Les nouveaux individus vaccinés entrent dans la classe vaccinée avec âge de vaccination $a = 0$. Le taux auquel le vaccin décroît dépend de l'âge de vaccination est noté par $\alpha(a)$. De même, on note par θ , le temps de l'infection jusqu'à présent, l'âge latent. Les nouveaux infectés entrent dans la classe exposée E avec âge latent $\theta = 0$. Le taux auquel les individus exposés deviennent infectieux dépend de l'âge de latence, est noté par $p(\theta)$.

Soit le modèle SVEIR suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)v(a,t) da, \\ \frac{\partial v(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial v(a,t)}{\partial t} = -(\alpha(a) + \mu)v(a,t), \\ \frac{\partial e(\theta,t)}{\partial \theta} + \frac{\partial e(\theta,t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)e(\theta,t), \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^{+\infty} p(\theta)e(\theta,t) d\theta - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales et limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0,t) = \psi S(t), \\ e(0,t) = \beta S(t)I(t), \\ S(0) = S_0, \quad v(a,0) = v_0(a), \quad e(\theta,0) = e_0(\theta), \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec $S_0, I_0, R_0 \in [0, +\infty)$ et $v_0(a), e_0(\theta) \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$, où les paramètres $\Lambda, \beta, \mu, \psi, \gamma$ sont des quantités positives telles que

Λ : représente le taux de natalité des nouveau-nés.

β : représente le taux de transmission du virus.

μ : représente le taux de mortalité naturelle.

ψ : représente le taux de vaccination.

γ : représente le taux de récupération des individus infectés.

a : représente l'âge de vaccination qui signifie le temps passé en classe vaccinée.

θ : représente le temps de infection qui signifie le temps passé en classe infectée.

$v(a,t)$: est la densité d'individus vaccinés à l'âge de vaccination a et en temps t . Ensuite, le nombre d'individus vaccinés en temps t est donné par $V(t) = \int_0^{+\infty} v(a,t) da$.

$e(\theta,t)$: représente la densité d'individus exposés à l'âge de latence θ et en temps t . Alors, le nombre d'individus exposés en temps t est écrit par $E(t) = \int_0^{+\infty} e(\theta,t) d\theta$.

2.0.1 Analyse du modèle

L'existence et l'unicité de solutions

En utilisant des méthodes standard (les Théorème de point fixe), nous pouvons vérifier l'existence et l'unicité de solutions du système (2.1) avec les conditions initiales et aux limites (2.2) ([32] et [33]). De plus, nous pouvons montrer que toutes les solutions avec des conditions initiales non négatives sont des solutions non négatives et bornées pour tout $t > 0$.

En ignorant l'équation $R(t)$, le système (2.1) se réduit au système suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)v(a, t) da, \\ \frac{\partial v(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial v(a, t)}{\partial t} = -(\alpha(a) + \mu)v(a, t), \\ \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)e(\theta, t), \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^{+\infty} p(\theta)e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma)I(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec les conditions initiales et limites suivantes

$$\begin{cases} v(0, t) = \psi S(t), \\ e(0, t) = \beta S(t)I(t), \\ S(0) = S_0, \quad v(a, 0) = v_0(a), \quad e(\theta, 0) = e_0(\theta), \quad I(0) = I_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ω ensemble invariant

Proposition 2.1

L'ensemble définit par :

$$\Omega = \left\{ (S, v, e, I) \in \mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ : \right. \\ \left. S + \int_0^{+\infty} v(a, t) da + \int_0^{+\infty} e(\theta, t) d\theta + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \quad (2.5)$$

est positivement invariant.

Preuve.

La population totale N se divise en cinq classes d'individus cités précédemment, cela traduit par

$$N(t) = S(t) + \int_0^{+\infty} v(a, t) da + \int_0^{+\infty} e(\theta, t) d\theta + I(t) + R(t).$$

Nous dérivons N par rapport à t , nous obtenons

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt}S(t) + \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} v(a, t) da \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} e(\theta, t) d\theta \right) + \frac{d}{dt}I(t) + \frac{d}{dt}R(t). \quad (2.6)$$

On a

$$\frac{\partial v(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial v(a, t)}{\partial t} = -(\alpha(a) + \mu)v(a, t),$$

alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\partial v(a, t)}{\partial t} da &= - \int_0^{+\infty} (\alpha(a) + \mu)v(a, t) da - \int_0^{+\infty} \frac{\partial v(a, t)}{\partial a} da, \\ &= - \int_0^{+\infty} (\alpha(a) + \mu)v(a, t) da + \psi S(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

De manière similaire, nous calculons $\int_0^{+\infty} e(\theta, t) d\theta$, et on écrit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial t} d\theta = - \int_0^{+\infty} p(\theta)e(\theta, t) d\theta + \beta S(t)I(t). \quad (2.8)$$

Nous remplaçons (2.7) et (2.8) dans (2.6), nous obtenons

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t).$$

Finalement, on trouve

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + c_0 e^{-\mu t}.$$

Par conséquent, quand $t \rightarrow \infty$, on a $N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$ et l'ensemble Ω est positivement invariant. ■

Maintenant, il suffit d'étudier la dynamique du système (2.3). Pour cela, on note

$$\begin{aligned} \Phi_1(a) &= \exp \left(- \int_0^a (\mu + p(s)) ds \right), & \phi_1 &= \int_0^{\infty} \Phi_1(a) da; \\ \Phi(a) &= \alpha(a) \psi \Phi_1(a), & \phi &= \int_0^{\infty} \Phi(a) da; \\ K_1(\theta) &= \exp \left(- \int_0^{\theta} (\mu + p(s)) ds \right); & & \\ K(\theta) &= p(\theta) K_1(\theta), & \kappa &= \int_0^{\infty} K(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

On note par $p(\theta)$ et μ , respectivement, le taux auquel les individus exposés deviennent infectieux et le taux de mortalité naturelle. Donc κ représente la probabilité qu'un individu exposé devienne infectieux. D'après les expressions de ϕ et ϕ_1 , nous pouvons écrire $\phi = \psi(1 - \mu\phi_1)$.

Le taux de reproduction basique \mathfrak{R}_0

On peut interpréter le taux de reproduction de base \mathfrak{R}_0 comme le nombre moyen de nouveaux cas d'infection causé par un individu infecté (au court de la période où il est infectieux et donc contaminant), dans une population entièrement considérée comme susceptible. Depuis son introduction le taux de reproduction de base \mathfrak{R}_0 s'est imposé comme un concept-clef en épidémiologie, qui est un produit du taux de transmission β , la période infectieuse moyenne $\frac{1}{(\mu + \gamma)}$, la probabilité κ de survivre à la période de latence et la taille de la population sensible à l'équilibre $\frac{\Lambda}{(1 + \psi\phi_1)}$.

Le nombre de reproduction de base du modèle (2.1) est donné par

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta S^0 \kappa}{(\mu + \gamma)}. \quad (2.9)$$

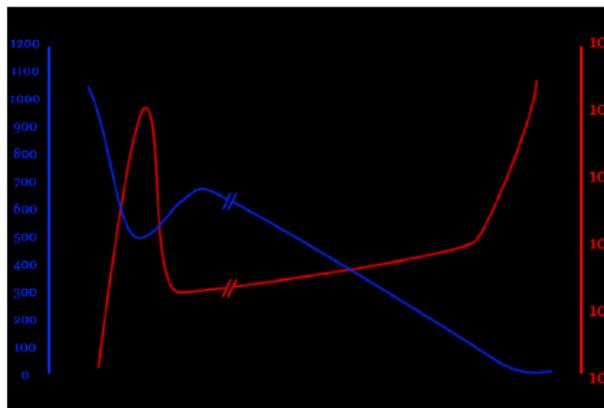
Proposition 2.2

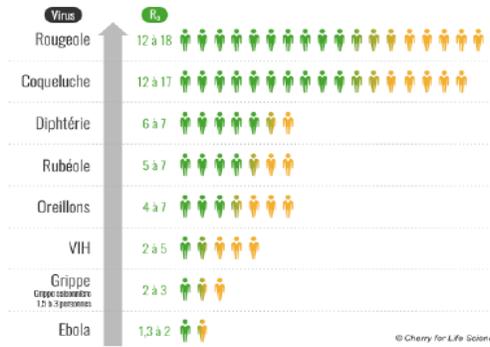
Si $\mathfrak{R}_0 > 1$: alors en moyenne, un individu infecté engendre plus d'individus infectés (ie la maladie va se persister dans la population).

A l'opposé si $\mathfrak{R}_0 < 1$: un individu infecté engendre en moyenne moins d'individus infectés, ce qui signifie que la maladie va disparaître dans la population à terme.

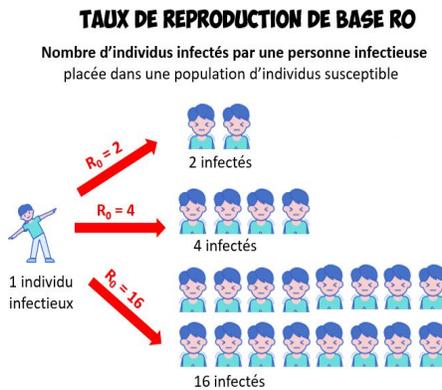
Exemple 2.1 *le virus Ebola est très virulent mais il se propage lentement alors que la grippe saisonnière se transmet plus facilement mais elle reste peu létale dans les pays développés. Le nouveau coronavirus semble avoir un taux de létalité (nombre de décès/nombre de cas confirmés) plus faible que pour ceux des précédentes épidémies SARS et MERS. Cependant, ce taux de mortalité et ce taux de reproduction de base sont provisoires.*

Exemple 2.2 *Un individu infecté par le VIH est plus infectieux durant la 1re phase, lorsque sa charge virale (rouge) atteint un pic. L'infectivité par contact serait de l'ordre de 0,05, tandis qu'une infectivité de 0,003 représenterait une phase plus tardive de la maladie.*





Exemple 2.3



Les points d'équilibres

Les points d'équilibre sans maladie :

La recherche des points d'équilibres sans maladie $T^0 = (S^0, v^0(a), 0, 0)$ du système (2.3) se traduit par la résolution du système suivant

$$\begin{cases} \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)v(a, t) da = 0, \\ \frac{\partial v(a, t)}{\partial a} + (\alpha(a) + \mu)v(a, t) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Alors, les points d'équilibres sans maladie sont

$$S^0 = \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \quad , \quad v^0(a) = \psi \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \Phi_1(a).$$

Le Point d'équilibre endémique :

La recherche des points d'équilibres endémique $T^* = (S^*, v^*(a), e^*(\theta), I^*)$ du système (2.3) passe par la résolution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = (\mu + \psi)S^* + \beta S^* I^* - \int_0^\infty \alpha(a)v^*(a) da, \\ \frac{d}{da}v^*(a) = -(\alpha(a) + \mu)v^*(a), \\ \frac{d}{d\theta}e^*(\theta) = -(p(\theta) + \mu)e^*(\theta), \\ \int_0^\infty p(\theta)e^*(\theta) d\theta = (\mu + \gamma)I^*, \\ v^*(0) = \psi S^*, \\ e^*(0) = \beta S^* I^*. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

La résolution des deuxième et troisième équations de (2.11) donne

$$v^*(a) = \psi S^* \Phi_1(a), \quad (2.12)$$

et

$$e^*(\theta) = \beta S^* I^* K_1(\theta). \quad (2.13)$$

En injectant (2.12) dans la première équation de (2.11), on trouve

$$\Lambda = (\mu + \psi)S^* + \beta S^* I^* - \phi S^*. \quad (2.14)$$

De même, en remplaçant (2.13) dans la quatrième de (2.11), on obtient

$$\int_0^\infty p(\theta)e^*(\theta) d\theta = \kappa \beta S^* I^* = (\mu + \gamma)I^*. \quad (2.15)$$

De (2.12) à (2.15), on a

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\mu + \gamma)}{\kappa \beta}, \\ e^*(\theta) &= \Lambda \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_0}\right) K_1(\theta), \\ v^*(a) &= \frac{\psi(\mu + \gamma)}{\kappa \beta} \Phi_1(a), \\ I^* &= \frac{\mu(1 + \psi \phi_1)}{\beta} (\mathfrak{R}_0 - 1). \end{aligned}$$

Nous résumons cette étude dans le théorème suivant

Théorème 2.1

Le système (2.3) admet toujours l'équilibre sans maladie $T^0 = (S^0, v^0(a), 0, 0)$. En outre, il existe un équilibre endémique unique $T^* = (S^*, v^*(a), e^*(\theta), I^*)$ quand $\mathfrak{R}_0 > 1$.

2.1 Stabilité locale et persistance uniforme

2.1.1 La formulation de Volterra

En utilisant la formulation de Volterra [32] [33] [34] et en intégrant les termes $v(a, t)$ et $e(\theta, t)$ du système (2.3), on trouve

$$v(a, t) = \begin{cases} \psi S(t - a)\Phi_1(a) & \text{si } t \geq a; \\ \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a - t)} v(a - t, 0) & \text{si } a \geq t, \end{cases} \quad (2.16)$$

et

$$e(\theta, t) = \begin{cases} \beta S(t - \theta)I(t - \theta)K_1(\theta) & \text{si } t \geq \theta; \\ \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)} v(\theta - t, 0) & \text{si } \theta \geq t, \end{cases} \quad (2.17)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \alpha(a)v(a, t) da, \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^\infty p(\theta)e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma)I(t), \\ v(a, t) = \begin{cases} \psi S(t - a)\Phi_1(a), & \text{si } t \geq a; \\ \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a - t)} v(a - t, 0), & \text{si } a \geq t, \end{cases} \\ e(\theta, t) = \begin{cases} \beta S(t - \theta)I(t - \theta)K_1(\theta), & \text{si } t \geq \theta; \\ \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)} v(\theta - t, 0), & \text{si } \theta \geq t. \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

2.1.2 Formulation de semi-groupe intégrale

Maintenant, nous utilisons l'approche introduite par Thieme [34] pour reformuler le système (2.3) avec les condition initiales et limites (2.4) comme problème de Cauchy semi-linéaire. Afin de prendre en compte les condition aux limites, nous élargissons les espaces d'état suivants

$$\chi_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}),$$

$$\chi_2 = \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R},$$

et on définit deux opérateurs linéaires $A_i : Dom(A_i) \subset \chi_i \rightarrow \chi_i$ ($i = 1, 2$) respectivement par

$$A_1 = \left(\begin{array}{c} S \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ v \end{array} \right) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -(\mu + \psi)S \\ \left(\begin{array}{c} -v(0) \\ -v' - (\alpha(a) + \mu)v \end{array} \right) \end{array} \right),$$

et

$$A_2 = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ e \end{array} \right) \\ I \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -e(0) \\ \left(\begin{array}{c} -e' - (p(\theta) + \mu)e \\ -(\mu + \gamma)I \end{array} \right) \end{array} \right), \quad (2.19)$$

avec

$$Dom(A_1) = \mathbb{R} \times \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}),$$

$$Dom(A_2) = \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R},$$

où $W^{1,1}$ est un espace de Sobolev. Nous considérons

$$\chi = \chi_1 \times \chi_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^1((0, +1), \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times L^1((0, +1), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

$$\chi_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R},$$

$$\chi_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+,$$

et

$$\chi_{0+} = \chi_0 \cap \chi_+.$$

Soit $A : Dom(A) \subset \chi \rightarrow \chi$ l'opérateur linéaire défini par

$$A = \left(\begin{array}{c} S \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ v \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ e \end{array} \right) \\ I \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A_1 \left(\begin{array}{c} S \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ v \end{array} \right) \end{array} \right) \\ A_2 \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ e \end{array} \right) \\ I \end{array} \right) \end{array} \right).$$

avec $Dom(A) = Dom(A_1) \times Dom(A_2)$,

et $H : \chi_0 \rightarrow \chi$ non linéaire définie par

$$H \begin{pmatrix} S \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \alpha(a)v(a,t) da \\ \begin{pmatrix} \psi S(t) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta S(t)I(t) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \\ \int_0^\infty p(\theta)e(\theta,t)d\theta \end{pmatrix}.$$

On définit

$$u(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e(\cdot, t) \end{pmatrix} \\ I(t) \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons reformuler le système (2.3) avec les conditions initiales et aux limites (2.4) comme problème de Cauchy suivant

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + H(u(t)) \text{ pour } t \geq 0, \text{ avec } u(0) = x \in \chi_{0+}. \quad (2.20)$$

En appliquant les résultats donnés dans [34] et [35], nous pouvons démontrer l'existence et l'unicité du semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ sur χ_{0+} généré par le système (2.20). De plus, en utilisant la théorie du système dynamique [36], [37], nous pouvons avoir le résultat suivant

Théorème 2.2

Le système (2.20) génère un semi-flot continu unique $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ sur χ_{0+} qui est asymptotiquement lisse et dissipatif borné. De plus, le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ a un attracteur global A sur χ_{0+} qui attire les ensembles de χ_{0+} .

2.2 Étude de la stabilité locale

Dans cette section, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique du système (2.3) en analysant respectivement les équations caractéristiques correspondantes.

On résume cette étude par le théorème suivant

Théorème 2.3

Si $\mathfrak{R}_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie $T^0 = (S^0, v^0(a), 0, 0)$ du système (2.3) est localement asymptotiquement stable. Si non T^0 est instable.

Si $\mathfrak{R}_0 > 1$, L 'equilibre endémique $T^* = (S^*, v^*(a), e^*(\theta), I^*)$ existe et il est localement asymptotiquement stable.

2.2.1 La stabilité locale du point d'équilibre sans maladie

Tout d'abord, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie T^0 .

Preuve.

Substituant (2.16) et (2.17) dans les deux premières équations du système (2.18), respectivement, nous avons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)S(t-a) da + F_S(t), \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^{+\infty} \beta k(\theta)S(t-\theta) d\theta - (\mu + \gamma)I(t) + F_I(t), \end{cases} \quad (2.21)$$

où $F_S(t) = \int_t^{+\infty} \alpha(a) \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a-t)} v(a-t, 0) da,$

$$F_I(t) = \int_t^{+\infty} p(\theta) e(\theta-t, 0) \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta-t)} d\theta,$$

et quand $t \rightarrow \infty$, $F_S(t) \equiv 0$ et $F_I(t) \equiv 0$.

Le système (2.21) devient comme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)S(t-a) da, \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^{+\infty} \beta k(\theta)S(t-\theta) d\theta - (\mu + \gamma)I(t). \end{cases} \quad (2.22)$$

Après, on passe au changement de variables suivant

$$\bar{S} = S - S^0, \quad \bar{I} = I - I^0,$$

alors, la linéarisation du système (2.22) au point T^0 est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{S} = -(\mu + \psi)\bar{S} - \beta S^0 \bar{I} + \int_0^\infty \Phi(a)\bar{S}(t-a) da, \\ \frac{d}{dt}\bar{I} = \int_0^\infty \beta K(\theta)S^0 \bar{I}(t-\theta)d\theta - (\mu + \gamma)\bar{I}(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

D'autre part, posons

$$\bar{S}(t) = e^{\lambda t}\bar{S}, \quad \bar{I}(t) = e^{\lambda t}\bar{I}, \quad (2.24)$$

et en remplaçant (2.24) dans (2.23), il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{S} = -(\lambda + \mu + \psi)\bar{S} - \beta S^0 \bar{I} + \bar{S}\hat{\Phi}(\lambda), \\ \frac{d}{dt}\bar{I} = \beta S^0 \bar{I} \hat{K}(\lambda) - (\lambda + \mu + \gamma)\bar{I}. \end{cases}$$

Donc la matrice jacobienne s'écrit

$$J_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu + \psi) + \hat{\Phi}(\lambda) & -\beta \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \\ 0 & -(\lambda + \mu + \gamma) + \beta \hat{K}(\lambda) \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \end{pmatrix}$$

où $\hat{K}(\lambda)$, $\hat{\Phi}(\lambda)$ désignent respectivement la transformée de Laplace de $K(\theta)$ et $\Phi(a)$.

Posons $\det(J_0) = 0$, nous obtenons l'équation caractéristique

$$\left(\lambda + \mu + \psi - \hat{\Phi}(\lambda)\right) \left(\lambda + (\mu + \gamma) - \beta \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \hat{K}(\lambda)\right) = 0. \quad (2.25)$$

Clairement, $(S^0, 0)$ est localement stable, les équations caractéristiques admettent des racines λ avec $\text{Re}(\lambda) < 0$.

De l'équation (2.25) on a

$$\lambda + \mu + \psi - \hat{\Phi}(\lambda) = 0, \quad (2.26)$$

et

$$\lambda + (\mu + \gamma) - \beta \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\phi_1)} \hat{K}(\lambda) = 0, \quad (2.27)$$

Si λ est une racine de l'équation (2.26) avec $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, alors en on déduit les deux inégalités contradictoires suivantes

$$\left| \hat{\Phi}(\lambda) \right| = \left| \psi \int_0^\infty \alpha(a) \left(\exp(-(\lambda a + \mu a + \int_0^a \alpha(s) ds) \right) da \right|$$

$$\left| \int_0^\infty \alpha(a) \exp\left(-\int_0^a \alpha(s) ds\right) da \right| = \psi.$$

et

$$|\lambda + \mu + \psi| \geq \mu + \psi > \psi,$$

ce qui est impossible.

Si λ est racine de l'équation (2.27) avec $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, alors on peut déduire que

$$\left| \widehat{K}(\lambda) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} K(\theta) d\theta \right| \leq \left| \int_0^\infty K(\theta) d\theta \right| = \kappa,$$

et

$$\left| \lambda + (\mu + \gamma) \frac{\mu(1 + \psi\phi_1)}{\beta\Lambda} \right| \geq (\mu + \gamma) \frac{\mu(1 + \psi\phi_1)}{\beta\Lambda},$$

à partir de (2.27), nous avons

$$(\mu + \gamma) \frac{\mu(1 + \psi\phi_1)}{\beta\Lambda} \leq \kappa, \text{ ce qui implique } \mathfrak{R}_0 \geq 1.$$

C'est une contradiction avec la condition $\mathfrak{R}_0 < 1$. Cela signifie que toutes les racines de (2.26) et (2.27) ont des parties réelles négatives. Par conséquent, les points d'équilibre sans maladie T^0 est localement asymptotiquement stable si $\mathfrak{R}_0 < 1$ et il est instable si $\mathfrak{R}_0 > 1$. ■

2.2.2 La stabilité locale du point d'équilibre endémique

Dans la suite, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre endémique T^* .

La linéarisation du système (2.3) au point T^* est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S^* = -(\mu + \psi)S^* - \beta S^* I^* + \int_0^\infty \Phi(a) S^*(t-a) da, \\ \frac{d}{dt} I^* = \int_0^\infty \beta K(\theta) S^*(t-\theta) I^*(t-\theta) d\theta - (\mu + \gamma) I^*(t). \end{cases} \quad (2.28)$$

Soient

$$S^*(t) = e^{\lambda t} S^*, \quad I^*(t) = e^{\lambda t} I^*, \quad (2.29)$$

en remplaçant (2.29) dans (2.28), il s'ensuit que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S^* = -(\lambda + \mu + \psi)S^* - \beta S^* I^* + S^* \widehat{\Phi}(\lambda), \\ \frac{d}{dt} I^* = \beta S^* I^* \widehat{K}(\lambda) - (\lambda + \mu + \gamma) I^*. \end{cases}$$

La matrice jacobienne au point (S^*, I^*) est donnée par

$$J_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu + \psi) - \beta I^* + \widehat{\Phi}(\lambda) & -\beta S^* \\ \beta I^* \widehat{K}(\lambda) & -(\lambda + \mu + \gamma) + \beta S^* \widehat{K}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

On a $\widehat{\Phi}(\lambda) = \psi - (\lambda - \mu)\psi\widehat{\Phi}_1(\lambda)$.

Nous posons $\det(J_0) = 0$, alors, nous obtenons l'équation caractéristique

$$(\lambda + \mu) \left(1 + \psi\widehat{\Phi}_1(\lambda)\right) \left(\lambda + \mu + \gamma - \frac{\mu + \gamma}{\kappa} \widehat{K}(\lambda)\right) + (\lambda + \mu + \gamma) \beta I^* = 0. \quad (2.30)$$

Notons que $\lambda_1 = -\mu$ n'est pas une racine de l'équation (2.30). Diviser les deux côtés des équations (2.30) par $(\lambda + \mu)(1 + \psi\widehat{\Phi}_1(\lambda))$, nous obtenons

$$\left(\lambda + \mu + \gamma + \frac{(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \mu)(1 + \psi\widehat{\Phi}_1(\lambda))} \beta I^*\right) = \frac{\mu + \gamma}{\kappa} \widehat{K}(\lambda). \quad (2.31)$$

Maintenant, si λ est une racine de l'équation (2.31) avec $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Si nous pouvons prouver que la partie réel de $Z = \frac{(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \mu)(1 + \psi\widehat{\Phi}_1(\lambda))}$ n'est pas négatif, nous laissons $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ est nous avons prouvé que $\text{Re}(Z) \geq 0$. puisque

$$Z = \frac{(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \mu)(1 + \psi\widehat{\Phi}_1(\lambda))}, \quad (2.32)$$

et

$$\widehat{\Phi}_1(\lambda) = \int_0^\infty \psi \exp\left(-\int_0^a (\mu + \alpha(s)) ds\right) e^{-\lambda a} da.$$

Notons que

$$q(a) = \psi \exp\left(-\int_0^a (\mu + \alpha(s)) ds\right), \quad (0 \leq \psi < 1). \quad (2.33)$$

On a $q(a)$ est non négatif et non croissant avec $q(0) = \psi$ est cette caractéristique sera utilisée dans l'étude ultérieure

pour étudier le signe de $\text{Re}(Z)$, nous laissons $\lambda = x + iy$ où $\text{Re}(\lambda)$ a été supposé non négatif dans la preuve de partie (2) de théorèmes 2.4. Nous remplaçons $\lambda = x + iy$ dans (2.32) donne que

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + (\mu + \gamma) + iy}{(x + \mu + iy) \left((1 + \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \cos(ya) da) - i \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \sin(ya) da \right)} \\ &= \frac{x + (\mu + \gamma) + iy}{Z_1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

où

$$\begin{aligned} Z_1 &= (x + \mu) \left(1 + \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \cos(ya) da \right) + y \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \sin(ya) da \\ &\quad + i \left[y \left(1 + \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \cos(ya) da \right) - (x + \mu) \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \sin(ya) da \right] \\ &= C + iD, \end{aligned}$$

avec C et D sont les parties réelles et imaginaires de Z_1

$$\operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Re} \left(\frac{Z_2}{C^2 + D^2} \right) = \frac{\operatorname{Re}(z_2)}{C^2 + D^2}, \quad (2.35)$$

où

$$Z_2 = (x + \mu + \gamma)C + yD + i(yC - (x + \mu + \gamma)D),$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z_2) &= (x + \mu + \gamma)C + yD \\ &= \gamma y \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \sin(ya) da \\ &= [(x + \mu + \gamma)((x + \mu) + y^2)] + \int_0^\infty q(a) e^{-xa} \cos(ya) da. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il découle de la caractéristique de $q(a)$ et $\operatorname{Re}(\lambda) = x \geq 0$ que le premier terme du côté droit (2.36) est strictement positif. Il ramène alors à deux situations

i) $y=0$, nous peut facilement voir que $\operatorname{Re}(Z_2) > 0$,

ii) $y \neq 0$, tandis que $y \int_0^\infty e^{-xa} \sin(ya) da > 0$ et la caractéristique de $q(a)$,

alors $\operatorname{Re}(Z_2) > 0$, il suit alors du (2.36) que $\operatorname{Re}(Z) > 0$.

2.2.3 Persistance uniforme

Dans cette section, nous étudions la persistance du système (2.3). On définit les sous-espaces suivants

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_I &= \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times \widehat{M}, \\ \partial \widetilde{M}_I &= \chi_{0+} \setminus \widetilde{M}_I, \\ \widehat{M} &= \left\{ \begin{pmatrix} e \\ I \end{pmatrix} \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ : \int_0^{\bar{\theta}} e(\theta) d\theta > 0 \text{ ou } I > 0 \right\}, \end{aligned}$$

Théorème 2.4

Le sous-ensemble $\partial\widetilde{M}_I$ est positivement invariants sous le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ généré par le système (2.20) sur χ_{0+} c'est-à-dire, $U(t, \partial\widetilde{M}_I) \subset \partial\widetilde{M}_I$, pour tout $t \geq 0$.

De plus, le point d'équilibre sans maladie $T^0 = (S^0, (0, v^0(a)), (0, 0_{L^1}), 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ réduit à $\partial\widetilde{M}_I$.

Preuve.

Soit $(S_0, 0, v_0, 0, e_0, I_0) \in \partial\widetilde{M}_I$, alors $(e_0, I_0) \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \setminus \widehat{M}$ et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)e(\theta, t), \\ \frac{d}{dt} I(t) = \int_0^\infty p(\theta)e(\theta, t)d\theta - (\mu + \gamma)I(t), \\ e(0, t) = \beta S(t)I(t), \\ I(0) = 0, \quad e(\theta, t) = e_0(\theta). \end{array} \right.$$

Puisque $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ quand $t \rightarrow \infty$, nous avons

$$e(\theta, t) \leq \tilde{e}(\theta, t) \quad \text{et} \quad I(t) \leq \tilde{I}(t), \quad (2.37)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{e}(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{e}(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)\tilde{e}(\theta, t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{I}(t) = \int_0^\infty p(\theta)\tilde{e}(\theta, t)d\theta - (\mu + \gamma)\tilde{I}(t), \\ \tilde{e}(0, t) = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \tilde{I}(t), \\ \tilde{I}(0) = 0, \quad \tilde{e}(\theta, 0) = e_0(\theta). \end{array} \right. \quad (2.38)$$

En utilisant la méthode caractéristique, nous obtenons

$$\tilde{e}(\theta, t) = \begin{cases} \beta \frac{\Lambda}{\mu} \tilde{I}(t - \theta) K_1(\theta), & \text{si } t > \theta, \\ e_0(\theta - t) \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)}, & \text{si } \theta \geq t. \end{cases} \quad (2.39)$$

En remplaçant (2.39) dans (2.38) nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{I}(t) = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^t K(\theta) \tilde{I}(t-\theta) d\theta + F_I(t) - (\mu + \gamma) \tilde{I}(t), \\ \tilde{I}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

avec,

$$F_I(t) = \int_t^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta-t) \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta-t)} d\theta,$$

nous pouvons prouver que $F_I(t) \equiv 0$ pour tout $t \geq 0$.

Si $t \geq \bar{\theta}$,

On a $K_1(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta (\mu + p(s)) ds\right)$, et $K_1(\theta-t) = \exp\left(-\int_0^{\theta-t} (\mu + p(s)) ds\right)$,

alors, $\frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta-t)} = \exp\left(-\int_{\theta-t}^\theta (\mu + p(s)) ds\right) = e^{-\mu t} \cdot e^{\left(-\int_{\theta-t}^\theta p(s) ds\right)} < 1$,

alors, il suit de $\frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta-t)} < 1$ et $p \in L^\infty$ que $F_I(t) = 0$ pour $t \geq \bar{\theta}$.

Si $t \leq \bar{\theta}$, alors

$$\begin{aligned} F_I(t) &\leq \int_t^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta-t) d\theta \\ &= \int_t^{\bar{\theta}} p(\theta) e_0(\theta-t) d\theta + \int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta-t) d\theta. \end{aligned}$$

On a $p(\theta) \in L^\infty((0, +\infty), \mathbb{R}) \setminus \{0_{L^\infty}\}$ alors $\int_0^\infty p(\theta) d\theta \leq p_{\max} \int_0^\infty d\theta$,

ce qui implique, $F_I(t) \leq p_{\max} \int_t^{\bar{\theta}} e_0(\theta-t) d\theta + \int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta-t) d\theta$.

Il faut que,

$$\int_t^{\bar{\theta}} e_0(\theta-t) d\theta = 0,$$

et

$$\int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta-t) d\theta = 0.$$

D'abord, nous pouvons prouver que $\int_t^{\bar{\theta}} e_0(\theta-t) d\theta = 0$.

On pose

$$\theta - t = x,$$

alors,

$$\int_t^{\bar{\theta}} e_0(\theta - t) d\theta = \int_0^{\bar{\theta}} e_0(x) dx,$$

et on a

$$e_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \setminus \widehat{M}$$

avec

$$\widehat{M} = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ I \end{pmatrix} \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ : \int_0^{\bar{\theta}} e(\theta) d\theta > 0 \text{ ou } I > 0 \right\},$$

alors,

$$\int_0^{\bar{\theta}} e_0(x) dx = \int_t^{\bar{\theta}} e_0(\theta - t) d\theta = 0.$$

En suite, on prouve que $\int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta - t) d\theta = 0$.

On a

$$e_0(\theta - t) = e(\theta - t, 0),$$

et

$$e_0(\theta - t) \text{ est bornée alors } e_0(\theta - t) < M,$$

par conséquent,

$$\int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) e_0(\theta - t) d\theta < M \int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) d\theta,$$

et, $\bar{\theta} = \inf \left\{ \theta : \int_{\theta}^{+\infty} p(\sigma) d\sigma = 0 \right\}$ avec $\theta > \bar{\theta}$,

on arrive à, $\int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) d\theta < \int_{\theta}^{+\infty} p(\theta) d\theta = 0$, ainsi, $\int_{\bar{\theta}}^{+\infty} p(\theta) d\theta = 0$,

Il mène alors à deux situations

Si $t \geq \bar{\theta}$: et $\frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)} < 1$ d'où $F_I(t) = 0$, où $p_{\max} = \text{ess sup}_{\theta \in (0, +\infty)} p(\theta)$.

Si $t < \bar{\theta}$: il s'ensuit que $F_I(t)$ est égal à zéro lorsque t est grand suffisant.

Par conséquent, $F_I(t) \equiv 0$ pour tout $t \geq 0$.

En appliquant la transformée de Laplace du système (2.40), on trouve

$$\lambda \widehat{I} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \widehat{K}(t) \widehat{I}(t) - (\mu + \gamma) \widehat{I}(t),$$

alors,

$$\widehat{I}(t) \left[\lambda - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \widehat{K}(t) + (\mu + \gamma) \right] = 0,$$

et donc

$$\begin{cases} \widehat{I}(t) = 0, \\ \left[\lambda - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \widehat{K}(t) + (\mu + \gamma) \right] \neq 0. \end{cases}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$\widetilde{I}(t) = 0,$$

Le système (2.40) admet une solution unique $\widetilde{I}(t) = 0$. Il suit maintenant de (2.39) que $\widetilde{e}(\theta, t) = 0$ pour $0 \leq \theta \leq t$.

pour $t < \theta$, on a

$$\begin{aligned} \|\widetilde{e}(\theta, t)\|_{L^1} &= \left\| e_0(\theta - t) \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)} \right\|_{L^1} = \frac{K_1(\theta)}{K_1(\theta - t)} \|e_0\|_{L^1} \\ &\leq e^{-\mu t} e^{\left(-\int_{\theta-t}^{\theta} p(s) ds \right)} \|e_0\|_{L^1} \\ &\leq e^{-\mu t} \|e_0\|_{L^1}, \end{aligned}$$

donc, $\widetilde{e}(\theta, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ en utilisant (2.37), nous pouvons obtenir $I(t) = 0$ et $e(\theta, t) = 0$ quand $t \rightarrow \infty$

Maintenant, on énonce un résultat important de la persistance uniforme dans le théorème suivant

■

Théorème 2.5

Supposons que $\mathfrak{R}_0 > 1$. Le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant sur \widetilde{M}_I par rapport à $(\partial \widetilde{M}_I, \widetilde{M}_I)$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(S, 0, v, 0, e, I) \in \widetilde{M}_I$,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq c, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \|v(\cdot, t)\|_{L^1} \geq c, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \|e(\cdot, t)\|_{L^1} \geq c, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq c.$$

De plus, il existe un attracteur globale compact A_0 d'un ensemble borné dans \widetilde{M}_I .

Preuve.

Il découle du **Théorème 2.4** que T^0 est globalement asymptotiquement stable dans $\partial \widetilde{M}_1$. Ainsi, il suffit de prouver que

$$W^s(\{T^0\}) \cap \widetilde{M}_I = \emptyset.$$

avec

$$W^s(\{T^0\}) = \left\{ x \in \chi_{0+} : \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)x = T^0 \right\}.$$

Supposons par contradiction qu'il existe $x_n = (S_{0n}, 0, v_{0n}, 0, e_{0n}, I_{0n}) \in \left\{ y \in \widetilde{M}_I : \|T^0 - y\| \leq \varsigma \right\} \widetilde{M}_I$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)x = T^0$. Donc on peut trouver une suite $\{x_n\} \subset \widetilde{M}_I$ tel que

$$\|U(t)x_n - T^0\| < \frac{1}{n+1}, \quad t > 0.$$

Où

$$U(t)x_n = (S_n(t), 0, v_n(\cdot, t), 0, e_n(\cdot, t), I_n(t)), \quad x_n = (S_n(0), v_n(\cdot, t), e_n(\cdot, t), I_n(0)).$$

alors pour tout $t \geq 0$,

$$\|(S_n(t), 0, v_n(\cdot, t), 0, e_n(\cdot, t), I_n(t)) - (S_n(0), v_n(\cdot, t), e_n(\cdot, t), I_n(0))\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (2.41)$$

On choisit $\eta > 0$, assez grand tel que $S^0 - \frac{1}{n+1} > 0$.

Il exist $T > 0$, tel que pour tout $t > T$, nous avons

$$S^0 - \frac{1}{n+1} < S_n(t) < S^0 + \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq I_n(t) \leq \frac{1}{n+1}, \quad (2.42)$$

alors, on a

$$S_n(t) \geq S^0 + \frac{1}{n+1},$$

pour tout $t \geq 0$, et par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e_n(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial e_n(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)e_n(\theta, t), \\ \frac{d}{dt} I_n(t) = \int_0^\infty p(\theta)e_n(\theta, t)d\theta - (\mu + \gamma)I_n(t), \\ e_n(0, t) \geq \beta(S^0 - \frac{1}{n+1})I_n(t), \\ I_n(0) = I_{0n}, \quad e_n(0, t) = e_{n0}, \quad (e_{n0}, I_{0n}) \in \widetilde{M}_1. \end{array} \right.$$

En insérant (2.42) dans la seconde équation de (2.3) et en utilisant le principe de comparaison, on obtient

$$e_n(0, t) \geq \tilde{e}_n(\cdot, t), \quad I_n(t) \geq \tilde{I}_n(t), \quad (2.43)$$

où $(\tilde{e}_n(t), \tilde{I}_n(t))$ est la solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{e}_n(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{e}_n(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)\tilde{e}_n(\theta, t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{I}_n(t) = \int_0^\infty p(\theta)\tilde{e}_n(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma)\tilde{I}_n(t), \\ \tilde{e}_n(0, t) = \beta(S^0 - \frac{1}{n+1})\tilde{I}_n(t), \\ \tilde{I}_n(0) = I_{0n}, \quad \tilde{e}_n(0, t) = e_{n0}, \quad (e_{n0}, I_{0n}) \in \widetilde{M}_1. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Pareillement à la preuve du **Théorème 2.3**.

Soient,

$$\tilde{e}_n(\theta, t) = \tilde{e}_n(\theta)e^{\lambda_n t}, \quad \tilde{I}_n(t) = \tilde{I}_n e^{\lambda_n t}. \quad (2.45)$$

En remplaçant (2.45) dans la première équation de (2.44), ce qui donne

$$\tilde{e}_n(\theta) = \beta(S^0 - \frac{1}{n+1})\tilde{I}_n \exp\left(-\int_0^\theta (p(s) + \mu + \lambda_n) ds\right).$$

Il découle de la deuxième équation de (2.44) que

$$\lambda_n = \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \int_0^\infty p(\theta) e^{-\mu\theta} e^{-\lambda_n\theta} e^{\int_0^\theta (p(s) ds)} d\theta - (\mu + \gamma),$$

alors, nous pouvons obtenir l'équation caractéristique du système (2.44)

$$\tilde{H}(\lambda_n) = \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \widehat{k}(\lambda_n) \frac{1}{(\lambda_n + \mu + \gamma)} = 1. \quad (2.46)$$

Depuis, $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta S^0 \kappa}{(\mu + \gamma)} > 1$, il existe $n \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(0) &= \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \widehat{k}(0) \frac{1}{(\mu + \gamma)} \\ &= \left(S^0 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{\kappa\beta}{(\mu + \gamma)} \\ &= \left(\mathfrak{R}_0 - \frac{1}{n+1} \frac{\kappa\beta}{(\mu + \gamma)}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\left(S^0 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{\kappa\beta}{(\mu + \gamma)} > 1. \quad (2.47)$$

Noton que $\tilde{H}(\lambda_n)$ est une fonction de classe C^1 avec

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow +\infty} \tilde{H}(\lambda_n) = \lim_{\lambda_n \rightarrow +\infty} \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \hat{k}(\lambda_n) \frac{1}{(\lambda_n + \mu + \gamma)} = 0.$$

Il peut vérifier que,

$$\begin{aligned} \tilde{H}'(\lambda_n) &= \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \left[\frac{\int_0^\infty -\theta k(\theta) e^{-\lambda_n \theta} d\theta}{(\lambda_n + \mu + \gamma)^2} - \frac{\int_0^\infty k(\theta) e^{-\lambda_n \theta} d\theta}{(\lambda_n + \mu + \gamma)^2} \right] \\ &= \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \frac{-\int_0^\infty k(\theta) e^{-\lambda_n \theta} d\theta [\theta(\lambda_n + \mu + \gamma) + 1]}{(\lambda_n + \mu + \gamma)^2} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{H}'(\lambda_n) < 0$, pour tout $\lambda_n < 0 \in [0, +\infty)$, il implique que $\tilde{H}(\lambda_n)$ est décroissante sur $[0, +\infty)$, d'après l'équation (2.47), $\tilde{H}(\lambda_n)$ a une racine unique $\lambda_n^* > 0$ pour tout $n \geq 0$ assez grand alors, $\tilde{H}(0) > 1$. De plus si $\lambda_n = \xi + \eta i$ est un racine complexe arbitraire de l'équation (2.46), puis on a $\xi < \lambda_n^*$ en fait, si $\xi < 0$, alors $\xi < \lambda_n^*$. Si $\xi > 0$

$$\tilde{H}(\lambda_n) = \left| \tilde{H}(\xi + \eta i) \right| \leq \left| \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \hat{k}(\xi + \eta i) \frac{1}{(\xi + \eta i + \mu + \gamma)} \right|,$$

alors, on peut déduire que

$$\left| \hat{k}(\xi + \eta i) \right| \leq \left| \int_0^\infty K(\theta) e^{-(\xi + \eta i)\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\infty K(\theta) e^{-\xi\theta} d\theta = \hat{k}(\xi),$$

et

$$|\xi + \eta i + \mu + \gamma| \geq |\xi + \mu + \gamma|.$$

D'autre part,

$$\beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \frac{\hat{k}(\xi + \eta i)}{(\xi + \eta i + \mu + \gamma)} \leq \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \frac{\hat{k}(\xi)}{\xi + \mu + \gamma},$$

alors,

$$\left| \tilde{H}(\xi + \eta i) \right| \leq \tilde{H}(\xi),$$

ce qui implique $\xi < \lambda_n^*$.

Nous pouvons écrire le système linéaire (2.44) sous la forme

$$\frac{du(t)}{dt} = Bu(t), \tag{2.48}$$

où

$$u(t) = \begin{pmatrix} \tilde{e}(\cdot, t) \\ \tilde{I}(t) \end{pmatrix},$$

$$B \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{e}}{dt} \\ \frac{d\tilde{I}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d\tilde{e}}{d\theta} - (p(\theta) + \mu)\tilde{e} \\ -(\mu + \gamma)\tilde{I} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathfrak{D}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{I} \end{pmatrix} \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \tilde{e}(0) = \beta(S^0 - \frac{1}{n+1})\tilde{I}, \tilde{I}(0) = \int_0^{+\infty} p(\theta)\tilde{e}(\theta) d\theta \right\}.$$

En utilisant le théorème de Hille–Yosida, l'opérateur $(B, \mathfrak{D}(B))$ génère un semi-groupe fortement continu, noté $\{\tilde{U}(t)\}_{t \geq 0}$.

Soit Π_n la projection propre correspondant à la valeur propre dominante λ_n^* et $\Delta(\lambda_n) = 1 - \tilde{H}(\lambda_n)$, puis en utilisant [la Proposition 3.1[40]] et après des calculs algébriques approfondis, on peut obtenir

tenir

$$\begin{aligned} \Pi_n \tilde{U}(t) \begin{pmatrix} e_{0n} \\ I_{0n} \end{pmatrix} &= \exp(\lambda_n^* t) \Pi_n \begin{pmatrix} e_{0n} \\ I_{0n} \end{pmatrix} \\ &= \lim_{\lambda_n^* \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \lambda_n^*)(\lambda_n I - B)^{-1} \begin{pmatrix} e_{0n} \\ I_{0n} \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_n^* t} \begin{pmatrix} \rho \\ \ell \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $\rho(\theta)$, ℓ peuvent être exprimés comme

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \exp\left(-\int_0^\theta (\lambda_n^* + \mu + p(l)) dl\right) \frac{1}{\frac{d\Delta(\lambda_n)}{d\lambda_n} \Big|_{\lambda_n = \lambda_n^*}} \beta(S^0 - \frac{1}{n+1}) \frac{1}{\lambda_n^* + \mu + \gamma} \\ &\quad \left[I_{0n} + \int_0^{+\infty} p(\theta) \int_0^\theta e_{0n}(\tau) \exp\left(-\int_0^\theta (\lambda_n^* + \mu + p(l)) dl\right) d\tau d\theta \right], \\ \ell &= \frac{1}{\lambda_n^* + \mu + \gamma} \int_0^{+\infty} p(\theta) \rho(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

De plus $(e_{0n}, I_{0n}) \in \tilde{M}_I$, après des calculs approfondis, nous pouvons prouver que $\ell > 0$ et $\rho(\theta) > 0$, pour tous $\theta > 0$. Notez que $\lambda_n^* > 0$, il s'ensuit alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \Pi_n \tilde{U}(t) \begin{pmatrix} e_{0n} \\ I_{0n} \end{pmatrix} \right\|_{L^1} = +\infty.$$

Donc, $\left\| \tilde{e}_n(\cdot, t) \right\|_{L^1} = +\infty$, $\tilde{I}_n(t) = +\infty$. Comme $t \rightarrow +\infty$ et de (2.43) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_n(\cdot, t)\|_{L^1} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I_n(t) = +\infty.$$

C'est une contradiction à (2.42) et donc $W^S(\{T^0\}) \cap \tilde{M}_1 = \emptyset$.

D'après le **Théorème (2.2)**. Il s'ensuit que le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est asymptotiquement stable, dissipatif ponctuel et que la trajectoire avant d'un ensemble borné. De plus, l'équilibre sans maladie T^0 est globalement asymptotiquement stable dans $\partial \tilde{M}_I$. Ainsi, le Théorème 4.2 de Hale et Waltman [38] implique que le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant par rapport à $(\partial \tilde{M}_I, \tilde{M}_I)$. ■

Chapitre 3

Étude de la stabilité globale

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilité globale de chacun des points d'équilibre possibles du système (2.3). La technique des preuves consiste à utiliser des fonctions appropriées de Lyapunov.

3.1 Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

Puisque $U(t)A_0 = A_0$ pour tout $t \geq 0$ et soit $x \in A_0$, nous pouvons trouver une trajectoire totale $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ passant par $x \in A_0$. Définir $P_S u(t) = S(t)$ et $P_v u(t) = v(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (proposition 4.3 de [23]). Alors $S(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour $t \geq 0, r \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \alpha(a)v(t+r) da = \int_0^{+\infty} \alpha(a) \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a-t)} v(r)(a-t) da + \int_0^{+\infty} \alpha(a)\Phi_1(a)S(t-a+r) da.$$

Si $\hat{t} = t+r$, il s'ensuit que pour $t \geq r$,

$$\int_0^{+\infty} \alpha(a)v(t)(a) da = \int_0^{+\infty} \alpha(a) \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a-(t-r))} v(r)(a-(t-a)) da + \int_0^{+\infty} \alpha(a)\Phi_1(a)S(t-a) da$$

et pour $t \geq r$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \alpha(a) \frac{\Phi_1(a)}{\Phi_1(a-(t-r))} v(r)(a-(t-a)) da \right| \leq \exp(-\mu(t-r)) \|v(r)\|_{L^1(0,+\infty)}.$$

Puisque $u(t) \in A_0$ et A_0 est compact, il s'ensuit que $(r \rightarrow -\infty)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \alpha(a)v(t)(a) da = \int_0^{+\infty} \alpha(a)\psi(t)\Phi_1(a)S(t-a) da.$$

Dans la suite, nous pouvons donc réécrire le système (2.3) comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^{+\infty} \alpha(a)S(t-a) da, \\ \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial t} = -(p(\theta) + \mu)e(\theta, t), \\ \frac{d}{dt}I(t) = \int_0^{+\infty} p(\theta)e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma)I(t), \\ e(0, t) = \beta S(t)I(t), \quad S(0) = S_0, \quad e(\theta, 0) = e_0(\theta), \quad I(0) = I_0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Dans la suite, nous définissons la fonction suivante de l'âge latent θ

$$\eta(\theta) = \int_{\theta}^{\infty} p(\tau) \exp\left(-\int_{\theta}^{\tau} (\mu + p(s)) ds\right) d\tau, \quad (3.2)$$

et $\eta(0) = \kappa$, $\eta(\theta) > 0$ pour tout $0 < \theta < +\infty$.

On note que

$$\exp\left(-\int_{\theta}^{\tau} (\mu + p(s)) ds\right) \leq 1, \quad (3.3)$$

pour tout $\tau \in [\theta, +\infty)$, il suit de (2.14) que pour tout $\theta \geq \bar{\theta}$, nous avons

$$\eta(\theta) \leq \int_{\theta}^{\infty} p(\tau) d\tau = 0.$$

Théorème 3.1

Si $\mathfrak{R}_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie $T^0(S^0, v^0(a), 0, 0)$ du système (2.3) est globalement stable.

Preuve.

Nous savons que le point d'équilibre sans maladie $T^0 = (S^0, v^0(a), 0, 0)$ du système (2.3) est localement asymptotiquement stable si $\mathfrak{R}_0 < 1$.

Dans la suite, nous devons seulement montrer que si $\mathfrak{R}_0 < 1$, T^0 est l'attracteur globale dans $\mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \partial M_I)$, c'est-à-dire,

$$A_0 = \{T^0\}.$$

Puisque le système (3.1) est obtenu du système (2.3), l'attracteur globale A_0 du système (2.3) devient un nouvel attracteur globale du système (3.1), noté \tilde{A}_0 , dans $\mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \setminus \partial M_I$.

D'abord, montrons pour le système (3.1) que $\tilde{A}_0 = \{T_1^0 = (S^0, 0, 0)\}$.

Soit

$$h(z) = z - 1 - \ln z, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

Il est clair que $h(z) \geq 0$, $h'(z) = 1 - \frac{1}{z}$, pour tout $z \in \mathbb{R}_+$ et $\min_{z \in \mathbb{R}_+} h(z) = h(1) = 0$.

Soit $(S(t), v(a, t), e(\theta, t), I(t))$ la solution positive du système (2.3) avec les conditions aux limites et les conditions initiales (2.4). On définit la fonctionnelle de Lyapunov

$$V_1(t) = S(t) - S^0 - S^0 \ln \frac{S(t)}{S^0} + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) e(\theta, t) d\theta + \frac{1}{\kappa} I(t).$$

En calculant la dérivée de $V_1(t)$, on obtient

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} - S^0 \ln \left(\frac{dS(t)}{dt} \times \frac{1}{S^0} \right) + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{d}{dt} e(\theta, t) d\theta + \frac{1}{\kappa} \frac{dI(t)}{dt}.$$

Comme $\Lambda = (\mu + \psi)S^0 - \int_0^\infty \Phi(a)S^0 da$, et par l'expression de $R(\psi)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} - S^0 \ln \left(\frac{dS(t)}{dt} \times \frac{1}{S^0} \right) + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{d}{dt} e(\theta, t) d\theta + \frac{1}{\kappa} \frac{dI(t)}{dt} \\ &= (\mu + \psi)S^0 - \int_0^\infty \Phi(a)S^0 da - (\mu + \psi)S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \Phi(a)S(t-a) da \\ &\quad - S^0 \left[\frac{dS(t)}{dt} \times \frac{1}{S(t)} \right] + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left([-p(\theta) + \mu] e(\theta, t) - \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left[\int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma)I(t) \right] \\ &= \left(1 - \frac{S^0}{S(t)}\right) (\mu + \psi)(S^0 - S(t)) - \beta S(t)I(t) + \beta S^0 I(t) \\ &\quad + \left(1 - \frac{S^0}{S(t)}\right) \int_0^\infty \Phi(a) [S(t-a) - S^0] da - \frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I(t) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left[\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (p(\theta) + \mu) e(\theta, t) \right] d\theta + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta \\ &= -\frac{\mu + \psi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \frac{\mu + \psi}{\kappa} (R(\psi) - 1)I(t) + \int_0^\infty \Phi(a)S(t-a) da \\ &\quad - S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \frac{S(t-a)}{S(t)} da + \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty ((p(\theta) + \mu) \eta(\theta) - p(\theta) e(\theta, t)) d\theta, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où nous avons utilisé les expressions de S^0 et ϕ .

Soit

$$V(t) = V_1(t) + \int_0^\infty \Phi(a) \int_0^a (S(t-r) - S^0 - S^0 \ln \frac{S(t-r)}{S^0}) dr da, \quad (3.5)$$

ce qui est également une fonction définie positive avec son minimum global T_1^0 . Alors

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV_1(t)}{dt} + \int_0^\infty \Phi(a) \left[\frac{d}{dt} \int_0^a \left(S(t-r) - S^0 - S^0 \ln \frac{S(t-r)}{S^0} \right) dr \right] da.$$

On a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^a \left(S(t-r) - S^0 - S^0 \ln \frac{S(t-r)}{S^0} \right) dr \\ &= \int_0^a \left(\frac{d}{dt} S(t-r) dr - \int_0^a \frac{d}{dt} S^0 dr - S^0 \int_0^a \frac{d}{dt} \ln \frac{S(t-r)}{S^0} \right) dr \int_0^a \frac{d}{dt} S^0 dr \\ &= S(t-r) \Big|_0^a - S^0 \ln \frac{S(t-r)}{S^0} \Big|_0^a \\ &= S(t) - S(t-a) - S^0 \ln \left[\frac{S(t)}{S^0} - \frac{S(t-a)}{S^0} \right], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \int_0^\infty \Phi(a) \left[\frac{d}{dt} \int_0^a (S(t-r) - S^0 - S^0 \ln \frac{S(t-r)}{S^0}) dr \right] da \\ &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \int_0^\infty \Phi(a) [S(t) - S(t-a)] da + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da \\ &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \int_0^\infty \Phi(a) S(t) da - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da \\ &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \phi S(t) - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da. \end{aligned}$$

Il découle de (3.4) et la relation entre ϕ et ϕ_1 que

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{-\mu + \psi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) - \beta S(t) I(t) \\ &\quad + \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) + S^0 \left[\int_0^\infty \Phi(a) \left(-\frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \right] \\ &\quad + \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + \phi S(t) \\ &= \frac{-\mu + \psi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) - \beta S(t) I(t) + \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\phi S(t) + \phi S^0 - \phi S^0 + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \left(-\frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \\
 & - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty ((\mu + p(\theta)) \eta(\theta) - p(\theta)) d\theta \\
 & = \frac{-\mu + \psi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) - \beta S(t) I(t) + \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) \\
 & + \phi S(t) - \phi S^0 + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \\
 & - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty ([\mu + p(\theta)] \eta(\theta) - p(\theta)) d\theta.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) + \phi S(t) + \phi S^0 &= \frac{\phi S^0}{S(t)} (S^0 - S(t)) - \phi (S^0 - S(t)) \\
 &= -\phi (S^0 - S(t)) \left[\frac{S^0}{S(t)} - 1 \right] \\
 &= -\phi (S^0 - S(t)) \left(\frac{S^0 - S(t)}{S(t)} \right) \\
 &= -\frac{\phi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{-\mu + \psi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 - \frac{\phi}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 &= \frac{-(\mu + \psi + \phi)}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 \\
 &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^0 - S(t))^2.
 \end{aligned}$$

Alors, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) - \beta S(t) I(t) \\
 &+ S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta \\
 &- \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty ((\mu + p(\theta)) \eta(\theta) - p(\theta)) e(\theta, t) d\theta.
 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} &= \int_0^\infty \eta(\theta) de(\theta, t) \\
 &= \eta(\theta) e(\theta, t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e(\theta, t)' \eta(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \eta(\theta)e(\theta, t)|_{\theta=\infty} - \eta(0)e(0, t) - \int_0^\infty e(\theta, t)' \eta(\theta) d\theta,$$

alors, on obtient

$$\int_0^\infty \eta(\theta) \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} = \eta(\theta)e(\theta, t)|_{\theta=\infty} - \kappa \beta S(t) I(t) - \int_0^\infty e(\theta, t)' \eta(\theta) d\theta.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) - \beta S(t) I(t) \\ &\quad + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da - \frac{1}{\kappa} (\eta(\theta)e(\theta, t)) \Big|_{\theta=\infty} \\ &\quad - \kappa \beta S(t) I(t) - \int_0^\infty e(\theta, t)' \eta(\theta) d\theta - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty ([\mu + p(\theta)] \eta(\theta) - p(\theta)) e(\theta, t) d\theta \\ &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^0 - S(t))^2 + \left(\frac{\mu + \gamma}{\kappa} \right) (R(\psi) - 1) I(t) \\ &\quad + S^0 \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da - \frac{1}{\kappa} (\eta(\theta)e(\theta, t)) \Big|_{\theta=\infty}. \end{aligned}$$

Notons que $1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \leq 0$, pour $S(t-a) > 0$, $S(t) > 0$, avec égalité si et seulement si $S(t-a) = S(t)$.

Par conséquent, le fait que $\mathfrak{R}_0 < 1$ assure que la fonction définie positive V a une dérivée négative $\frac{dV(t)}{dt}$. Il s'en suit alors que la fonction V est décroissante sur la trajectoire totale $\tilde{u}(t)$ dans l'attracteur \tilde{A}_0 du système (3.1). Supposons que $P(S^P, e^P, I^P)$ est un point dans l'ensemble Alpha limite de $\tilde{u}(t)$, on peut alors en déduire que V est constante sur toute trajectoire totale $\tilde{u}^p(t) = (S^p(t), e^p(\cdot, t), I^p(t))$ passant par $P \in \tilde{A}_0$.

Autrement, l'égalité $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ si et seulement si $(S^p(t), e^p(\theta, t), I^p(t)) = T_1^0$. Alors

$$S^p(t) = S^0, \quad e^p(\theta, t) = 0, \quad I^p(t) = 0.$$

Ainsi, l'ensemble Alpha limite de $\tilde{u}(t)$ et l'ensemble Omega limite de $\tilde{u}(t)$ sont tout simplement $\{T_1^0\}$. Puisque $t \rightarrow V(\tilde{u}(t))$ est une fonction décroissante, il s'en suit que $V(\tilde{u}(t)) = V(T_1^0)$ et $\tilde{u}(t) = T_1^0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il résulte que la trajectoire totale $\tilde{u}(t)$ dans l'attracteur \tilde{A}_0 doit être l'équilibre sans maladie du système (3.1), et donc

$$\tilde{A}_0 = \{T_1^0\}. \quad (3.6)$$

Ensuite, nous obtenons de (2.16) et (3.6) que

$$S^Q(t) = S^0, \quad v^Q(a, t) = v^0(a), \quad e^Q(\theta, t) = 0, \quad I^Q(t) = 0,$$

pour toute trajectoire totale $u^Q(t) = (S^Q(t), v^Q(\cdot, t), e^Q(\cdot, t), I^Q(t))$ du système (2.3) passant par $Q \in A_0$, ceci implique que $A_0 = \{T^0\}$. ■

3.2 Stabilité globale du point d'équilibre endémique

Théorème 3.2

Si $\mathfrak{R}_0 > 1$, T^0 est globalement asymptotiquement stable sur ∂M_I et l'équilibre endémique $T^* = (S^*, v^*(a), e^*(\theta), I^*)$ il est globalement asymptotiquement stable dans M_I .

Preuve.

On peut facilement démontrer la première partie du **Théorème 3.2** à partir du **Théorème 2.3**. Nous savons que le point d'équilibre endémique $T^* = (S^*, v^*(a), e^*(\theta), I^*)$ du système (2.3) est localement asymptotiquement stable si $\mathfrak{R}_0 > 1$. Dans la suite, nous montrons que si $\mathfrak{R}_0 > 1$ le point d'équilibre endémique T^* est l'attracteur global dans $\mathbb{R}_+ \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \setminus \partial M_I$, c'est-à-dire,

$$A_0 = \{T^*\}.$$

Soit $(S(t), v(a, t), e(\theta, t), I(t))$ la solution positive du problème (2.3). On définit la fonctionnelle de Lyapunov suivante

$$\begin{aligned} V_1(t) = & S(t) - S^* - S^* \ln \frac{S(t)}{S^*} + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left(e(\theta, t) - e^*(\theta) - e^*(\theta) \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) d\theta \\ & + \frac{1}{\kappa} \left(I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\eta(\theta)$ est déjà définie dans (3.2). Nous calculons la dérivée de $V_1(t)$, et en utilisant

$$\Lambda = \beta S^* I^* + (\mu + \psi) S^* - \phi S^* \text{ et } \frac{\mu + \gamma}{\kappa} I^*, \text{ il s'en suit que}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} = & \frac{dS(t)}{dt} - S^* \ln \frac{dS(t)}{dt} S^* + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left(\frac{d}{dt} (e(\theta, t) - e^*(\theta) - e^*(\theta) \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)}) \right) d\theta \\ & + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{dI(t)}{dt} - I^* - I^* \ln \frac{dI(t)}{dt} I^* \right) \\ = & \frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I^* + (\mu + \psi) S^* - \phi S^* - (\mu + \psi) S(t) - \beta S(t) I(t) + \int_0^\infty \Phi(a) S(t - a) da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{S^*}{S(t)} \left[\frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I^* + (\mu + \psi) S^* - \phi S^* - (\mu + \psi) S(t) \right] \\
 & + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty (\eta(\theta) \left[-(p(\theta) + \mu) e(\theta, t) - \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} \right] \\
 & - e^*(\theta) \left[-(p(\theta) + \mu) e(\theta, t) - \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \frac{1}{e(\theta, t)} \right] d\theta \\
 & + \frac{1}{\kappa} \left(\int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma) I(t) \right) \\
 & - I^* \left[\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma) I(t) \right] \frac{1}{I(t)} \\
 = & \frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I^* + (\mu + \psi) S^* - \phi S^* - (\mu + \psi) S(t) - \beta S(t) I(t) + \int_0^\infty \Phi(a) S(t - a) da \\
 & - \frac{S^*}{S(t)} \left[\frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I^* + (\mu + \psi) S^* - \phi S^* - (\mu + \psi) S(t) \right] \\
 & - \frac{S^*}{S(t)} \left[-\beta S(t) I(t) + \int_0^\infty \Phi(a) S(t - a) da \right] \\
 & + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty (\eta(\theta) \left[-(p(\theta) + \mu) e(\theta, t) - \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} \right] \\
 & - e^*(\theta) \left[-(p(\theta) + \mu) e(\theta, t) - \frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \frac{1}{e(\theta, t)} \right] d\theta \\
 & + \frac{1}{\kappa} \left(\int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma) I(t) \right) \\
 & - I^* \left[\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta - (\mu + \gamma) I(t) \right] \frac{1}{I(t)} \\
 = & (1 - \frac{S^*}{S(t)}) (\mu + \psi) (S^* - S(t)) + \beta S^* I^* - \beta S(t) I(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} + \int_0^\infty \Phi(a) S(t - a) da \\
 & - S^* \int_0^\infty \Phi(a) \frac{S(t - a)}{S(t)} da + \frac{\phi S^*}{S(t)} (S^* - S(t)) \\
 & - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)} \right) \left(\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (\mu + p(\theta)) e(\theta, t) \right) d\theta \\
 & + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta - \frac{1}{\kappa} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^\infty p(\theta) (e(\theta, t) d\theta + \frac{(\mu + \gamma)}{\kappa} I^* .
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit

$$V(t) = V_1(t) + \int_0^\infty \Phi(a) \int_0^a \left(S(t-r) - S^* - S^* \ln \frac{S(t-r)}{S^*} \right) dr da, \quad (3.9)$$

est une fonction définie positive avec T_1^* est son minimum global.

Puisque

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \Phi(a) \left[\int_0^a (S(t-r) dr - S^* \frac{d}{dt} \int_0^a \ln \frac{S(t-r)}{S^*} \right] da \\ &= \int_0^\infty \Phi(a) \left[\int_0^a \frac{d}{dt} (S(t-r) dr - S^* \int_0^a \frac{d}{dt} \ln \frac{S(t-r)}{S^*} dr \right] da \\ &= \int_0^\infty \Phi(a) \left[(S(t-r)|_0^a - S^* \ln \frac{S(t-r)}{S^*}|_0^a) \right] da \\ &= \int_0^\infty \Phi(a) [(S(t) - S(t-a) - S^* \ln(S(t) - S(t-a))] da \\ &= \int_0^\infty \Phi(a) S(t) da - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da \\ &= \phi S(t) - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da, \end{aligned} \quad (3.10)$$

et en remplaçant (3.10) dans (3.9), nous obtenons

$$V(t) = V_1(t) + \phi S(t) - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da.$$

D'après (3.8), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)} \right) (\mu + \psi) (S^* - S(t)) + \beta S^* I^* - \beta S(t) I(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} \\ &+ \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da - S^* \int_0^\infty \Phi(a) \frac{S(t-a)}{S(t)} da + \frac{\phi S^*}{S(t)} (S^* - S(t)) \\ &+ \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta - \frac{1}{\kappa} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta + \frac{\mu + \gamma}{\kappa} I^* \\ &+ \phi S(t) - \int_0^\infty \Phi(a) S(t-a) da + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da \\ &= - \frac{\mu + \psi}{S(t)} (S^* - S(t))^2 + \left[\frac{\phi S^*}{S(t)} (S^* - S(t)) + \phi S(t) - \phi S^* \right] \\ &+ \beta S^* I^* - \beta S(t) I(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} + \phi S^* \\ &- S^* \int_0^\infty \Phi(a) \frac{S(t-a)}{S(t)} da + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta - \frac{1}{\kappa} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta \\
 & -\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) \left(\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (\mu + p(\theta))\right) e(\theta, t) d\theta + \frac{\mu + \gamma}{\kappa} I^*.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi S^*}{S(t)} (S^* - S(t)) + \phi S(t) + \phi S^* &= \frac{\phi S^*}{S(t)} (S^* - S(t)) - \phi (S^* - S(t)) \\
 &= -\phi (S^* - S(t)) \left[\frac{S^*}{S(t)} - 1 \right] \\
 &= -\phi (S^* - S(t)) \left(\frac{S^* - S(t)}{S(t)} \right) \\
 &= -\frac{\phi}{S(t)} (S^* - S(t))^2,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{-\mu + \psi}{S(t)} (S^* - S(t))^2 - \frac{\phi}{S(t)} (S^* - S(t))^2 &= \frac{-(\mu + \psi + \phi)}{S(t)} (S^* - S(t))^2 \\
 &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^* - S(t))^2,
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^* - S(t))^2 + \beta S^* I^* - \beta S(t) I(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} \\
 &+ S^* \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)}\right) da \\
 &- \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta(\theta) \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) \left(\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (\mu + p(\theta))\right) e(\theta, t) d\theta \\
 &+ \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta - \frac{1}{\kappa} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta + \frac{\mu + \gamma}{\kappa} I^*.
 \end{aligned}$$

Notons que le terme $\left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} e(\theta, t)$ est important pour nous produire le résultat, et on a

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} e(\theta, t) &= e^*(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)}\right) \\
 &- \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) - \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) (\mu + p(\theta)) e(\theta, t),
 \end{aligned}$$

en intégrant par partie, nous obtenons

$$\int_0^\infty \eta(\theta) \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)}\right) \left(\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (\mu + p(\theta)) e(\theta, t)\right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \eta(\theta) e^*(\theta) d \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \\
 &= \eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} \\
 &\quad - \int_0^\infty d \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) (\eta'(\theta) e^*(\theta) + \eta(\theta) e_\theta^*(\theta)) d\theta \\
 &= \eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} \\
 &\quad + \int_0^\infty \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) e^*(\theta) p(\theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

En utilisant (3.9), on obtient

$$\eta'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \eta(\theta) = (\mu + p(\theta)) \eta(\theta) - p(\theta). \quad (3.11)$$

Puisque $\eta'(\theta) e^*(\theta) = (\mu + p(\theta)) \eta(\theta) e^*(\theta) - p(\theta) e^*(\theta)$, et $\eta(\theta) e_\theta^*(\theta) = -(\mu + p(\theta)) \eta(\theta) e^*(\theta)$, alors

$$\eta'(\theta) e^*(\theta) + \eta(\theta) e_\theta^*(\theta) = (\mu + p(\theta)) \eta(\theta) e^*(\theta) - p(\theta) e^*(\theta) - (\mu + p(\theta)) \eta(\theta) e^*(\theta) = -p(\theta) e^*(\theta),$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \eta(\theta) \left(1 - \frac{e^*(\theta)}{e(\theta, t)} \right) \left(\frac{\partial e(\theta, t)}{\partial \theta} + (\mu + p(\theta)) e(\theta, t) \right) d\theta \\
 &= \eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} + \int_0^\infty \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) e^*(\theta) p(\theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les expressions suivantes $\eta(0) = \kappa$, $e^*(0) = \beta S^* I^*$, $e(0, t) = \beta S(t) I(t)$.

Finalement, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^* - S(t))^2 + \beta S^* I^* - \beta S(t) I(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} \\
 &\quad + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta - \frac{1}{\kappa} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^\infty p(\theta) e(\theta, t) d\theta + \frac{\mu + \gamma}{\kappa} I^* \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} \left[\kappa \beta S^* I^* \left(\frac{S(t) I(t)}{S^* I^*} - 1 - \ln \frac{S(t) I(t)}{S^* I^*} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\kappa} \left[\eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^*(\theta) p(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) d\theta \\
 &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^* - S(t))^2 + \beta S^* I^* \left[\frac{S^*}{S(t)} + \ln \frac{S^* I^*}{S(t) I(t)} + 1 \right] \\
 & \quad + S^* \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \\
 & \quad - \frac{1}{\kappa} \left[\eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \right] \\
 & \quad - \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^*(\theta) p(\theta) \left(1 - \frac{I^*}{I(t)} \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) d\theta \\
 &= \frac{-\mu(1 + \psi\phi_1)}{S(t)} (S^* - S(t))^2 \\
 & \quad + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^*(\theta) p(\theta) \left(1 - \frac{S^*}{S(t)} + \ln \frac{S^*}{S(t)} \right) d\theta \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

$$+ S^* \int_0^\infty \Phi(a) \left(1 - \frac{S(t-a)}{S(t)} + \ln \frac{S(t-a)}{S(t)} \right) da \tag{3.13}$$

$$- \frac{1}{\kappa} \eta(\theta) e^*(\theta) \left(\frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \tag{3.14}$$

$$+ \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^*(\theta) p(\theta) \left(1 - \frac{I^*}{I(t)} \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} - \ln \frac{I^*}{I(t)} \frac{e(\theta, t)}{e^*(\theta)} \right) d\theta. \tag{3.15}$$

D'après les propriétés de la fonction $h(x) = x - 1 - \ln x$, nous savons que les termes (3.12)-(3.15)

sont tous négatifs, et $\frac{dV(t)}{dt}$ est définie négative. Par conséquent, la fonction V est décroissante sur la trajectoire totale $\tilde{u}(t)$ dans l'attracteur \tilde{A}_0 du système (3.1). Supposons que $P(S^P, e^P, I^P)$ est un point dans l'ensemble Alpha limite de $\tilde{u}(t)$, on peut alors en déduire que V est constante sur toute trajectoire totale $\tilde{u}^p(t) = (S^p(t), e^p(\cdot, t), I^p(t))$ passant par $P \in \tilde{A}_0$.

De plus, l'égalité $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ est vérifiée si et seulement si $(S^p(t), e^p(\theta, t), I^p(t)) = T_1^*$. Alors, on a

$$S^p(t) = S^*, \quad e^p(\theta, t) = e^*(\theta), \quad I^p(t) = I^*.$$

Ainsi, l'ensemble Alpha limite de $\tilde{u}(t)$ et l'ensemble Omega limite de $\tilde{u}(t)$ sont tout simplement $\{T_1^*\}$. Puisque $t \rightarrow V(\tilde{u}(t))$ est une fonction décroissante, il s'en suit que $V(\tilde{u}(t)) = V(T_1^*)$ et $\tilde{u}(t) = T_1^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il résulte que la trajectoire totale $\tilde{u}(t)$ dans l'attracteur \tilde{A}_0 doit être l'équilibre endémique du système (3.1), et donc

$$\tilde{A}_0 = \{T_1^*\}. \tag{3.16}$$

Ensuite, nous obtenons de (2.16) et (3.16) que

$$S^Q(t) = S^*, v^Q(a, t) = v^*(a), e^Q(\theta, t) = e^*(\theta), I^Q(t) = I^*.$$

Pour toute trajectoire totale $u^Q(t) = (S^Q(t), v^Q(., t), e^Q(., t), I^Q(t))$ du système (2.3) passant par $Q \in A_0$, ce qui implique $\tilde{A}_0 = \{T^*\}$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle d'épidémie structuré en âge avec une période de vaccination période latente.

Dans ce modèle, ces distributions sont déterminées par le débit $p(\theta)$ de la classe exposée à la classe infectieuse et le taux du vaccin $\alpha(a)$. Le nombre de reproduction de base \mathfrak{R}_0 de notre modèle (2.3) a été trouvé par sa définition. Si $\mathfrak{R}_0 < 1$, le système (2.3) à une unique point d'équilibre sans maladie T^0 . En prouvant sa stabilité locale et son attractivité globale, nous avons donc établi la stabilité globale de T^0 , ce qui implique que la maladie disparaîtra finalement lorsque $\mathfrak{R}_0 < 1$.

Quand $\mathfrak{R}_0 > 1$, le système (2.3) a deux points équilibres T^0 et T^* . En appliquant la théorie du semi-groupe intégrale et en construisant une fonction de Lyapunov, nous avons prouvé que T^0 et globalement asymptotiquement stable sur ∂M_I , tandis que T^* et globalement asymptotiquement stable sur M_I . Cela implique que la maladie persiste et s'installe à l'équilibre endémique T^* si la condition initiale $I_0 > 0$, ou $e_0(\theta) > 0$ sur un ensemble de mesures positives.

La construction de la fonction de Lyapunov basée sur $\eta(\theta)$ dans (3.1), la fonction $\eta(\theta)$ est obtenue en résolvant l'équation (3.11) avec le condition initiale $\eta(0) = \kappa$. Alors Le taux de reproduction de base est

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta \Lambda \kappa}{(\mu + \gamma)(1 + \psi \phi_1)},$$

qui est un produit du taux de transmission β , la période infectieuse moyenne $\frac{1}{(\mu + \gamma)}$, la probabilité κ de survivre à la période de latence et la taille de la population sensible à l'équilibre $\frac{\Lambda}{(1 + \psi \phi_1)}$.

Bibliographie

- [1] A. Korobeinikov, Lyapunov functions and global properties for SEIR and SEIS epidemic models, *Math. Med. Biol.* 21 (2004) 75–83.
- [2] A. Korobeinikov, P.K. Maini, A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological models with nonlinear incidence, *Math. Biosci. Eng.* 1 (2004) 57–60.
- [3] G. Li, Z. Jin, Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period, *Chaos Solitons Fractals* 25 (2005) 1177–1184.
- [4] M.Y. Li, J.R. Graef, L. Wang, J. Karsai, Global dynamics of a SEIR model with varying total population size, *Math. Biosci.* 160 (1999) 191–213.
- [5] M.Y. Li, J.S. Muldowney, Global stability for the SEIR model in epidemiology, *Math. Biosci.* 12 (1995) 155–164.
- [6] J. Zhang, Z. Ma, Global dynamics of an SEIR epidemic model with saturating contact rate, *Math. Biosci.* 185 (2003) 15–32.
- [7] S.M. Moghadas, A.B. Gumel, A mathematical study of a model for childhood diseases with non-permanent immunity, *J. Comput. Appl. Math.* 157 (2003) 347–363.
- [8] H. Wei, Y. Jiang, X. Song, G. Su, S. Qiu, Global attractivity and permanence of a SVEIR epidemic model with pulse vaccination and time delay, *J. Comput. Appl. Math.* 229 (2009) 302–312.
- [9] J.Q. Li, Y. Yang, Y. Zhou, Global stability of an epidemic model with latent stage and vaccination, *Nonlinear Anal. RWA* 12 (2011) 2163–2173.
- [10] J.Q. Li, Z. Ma, Y. Zhou, Global analysis of SIS epidemic model with a simple vaccination and multiple endemic equilibria, *Acta. Math. Sci.* 26 (2006) 83–93.
- [11] X. Liu, Y. Takeuchi, S. Iwami, SVIR epidemic models with vaccination strategies, *J. Theor. Bio.* 253 (2008) 1–11.

- [12] Y. Xiao, S. Tang, Dynamics of infection with nonlinear incidence in a simple vaccination model, *Nonlinear Anal. RWA* 11 (2010) 4154–4163.
- [13] M.E. Alexander, C. Bowman, S.M. Moghadas, R. Summers, A.B. Gumel, B.M. Sahai, A vaccination model for transmission dynamics of influenza, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 3 (2004) 503–524.
- [14] J. Arino, C.C. McCluskey, P. van den Driessche, Global results for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation, *SIAM J. Appl. Math.* 64 (2003) 260–276.
- [15] C.A. Donnelly, A.C. Ghani, G.M. Leung, A.J. Hedley, C. Fraser, et al., Epidemiological determinants of spread of causal agent of severe acute respiratory syndrome in Hong Kong, *Lancet*. 361 (2003) 1761–1766.
- [16] H.W. Hethcote, H.W. Stech, P. van den Driessche, Nonlinear oscillations in epidemic models, *SIAM J. Appl. Math.* 40 (1981) 1–9.
- [17] R. Xu, Global stability of a delayed epidemic model with latent period and vaccination strategy, *Appl. Math. Model.* 36 (2012) 5293–5300.
- [18] F. Hoppensteadt, An age-dependent epidemic model, *J. Franklin Inst.* 297 (1974) 325–338.
- [19] K. Diftz, D. Schenzle, Proportionate mixing models for age-dependent infection transmission, *J. Math. Biol.* 22 (1985) 117–120.
- [20] H.R. Thieme, C. Castillo-Chavez, How may infection-age-dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS? *SIAM J. Appl. Math.* 53 (1993) 1447–1479.
- [21] J. Li, Y. Zhou, Z. Ma, J.M. Hyman, Epidemiological models for mutating pathogens, *SIAM J. Appl. Math.* 65 (2004) 1–23.
- [22] P.W. Nelson, M.A. Gilchrist, D. Coombs, J.M. Hyman, A.S. Perelson, An age-structured model of HIV infection that allows for variations in the production rate of viral particles and the death rate of productively infected cells, *Math. Biosci. Eng.* 1 (2004) 267–288.
- [23] E. D’Agata, P. Magal, S. Ruan, G.F. Webb, Asymptotic behavior in nosocomial epidemic models with antibiotic resistance, *Differential Integral Equations* 19 (2006) 573–600.
- [24] P. Magal, C.C. McCluskey, G.F. Webb, Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model, *Appl. Anal.* 89 (2010) 1109–1140.
- [25] G. Huang, X. Liu, Y. Takeuchi, Lyapunov functions and global stability for age-structured HIV infection model, *SIAM J. Appl. Math.* 72 (2012) 25–38.
- [26] G. Rst, J. Wu, SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay, *Math. Biosci. Eng.* 5 (2008) 389–402.

- [27] R. Qesmt, S. Elsaadany, J.M. Heffernan, J. Wu, A hepatitis B and C virus model with age science infection that exhibits backwards bifurcation, *SIAM J. Appl. Math.* 71 (4) (2011) 1509–1530.
- [28] M. Iannelli, M. Martcheva, X.Z. Li, Strain replacement in an epidemic model with superinfection and perfect vaccination, *Math. Biosci.* 195 (1) (2005) 23–46.
- [29] X.Z. Li, J. Wang, M. Ghosh, Stability and bifurcation of an SIVS epidemic model with treatment and age of vaccination, *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 437–450.
- [30] C.C. McCluskey, Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay, *Math. Biosci. Eng.* 6 (2009) 603–610.
- [31] K. Hattaf, A.A. Lashari, Y. Louartassi, N. Yousfi, A delayed SIR epidemic model with general incidence rate, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 3 (2013) 1–9.
- [32] G.F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- [33] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-structured Population Dynamics*, in : *Applied Mathematics Monographs CNR*, vol. 7, Giadini Editorie Stampatori, Pisa, 1994.
- [34] H.R. Thieme, Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators, *Differential Integral Equations* 3 (1990) 1035–1066.
- [35] P. Magal, Compact attractors for time periodic age-structured population models, *Electron. J. Differential Equations* 2001 (65) (2001) 1–35.
- [36] E. D’Agata, P. Magal, S. Ruan, G.F. Webb, Asymptotic behavior in nosocomial epidemic models with antibiotic resistance, *Differential Integral Equations* 19 (2006) 573–600.
- [37] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, in : *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [38] J.K. Hale, P. Waltman, Persistence in infinite dimensional systems, *SIAM J. Math. Anal.* 20 (1989) 388–395.
- [39] P. Magal, X.Q. Zhao, Global attractor in uniformly persistence dynamical systems, *SIAM J. Math. Anal.* 37 (2005) 251–275.
- [40] H. Inaba, A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process, *Math. Popul. Stud.* 17 (1988) 47–77.
- [41] T.A. BUNTON. *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*. Academic Press, inc (1985).
- [42] H. Reinhard, *équation différentielles Fondement et applications*, 1982, BORDAS.

-
- [43] Françoise., J.-P. Oscillations en biologie. analyse qualitative et modèles. Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI. (2000).
- [44] MODÈLE ÉPIDÉMIOLOGIQUE AVEC L'ÂGE DE LA VACCINATION
- [45] Françoise., J.-P. Oscillations en biologie. analyse qualitative et modèles. Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI. (2000).
- [46] T.A.BUNTON. Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Academic Press, inc (1985). LaSalle, J. Stability of nonautonomous systems. Nonlinear Anal, Theory, Methods Appl(1976).
- [47] [22] LaSalle, J. P. The stability of dynamical systems, society for industrial and applied mathematics, philadelphia, pa.,. Regional Conference Series in Applied Mathematics. (1976).
- [48] Guckenheimer, J., and Holmes., P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector elds. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [49] Wiggins., S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos,. Springer-Verlag, NewYork, second edition, (2003).
- [50] Chow, S. N., and Hale, J. K. Methods of bifurcation theory,. Springer-Verlag, New York, (1982).
- [51] DIEUDONNE., J. Eléments d'analyse. tome i. fondements de l'analyse moderne . 3 éme edition. Paris Gauthier-Villars (1979.).